CAPITULO 3: HIDROCINEMATICA

En un punto de la masa líquida en movimiento existen por definir cantidades escalares y cantidades vectoriales. Ejemplos de las primeras son presión, densidad, temperatura; ejemplos de las segundas son velocidad, aceleración, fuerza. Mientras que una cantidad escalar queda definida por su magnitud, para que una cantidad vectorial quede definida se requiere conocer además de su magnitud, la dirección y el sentido.

Las características físicas en el seno líquido, tanto escalares como vectoriales, pueden variar de un punto a otro del líquido y en un mismo punto de un instante a otro. Esto se expresa diciendo que tanto las cantidades escalares como las vectoriales son funciones de punto y de tiempo.

Se dice también que la región ocupada por el líquido en movimiento determina un campo de flujo, dentro del cual es posible distinguir campos escalares y campos vectoriales.

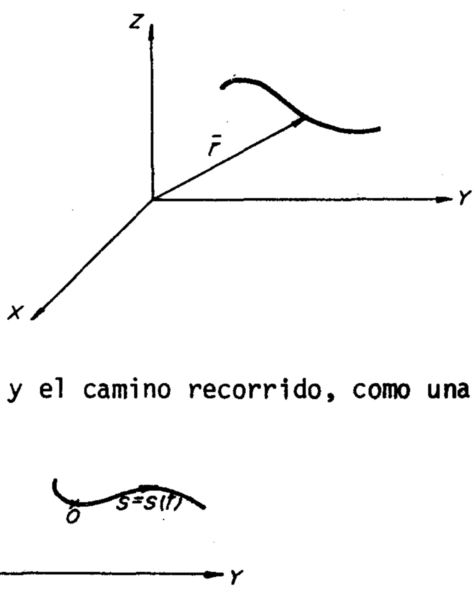
La cinemática de los líquidos estudia el movimiento puro de las partículas, sin considerar la masa ni las fuerzas que lo producen. La descripción del movimiento se hace utilizando únicamente la velocidad, la aceleración y la rotación.

3.1 El campo de velocidades

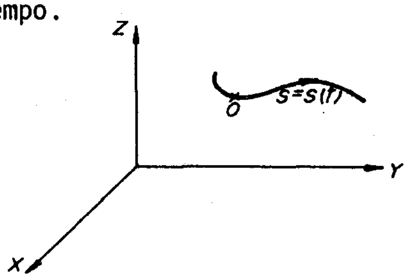
Una partícula del líquido recorre una línea usualmente curva que se llama trayectoria. El estudio del movimiento de la partícula puede hacerse:

* utilizando el vector posición $\bar{r}$, como una función vectorial del tiempo.

$$\bar{r} = \bar{r}\ (t)$$
$$\bar{r} = X\ \bar{i} + Y\ \bar{j} + Z\ \bar{k}$$
$$X = x\ (t)$$
$$Y = y\ (t)$$
$$Z = z\ (t)$$

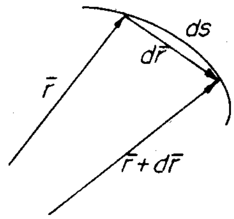


* utilizando la trayectoria y el camino recorrido, como una función escalar del tiempo.



El vector velocidad de la partícula ($\bar{v}$) se define como la rapidez de cambio de su posición:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} \quad .... \quad (1)$$



$\bar{v}$ resulta ser un vector tangente a la trayectoria en cada punto, que depende de la posición de la partícula y del tiempo:

$$\bar{v} = \bar{v}\ (\bar{r},\ t)$$

$$\bar{v} = v_x\ \bar{i} + v_y\ \bar{j} + v_z\ \bar{k}$$

$$v_x = v_x\ (x,\ y,\ z,\ t) = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = v_y\ (x,\ y,\ z,\ t) = \frac{dy}{dt}$$

$$v_z = v_z\ (x,\ y,\ z,\ t) = \frac{dz}{dt}$$

Se cumple:

$$|d\bar{r}| = |\frac{d\bar{r}}{dt}|\ dt = ds$$

de modo que:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2} + v_z^{\ 2}} = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2}$$

Si $\bar{s}$ es un vector unitario tangente en cada punto a la trayectoria se cumple:

$$d\bar{s} = ds\ .\ \bar{s}$$

es decir, $$\bar{v} = v\,\bar{s} = \frac{ds}{dt}\,\bar{s} = \frac{d\bar{s}}{dt} \quad .... \quad (2)$$

3.2 El campo de aceleraciones

Es un campo que se deriva del campo de velocidades. El vector aceleración de la partícula en un punto ($\bar{a}$) se define como la rapidez de cambio de su velocidad en ese punto:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\ \bar{r}}{dt^2} \quad .... \quad (3)$$

Sus componentes son:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} \quad ... \ (4)$$

Desarrollando estas derivadas se aprecia que las componentes de la aceleración son funciones de punto y de tiempo.

<u>La aceleración en coordenadas intrínsecas</u>.- En la práctica se dan situa-

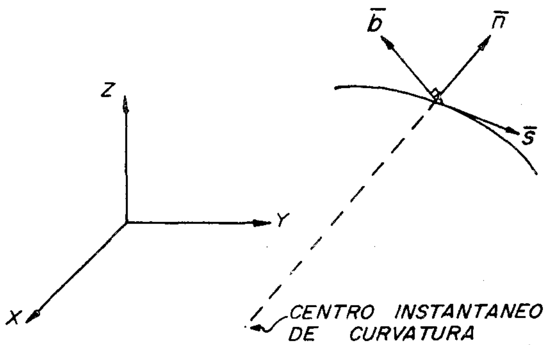
ciones en las que el movimiento se supone unidimensional. El estudio del flujo unidimensional se simplifica bastante con el empleo de un sistema de coordenadas con su origen en cada punto de la trayectoria; se denomina sistema intrínseco de coordenadas y cualquier vector puede expresarse según sus componentes en este sistema.

En cada punto de la trayectoria es posible distinguir tres vectores unitarios $\bar{s}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ tales que:

$\bar{s}$ ... tangente a la curva (vector tangencial)

$\bar{n}$ ... normal a la tangente y colineal con el radio de curvatura, saliendo de la curva (vector normal)

$\bar{b}$ ... perpendicular al plano $\bar{s}$, $\bar{n}$ (vector binormal)



Los nombres de los planos respectivos son:

$\bar{s}$, $\bar{n}$ ... plano osculador
$\bar{n}$, $\bar{b}$ ... plano normal
$\bar{b}$, $\bar{s}$ ... plano rectificador

En este sistema:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\bar{s}) = \frac{dv}{dt}\bar{s} + v\frac{d\bar{s}}{dt}$$

$$= \frac{dv}{dt}\bar{s} + v\left(\frac{d\bar{s}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}\right)$$

$$= \frac{dv}{dt}\bar{s} + v^2\frac{d\bar{s}}{ds} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

prestemos atención al término $\frac{d\bar{s}}{ds}$.

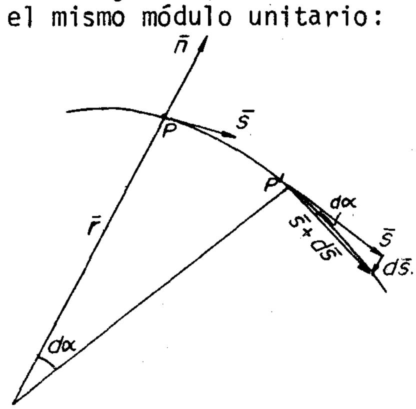
Puesto que P y P' son dos puntos muy próximos entre sí:
$d\bar{s}$ tiene la dirección de n y sentido negativo;
$\bar{s}$ y s + $d\bar{s}$ tienen prácticamente el mismo módulo unitario:

$$|d\bar{s}| = d\alpha$$

también $ds = r\, d\alpha$

dividiendo $\frac{|d\bar{s}|}{ds} = \frac{1}{r}$

$$\left|\frac{d\bar{s}}{ds}\right| = \frac{1}{r}$$



reemplazando en (5):

$$\bar{a} = \bar{a}_s + \bar{a}_n$$

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt}\bar{s} - \frac{v^2}{r}\bar{n} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

lo que quiere decir que el vector aceleración se encuentra contenido en el plano osculador. Averigüemos las componentes:

$$a_s = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial s} v + \frac{\partial v}{\partial t} \quad \ldots (6')$$

el primer término representa aceleración convectiva, el segundo aceleración local.

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial v}{\partial t}$$

es decir:

$$\bar{a}_s = \left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial v}{\partial t} \quad \bar{s}\right] \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

$$\bar{a}_n = -\frac{v^2}{r}\bar{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

3.3 El campo rotacional

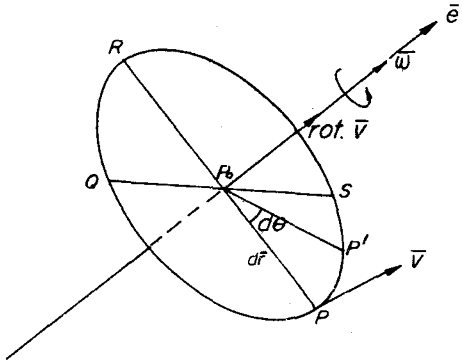
Además de los campos de velocidades y aceleraciones, existe en el seno líquido otro campo llamado campo rotacional que se deriva de las velocidades. Se llama rotor de $\bar{v}$ o rotacional de $\bar{v}$ al vector:

$$\text{rot } \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$\text{rot } \bar{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\bar{i} - \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\bar{k} \quad \ldots \quad (9)$$

que también es función de punto y de tiempo.

<u>Significado físico del vector rot $\bar{v}$</u>.- Como en el cuerpo rígido, además de la traslación una partícula puede experimentar una rotación. Sea P_o el centro de gravedad de la partícula y $\bar{e}$ el eje instantáneo correspondiente.



En un plano perpendicular a $\overline{e}$ considerar dos líneas ortogonales que servirán para estudiar la rotación pura de la partícula.

El punto P se halla muy próximo al punto P_o; la velocidad $\overline{v}$ es tangente a la trayectoria circular de radio dr y corresponde a la traslación pura del punto P.

Al producirse la rotación la velocidad angular vale:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Por comodidad se puede tomar el eje e como eje z y el plano en que se mueve P como plano XY. Entonces el vector velocidad angular es:

$$\overline{\omega} = \omega \overline{K}$$

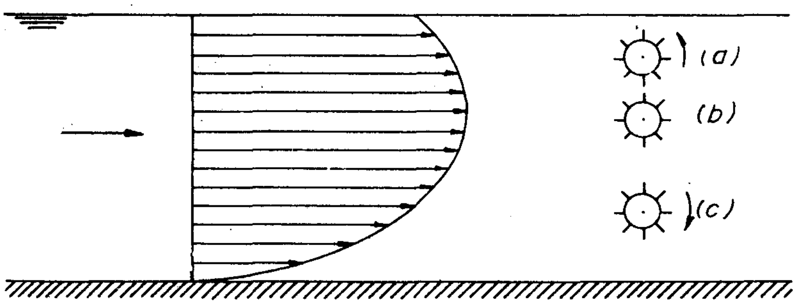
La velocidad $\overline{v}$ puede definirse como $\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{dr}$;
el vector $\overline{dr}$ tiene la forma $\overline{dr} = dx\,\overline{i} + dy\,\overline{j}$;
entonces:

$$\overline{\omega} \times \overline{dr} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ o & o & \omega \\ dx & dy & o \end{vmatrix} = -\,\omega\, dy\,\overline{i} + \omega\, dx\,\overline{j}$$

$$\text{rot}\,\overline{v} = \text{rot}\,\overline{\omega} \times \overline{dr} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega dy & \omega dx & o \end{vmatrix} = 2\,\omega\,\overline{k} = 2\,\overline{\omega} \qquad \ldots (10)$$

lo cual significa que el rotor de la velocidad en un movimiento de rotación alrededor de un eje es igual al doble del vector velocidad angular.

La figura muestra de manera aproximada la forma en que varía la velocidad del agua en un canal:



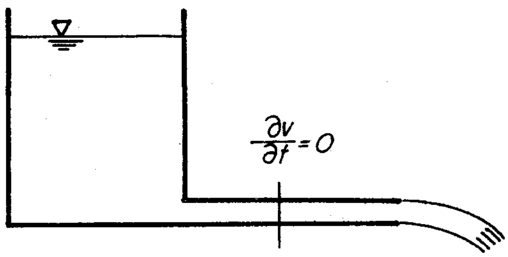
Si se coloca una ruedecita que puede girar libremente en su plano, alrededor de su eje, se observará que:

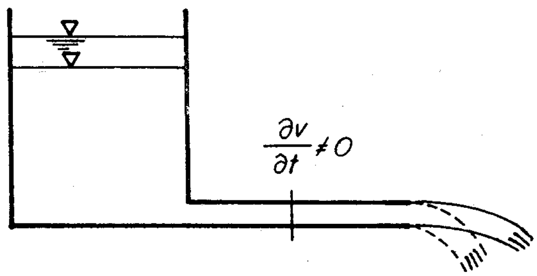
* en la zona (a) gira en sentido antihorario, indicando con ello que rot $\overline{v} \neq 0$ (vector normal al papel, saliendo).
* en la zona (b) casi no se mueve (rot $\overline{v} \simeq 0$).
* en la zona (c) gira en sentido horario, indicando con ello que rot $\overline{v} \neq 0$ (vector normal al papel, penetrando).

3.4 Clasificación de los flujos

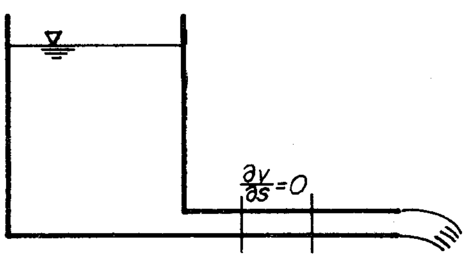
En la práctica se presentan diversos tipos de flujo. En vista de que el interés se centra en las conducciones por tubería y por canal, las descripciones que siguen se ilustran con esquemas de estas conducciones.

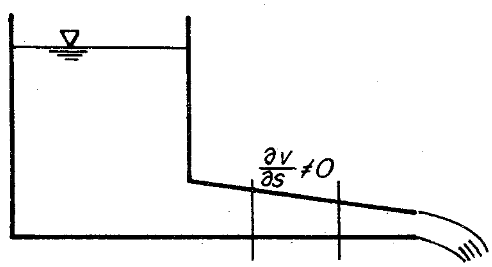
Flujo permanente y no permanente.- En el primero, en una sección de la conducción permanecen constantes en el tiempo las variables hidráulicas del flujo (velocidad, presión, densidad, etc). En el segundo los valores de estas variables cambian de un instante a otro.





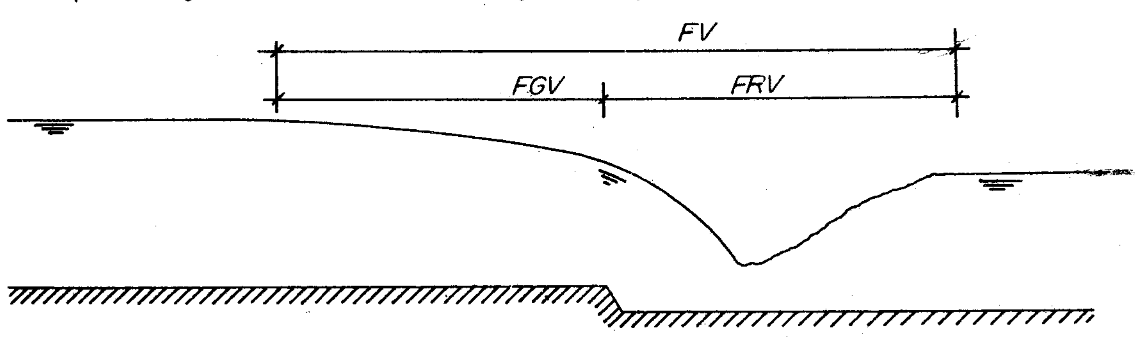
Flujo uniforme y no uniforme.- Considérese un flujo permanente en dos situaciones distintas: una con tubería de diámetro constante y la otra con tubería de diámetro decreciente.



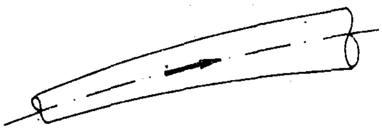


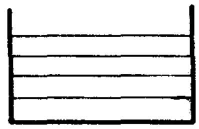
En el flujo uniforme permanecen constantes a lo largo de la conducción las variables hidráulicas del flujo (velocidad, presión, densidad, etc). En el flujo no uniforme los valores de estas variables cambian de un punto a otro de la conducción; se le denomina también flujo variado.

Flujo gradualmente variado y rápidamente variado.- El esquema corresponde a un canal que tiene una grada en el fondo, y es de por sí explicativo. El flujo variado (FV) puede serlo gradualmente (FGV) o brúscamente (FRV). A la izquierda y a la derecha del flujo variado se desarrolla flujo uniforme.

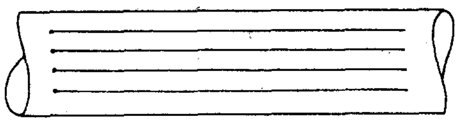


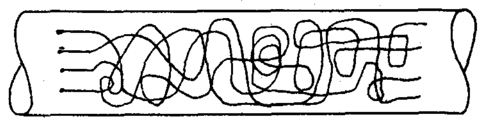
Flujo unidimensional y bidimensional.- Estrictamente hablando el flujo es siempre tridimensional. Sin embargo cuando en el flujo prevalece una dirección es considerado unidimensional, como ocurre con las tuberías y los canales. En el caso de los canales hay circunstancias en las cuales no se puede prescindir de una segunda dimensión para describir el flujo, debiendo hacerse el estudio del flujo plano o bidimensional.





Flujo laminar y turbulento.- Considérese una tubería de vidrio por la que se hace pasar agua en movimiento permanente, uniforme y unidimensional. Si se inyecta un colorante se apreciará que, si la velocidad del escurrimiento es muy baja, el colorante sigue unas trayectorias ordenadas, rectilíneas y paralelas, características del flujo laminar. Si la velocidad del agua, en cambio, tiene los valores ordinarios, se observará que el colorante se mezcla por efecto de las trayectorias desordenadas y erráticas, características del flujo turbulento.





En la práctica, para las velocidades ordinarias, el flujo del agua es turbulento en tuberías y canales y laminar en el subsuelo.

Existe un parámetro que es función de la viscosidad del líquido y cuyo valor permite discernir sobre si el flujo es laminar o turbulento. Se llama número de reynolds (R_e):

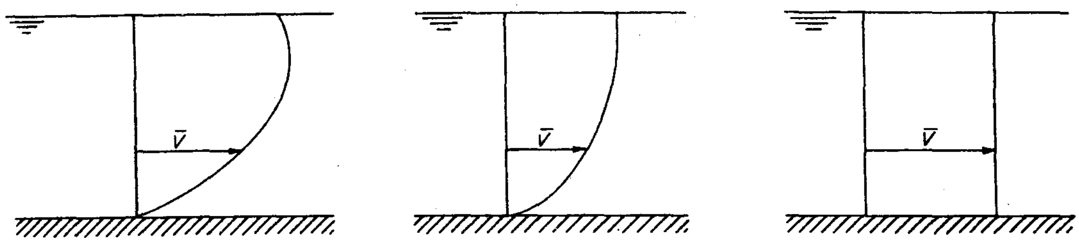
$$R_e = \frac{V\,L}{\nu}$$

V ... velocidad media del escurrimiento
ν ... viscosidad cinemática
L ... una longitud característica que en tuberías es generalmente el diámetro.

Para valores de R_e de hasta 2,300 se verifica que el flujo es laminar y para valores mayores que 4,000 se verifica que es turbulento. Valores intermedios corresponden al período de transición. Nótese que el R_e es adimensional.

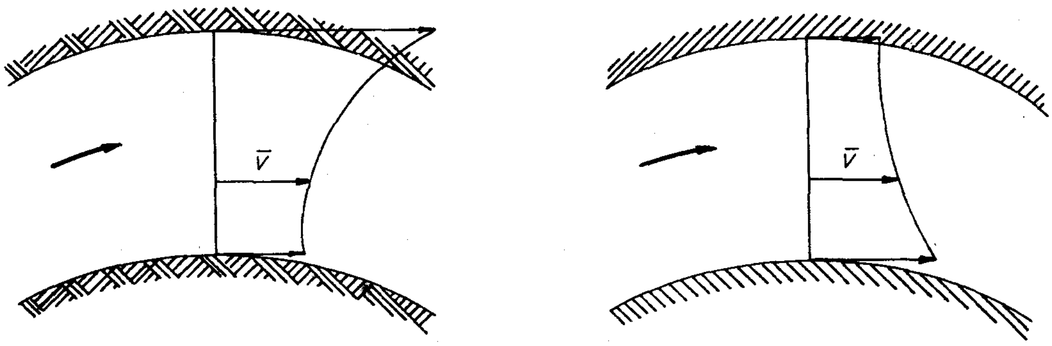
Flujo compresible e incompresible.- Lo ordinario es que el agua se considere incompresible y el aire compresible. Sólo en aquellas situaciones en que el agua resulta sometida a grandes presiones (como en el fenómeno del golpe de ariete) es necesario tratarla como compresible. De manera análoga, cuando el aire soporta presiones muy pequeñas durante su conducción (como en los ductos de ventilación) puede ser considerado incompresible.

Flujo rotacional e irrotacional.- Un flujo es rotacional si en su seno el campo de vectores rot $\bar{v}$ adquiere valores distintos de cero, y es irrotacional si en todo punto y en todo instante rot $\bar{v}$ = 0. En la práctica, para las velocidades ordinarias el movimiento del agua es rotacional; para velocidades altas puede ser considerado irrotacional y para la hipótesis de líquido perfecto (sin viscosidad) el movimiento es de hecho irrotacional. El esquema muestra el diagrama de velocidades en un canal, para cada situación.



velocidad ordinaria velocidad alta líquido perfecto

La misma idea pero graficada para un canal en curva, visto en planta:



flujo rotacional (esquema real) flujo irrotacional (esquema ideal)

3.5 Descripción del movimiento

El movimiento de un fluido queda descrito cuando se está en condiciones de conocer:

* el cambio de posición de una partícula
* la variación de la velocidad en un punto.

Hay dos formas clásicas de describir el movimiento de un fluido.

Método de Euler.- Consiste en elegir un punto y determinar las variables cinemáticas en ese punto, en cada instante, sin considerar el camimo que después siga cada partícula individual. Se usa:

$$\bar{v} = \bar{v}\,(\bar{r},\ t)$$

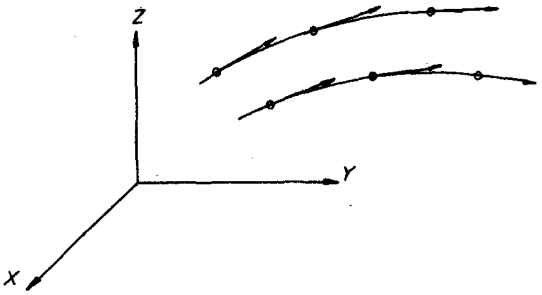
Método de Lagrange.- Consiste en elegir una partícula y determinar las variables cinemáticas de esa partícula siguiendo su recorrido. Se usa:

$$\bar{r} = \bar{r}\,(r_0,\ t)$$

De los dos métodos se prefiere el primero porque su manejo analítico es más simple. Es el que normalmente se emplea en los libros de mecánica de fluidos.

3.6 Línea de corriente. Trayectoria. Tubo de flujo

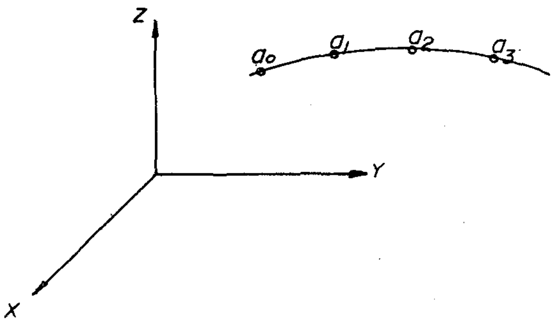
En el flujo no permanente las variables cinemáticas varían en un mismo punto de un instante a otro. Supongamos que en un instante se conoce el campo de velocidades $\overline{v}$. Se define línea de corriente toda línea trazada idealmente en el seno líquido de modo que la tangente en cada uno de sus puntos proporcione la dirección del vector velocidad correspondiente. No existe posibilidad de que dos líneas de corriente tengan un punto común.



líneas de corriente para el instante t.

Si el flujo es no permanente para otro instante t, la configuración de las l.c. es otra. Si el flujo es permanente la configuración de las l.c. es la misma en cualquier momento.

Se define trayectoria la curva que marca el camino que sigue una partícula con el transcurrir del tiempo.

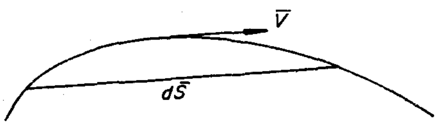


trayectoria para la partícula "a".

Si el flujo es no permanente l.c. y trayectoria son líneas distintas, pero si el flujo es permanente significan lo mismo.
La razón está en que en el flujo permanente el campo de velocidades no cambia con el tiempo:

* toda partícula que pasa por a_0 sigue la misma trayectoria.
* en cada punto a_0, a_1,..., a_n el vector velocidad permanece igual.

Ecuaciones de la línea de corriente



de la definición de l.c.:

$$\overline{v} = \frac{d\overline{s}}{dt}$$

$$d\overline{s} = \overline{v}\ dt$$

ecuación diferencial de la T.c.

En términos de las componentes:

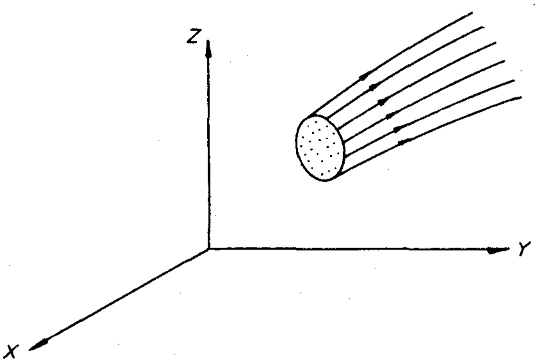
$$dx = v_x\ dt$$
$$dy = v_y\ dt$$

$$dz = v_z \, dt$$

o bien, para un instante t_0 :

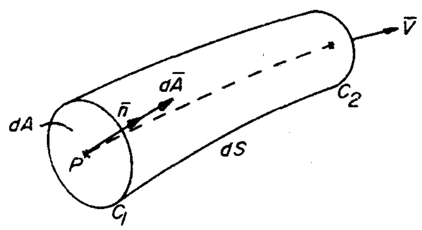
$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \qquad \ldots\ldots \qquad (11)$$

Tubo de flujo.- Si se considera en el seno líquido una curva cerrada y las l.c. que pasan por cada uno de sus puntos, la totalidad de estas l.c. definen una superficie que se denomina tubo de flujo o tubo de corriente, y que no puede ser atravesada por el fluido. El volumen encerrado se conoce como vena líquida.



3.7 Caudal o gasto

Considérese el tubo de flujo elemental, definido en las curvas cerradas C_1, C_2 muy próximas entre sí.



En el punto P se pueden considerar dos vectores: $d\bar{A} = dA \,.\, n$ y $\bar{v}$. El vector $\bar{n}$ es un vector unitario normal a la superficie dA y cuyo sentido positivo se establece por convenio (ahora no interesa).

En un intervalo dt el volumen de líquido que atraviesa el elemento de superficie es igual al producto escalar:

$$dV_0 = d\bar{s} \cdot d\bar{A}$$

pero

$$d\bar{s} = \bar{v} \, dt$$

$$dV_0 = \bar{v} \,.\, d\bar{A} \, dt$$

se define caudal o gasto a la relación:

$$dQ = \frac{dV_0}{dt} = \bar{v} \,.\, d\bar{A}$$

Si dA es un elemento de una superficie finita A, entonces:

$$Q = \int dQ = \int_A \bar{v} \,.\, d\bar{A} \qquad \ldots \qquad (12)$$

Y si, como es costumbre, se escoge la superficie A de modo que las l.c. sean normàles a ella:

$$Q = \int_A v\, dA \quad \ldots\ldots \quad (13')$$

Se llama velocidad media del flujo a través de la superficie A al cociente:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\int v \,.\, dA}{A} \quad \ldots \quad (14)$$

o, como es costumbre:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\int v\, dA}{A} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

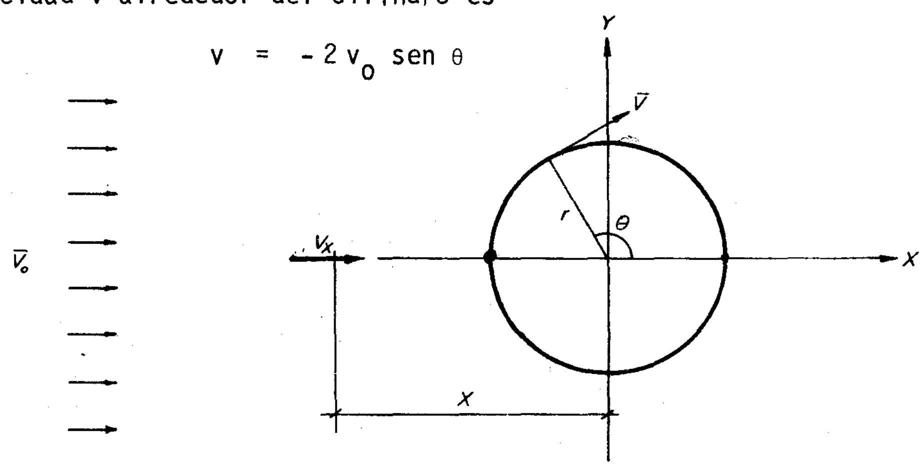
3.8 Ejemplos de aplicación

Ejemplo 31.- El viento sopla horizontalmente con velocidad uniforme v_o = 1.8 m/sg contra una chimenea vertical de radio r = 0.25 m. Supuesto el flujo irrotacional, la velocidad sobre el eje X va disminuyendo hacia el punto de estancamiento según la ley

$$v_x = v_o \left(1 - \frac{r^2}{x^2}\right)$$

y la velocidad v alrededor del cilindro es

$$v = -2\, v_o \text{ sen } \theta$$



Averiguar:
a) la aceleración del aire en el punto X = -0.50 m
b) las componentes tangencial y normal de la aceleración para $\theta = \frac{3}{4}\pi$

Según (4):

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

al primer sumando, entre paréntesis, se le conoce como aceleración convectivà y al segundo como aceleración local.

en este caso: $a_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$

$$v_x = v_o - v_o \cdot r^2\, x^{-2}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 2\ v_o\ r^2\ x^{-3}$$

$$a_x = (v_o - v_o\ r^2\ x^{-2})(2\ v_o\ r^2\ x^{-3})$$

$$= 2\ v_o^{\ 2}\ r^2\ x^{-3} - 2\ v_o\ r^4\ x^{-5}$$

$$= 2\ v_o^{\ 2}\ (\frac{r^2}{x^3} - \frac{r^4}{x^5})$$

reemplazando: $a_x = -\ 2.43\ m/sg^2$

Según (7) y (8):

$$a_s = \left[\frac{\partial}{\partial s}\ (\frac{v^2}{2}) + \frac{\partial v}{\partial t}\right]\ \bar{s}$$

$$a_n = -\ \frac{v^2}{r}$$

En el caso presente:

$$a_s = \frac{1}{2}\ \frac{\partial v^2}{\partial s} = \frac{1}{2}\ \frac{\partial}{\partial s}\ (-\ 2\ v_o\ \text{sen}\ \theta)^2$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{\partial}{\partial s}\ (4\ v_o^{\ 2}\ \text{sen}^2\ \theta) = \frac{1}{2}\ (4\ v_o^{\ 2}\ .\ 2\ \text{sen}\ \theta\ \cos\ \theta\ \frac{\partial \theta}{\partial s})$$

$$= 4\ v_o^{\ 2}\ \text{sen}\ \theta\ \cos\ \theta\ \frac{\partial \theta}{\partial s}$$

pero $ds = r\ d\theta$

es decir, $\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{1}{r}$ ro

$$a_s = 4\ v_o^{\ 2}\ \text{sen}\ \theta\ \cos\ \theta\ \frac{1}{r} = \frac{4\ v_o^{\ 2}}{r}\ \text{sen}\ \theta\ \cos\ \theta$$

reemplazando: $a_s = -\ 25.92\ m/sg^2$

$$a_n = -\ \frac{4\ v_o^{\ 2}\ \text{sen}^2\ \theta}{r}$$

reemplazando: $a_n = 25.92\ m/sg^2$

Ejemplo 32.- Encontrar el vector rotacional para el flujo permanente, plano, cuyo campo de velocidades es:

$$v_x = A\ (x + y)$$
$$v_y = -\ A\ (x + y)$$

Según (9):

$$\operatorname{rot}\overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & o \end{vmatrix} = o\,\overline{i} + o\,\overline{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\overline{k}$$

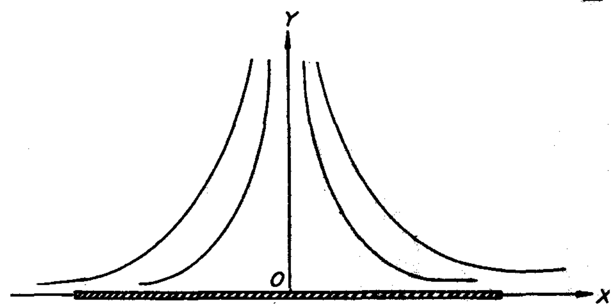
$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = -A$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = A$$

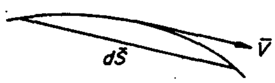
reemplazando: $\operatorname{rot}\overline{v} = -2A\,\overline{k}$

Ejemplo 33.- Determinar la ecuación de las l.c. de un flujo permanente, plano, simétrico respecto del eje Y, dirigido hacia abajo, que choca contra una placa horizontal, cuyo campo de velocidades está definido por las componentes:

$$v_x = 3x$$
$$v_y = -3y$$



Por definición:



$$\overline{v} = \frac{d\overline{s}}{dt} \quad \ldots \quad d\overline{s} = \overline{v}\,dt$$

$$\begin{cases} dx = v_x\,dt \\ dy = v_y\,dt \end{cases}$$

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$ ... ecuación diferencial de las l.c. igual que (11).

$$\frac{dx}{3x} = \frac{dy}{-3y}$$

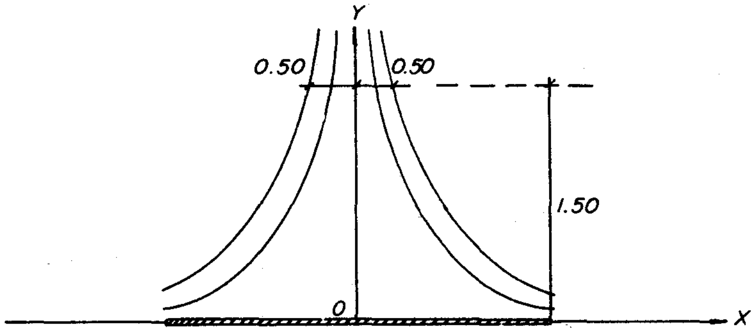
$$\frac{1}{3}\frac{dx}{x} = -\frac{1}{3}\frac{dy}{y}$$

$$\ln x = -\ln y + C$$

$$\ln x + \ln y = C_1$$

$xy = C_2$, ecuación de las l.c. que corresponde a una familia de hipérbolas asintóticas a los ejes X, Y.

Ejemplo 34.- En el problema del ejemplo 33 determinar el gasto por unidad de ancho del chorro que incide sobre la placa y limitado en la forma que a continuación se indica:



El vector velocidad es: $\overline{v} = 3\,x\,\overline{i} - 3\,y\,\overline{j}$
y el vector diferencial de área: $d\overline{A} = (-\,dX)\,.\,1\,.\,\overline{j}$

$$Q = \int \overline{v}\,.\,d\overline{A} \qquad .... \qquad (12)$$

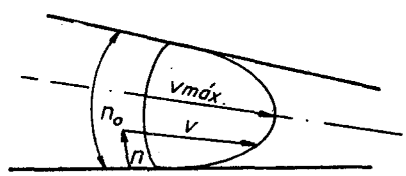
pero $\quad \overline{v}\,.\,d\overline{A} = 3y\,dx$

$$Q = \int_{-0.50}^{0.50} 3y\,dx = 3y \;\; x\,\Big|_{-0.50}^{0.50} = 3y$$

reemplazando: $\quad Q = 4.5\ m^3/seg$ por metro de ancho perpendicular al papel.

<u>Ejemplo 35</u>.- Si la velocidad del aceite que fluye entre dos placas convergentes varía en una sección normal según la ecuación:

$$v = v_{máx}\,\frac{4\,n}{n_o^2}\,(n_o - n)$$



y si $\quad v_{máx} = 15$ cm/sg

$\quad n_o = 2$ cm

determinar:

a) el caudal, si el contorno tiene un ancho constante de 23 cm.
b) la velocidad media.

a) Según (13):

$$Q = \int_A v\,dA = b\int_0^{n_o} v\,dn$$

$$Q = b\,.\,4\,\frac{v_{máx}}{n_o^2}\int_0^{n_o} n\,(n_o - n)\,dn = \frac{3}{2}\,v_{máx}\,.\,n_o$$

reemplazando: $\quad Q = 460\ cm^3/sg.$

b) Según (15):

$$V = \frac{Q}{A}$$

$$V = \frac{460}{23 \times 2} = 10\ cm/sg.$$