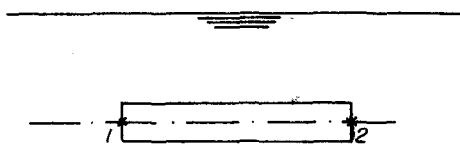


CAPITULO 2: HIDROSTATICA

El estudio de los líquidos en reposo es relativamente sencillo. No interviene la viscosidad, por cuanto esta es una propiedad que la ejercitan los fluidos cuando son obligados a moverse.

2.1 Variación de la presión

- a) A lo largo de una línea horizontal. Se usa como cuerpo libre un cilindro de sección ΔA cuyo eje coincide con la línea horizontal:



$$\Sigma F_x = 0$$

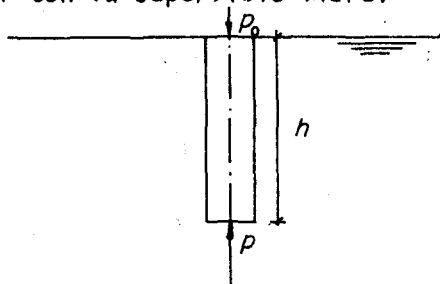
$$p_1 \cdot \Delta A - p_2 \cdot \Delta A = 0$$

$$p_1 \cdot \Delta A = p_2 \cdot \Delta A$$

$$p_1 = p_2$$

es decir, "en todos los puntos de un plano horizontal la presión es la misma".

- b) A lo largo de una línea vertical. Se usa como cuerpo libre un cilindro de sección ΔA cuyo eje coincide con la línea vertical y su cara superior con la superficie libre.



$$\Sigma F_y = 0$$

$$p_0 \cdot \Delta A + \Delta W = p \cdot \Delta A$$

$$p_0 \cdot \Delta A + \gamma \cdot \Delta A h = p \cdot \Delta A$$

$$p = p_0 + \gamma h$$

si p_0 es la presión atmosférica: $p = p_a + \gamma h$, es la presión absoluta a la profundidad h .

Si sólo se requiere la presión en exceso de la atmosférica: $p = \gamma h$, es la presión relativa a la profundidad h .

2.2 Presión atmosférica local

Se define presión atmosférica estándar a la presión atmosférica al nivel del mar bajo las condiciones estándar. Su valor es $p_0 = 1.033 \text{ kg/cm}^2$.

La presión atmosférica local (p_a) a una altura genérica (h) sobre el nivel del mar se puede evaluar con la fórmula:

$$p = 10,330 e^{-0.00012 h} \dots \text{ (ejemplo 15)}$$

en la que si h está en metros p resulta en kg/m^2 .

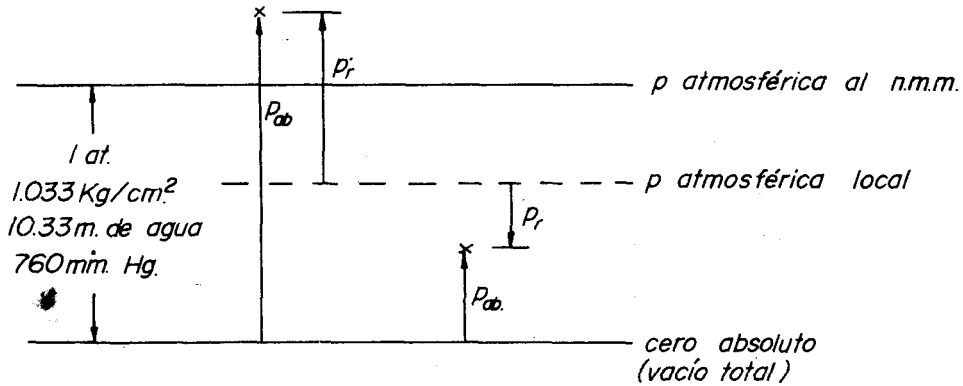
Altura de presión.- Se define altura de presión a la altura de la columna

líquida equivalente, es decir:

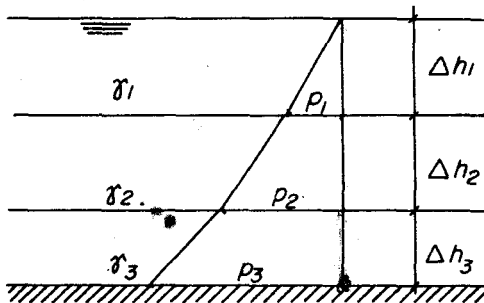
$$h = \frac{p}{\gamma}$$

Al valor de la presión atmosférica estándar ($10,330 \text{ kg/m}^2$) se llama también "una atmósfera" y es equivalente a una columna de agua de 10.33 m y a una columna de mercurio (g.e. = 13.6) de 760 mm.

La figura que sigue compendia los diferentes aspectos relacionados con la presión.



Líquidos no homogéneos.- En los líquidos no homogéneos (γ variable) el método práctico para evaluar la presión a cualquier profundidad consiste en dividir el líquido en capas de γ constante.

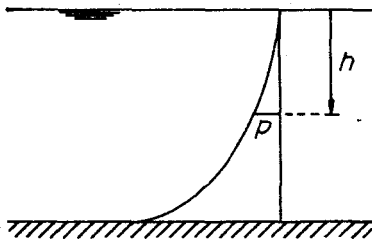


$$p_1 = \gamma_1 \cdot \Delta h_1$$

$$p_2 - p_1 = \gamma_2 \cdot \Delta h_2$$

$$p_3 - p_2 = \gamma_3 \cdot \Delta h_3$$

El método analítico consiste en escribir: $dp = \gamma \cdot dh$



para valores positivos de h medidos hacia abajo, y reemplazar γ por su ley de variación para proceder a integrar:

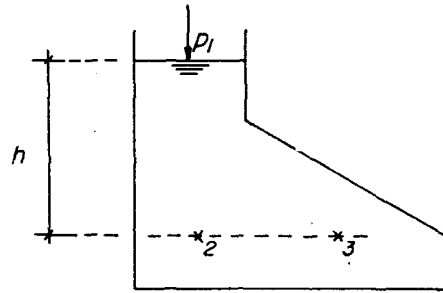
2.3 Transmisión de presiones

En el recipiente de la figura se puede escribir:

$$p_2 = p_3$$

$$p_2 = p_1 + \gamma h$$

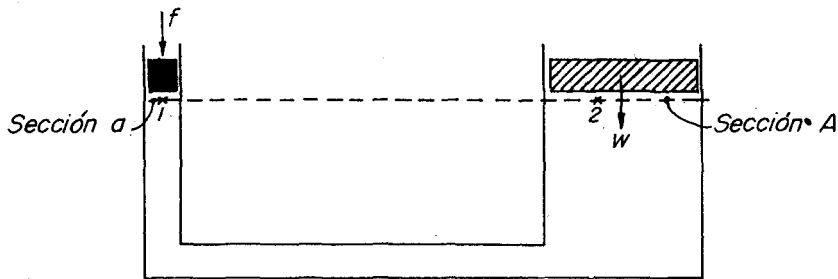
$$\therefore p_3 = p_1 + \gamma h$$



lo cual se enuncia diciendo que "la presión p_1 aplicada en la superficie libre del líquido se transmite íntegramente en todas las direcciones".

Esta propiedad de los líquidos en reposo tiene en la práctica múltiples aplicaciones como la prensa hidráulica y los sistemas de transmisión hidráulica en general.

La prensa hidráulica es una máquina sencilla que permite elevar grandes pesos W aplicando pequeñas fuerzas f .



$$p_1 = p_2$$

$$\frac{f}{a} = \frac{W}{A}$$

$$f = \frac{a}{A} \cdot W$$

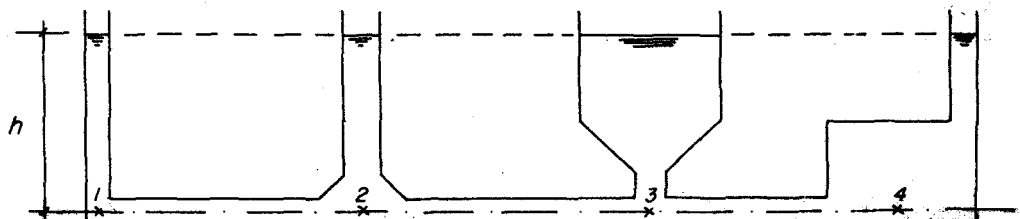
Esta propiedad de los líquidos de transmitir presiones proporciona una explicación:

- 1º) a la paradoja hidrostática de que la fuerza de presión ejercida en el fondo de los recipientes (F) es independiente del volumen líquido y es la misma si todos los recipientes tienen la misma área de fondo (A)



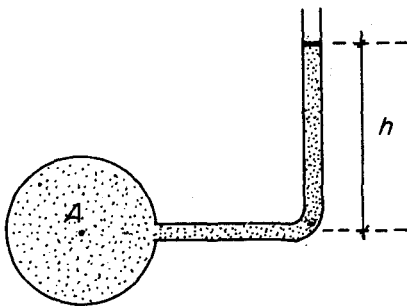
$$F = p \cdot A = \gamma h \cdot A$$

- 2º) al principio de los vasos comunicantes, según el cual el líquido alcanza el mismo nivel en todos los recipientes independientemente de la forma o el volumen.



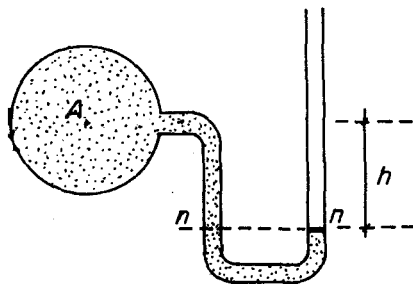
2.4 Dispositivos para medir presiones estáticas

Piezómetros.- Son tubos simples que se conectan a un depósito o a una tubería. Hay dos tipos.



Se usa cuando la presión en A es positiva y de pequeño valor, porque si no se necesitaría un tubo demasiado largo.

$$p_A = \gamma h$$



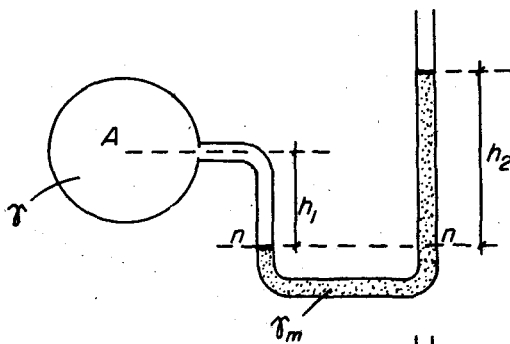
También permite medir presiones negativas de pequeño valor.

Igualando presiones en el nivel n-n :

$$p_A + \gamma h = 0$$

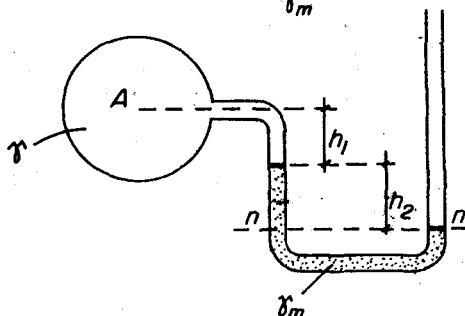
$$p_A = -\gamma h$$

Manómetros.- Son tubos en forma de U que contienen un líquido propio, generalmente mercurio, llamado líquido manométrico (γ_m). Sirven para medir presiones positivas y negativas.



$$p_A + \gamma h_1 = \gamma_m h_2$$

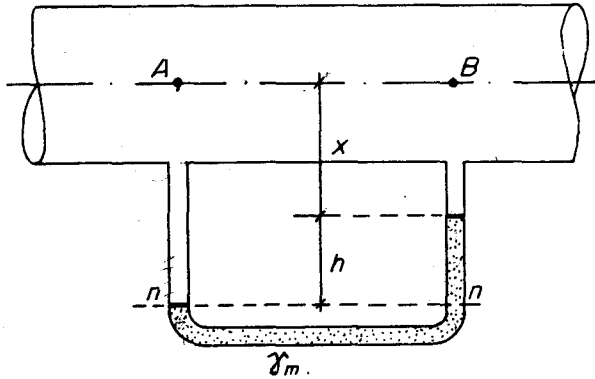
$$p_A = \gamma_m h_2 - \gamma h_1$$



$$p_A + \gamma h_1 + \gamma_m h_2 = 0$$

$$p_A = -\gamma_m h_2 - \gamma h_1$$

Manómetro diferencial.- Es un tubo en forma de U que sirve para averiguar la diferencia de presiones entre dos puntos.



$$p_A + \gamma x + \gamma h = p_B + \gamma x + \gamma_m h$$

$$p_A - p_B = (\gamma_m - \gamma) h$$

esta diferencia de presiones se puede también expresar en altura de líquido de la tubería:

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right) h$$

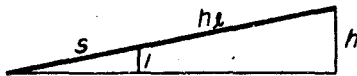
Manómetro diferencial inclinado.- Se usa cuando la diferencia de presiones que se va a medir es pequeña. Con este manómetro se consigue mejor precisión en la obtención de la diferencia de presiones.

El valor h de las fórmulas anteriores se refiere a una longitud vertical. Habrá que reemplazarla ahora por una longitud inclinada h_l .

Si la inclinación del tubo es 1:s se puede plantear la siguiente relación por semejanza de triángulos:

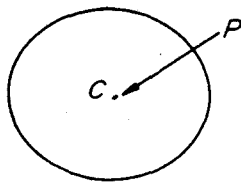
$$\frac{h_l}{h} = \frac{s}{1}$$

$$h = \frac{h_l}{s}$$



2.5 Fuerzas sobre superficies planas

La fuerza de presión sobre una superficie recibe el nombre de empuje hidrostático o simplemente empuje (P).



El empuje P es la resultante de un conjunto de fuerzas paralelas elementales p.dA. Para que el empuje quede completamente definido, es necesario conocer su magnitud, dirección, sentido y punto de aplicación.

a) **Superficies planas horizontales.**- En todos los puntos de la superficie plana la presión es la misma e igual a γh .

magnitud : $P = \int p \cdot dA = p \int dA = pA$

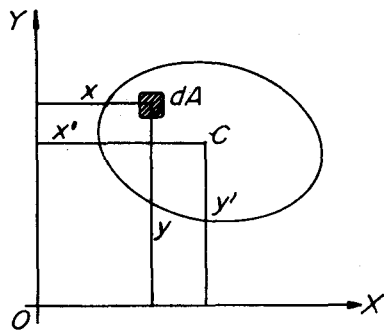
dirección : P es perpendicular a la superficie plana

sentido : P está dirigido hacia la superficie plana

punto de aplicación : el punto C llamado centro de presiones.

Considérese que la superficie horizontal está contenida en el plano XY.

Como P es resultante de un conjunto de fuerzas paralelas se verifica que "el momento de la resultante es igual a la suma de los momentos de las componentes".



$$P \cdot X' = \int_A p \, dA \cdot X$$

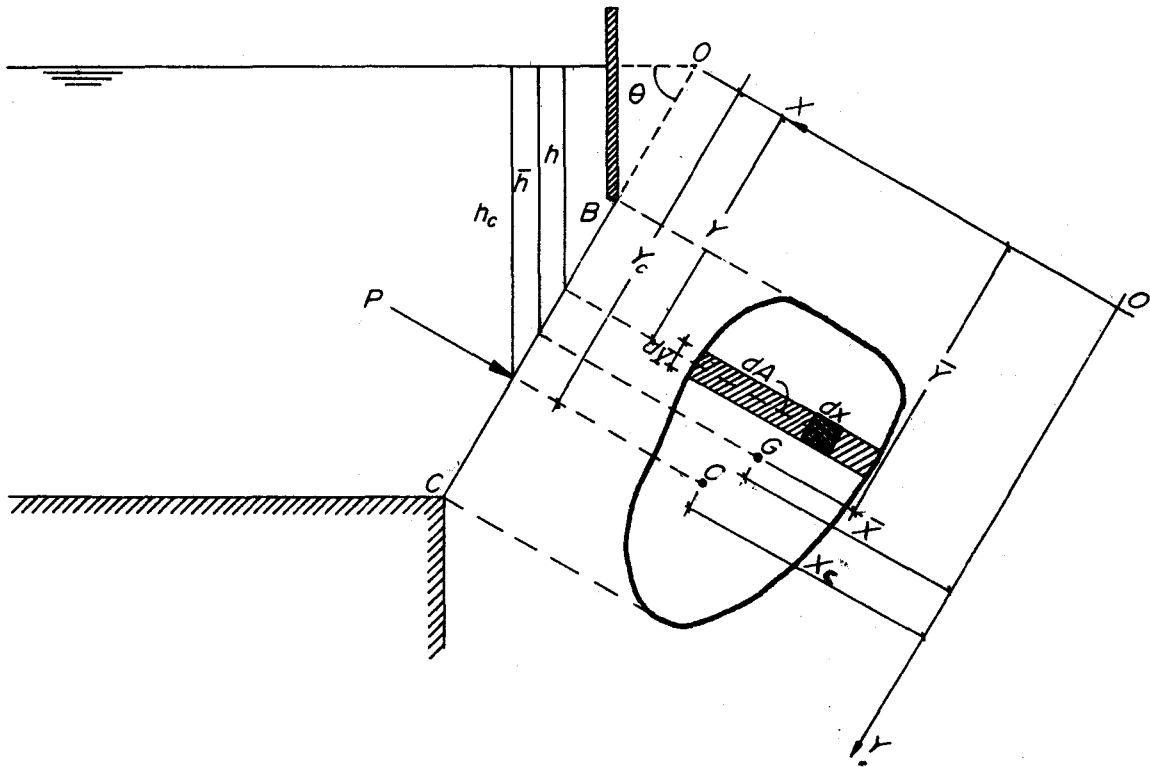
$$pA \cdot X' = p \int_A dA \cdot X$$

$$X' = \frac{1}{A} \int_A dA \cdot X$$

$$\text{análogamente: } Y' = \frac{1}{A} \int_A dA \cdot Y$$

es decir, el centro de presiones coincide con el centroide del área de la superficie plana horizontal.

- b) Superficies planas inclinadas.- En la figura, BC es la traza de la superficie plana inclinada. Se toma como eje X la intersección de los planos de la superficie libre y de la superficie inclinada. El eje Y es tomado en el plano de la superficie inclinada con el origen en la superficie libre. De esta manera el plano XY contiene a la superficie dada.



magnitud: considérese un elemento horizontal de área, dA .

$$dP = p \cdot dA = \gamma h \, dA$$

$$P = \int dP = \int \gamma h \cdot dA = \int \gamma \cdot Y \, \text{sen } \theta \cdot dA = \gamma \, \text{sen } \theta \int Y \, dA$$

$$= \gamma \, \text{sen } \theta \cdot \bar{Y} A = \gamma \cdot \bar{Y} \, \text{sen } \theta \cdot A = \gamma \bar{h} \cdot A$$

es decir, la magnitud es igual a la presión en el centroide de la superficie inclinada multiplicada por el área de la superficie inclinada.

dirección: perpendicular a la superficie plana inclinada.

sentido: hacia la superficie plana.

aplicación: el centro de presiones C.

En superficies horizontales el C coincidía con el G, ahora veremos que en superficies inclinadas el C cae siempre por debajo del G.

Valor Y_C . Se usa el mismo elemento horizontal de área dA y se toma momentos con respecto al eje X.

$$P \cdot Y_C = \int dP \cdot Y$$

$$\gamma \bar{h} A \cdot Y_C = \int \gamma h dA Y$$

$$\gamma \bar{Y} \text{ sen } \theta \cdot A Y_C = \int \gamma Y \text{ sen } \theta dA \cdot Y$$

$$A \bar{Y} Y_C = \int Y^2 \cdot dA$$

la integral es el momento de inercia del área A respecto del eje X:

$$A \bar{Y} Y_C = I_X$$

$$Y_C = \frac{I_X}{A \bar{Y}}$$

de acuerdo al teorema del eje paralelo:

$$Y_C = \frac{I_{\bar{X}} + A \bar{Y}^2}{A \bar{Y}}$$

$$Y_C = \bar{Y} + \frac{I_{\bar{X}}}{A \bar{Y}}$$

el segundo término del segundo miembro es siempre positivo de manera que el C queda por debajo del G. Obsérvese cómo la separación entre estos dos puntos es tanto menor cuanto mayor es la profundidad.

$$Y_C = \bar{Y} + \frac{K_{\bar{X}}^2 \cdot A}{A \bar{Y}}$$

$$Y_C = \bar{Y} + \frac{K_{\bar{X}}^2}{\bar{Y}}$$

Valor X_C . Se usa un nuevo elemento de área $dX \cdot dY$ y se toma momentos con respecto al eje Y.

$$P \cdot X_C = \int dP \cdot X$$

$$\gamma \bar{h} A \cdot X_C = \int p dX dY \cdot X$$

$$\gamma \bar{Y} \text{ sen } \theta A X_C = \int \gamma Y \text{ sen } \theta dX dY \cdot X$$

$$A \bar{Y} X_C = \int XY \cdot dX dY$$

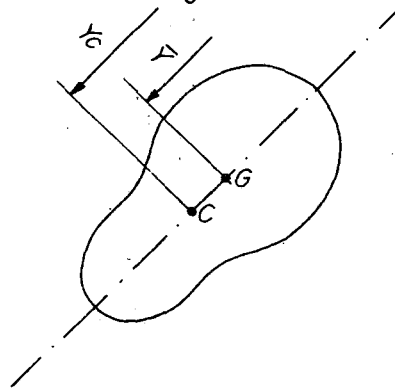
la integral es el producto de inercia del área A.

$$\begin{aligned}
 A \bar{Y} X_C &= I_{XY} \\
 X_C &= \frac{I_{XY}}{A \cdot \bar{Y}} \\
 X_C &= \frac{I_{\bar{X}\bar{Y}} + A \bar{X} \bar{Y}}{A \bar{Y}} \\
 &= \bar{X} + \frac{I_{\bar{X}\bar{Y}}}{A \bar{Y}}
 \end{aligned}$$

el valor $I_{\bar{X}\bar{Y}}$ puede ser positivo o negativo de modo que el C puede encontrarse a uno u otro lado del G. Basta que la superficie plana inclinada tenga un eje de simetría para que $I_{\bar{X}\bar{Y}} = 0$, en cuyo caso:

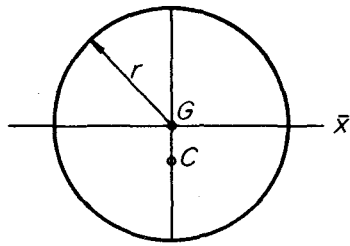
$$X_C = \bar{X}$$

Comentario.- Por lo general, las situaciones de interés se relacionan con superficies planas que tienen uno o dos ejes de simetría, de modo que sólo se trata de determinar el valor Y_C .



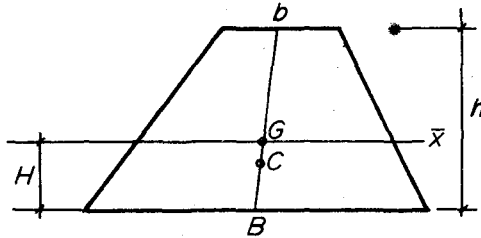
Centro de gravedad, momento de inercia y radio de giro de figuras usuales

	$I_{\bar{X}}$	$K_{\bar{X}}^2$
	$\frac{b h^3}{12}$	$\frac{h^2}{12}$
	$\frac{b h^3}{36}$	$\frac{h^2}{18}$



$$\frac{\pi r^4}{4}$$

$$\frac{r^2}{4}$$



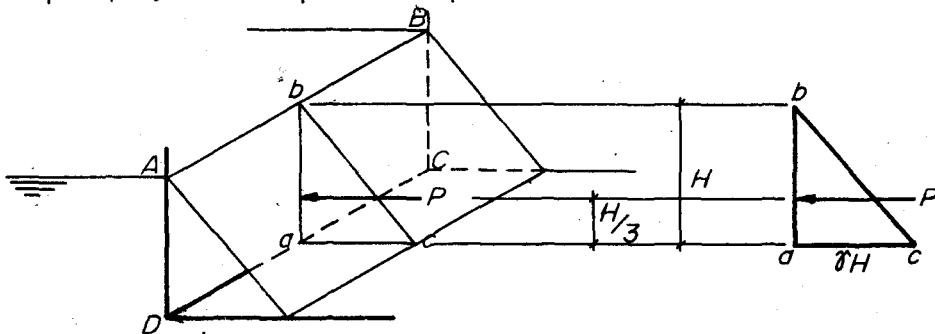
$$\frac{h^3}{36} \cdot \frac{B^2 + 4Bb + b^2}{B + b}$$

$$\frac{I_{\bar{x}}}{A}$$

$$H = \frac{h}{3} \cdot \frac{B + 2b}{B + b}$$

$$A = \frac{B + b}{2} \cdot h$$

El diagrama de presiones.- Es la representación gráfica de la expresión $p = \gamma h$, sobre superficies planas.

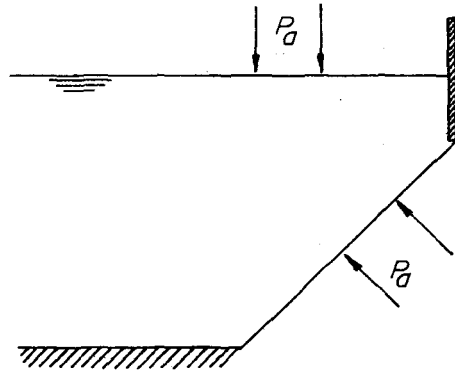


Sobre la superficie plana rectangular ABCD el diagrama espacial de presiones es un prisma recto de base triangular y el diagrama en el plano de simetría es un triángulo. En la práctica basta dibujar este triángulo de presiones.

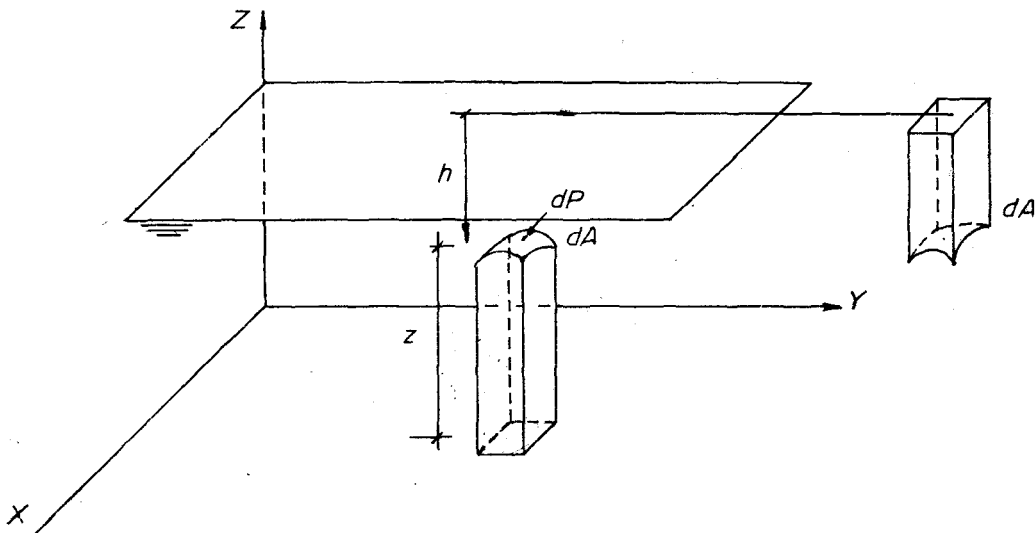
$$P = \int_0^H dP = \int_0^H p \, dA = \int_0^H \gamma h \cdot b \, dh = \gamma b \int_0^H h \, dh = \frac{1}{2} \gamma b H^2$$

Como se puede ver el empuje resulta numéricamente igual al volumen del diagrama espacial de presiones. Su punto de aplicación es el centroide de este diagrama espacial o bien el centroide del triángulo de presiones.

Comentario.- En el estudio del empuje hidrostático se han empleado presiones relativas, es decir no se ha considerado la presión atmosférica. La razón de esto es que al actuar la presión atmosférica a uno y otro lado de la superficie plana su efecto se cancela y al ignorarla no se afecta ni la magnitud ni la posición de la fuerza resultante.



2.6 Fuerzas sobre superficies curvas



Se puede considerar la superficie curva como dividida en elementos de área dA , sobre cada uno de los cuales actúa perpendicularmente un empuje elemental dP . De este modo el empuje hidrostático en toda la superficie curva viene a ser la resultante de las fuerzas elementales dP .

Sean α , β , γ , los ángulos que la fuerza dP forma con los ejes coordenados X , Y , Z , respectivamente.

Las componentes de dP según estos tres ejes son:

$$dP = p \, dA \begin{cases} dP_X = p \, dA \cdot \cos \alpha = \gamma h \cdot dA \cos \alpha = \gamma h \cdot dA_{YZ} \\ dP_Y = p \, dA \cdot \cos \beta = \gamma h \cdot dA \cos \beta = \gamma h \cdot dA_{XZ} \\ dP_Z = p \, dA \cdot \cos \gamma = \gamma h \cdot dA \cos \gamma = \gamma h \cdot dA_{XY} \end{cases}$$

Las integrales correspondientes podrían resolverse conociendo la ecuación de la superficie curva, sin embargo es mucho más práctico seguir el siguiente razonamiento.

1º) $dA \cos \gamma$ es la proyección del elemento de área sobre el plano XY , por lo que viene a ser la sección recta del prisma vertical líquido que queda encima de dA .

$$dP_Z = \gamma h \cdot dA_{XY} = \gamma \cdot h \, dA_{XY} \dots \text{peso de dicho prisma}$$

$$P_Z = \int_V \gamma \cdot h \, dA_{XY} \quad \dots \text{ peso del volumen líquido que gravita encima de toda la superficie curva.}$$

Su punto de aplicación será el centro de gravedad de dicho volumen líquido.

2º) $dA \cos \alpha$ es la proyección del elemento de área dA sobre el plano YZ .

$$dP_X = \gamma h \cdot dA_{YZ} \quad \dots \text{ empuje sobre el elemento de área proyectado sobre el plano } YZ.$$

$$P_X = \int \gamma h \cdot dA_{YZ} \quad \dots \text{ empuje sobre la superficie plana que resulta de proyectar la superficie curva en el plano } YZ.$$

Su punto de aplicación será el centro de presiones de la superficie plana.

3º) Por analogía:

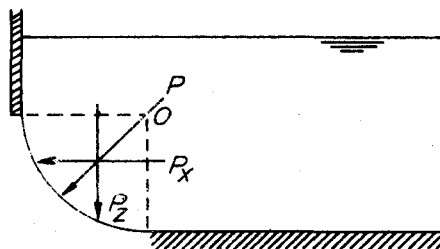
$$P_Y = \int \gamma h \cdot dA_{XZ} \quad \dots \text{ empuje sobre la superficie plana que resulta de proyectar la superficie curva en el plano } XZ.$$

Su punto de aplicación será el centro de presiones de la superficie plana.

Comentario.- Las superficies curvas de verdadero interés para el ingeniero son las superficies de revolución de generatriz horizontal o vertical. En tales casos es nula la componente del empuje en la dirección de la generatriz por cuanto es nula la proyección correspondiente de la superficie curva.

El problema se reduce entonces a encontrar dos componentes del empuje y luego por composición vectorial el empuje total.

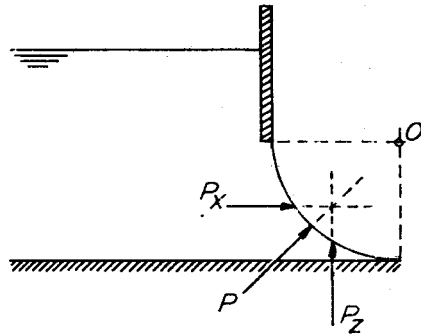
Por comodidad se va a designar -de aquí en adelante- con la letra X la dirección horizontal.



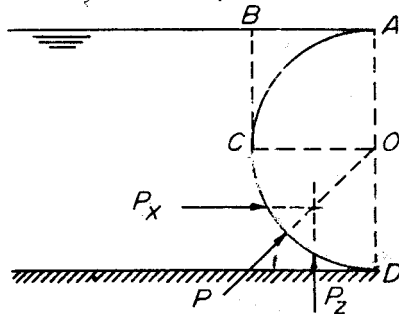
El esquema que antecede se refiere a una superficie cilíndrica de generatriz horizontal, habiéndose dibujado tan solo la curva que corresponde al plano vertical de simetría. Puesto que el empuje total P es resultante de un conjunto de fuerzas todas ellas radiales, dicho empuje P debe pasar por el centro O del cuarto de círculo.

El esquema que sigue se refiere al caso en que el líquido está por debajo de la superficie curva.

En tal situación la componente vertical del empuje es el peso del líquido imaginario por encima de la superficie curva, dirigido ahora hacia arriba pero aplicado siempre en el centro de gravedad del volumen líquido imaginario. El empuje total sigue pasando por el punto O .

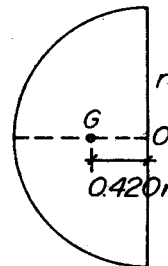
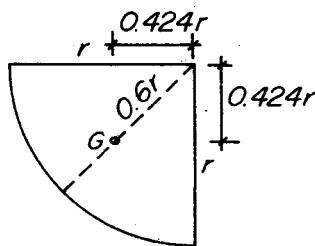


Para el caso en que la traza de la superficie curva es un medio círculo cabe el siguiente raciocinio para hallar P_z .



- * sobre CD actúa un empuje hacia arriba de magnitud igual al peso del volumen líquido ABCD;
- * sobre AC actúa un empuje hacia abajo de magnitud igual al peso del volumen líquido ABC;
- * P_z será la diferencia, es decir el peso del volumen líquido ACDA, - aplicado en el centroide de este volumen y dirigido hacia arriba.
- * la resultante P debe pasar siempre por el punto O.

Centroide del cuarto de círculo y del medio círculo

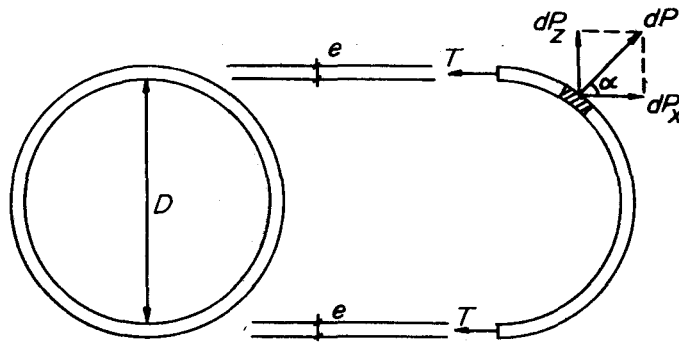


Esfuerzos en las paredes de superficies cilíndricas.- Los esfuerzos en las paredes de superficies cilíndricas sometidas interior o exteriormente a presión hidrostática pueden ser encontrados aplicando los mismos principios de las superficies curvas en general. Si la presión es interior los esfuerzos serán de tensión, si es exterior serán de compresión.

hipótesis: la presión es relativamente grande, de magnitud tal que la altura de presión correspondiente es igual a varias veces el diámetro, por lo que puede suponerse uniforme en toda la sección transversal.

Sea una tubería de longitud l sometida a una presión interior uniforme p .

Si se supone la tubería cortada longitudinalmente en dos partes iguales, - cada mitad estará en equilibrio por efecto de dos fuerzas tangenciales T en sus extremos.



$$dP_Z = p \, dA \cdot \sin \alpha, \quad P_Z = \int_A p \, dA \sin \alpha = 0 \quad \text{por razones de simetría}$$

$$dP_X = p \, dA \cdot \cos \alpha, \quad P_X = \int_A p \cdot dA \cos \alpha = p \int_A dA_{YZ} = p \cdot D \cdot l$$

$$\text{es decir, } 2 T = p D l$$

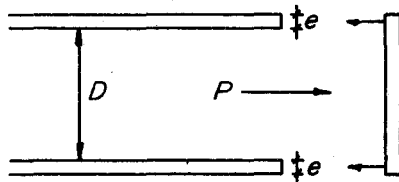
$$T = \frac{p D l}{2}$$

llamando e al espesor de la pared y f_s al esfuerzo de tensión:

$$f_s \cdot l \cdot e = \frac{p D l}{2}$$

$$f_s = \frac{p D}{2e}$$

Comentario.- Los esfuerzos en el extremo del tubo cilíndrico pueden obtenerse de un modo similar.



$$f_s \cdot \pi D e = p \cdot \pi \frac{D^2}{4}$$

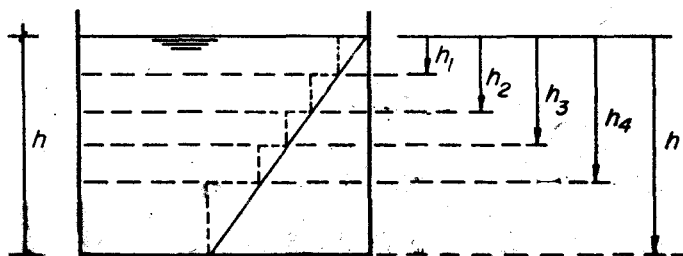
$$f_s = \frac{p D}{4e}$$

La primera de las fórmulas puede utilizarse para dimensionar el espesor e de la tubería, admitiendo un esfuerzo de trabajo a la tensión f'_s :

$$e = \frac{p D}{2 f'_s}$$

En la práctica se considera un valor adicional Δe para prevenir los efectos de la oxidación. En tuberías expuestas al fenómeno del golpe de ariete se acostumbra considerar una presión adicional Δp .

Caso de depósitos cilíndricos de eje vertical.- La presión en las paredes ya no es uniforme sino que aumenta linealmente hacia abajo. La determinación del espesor puede hacerse por tramos.



$$e_1 = \frac{\gamma h_1 \cdot D}{2 f'_s}$$

$$e_2 = \frac{\gamma h_2 \cdot D}{2 f'_s}$$

⋮
etc.

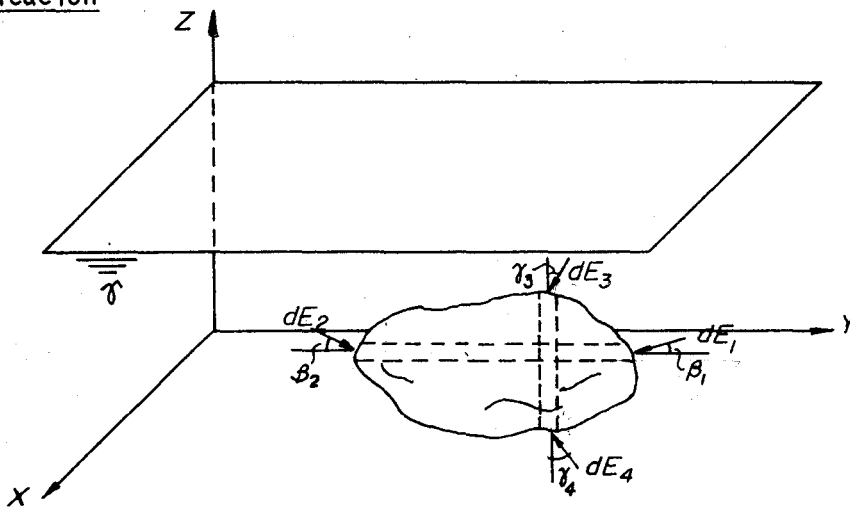
lo cual equivale a sustituir el diagrama triangular de presiones por un diagrama escalonado.

En tanques de pequeña altura no hay necesidad de este refinamiento y las paredes se construyen de espesor uniforme determinado con la presión mayor.

2.7 Cuerpos sumergidos

De acuerdo al principio de Arquímedes, un cuerpo sumergido total o parcialmente en un fluido en reposo sufre un empuje vertical (E), de abajo hacia arriba, de magnitud igual al peso del líquido desalojado y aplicado en el centro de gravedad del volumen de líquido desalojado.

Verificación



Si se considera un prisma elemental horizontal, paralelo al eje Y, de sección recta uniforme dA , sobre sus caras actuarán las fuerzas elementales:

$$dE_1 = p \cdot dA_1 = \gamma h \cdot dA_1$$

$$dE_2 = p \cdot dA_2 = \gamma h \cdot dA_2$$

cuyas proyecciones en la dirección Y son:

$$dE_{1Y} = \gamma h \, dA_1 \cdot \cos \beta_1 = \gamma h \cdot dA_1 \cos \beta_1 = \gamma h \cdot dA$$

$$dE_{2Y} = \gamma h \, dA_2 \cdot \cos \beta_2 = \gamma h \cdot dA_2 \cos \beta_2 = \gamma h \cdot dA$$

por lo que:
$$E_Y = \int_A dE_Y = 0$$

Análogamente: $E_X = \int_A dE_X = 0$

En la dirección Z:

$$dE_3 = p_3 \cdot dA_3 = \gamma h_3 \cdot dA_3$$

$$dE_4 = p_4 \cdot dA_4 = \gamma h_4 \cdot dA_4$$

cuyas proyecciones son:

$$dE_{3Z} = \gamma h_3 dA_3 \cdot \cos \gamma_3 = \gamma h_3 \cdot dA_3 \cos \gamma_3 = \gamma h_3 dA$$

$$dE_{4Z} = \gamma h_4 dA_4 \cdot \cos \gamma_4 = \gamma h_4 \cdot dA_4 \cos \gamma_4 = \gamma h_4 dA$$

que dan por resultante:

$$dE_Z = dE_{4Z} - dE_{3Z} = \gamma dA (h_4 - h_3) = \gamma dV_0$$

es decir: $E_Z = \int_{V_0} dE_Z = \gamma V_0$

Se desprende que si un cuerpo se sumerge totalmente:

- si peso del cuerpo < empuje ... el cuerpo flota
- si peso del cuerpo > empuje ... el cuerpo se hunde
- si peso del cuerpo = empuje ... el cuerpo está en equilibrio (estable, inestable o indiferente).

El punto de aplicación del empuje coincide con el centro de gravedad del volumen desalojado y se llama en general centro de empuje. En los cuerpos flotantes el centro de empuje recibe el nombre de centro de carena, la parte sumergida se llama carena y al empuje mismo se le llama desplazamiento.

Aplicaciones.- El principio de Arquímedes puede ser utilizado en:

- a) determinación del peso específico de sólidos más pesados que el agua y del volumen de cuerpos irregulares.

Un cuerpo de forma irregular se pesa en el aire (W) y sumergido (W_s) - en un líquido conocido (γ). Hallar su volumen y su peso específico.

$$W - W_s = E = \gamma V_{oc}$$

$$V_{oc} = \frac{W - W_s}{\gamma}$$

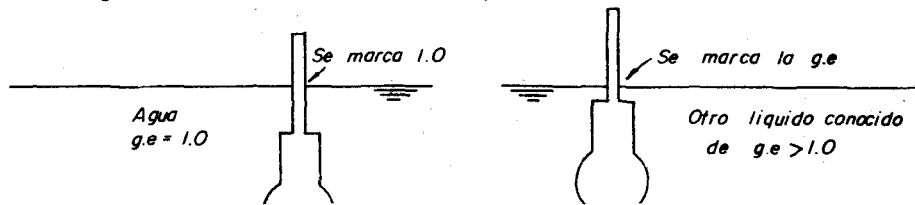
$$\gamma_c = \frac{W}{V_{oc}} = \frac{W}{\frac{W - W_s}{\gamma}} = \gamma \cdot \frac{W}{W - W_s}$$

- b) determinación de la gravedad específica (g.e.) de los líquidos mediante un aparato llamado hidrómetro.

La calibración se realiza del modo que sigue:

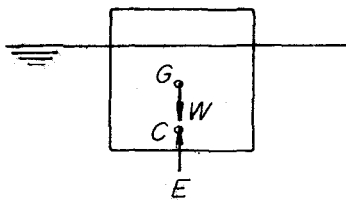
- 1º se sumerge el hidrómetro en agua de g.e. = 1.0;
- 2º se sumerge el hidrómetro en otro líquido de g.e. conocida y se anota en el vástago la marca correspondiente

3^o se prosigue la calibración con otro líquidos de g.e. conocida, después de lo cual queda listo para ser utilizado en la determinación de la g.e. desconocida de un líquido cualquiera.



c) problemas generales de flotación y arquitectura naval.

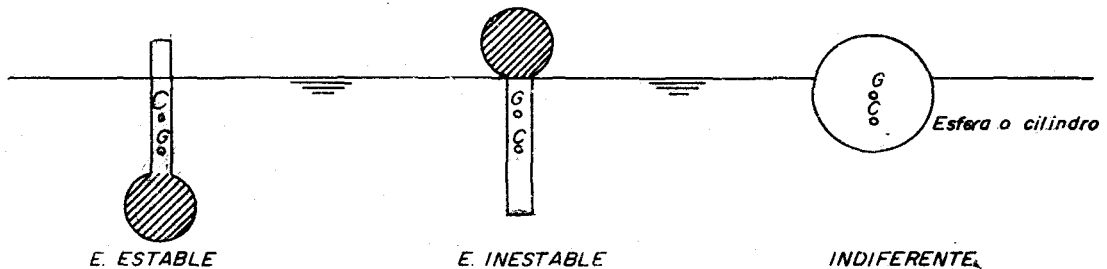
Análisis de estabilidad.- Un cuerpo parcialmente sumergido está en equilibrio si el peso y el empuje son iguales y los puntos de aplicación de las dos fuerzas quedan en la misma vertical.



Sin embargo, para distinguir la clase de equilibrio hace falta todavía producir un cambio de posición del cuerpo y observar su comportamiento. Si el cuerpo vuelve a su posición primitiva el equilibrio es estable y si sigue alejándose de su primera posición el equilibrio era inestable.

En los cuerpos parcialmente sumergidos el cambio de posición para distinguir el tipo de equilibrio tiene que hacerse con una rotación en torno a un eje horizontal.

Si provocamos dicha rotación en los cuerpos siguientes:



encontraremos que un cuerpo flotante está en equilibrio estable si su centro de gravedad cae por debajo de su centro de empuje.

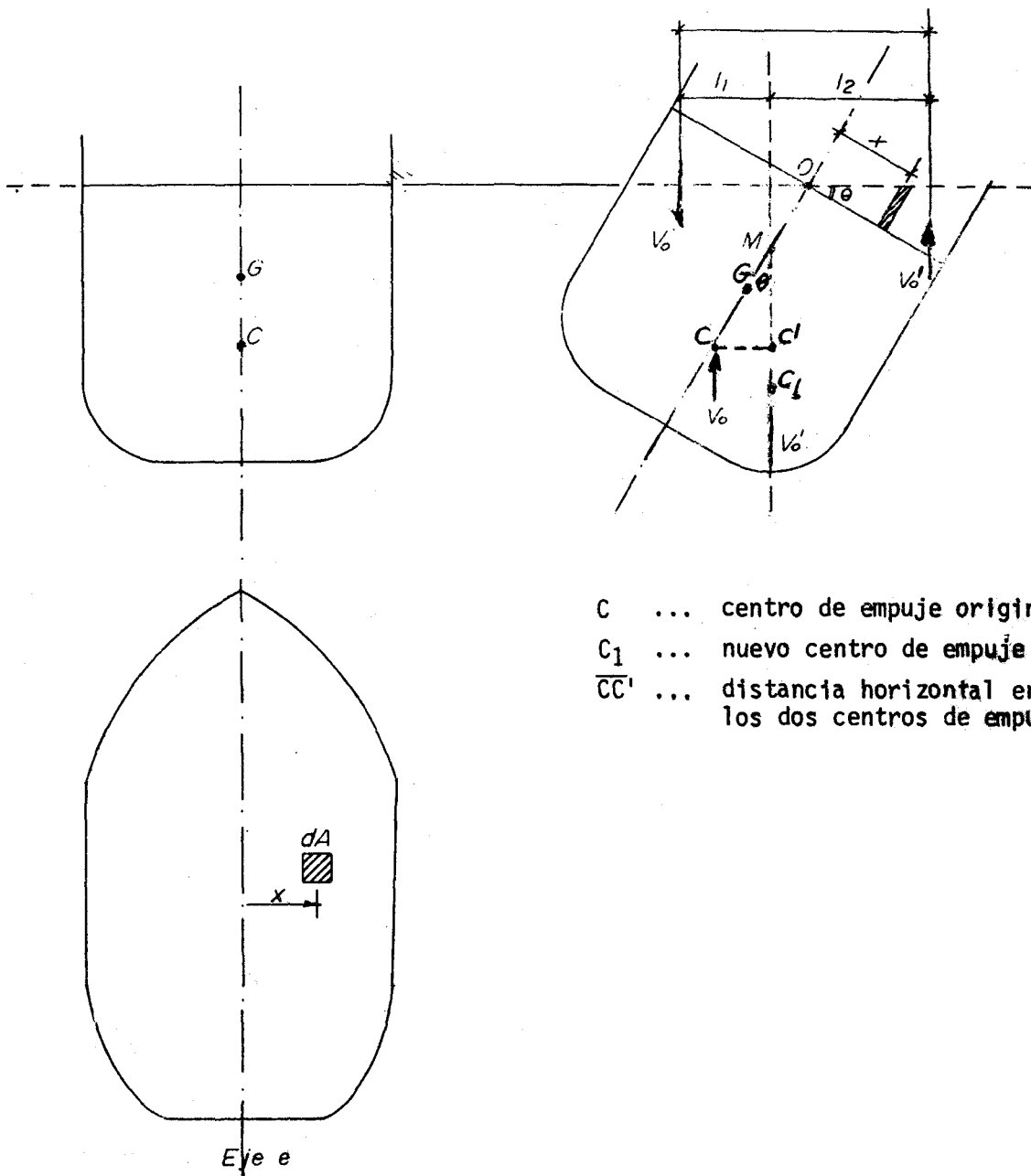
Sin embargo ciertos cuerpos flotantes están en equilibrio estable aún teniendo su centro de gravedad por encima del centro de empuje. Tal es el caso de los barcos.

Por simplicidad sólo se va a estudiar la estabilidad de los barcos o cuerpos similares que tienen un plano longitudinal vertical de simetría.

Se define metacentro (M) al punto de intersección de las líneas de acción del empuje antes y después de la rotación.

Si M cae por encima de G el momento es restablecedor y el equilibrio estable; si M cae por debajo de G el momento es de volteo y el equilibrio inestable.

\overline{GM} ... altura metacéntrica



- C ... centro de empuje original
- C₁ ... nuevo centro de empuje
- $\overline{CC'}$... distancia horizontal entre los dos centros de empuje.

Se observa que la estabilidad del cuerpo es tanto mayor cuanto más grande es \overline{GM} , lo que quiere decir que el valor de la altura metacéntrica nos da una idea de la estabilidad del cuerpo flotante. Derivemos una expresión para ella.

$$\overline{GM} = \overline{CM} - \overline{CG}$$

$$\overline{CM} = \frac{\overline{CC'}}{\theta}, \text{ con el ángulo } \theta \text{ en radianes}$$

$\overline{CC'}$, es el corrimiento horizontal del centro de carena.

Se verifica que el volumen sumergido después de la rotación (V_{01}) es igual al volumen sumergido antes de la rotación (V_0) más el volumen de la cuña derecha (V'_0) menos la otra cuña (también V'_0).

Se pueden aplicar vectores verticales proporcionales a los volúmenes mencionados y tomar momentos con respecto a C'.

$$V_0 \cdot \overline{CC'} - V'_0 \cdot \ell_1 - V'_0 \cdot \ell_2 = V_{01} \cdot 0 = 0$$

$$V_0 \cdot \overline{CC'} = V'_0 (\ell_1 + \ell_2) = V'_0 \cdot \ell$$

pero: $V'_0 \ell = \int X \theta \, dA \cdot X = \theta \int X^2 \, dA = \theta I_0$

I_0 ... momento de inercia de la sección de flotación con respecto al eje e.

$$V_0 \cdot \overline{CC'} = \theta I_0$$

$$\overline{CC'} = \frac{\theta I_0}{V_0}$$

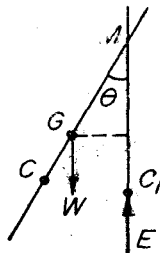
es decir, $\overline{CM} = \frac{I_0}{V_0}$

con lo que: $\overline{GM} = \frac{I_0}{V_0} - \overline{CG}$

En cuerpos homogéneos G queda siempre por encima de C (el volumen sumergido es siempre menor que el volumen total del cuerpo). En este caso M puede caer por encima o por debajo de G. Si cae por encima ($\overline{CM} > \overline{CG}$) el equilibrio es estable; caso contrario el equilibrio es inestable.

En cuerpos no homogéneos es posible bajar el G por debajo de C, con lo que se consigue que el equilibrio sea siempre estable.

El momento restablecedor en el equilibrio estable tiene un valor distinto para cada posición del cuerpo.



$$M_0 = W \cdot \overline{GM} \sin \theta = \gamma V_0 \cdot \overline{GM} \sin \theta$$

2:8 Equilibrio relativo de los líquidos

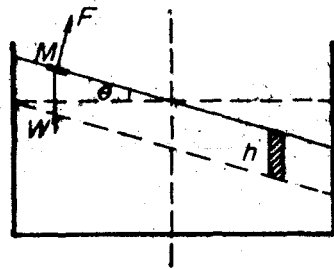
Considérese un líquido contenido en un recipiente y que este recipiente se desplaza con una aceleración horizontal constante. En tales circunstancias la superficie libre se inclina; una partícula líquida continúa en reposo con respecto a otra y con respecto a las paredes del recipiente, de modo que no hay rozamiento entre ellas y el estudio de la repartición de presiones puede hacerse con los principios hidrostáticos.



Se presentan tres casos de interés:

- aceleración horizontal constante;
- aceleración vertical constante;
- rotación alrededor de un eje vertical, a velocidad angular constante.

a) Aceleración horizontal constante.- Averiguemos el valor del ángulo de inclinación θ .



Sobre una partícula M de la superficie libre inclinada actúan las dos fuerzas siguientes:



- * el peso W, vertical;
- * la fuerza F ejercida por las partículas adyacentes, perpendicular a la superficie libre desde que no hay fricción;

puesto que la resultante de estas dos fuerzas debe ser horizontal se forma un triángulo rectángulo:

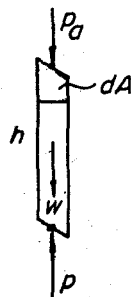
$$R = W \operatorname{tg} \theta$$

$$m \cdot a_h = m \cdot g \operatorname{tg} \theta$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a_h}{g}$$

La inclinación es pues constante y su valor en un lugar sólo depende de la aceleración que se da al recipiente.

En cuanto a la distribución de presiones, el prisma elemental líquido sombreado está en equilibrio:



$$\Sigma F_y = 0$$

$$p \, dA = p_a \, dA + W$$

$$p \, dA = p_a \, dA + \gamma \cdot h \, dA$$

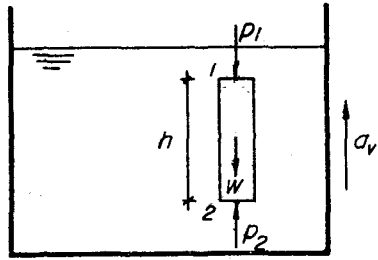
$$p = p_a + \gamma h$$

es decir, las superficies de igual presión son paralelas a la superficie libre como la hidrostática.

La superficie libre inclinada representa el diagrama de presiones en el fondo del recipiente y las caras frontal y posterior sufren fuerzas diferentes.

b) Aceleración vertical constante.- La aceleración vertical puede ser ascendente o descendente.

En un prisma elemental vertical cualquiera en el interior del líquido se verifica:



$$p_2 \cdot dA - p_1 \cdot dA - W = m \cdot a_v$$

$$p_2 \cdot dA - p_1 \cdot dA - W = \frac{W}{g} \cdot a_v$$

$$p_2 \cdot dA - p_1 \cdot dA - \gamma \cdot h \, dA = \frac{\gamma h \, dA}{g} \cdot a_v$$

$$p_2 = p_1 + \gamma h + \frac{a_v}{g} \cdot \gamma h$$

es decir, por efecto del movimiento ascendente del recipiente la presión en todos los puntos del líquido aumenta con relación a la presión con el recipiente en reposo. Este efecto es el mismo que experimenta el pasajero de un ascensor durante la subida.

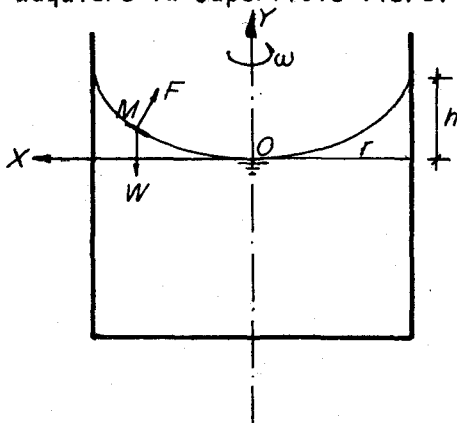
Para la aceleración vertical descendente se obtiene:

$$p_2 = p_1 + \gamma h - \frac{a_v}{g} \gamma h$$

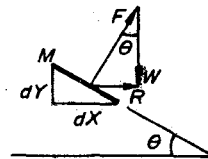
es decir, si se deja caer el recipiente no hay variación en la presión: $p_2 = p_1$.

En ambos casos de aceleración vertical las superficies de igual presión resultan horizontales y por eso paralelas entre sí.

- c) Rotación alrededor de un eje vertical, a velocidad angular constante.
Se supone un depósito cilíndrico y se trata de averiguar la forma que adquiere la superficie libre.



Sobre una partícula M de la superficie libre actúan las dos fuerzas siguientes:



- * el peso W, vertical;
- * la fuerza F, normal a la superficie libre;

La resultante de estas dos fuerzas debe tener la dirección de la aceleración que es hacia el eje de rotación, de modo que se forma un triángulo rectángulo:

$$R = W \operatorname{tg} \theta$$

$$m \cdot a = m \cdot g \operatorname{tg} \theta$$

$$\omega^2 X = g \operatorname{tg} \theta$$

$$g \frac{dY}{dX} = \omega^2 X$$

$$g \, dY = \omega^2 X \, dX$$

$$g \quad Y = \omega^2 \frac{X^2}{2} + C \quad \left\{ \begin{array}{l} X = 0 \\ Y = 0 \\ C = 0 \end{array} \right.$$

$$Y = \frac{\omega^2 X^2}{2g}$$

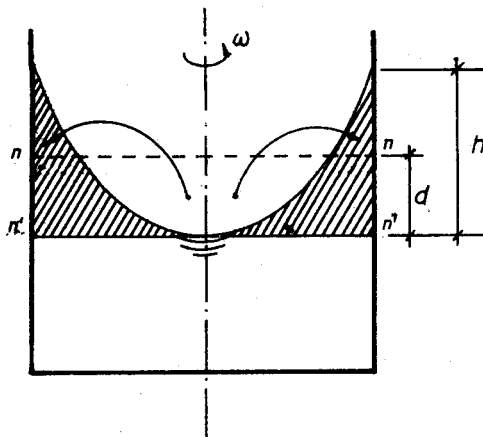
es decir, la superficie libre adopta la forma de un paraboloide de revolución.

$$\text{Cuando } \left. \begin{array}{l} X = r \\ Y = h \end{array} \right\} h = \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \frac{V^2}{2g}$$

siendo V la velocidad tangencial del cilindro.

En ingeniería hidráulica se conoce a este fenómeno como vórtice forzado, que se resume en la expresión $V = \omega r$.

Comentario.- ¿Cuánto desciende el líquido en el eje del cilindro?



El paraboloide posee una propiedad conocida, fácil de demostrar, que se refiere a que el volumen del paraboloide es la mitad del volumen del cilindro circunscrito.

Si nn representa el nivel del líquido antes de la rotación, puesto que no se pierde líquido:

$$\begin{aligned} \text{volumen } nn' n' &= \text{volumen sombreado} \\ &= \frac{1}{2} \text{ volumen cilindro.} \end{aligned}$$

$$\text{es decir, } d = \frac{h}{2}$$

lo que baja el líquido en el centro es igual a lo que sube en las paredes.

Sobre la base de esta información resulta muy fácil estudiar la distribución de presiones en el fondo y en las paredes del recipiente cilíndrico.

2.9 Ejemplos de aplicación

Ejemplo 16.- Determinar cuánto desciende aproximadamente la presión atmosférica por cada 100 m de ascenso sobre el nivel del mar, en mm de mercurio y en centímetros de agua.

Basta emplear la fórmula del ejemplo 15,

$$p = 10,330 e^{-0.00012 h}$$

para $h = 100$ m:

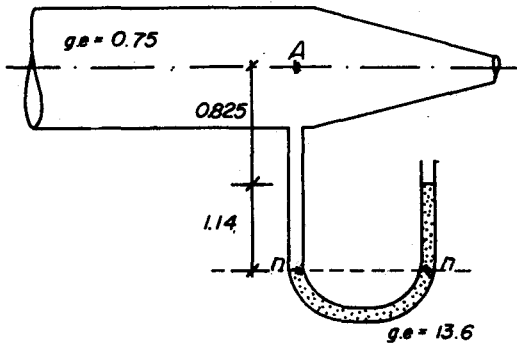
$$p = 10,206.78 \text{ kg/m}^2$$

$$\Delta p = 10,330 - 10,206.78 = 123.22 \text{ kg/m}^2$$

$$a) \quad \frac{\Delta p}{\gamma_m} = \frac{123.22}{13,600} = 0.009 \text{ m} \rightarrow 9 \text{ mm de Hg}$$

b) $\frac{\Delta P}{\gamma} = \frac{123.22}{1,000} = 0.123 \text{ m} \rightarrow 12 \text{ cm de agua.}$

Ejemplo 17.- Una tubería que remata en una boquilla conduce un aceite (g.e. 0.75) que desequilibra la columna de mercurio (g.e. = 13.6) en 1.14 m. Determinar la presión manométrica del aceite en el punto A.



igualando presiones en el nivel nn:

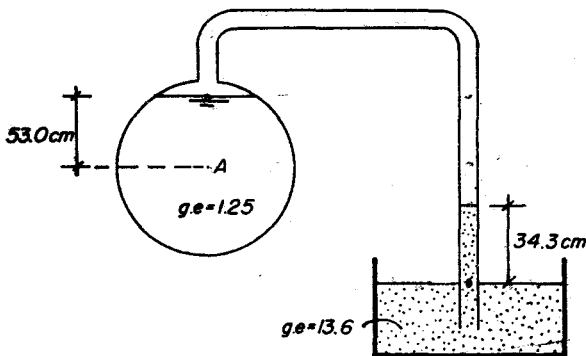
$$p_A + 0.75 \gamma (0.825 + 1.14) = 13.6 \gamma (1.14)$$

$$p_A = 13,600 (1.14) - 750 (1.965)$$

$$p_A = 14,030 \text{ kg/m}^2$$

$$p_A = 1.4 \text{ kg/cm}^2$$

Ejemplo 18.- Con referencia a la figura, el punto A está 53 cm por debajo de la superficie libre del líquido de g.e. = 1.25. ¿Cuál es la presión relativa en A si el mercurio asciende 34.3 cm en el tubo?



ecuación de equilibrio en términos de alturas de agua:

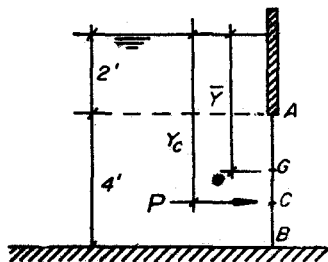
$$\frac{p_A}{\gamma} - \frac{1.25 \gamma (0.53)}{\gamma} + \frac{13.6 \gamma (0.343)}{\gamma} = 0$$

$$\frac{p_A}{\gamma} = -4.0023 \text{ m}$$

$$p_A = -4,002.3 \text{ kg/m}^2$$

$$p_A = -0.40 \text{ kg/cm}^2$$

Ejemplo 19.- Hallar la fuerza que ejerce el agua sobre la compuerta rectangular AB de 2' de ancho.



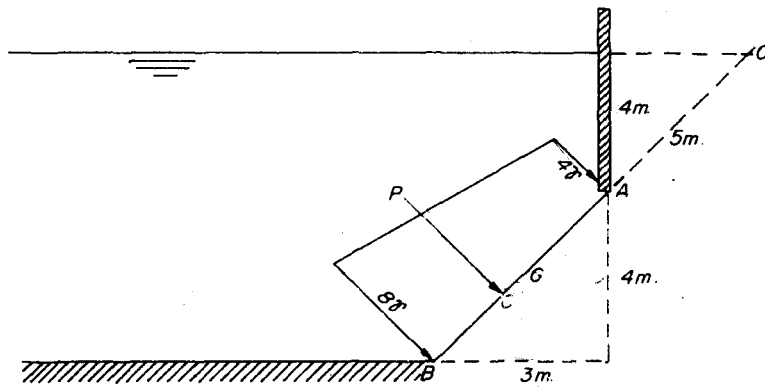
$$P = \gamma \bar{h} \cdot A = 62.4 \times 4 \times 8 = 1997 \text{ lb}$$

$$Y_C = \bar{Y} + \frac{K_X^2}{\bar{Y}} = 4 + \frac{16}{4} = 4.33 \text{ pies}$$

Ejemplo 20.- Hallar la fuerza que ejerce el agua sobre la compuerta AB de 1 m de ancho: a) usando las fórmulas, b) empleando el diagrama de presiones.

a) $P = \gamma \bar{h} \cdot A = 1,000 \times 6 \times 5 = 30,000 \text{ kg}$

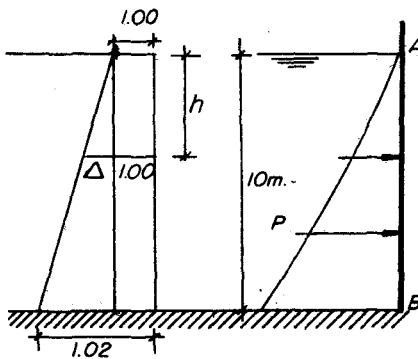
$$Y_C = \bar{Y} + \frac{K_X^2}{\bar{Y}} = 7.50 + \frac{25}{7.50} = 7.78 \text{ m}$$



$$b) P = \frac{8\gamma + 4\gamma}{2} \times 5 = 30,000 \text{ kg}$$

$$\gamma_C = 10.00 - \frac{5}{3} \frac{8\gamma + 8\gamma}{8\gamma + 4\gamma} = 7.78 \text{ m}$$

Ejemplo 21.- Determinar la fuerza en toneladas sobre AB, por metro de ancho, si la gravedad específica del agua varía linealmente de un valor 1.00 en la superficie a un valor 1.02 en el fondo.



a una profundidad genérica h:

$$g.e. = 1 + \Delta$$

$$\frac{\Delta}{h} = \frac{0.02}{10}$$

$$\Delta = 0.002 h$$

es decir, $g.e. = 1 + 0.002 h$

$$\gamma = 1 + 0.002 h \text{ ton/m}^3$$

$$dp = \gamma \cdot dh$$

$$dp = (1 + 0.002 h) dh$$

$$\int dp = \int dh + \int 0.002 h \cdot dh$$

$$p = h + 0.001 h^2$$

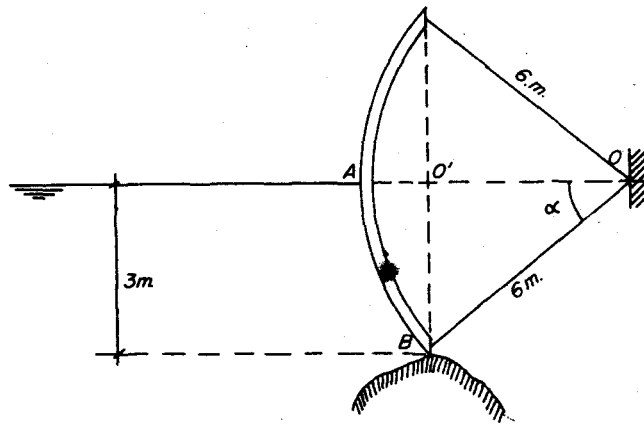
$$dP = p \cdot dA = p dh = (h + 0.001 h^2) dh$$

$$\int dP = \int_0^{10} h dh + \int_0^{10} 0.001 h^2 dh$$

$$P = \left(\frac{h^2}{2}\right)_0^{10} + 0.001 \left(\frac{1}{3}\right) (h^3)_0^{10}$$

$$P = 50 + 0.33 = 50.33 \text{ Ton.}$$

Ejemplo 22.- Determinar las componentes por metro de longitud, de la fuerza debida a la presión del agua sobre la compuerta del tipo tainter mostrada en la figura.



$$P_X = \gamma \bar{h} \cdot A = 1,000 \times 1.50 \times 3.00 = 4,500 \text{ kg}$$

$$P_Z = \gamma V_{O'AB}$$

$$O'O = \sqrt{36 - 9} = 5.20 \text{ m}$$

$$\alpha = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$\frac{\text{Sector OAB}}{30^\circ} = \frac{\pi r^2}{360^\circ}$$

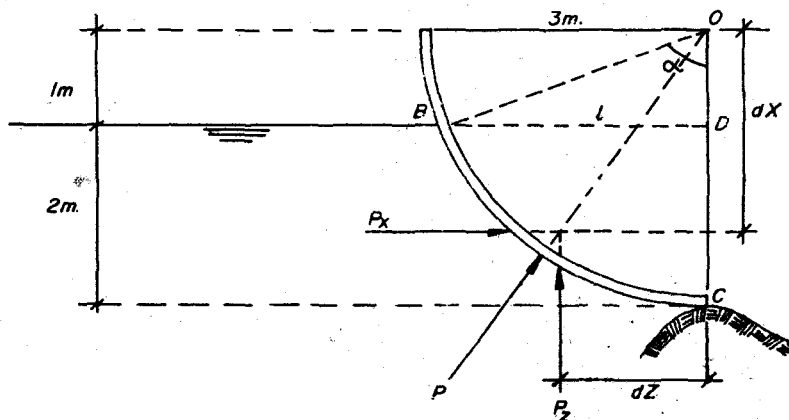
$$\text{Sector OAB} = 9.42 \text{ m}^2$$

$$\text{Area } OO'B = \frac{1}{2} \times 5.20 \times 3 = 7.80 \text{ m}^2$$

$$\text{Area } O'AB = 9.42 - 7.80 = 1.62 \text{ m}^2$$

$$P_Z = 1,000 \times 1.62 = 1,620 \text{ kg.}$$

Ejemplo 23.- La compuerta de la figura tiene 6 m de longitud (perpendicularmente al papel). Determinar, a) el valor de las componentes del empuje sobre la compuerta, b) la posición de cada componente.



$$a) P_X = \gamma \bar{h} \cdot A = (1,000)(1,000)(2 \times 6) = 12,000 \text{ kg}$$

$$l = \sqrt{8} = 2,828$$

$$\alpha = \text{arc sen } \frac{l}{3} = 70.53^\circ$$

$$\frac{\text{sector}}{\alpha^\circ} = \frac{\pi r^2}{360^\circ}$$

$$\text{Sector OBC} = 5.54 \text{ m}^2$$

$$\text{Area OBD} = 1,414 \text{ m}^2$$

$$\text{Area DBC} = 5.54 - 1.41 = 4,13 \text{ m}^2$$

$$P_Z = \gamma \cdot V_{\text{OBC}} = 1,000 \times 4,13 \times 6 = 24,780 \text{ kg}$$

$$b) d_X = 1 + \frac{2}{3} \times 2 = 2,33 \text{ m}$$

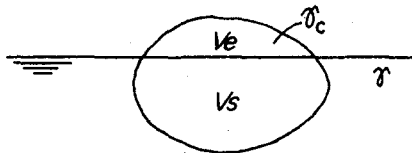
momentos con respecto a \bar{O} :

$$P_Z \cdot d_Z - P_X \cdot d_X = 0$$

$$d_Z = \frac{P_X \cdot d_X}{P_Z} = \frac{12,000 \times 2,33}{24,780}$$

$$d_Z = 1.13 \text{ m}$$

Ejemplo 24.- Si un cierto cuerpo (γ_c) flota en un líquido (γ), ¿qué porción del volumen quedará por encima del nivel del líquido?



$$W = E$$

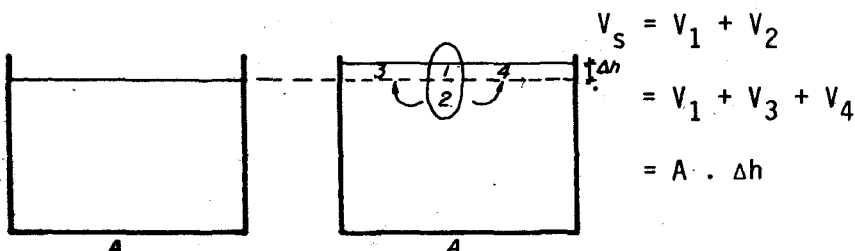
$$\gamma_c V_c = \gamma V_s$$

$$V_s = \frac{\gamma_c V_c}{\gamma}$$

$$V_e = V_c - V_s = V_c - \frac{\gamma_c V_c}{\gamma} = V_c \left(1 - \frac{\gamma_c}{\gamma}\right)$$

$$\frac{V_e}{V_c} = 1 - \frac{\gamma_c}{\gamma}$$

Ejemplo 25.- Demostrar que si en el líquido contenido en un recipiente prismático de área A flota un cuerpo, el volumen sumergido es sólo función de A y el incremento de nivel del líquido (Δh).

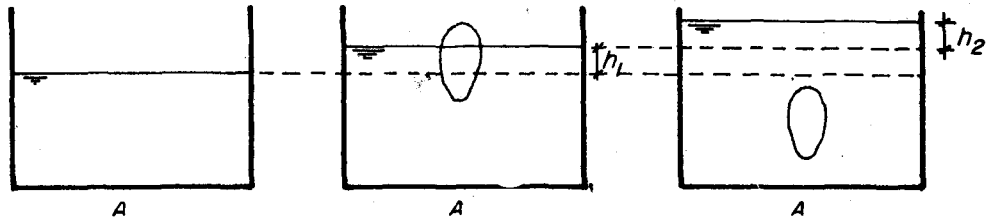


$$V_s = V_1 + V_2$$

$$= V_1 + V_3 + V_4$$

$$= A \cdot \Delta h$$

Ejemplo 26.- En un líquido conocido (γ) contenido en un recipiente prismático de área A se hace flotar un cuerpo de peso específico γ_c desconocido y se mide el incremento en el nivel del líquido (Δh_1). Luego se sumerge íntegramente el cuerpo y se mide el incremento adicional de nivel (Δh_2). Determinar el peso específico del cuerpo.



$$V_s = A \cdot \Delta h_1$$

$$W = E$$

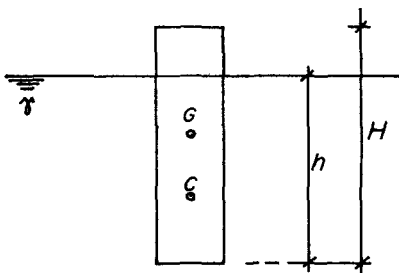
$$\gamma_c V_c = \gamma V_s$$

$$\gamma_c A (\Delta h_1 + \Delta h_2) = \gamma A (\Delta h_1)$$

$$\gamma_c = \frac{\Delta h_1}{\Delta h_1 + \Delta h_2} \cdot \gamma$$

$$V_c = A (\Delta h_1 + \Delta h_2)$$

Ejemplo 27.- Encontrar la relación que debe haber entre el diámetro (D) y la altura (H) de un cilindro homogéneo (γ_c) para que flote con su eje vertical en equilibrio estable en un fluido γ .



profundidad de inmersión:

$$W = E$$

$$\gamma_c \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot H = \gamma \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot h$$

$$h = \frac{\gamma_c}{\gamma} \cdot H$$

Condición de equilibrio estable:

$$\overline{CM} > \overline{CG}$$

$$\overline{CM} = \frac{I_o}{V_o} = \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{\frac{\pi D^2}{4} \cdot h} = \frac{4 \pi D^4}{64 \pi D^2 h} = \frac{D^2}{16 h} = \frac{\gamma D^2}{16 \gamma_c H}$$

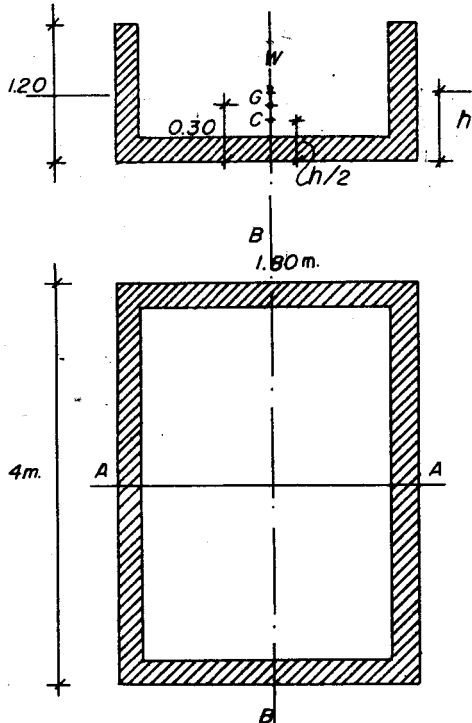
$$\overline{CG} = \frac{H}{2} - \frac{h}{2} = \frac{H}{2} - \frac{\gamma_c H}{\gamma 2} = \frac{H}{2} \left(1 - \frac{\gamma_c}{\gamma}\right)$$

es decir,
$$\frac{\gamma D^2}{16 \gamma_c H} > \frac{H}{2} \left(1 - \frac{\gamma_c}{\gamma}\right)$$

$$D^2 > \frac{8 \gamma_c H^2}{\gamma} \left(1 - \frac{\gamma_c}{\gamma}\right)$$

$$D > 2 \sqrt{2} \sqrt{\frac{\gamma_c}{\gamma} \left(1 - \frac{\gamma_c}{\gamma}\right)} \cdot H$$

Ejemplo 28.- Estudiar la estabilidad del cajón cuyas dimensiones se indican en la figura y cuyo peso es de 2.88 toneladas.



ecuación de equilibrio:

$$W = E$$

$$2.88 = 1 \times 1.80 \times 4 \times h$$

$$h = 0.40 \text{ m}$$

estabilidad respecto del eje BB:

$$\overline{CM} = \frac{I_o}{V_o}$$

$$I_o = \frac{4 \times 1.8^3}{12} = 1.94 \text{ m}^4$$

$$V_o = 1.80 \times 4 \times 0.40 = 2.88 \text{ m}^3$$

$$\overline{CM} = \frac{1.94}{2.88} = 0.67 \text{ m}$$

$$\overline{CG} = 0.30 - 0.20 = 0.10$$

es decir, $\overline{CM} > \overline{CG}$... cajón estable.

estabilidad respecto del eje AA:

$$\overline{CM} = \frac{I_o}{V_o}$$

$$I_o = \frac{1.80 \times 4^3}{12} = 9.60 \text{ m}^4$$

$$V_o = 2.88 \text{ m}^3$$

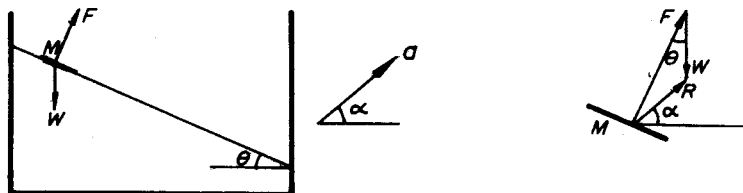
$$\overline{CM} = \frac{9.60}{2.88} = 3.33 \text{ m}$$

$$\overline{CG} = 0.10 \text{ m}$$

es decir, $\overline{CM} \gg \overline{CG}$... el cajón es más estable aún.

Ejemplo 29.- Si a un recipiente abierto que contiene un líquido (γ) en reposo se le aplica una aceleración inclinada \bar{a} , ¿cuál es la

inclinación de la superficie libre?



en una partícula M de la superficie libre actúan las fuerzas F y W que dan una resultante en la dirección de a.

$$R = m \cdot a = \frac{W}{g} \cdot a$$

$$\bar{R} = \bar{F} + \bar{W} \quad \left\{ \begin{array}{l} R_X = F_X + W_X \dots R \cos \alpha = F \sin \theta + 0 \\ R_Y = F_Y + W_Y \dots R \sin \alpha = F \cos \theta - W \end{array} \right.$$

es decir, $\sin \theta = \frac{R \cdot \cos \alpha}{F}$

$$\cos \theta = \frac{R \sin \alpha + W}{F}$$

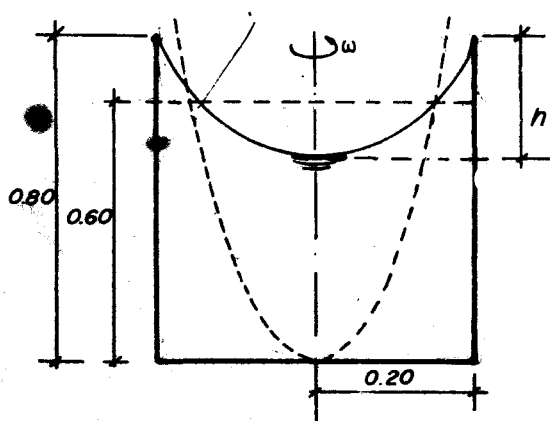
y $\tan \theta = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \frac{g}{a}}$

Nótese como $\tan \theta = \frac{a \cos \alpha}{a \sin \alpha + g} = \frac{ax}{ay + g}$

para $\alpha = 0$

$\tan \theta = \frac{a}{g}$, expresión para aceleración horizontal.

Ejemplo 30.- Un recipiente cilíndrico abierto, de 0.20 m de radio y 0.80 m de altura, contiene 0.60 m de agua.



- ¿a qué velocidad angular máxima puede rotar sin que se derrame el agua?
- ¿cuáles son las presiones máxima y mínima en el fondo?
- ¿a qué velocidad angular la presión relativa en el centro del fondo será nula?

a) $h = 2 (0.80 - 0.60) = 0.40 \text{ m}$

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \quad \dots \quad \omega = \frac{1}{r} \sqrt{2gh} = 14 \text{ rad/s}$$

b) $p_M = \gamma \cdot h_M = 1,000 (0.80) = 800 \text{ kg/m}^2$

$$p_m = \gamma \cdot h_m = 1,000 (0.80 - 0.40) = 400 \text{ kg/m}^2$$

c) $h = 2 \times 0.60 = 1.20 \text{ m}$

$$\omega = \frac{1}{r} \sqrt{2gh} = 24.3 \text{ rad/s}$$

ACERCA DE LA HISTORIA DE LA HIDRAULICA
(tomado de la referencia 4)

BERNOULLI, Daniel (1700-1782)

Es una de las figuras más destacadas y que contribuyó más ampliamente al desarrollo de la Hidráulica en el siglo XVIII.

Ganó y/o participó con otros diez científicos premios otorgados por la Academia de Ciencias de París. La naturaleza de estos premios nos da una idea de los diferentes campos en los que desarrolló su actividad: mareas, astronomía, corrientes marinas, etc.

Mientras se desempeñaba como profesor de matemáticas en San Petersburgo escribió su Hidrodinámica, publicada en 1738, y más tarde su Hidráulica.

Daniel Bernoulli fue el primero en usar la palabra Hidrodinámica.

Cuando apareció la Hidrodinámica de Bernoulli, el célebre matemático D'Alambert hizo el siguiente comentario: "Bernoulli parece ser el primero que ha reducido las leyes del movimiento de los fluidos a principios seguros y no arbitrarios, lo que no había sido hecho hasta ahora por ningún autor de Hidráulica".

Es famoso por el teorema que lleva su nombre y que él estableció.

REYNOLDS, Osborne (1842-1912)

Nació en Belfast. Estudió ciencias en Cambridge e ingeniería civil en Londres. Luego se dedicó a la docencia y a la investigación. Publicó alrededor de 90 trabajos.

Realizó los famosos experimentos para distinguir entre flujo laminar y turbulento, según la viscosidad.

Fue profesor en Manchester. Fue el primero en demostrar el fenómeno de la cavitación.

Estableció el parámetro adimensional que lleva su nombre y las ecuaciones para el flujo turbulento, que también llevan su nombre.