

ESPACIOS ECONOMICOS, JERARQUIA DE LUGARES CENTRALES Y  
TEORIA DE GRAFOS: ALGUNAS REFLEXIONES TEORICAS Y UNA  
APLICACION EMPIRICA

Por: ALVARO ORTIZ SARA VIA

Serie Documentos de Trabajo

Marzo, 1980

N° 49



# I N D I C E

	<u>Página</u>
INTRODUCCION	
CAPITULO I	
LOS MODELOS DE LUGARES CENTRALES	10
1. El Análisis de W. Christaller	11
2. El Análisis de Lösch	19
3. Otras Contribuciones	34
CAPITULO II	
CRITICA DE LOS FUNDAMENTOS DEL ANALISIS ESPACIAL TRADICIONAL	46
1. El Espacio Métrico Euclidiano	52
1.1 Definición de espacio vectorial	52
1.2 Noción de norma y distancia	55
1.3 Interpretación económica de la métrica Euclidiana	58
2. La Hipótesis de Homogeneidad	60
2.1 Espacio homogéneo	60
2.2 Homogeneidad uniforme o estricta	64
3. La Hipótesis de Continuidad	66
4. Consecuencias	70

	<u>Página</u>
<b>CAPITULO III</b>	
<b>REVISION DE LOS FUNDAMENTOS DEL ANALISIS ESPACIAL</b>	<b>80</b>
1. Espacios Matemáticos y Estructuras Ricas	82
1.1 La métrica rectilínea	82
1.2 Métricas centrales	87
1.2.1 Métrica radial	88
1.2.2 Métrica periférica	90
1.2.3 Métrica circun-radial	94
2. Espacios Matemáticos y Estructuras Pobres	98
2.1 Generalidades sobre los grafos	102
2.1.1 Relación binaria	102
2.1.2 Aplicación unívoca	102
2.1.3 Aplicación multívoca	103
2.1.4 Definición de grafo	104
2.1.5 Algunos conceptos generales de la teoría de los grafos	108
2.1.6 Clases de grafos	112
2.1.7 Diversas formas de conexidad	115
2.1.8 Matriz de Boole asociada a un grafo	118
2.1.9 La matriz de caminos y el análisis de la conexidad	119
2.1.10 La matriz de separaciones	123
<b>CAPITULO IV</b>	
<b>MODELOS TOPOLOGICOS DE JERARQUIA</b>	<b>125</b>
1. La Centralidad Absoluta	127
2. La Centralidad Relativa	139
3. La Generalización de la Noción Centro	143

	<u>Página</u>
3.1 Matriz Asociada a un grafo	144
3.2 Potencia de un vértice	148
4. Reducción de la Estructura y Rango de un Componente Fuertemente Conexo	152
CAPITULO V	
LA JERARQUIA DE LUGARES CENTRALES EN EL PERU	161
1. Introducción	161
2. Datos	170
3. Lugares Centrales y Modelos Topológicos de Jerarquía: Aplicación Empírica	172
3.1 Los modelos de centralidad absoluta y centralidad relativa	177
3.1.1 El análisis de la centralidad en la región norte	179
3.1.2 El análisis de la centralidad para algunas ciudades del Perú	192
3.2 La generalización de la noción centro	199
3.2.1 La potencia de un vértice	200
3.3 Reducción de la estructura y rango de un componente fuertemente conexo	215
3.3.1 Determinación de los rangos de la región norte	216
3.3.2 Determinación de los rangos a nivel nacional	220



Página

CONCLUSIONES

225

CITAS

228

BIBLIOGRAFIA

234

## I N T R O D U C C I O N

Es tan grande la costumbre de razonar en economía que la vida económica podría desarrollarse en un punto único, que se ha vuelto extremadamente difícil comprender cómo el conjunto de proposiciones de la ciencia económica (tanto sus hipótesis al igual que sus conclusiones, sus teorías así como sus descripciones) fracasan al integrar el factor espacial.

La ciencia económica clásica, es banal decirlo, fue formalizada sin considerar ni el tiempo ni el espacio, construyendo así los economistas un mundo sorprendentemente estático y adimensional, "un país maravilloso sin dimensiones" según expresión de W. Isard. Las funciones de demanda y oferta, las propensiones a consumir, invertir etc., aparecen como órdenes de magnitud no localizados. Las firmas, los mercados, cualquiera que sea su estructura están privados de dimensión. Siempre los gastos de transporte son agregados a los costos o a los precios, -- perdiendo toda su significación, de manera que los economistas podían suponer confiadamente que el comercio internacional puede ser analizado en un mundo con costos de transporte iguales a cero.

Al mismo tiempo, los supuestos marginalistas "son frecuentemente aunque no siempre aplicables a la dimensión espacial. En la teoría de la localización, por ejemplo, los movimientos de las fábricas son dis--

continuos, en la teoría espacial de los precios, las relaciones de precios entre mercados alejados entre sí han de ser considerados generalmente como no equivalentes, otros ejemplos de discontinuidad en la estructura de los sistemas espaciales son la existencia de centros nodales, concentraciones de población y puntos de intercambios del transporte".<sup>1/</sup> De esta forma, las funciones continuas apropiadas para el cálculo diferencial, características de tantos campos de la economía estática y dinámica son, frecuentemente, inaplicables a los problemas espaciales.

La introducción del factor espacial en la teoría económica supone necesariamente el análisis de los efectos económicos de la distancia. El rasgo más obvio de la economía espacial es su no-homogeneidad, la cual limita la transposición de la teoría clásica o neoclásica a la economía regional. El estudio de los procesos espaciales se basa en parte en una cierta concepción del espacio y en parte en que todo modelo de equilibrio espacial es función de la naturaleza del espacio considerado.

La planificación del crecimiento urbano y regional depende en gran medida de nuestra comprensión de los procesos que rigen el sistema urbano. La teoría del crecimiento urbano es una de las cuestiones menos elaboradas dentro del campo de la economía urbana y regional. Existen muy pocos modelos de crecimiento urbano y dejando de lado importantes trabajos de sociólogos y ecólogos pueden ser apreciados dos niveles de modelos:<sup>2/</sup> el nivel macro-urbano o de modelos de sistemas de ciudades en los que el sistema urbano está constituido por un conjunto de puntos urbanos (ciudades o aglomeraciones) en un país o región; y el ni

vel intra-urbano en el que se estudia el centro urbano per se, o sea, una región delimitada por fronteras administrativas. En ambos niveles - el quehacer clásico consiste en describir las relaciones funcionales - por medio de ecuaciones y luego examinar la sensibilidad de los modelos cuando cambian los valores en el tiempo y en el espacio.

En este trabajo nos interesamos principalmente en los modelos - del primer nivel.<sup>3/</sup> B. Berry y F. Horton<sup>4/</sup> resumen las teorías que tra- tan del crecimiento urbano y regional en: la teoría del mercado, la teo- ría de la localización y la teoría de la base económica.

La teoría del mercado desarrollada primero a nivel internacional, examina las ventajas comparativas de las actividades económicas. Ha si- do aplicada a las regiones por Heckscher<sup>5/</sup> y Ohlin<sup>6/</sup>. El primero presen- ta la hipótesis de que el crecimiento o decadencia de las regiones se - explica por las diferencias regionales de las funciones de producción, mientras que Ohlin sugiere que los factores determinantes son la oferta de terreno, mano de obra y capital.

La teoría de la localización trata de explicar la configuración espacial de las actividades económicas. Tradicionalmente, los modelos que buscan una localización óptima ponen énfasis en la minimización de los costos de transporte como variables fundamental.<sup>7/</sup> El modelo clá- sico, es el de la localización industrial de A. Weber.<sup>8/</sup> Más tarde W. - Christaller<sup>9/</sup> y A. Losch<sup>10/</sup> incorporan dentro de un modelo general de co- mercio al detalle, los hábitos de los consumidores, el número mínimo de clientes y las distancias máximas para cada una de las actividades.<sup>11/</sup>

La teoría de la base económica<sup>12/</sup>, sugiere que el crecimiento urbano y regional está directamente ligado al valor de las actividades - que la ciudad o región exporta. La parte de las actividades exportadas por una ciudad con relación al conjunto de las actividades es considerada como, o permite calcular, un estimador del efecto multiplicador y en consecuencia, su potencial de crecimiento.

El tamaño y la localización de las ciudades depende de sus funciones. Los factores determinantes de la estructura espacial dan lugar a algunas constantes como resultante de la maximización del beneficio - por las unidades de producción individuales, que en realidad está ligado a la consecución de tres óptimos que son interindependientes: la combinación óptima de los inputs, el nivel de producción óptimo del output y la localización óptima. Si el territorio es homogéneo y continuo, - las condiciones de oferta son idénticas en todas partes, la demanda es uniforme en todo el espacio y no existe ninguna economía externa, entonces, las empresas productoras de bienes homogéneos tendrán las mismas - dimensiones y estarán situadas en los centros de los hexágonos regulares, los costos de transporte serán mínimos y las distancias que los separen de sus más cercanos competidores aumentan.

Para los diferentes bienes la dimensión óptima de la unidad de - producción y el área de mercado varían, dando lugar a un sistema de redes de mercado y un alto grado de especialización. Siendo posible determinar uno o más conjuntos de centros urbanos en los que para cada uno existe un área de mercado o de influencia asociada, ciertos bienes - se ofertarán en centros de primer orden, otros en centros de segundo or

den etc., de modo que los centros urbanos pertenecientes a un único sistema se hallan jerárquicamente ordenados entre sí, lo cual implica la distinción de niveles de influencia o atracción.<sup>13/</sup>

La teoría económica del crecimiento urbano que ha recibido una atención más general es el llamado análisis del "lugar central", desarrollado por primera vez en forma sistemática por el geógrafo alemán W. Christaller en su "Die Zentralen Orte in Suddeuschland". Según esta teoría la ciudad crece como resultado del abastecimiento de bienes y servicios a la región circundante, en el modelo "no existe ninguna especialización entre las distintas ciudades, pero en él tiene lugar una clara jerarquización de centros con varios centros mayores cada uno de los cuales ofrece, por lo menos, tantos bienes como los menores".<sup>14/</sup> El primer economista que trata de la teoría de los "lugares centrales" es A. Lösch en su "Teoría Económica Especial", quien le da bases más sólidas al sistema de Christaller.

Cabe anotar, que la teoría del "lugar central" puede ligarse a la geografía por su campo de estudio y a la economía por sus métodos, siendo difícil establecer una frontera que limite el aporte de ambas disciplinas.

Evidentemente, esta teoría no es por todos aceptada en la profesión. Para nosotros tiene la ventaja de ser una teoría "general" en el sentido que explica tanto la evolución de la jerarquía urbana como el crecimiento de una ciudad concreta. Por otra parte, en palabras de H. Richardson<sup>15/</sup>, "la teoría del lugar central es relevante para la planifi

cación urbana y regional porque un sistema jerarquizado facilita un medio eficaz de administrar y asignar recursos a las regiones. Los lugares centrales principales son a veces los puntos claves del crecimiento de sus regiones y determinan la tasa de desarrollo económico de la región como un todo. Por tanto, resulta claro que la distribución espacial y, por tamaños de los centros urbanos es un elemento vital en la estructura de las regiones nodales y hacen surgir los conceptos de dominio y polarización que caracterizan a esta estructura."

Aun admitiendo la homogeneidad y la continuidad del espacio, el modelo de Christaller y Lösch debe ser modificado tan pronto se considere la diferenciación de productos y las preferencias individuales. El espacio puntiforme y los supuestos marginalistas son altamente cuestionables y difícilmente operables al considerar el factor espacial. Nuestra hipótesis fundamental consiste, entonces, en postular que el espacio es heterogéneo y discontinuo y que es al mismo tiempo posible obtener siempre una jerarquía de centros. Solucionar el problema nos lleva en primer lugar a conceptualizar de manera diferente al espacio y, luego, a adaptar las herramientas de análisis necesarias que pongan en evidencia la estructura espacial jerarquizada.

En el mundo económico actual, las interdependencias entre naciones, regiones, sectores, firmas, en breve, entre polos económicos, deviene cada vez más y más compleja. Caracterizar estas relaciones implica considerar una estructura económica al interior de la cual los polos se transmiten influencias. El término estructura es muy ambiguo, más - la noción que está detrás de todo nuestro razonamiento implica la volun

dad de poner en evidencia la dependencia de las partes de un objeto - con relación a su totalidad, es decir, el acento es puesto en el carácter relacional de la totalidad que estudia el análisis estructural.

Caracterizar el espacio económico por su heterogeneidad y discontinuidad por una parte, así como pretender una aproximación estructural por la otra, especifica el espíritu de nuestro análisis más no las herramientas aptas para el mismo. Puesto el énfasis en el aspecto relacional, es normal que utilicemos la topología, que en un sentido amplio, es una ciencia que concierne a ciertas propiedades de las figuras geométricas que se mantienen cuando las superficies sobre la cual han sido trazadas sufren deformaciones particulares. Nuestra metodología encuentra, por lo tanto, su fuente en la teoría de las relaciones que desembocan en la teoría de grafos.

Exponer una teoría no siempre es suficiente: el método científico exige que esta teoría sea confrontada con la realidad. En economía espacial esta verificación es muy delicada, principalmente porque los datos son manifestaciones espaciales de fenómenos temporales. Esta dificultad subyacente, no puede constituir una barrera infranqueable, -justamente los modelos por nosotros utilizados toman en cuenta el problema y nos llevan, felizmente, a obtener una jerarquía espacial para el Perú, que -esperamos demostrarlo- es satisfactoria.

En conjunto, en el presente trabajo, sistemáticamente se exploran los diversos problemas generados en la teoría económica espacial -provenientes del hecho de tomar como punto de partida para el análisis



las hipótesis de homogeneidad y continuidad.

En el primer capítulo estudiamos la versión "clásica" de la Teoría del Lugar Central resultante de los trabajos de Christaller y Lösch principalmente, así como, la verificación del esquema teórico. Nuestro interés en el segundo capítulo está orientado a la discusión de la correspondencia entre los espacios económicos y los espacios matemáticos, hilo conductor que nos sumerge en el cuestionamiento de los fundamentos del análisis espacial tradicional. Demostramos aquí cómo la formalización matemática utilizada --el recurso a la métrica euclidiana-- no solamente crea y recrea problemas particularmente delicados a la teoría y el análisis económico espacial sino que de entrada lo sustrae un carácter más general.

En el capítulo tercero, revisamos los fundamentos del análisis espacial. La principal constatación que llegamos a poner en claro es que no se hace necesario ni imprescindible la utilización de espacios métricos y, que por el contrario, la utilización de espacios no métricos permite un análisis más fino, elegante, profundo y rico en conclusiones del fenómeno espacial.

Los modelos utilizados en nuestro análisis son presentados en el capítulo cuarto. En los diferentes modelos de jerarquización nuestra preocupación ha sido la de tratar que ellos revelen la estructura del fenómeno, obtener sus componentes, relaciones de subordinación y enunciar sus propiedades. En nuestra opinión el llamado modelo "Potencia de un Vértice" es el más adecuado para el caso de estructuras (grafos)

con circuitos, proporcionan una jerarquía cardinal en función de la influencia global transmitida y recibida por cada componente. Para grafos sin circuitos hemos recurrido al arsenal teórico de la teoría de la reducción, habiendo logrado poner en evidencia una jerarquía ordinal.

La aplicación empírica que toma en cuenta las críticas planteadas y las herramientas matemáticas propuestas se encuentran en el capítulo quinto. Se ha estudiado la jerarquía de Lugares Centrales para la "Región Norte" y para algunos centros urbanos a nivel Nacional, en función del material estadístico disponible.

En nuestra opinión la conclusión más importante, entre otras más específicas, es la confirmación de nuestra hipótesis: el recurso a las nociones de homogeneidad y continuidad espaciales, tan socorrida por la mayoría de los especialistas regionales, limita, encasilla y restringe el análisis regional. Habiendo asumido que por definición, el espacio es heterogéneo y discontinuo, el empleo de la teoría de grafos nos ha facilitado considerablemente la obtención de una jerarquía de Lugares Centrales.

## CAPITULO I

### LOS MODELOS DE LUGARES CENTRALES

El análisis jerárquico de las ciudades se inicia -como hemos indicado- con la llamada teoría de los "lugares centrales", elaborada por el geógrafo alemán W. Christaller, en 1933.<sup>16/</sup> Las interrogantes que se planteó el autor fueron: "¿hay principios generales que determinan - el número, el tamaño y la distribución de los establecimientos humanos?. ¿Son las localizaciones de las poblaciones, tanto grandes como pequeñas, simplemente un resultado fortuito de la historia, de modo que se han distribuido de alguna forma aparentemente sin sentido?. ¿Puede existir alguna respuesta inevitable a las configuraciones topográficas o geográficas peculiares o a la densidad de la población?. ¿Existe alguna explicación para la aglomeración de las aldeas, aparte del nacimiento de poblaciones, ciudades y centros metropolitanos?. ¿O, es posible encontrar detrás de todas esas causas aparentemente fortuitas, alguna fuerza más fundamental y orgánica?".<sup>17/</sup>

Christaller estaba convencido que la tarea del análisis consistía en descubrir el "patrón simbiótico de la dependencia e interdependencia de varias unidades de la organización económica espacial".

## 1. El Análisis de W. Christaller

El término genérico elegido por el autor para designar a las aglomeraciones urbanas es la de "lugar central", debiendo recalcar que el término "lugar" es esencialmente neutro y que no implica un establecimiento en cualquier sentido completo ni tiene un significado político o económico particular.<sup>18/</sup>

Christaller inicia su análisis con un centro metropolitano, - para lo cual imaginó un conjunto de zonas de mercado con centros urbanos que disminuyen en tamaño desde un territorio muy grande a una zona tan pequeña en superficie y población, que resultaría mínimamente lucrativo para alguien el abrir allí un negocio o prestar un servicio profesional.

Al hablar de "centralismo" de un lugar, Christaller se refiere a que se llevan a cabo ciertas actividades porque algunos de los habitantes tienen "profesiones centrales" y se producen u ofrecen para la venta ciertos "artículos centrales". Los artículos o servicios centrales que se producen o venden en unos cuantos puntos centrales de una región se consumen en muchos puntos dispersos, y se adquieren con las entradas que los comerciantes, los productores y los profesionales del lugar central puedan esperar por la venta de sus productos y servicios. - Así, a menos que los honorarios que un médico puede esperar obtener de sus pacientes, sean lo suficientemente grandes para asegurarle unos ingresos mínimos satisfactorios no habrá médico. Dado que hay una clasificación de lugares centrales, existe también otra correspondiente de -

la naturaleza de los bienes y servicios centrales.<sup>19/</sup>

La función principal de una ciudad es la de servir de lugar central, proveedor de bienes y servicios para su hinterland<sup>20/</sup> o región complementaria, de modo que la importancia de un lugar central no reside tanto en la producción de artículos como en la oferta de bienes y servicios. Los lugares centrales deben ser considerados de acuerdo con sus funciones jerárquicas. Existen lugares centrales de orden superior, por debajo de los cuales hay lugares centrales de orden más bajo, quedando los lugares centrales más pequeños y sus regiones complementarias incluidas en las áreas de mercado de los centros más grandes.

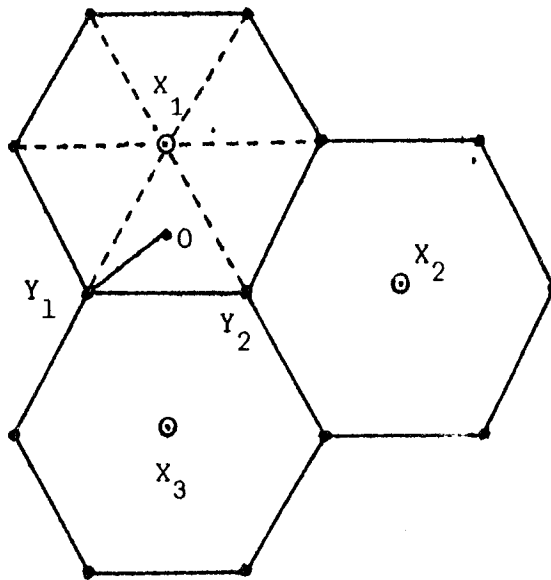
Las investigaciones realizadas para la red urbana de Alemania meridional condujeron a Christaller a postular que los centros urbanos elementales estarán dispuestos en forma tal, que todo punto del territorio no deberá estar alejado del centro en más de 4 kilómetros o una hora de marcha como máximo. Este principio de organización espacial implica una estructura formada por triángulos equiláteros y en una situación de equilibrio a largo plazo, cuando toda el área esté cubierta, se reagruparán en hexágonos regulares.<sup>21/</sup> La conformación de las áreas de mercado hexagonales serán tratadas con más detenimiento, en párrafos posteriores cuando analicemos la contribución de Lösch, principalmente.

En el Gráfico 1, los puntos  $X_1$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$  representan tres centros elementales y forman entre ellos un triángulo equilátero cuyo ortocentro  $O$  no está alejado en más de 4 kilómetros de cada uno de los vértices:  $OY_1 \leq 4$  Kms. La longitud de cualquier lado de este triángulo es

igual, en promedio, a  $4\sqrt{3}$  Kms. y representa la distancia entre dos centros elementales:  $Y_1Y_2 \approx 7$  Kms. Todos los triángulos equiláteros forman un hexágono. Los puntos  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_3$  situados en el centro de los hexágonos representan lugares centrales de rango más elevado y están separados por una distancia igual a  $7\sqrt{3}$  Kms; luego,  $X_1X_2 \approx 12$  Kms.

### GRAFICO 1

La Jerarquía de Ciudades según Christaller



En base a estos principios, Christaller llega a construir una estructura urbana que consta de siete niveles jerárquicos, entre los cuales, la distancia que separa a los centros sigue una progresión geométrica de razón  $\sqrt{3}$ , las áreas de influencia y su población una progresión de razón 3, y el número de lugares centrales una progresión de razón  $1/3$ .

A título indicativo, en el Cuadro 1, incluimos la jerarquía - de lugares centrales obtenida por Christaller.

Para demostrar las posibles interrelaciones jerárquicas entre los lugares centrales, el autor, distingue tres principios: el del mercado (markprinzip), el del transporte (verkerprinzip) y el de la organización administrativa (zuordnungsprinzip).

La diferencia fundamental entre el principio del transporte y el de mercado dice Christaller "es que el primero es lineal y el último territorial; como consecuencia de ello existe una incongruencia básica entre estos dos principios". Mientras que el principio del mercado postula que los lugares centrales deben disponerse en un orden jerárquico sobre un territorio, con el fin de aumentar al máximo la distribución - de varios tipos de artículos con el menor número de lugares centrales, el principio del transporte trata de aumentar al máximo el movimiento - de mercancías con un costo mínimo, para lo cual sería conveniente que - hubiesen tantos lugares centrales como fuera posible, sobre las principales vías de tránsito y que éstas fuesen tanto como fuere posible rectas.

Las formas de organización espacial según el principio del -- mercado y del transporte son igualmente "racionales" a partir de puntos de vista económicos y la diferencia se debe a la importancia de los objetivos perseguidos. No puede esperarse, sin embargo, el mismo grado - de racionalidad si los lugares centrales son el resultado del principio de la organización administrativa ya que cuando las ciudades centrales

CUADRO 1

JERARQUIA DE LUGARES CENTRALES SEGUN CHRISTALLER

Clases de Centros	Distancia Aprox. entre Centros (en Kms.)	Area de Influencia (en Kms <sup>2</sup> )	Población de los Centros	Población Aprox. Total del Area de Influencia	Número de Lugares Centrales
1. Burgo de Mercado	7	45	800	2,700	486
2. Burgo de Comercio al Por Mayor	12	135	1,500	8,100	162
3. Ciudad de Jurisdicción	21	400	3,500	24,300	54
4. Ciudad de Distrito	36	1,200	3,000	9,000	18
5. Ciudad de Prefectura	62	3,600	27,000	225,000	6
6. Ciudad de Provincia	108	10,800	90,000	675,000	2
7. Capital Regional	186	32,400	300,000	2'025,000	1

Fuente: Christaller W., Central Place in Southern Germany.



son centros administrativos importantes y los centros subordinados se encuentran dispersos con fines esencialmente gubernamentales, jurídicos y de otras índoles no económicas, puede no haber la lógica económica necesaria en el patrón resultante.

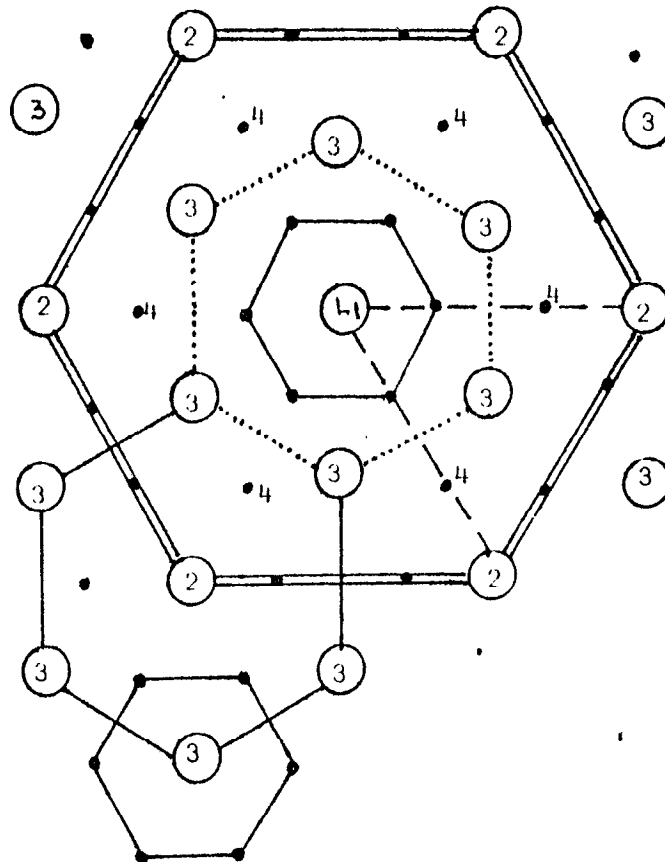
Si el objetivo primordial es facilitar la mayor cantidad de artículos centrales por el mínimo número de lugares centrales, la mejor forma de hacerlo es por el principio del mercado; éste conduce a una estrutura hexagonal regular que evoca el análisis de Lösch y postula un espacio homogéneo y abstracto.

Según el Gráfico 2, el mayor lugar central  $L_1$  puede suministrar bienes y servicios centrales a toda la zona limitada por el perímetro  $L_2$  cuyos centros son vértices de seis triángulos equiláteros centrados en  $L_1$ . Los lugares  $L_2$  tendrán regiones complementarias limitadas por perímetros  $L_3$  y abastecerán bienes y servicios centrales de orden inferior. Los lugares  $L_3$  serán centros limitados por lugares  $L_4$  y abasteceraán bienes y servicios centrales de orden más bajo.

El principio del transporte delimita las áreas de influencia urbana a lo largo de los ejes del transporte y se refiere a un espacio ordenado y concreto. Como la finalidad es satisfacer la máxima demanda para el transporte de bienes al costo mínimo, es obvio que deben encontrarse en cada sentido del tráfico tantos lugares centrales como sean posibles.

GRAFICO 2

Dispersión de los lugares centrales, de acuerdo con el principio del mercado



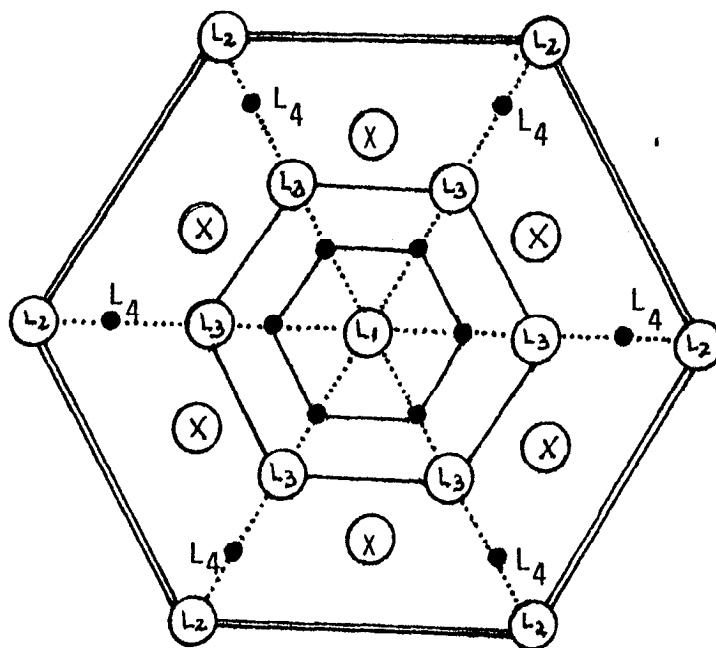
Fuente: Johnson E., The Organization of Space in Developing Countries.

En el Gráfico 3, a partir de  $L_1$  que es el lugar central más grande, parten vías de tránsito a las ciudades  $L_2$ , en los ángulos del perímetro de la región complementaria de  $L_1$  -hexagonal-. Si lo permite la topografía, habrán seis vías radiales principales de transporte que pasarán por todas las ciudades  $L_4$  de la espiral más interna de lugares centrales en torno a  $L_1$ . El problema se sitúa en los lugares  $L_3$ , pues éstos tendrán que girar -a partir de sus localizaciones en el Gráfico 2- con el fin de que todos los lugares  $L_3$  se encuentren en vías directas -

entre  $L_1$  y  $L_2$ ; pero cuando se haya realizado eso, los seis triángulos - no tendrán ya lugares de tamaño  $L_3$  en sus centros, y si todo el territorio hexagonal debe proveerse adecuadamente de lugares centrales, se necesitarán seis centros  $L_3$  más en los lugares marcados con una X en el Gráfico 3. Esto significa que serán necesarios dos veces más lugares  $L_3$ , como en la dispersión que se muestra en el Gráfico 2 ya analizado.

GRAFICO 3

Dispersión de lugares centrales, de acuerdo con el principio del transporte



Fuente: Johnson E., The Organization of Space in Developing Countries.

En cuanto al principio de organización política y administrativa del espacio, apoyándose en consideraciones de desarrollo de ciudades con fines de defensa de los límites nacionales, en donde sólo pueden contar con zonas regionales fraccionadas o, ciudades que habiendo tenido una región complementaria pierden virtualmente todas sus zonas de mercados cuando se llevan a cabo cambios drásticos en las fronteras políticas, o aún de ciudades fronterizas inherentemente frágiles desde el punto de vista económico porque las fronteras nacionales cortan artificialmente regiones geográficamente complementarias, Christaller plantea que un centro administrativo debe controlar siete centros de rango inmediatamente inferior -contra tres, según el principio del mercado-. Quizás la única consideración de carácter general que puede obtenerse, es que cuando el territorio, se organiza según este principio, se necesitarán mucho más lugares centrales, para obtener la misma eficiencia territorial que se alcanzaría si fuese usado el principio del mercado.

## 2. El Análisis de A. Lüscher<sup>23/</sup>

Con el fin de eliminar cualquier diferencia espacial de origen no económico y aproximarse a un modelo ideal de región, Lüscher parte de la hipótesis de un espacio o llanura homogénea en la que los bienes y factores de producción están uniformemente repartidos, pudiendo esta repartición ser continua o discontinua si es que se considera que los bienes y factores están agrupados en puntos uniformemente ubicados en el espacio. También supone, que los costos de transporte son iguales en cualquier dirección, o lo que es lo mismo, razona en lo que los economistas llaman la "superficie de transporte".<sup>24/</sup>

Lösch inicia su análisis a partir de aldeas campesinas nucleadas, cuyos productores viven en un régimen de economía cerrada y producen un bien que es la cerveza. Las hipótesis asumidas por el autor, le permiten afirmar que hay un espaciamiento regular de las explotaciones agrícolas las cuales están distribuidas de manera triangular en una llanura agrícola.

Desde el instante en que un productor campesino produzca un bien -cerveza en el ejemplo de Lösch- en una cantidad superior a la que le es necesaria, encontrará las ventajas de la especialización y de la producción en masa. Estas ventajas están contrabalanceadas, sin embargo, por los gastos de transporte que limitarán la salida de su producto.

Sea  $(t)$  la tarifa de transporte por unidad de distancia  $(p)$  - el precio del producto y  $(k)$  la distancia que separa al productor de un consumidor potencial.

El precio CIF del bien para el consumidor será igual a  $p + kt$ . En el Gráfico 4, el precio FOB es igual a  $Op$ . Cuanto más alejado esté el consumidor del centro de producción mayor será el precio que debe de desembolsar.

Cada consumidor posee una curva de demanda con inclinación normal: cuanto mayor sea el precio menor será la cantidad demandada. En el punto F (Gráfico 5) los gastos de transporte son tales que el bien ya no es adquirido. La curva de demanda individual espacial, es función del precio CIF pagado por el consumidor:  $d = f(p + kt)$

haciendo  $kt = c$ ,  $d = f(p + c)$  en donde  $(c)$  representa el gasto de transporte para el consumidor individual.

GRAFICO 4

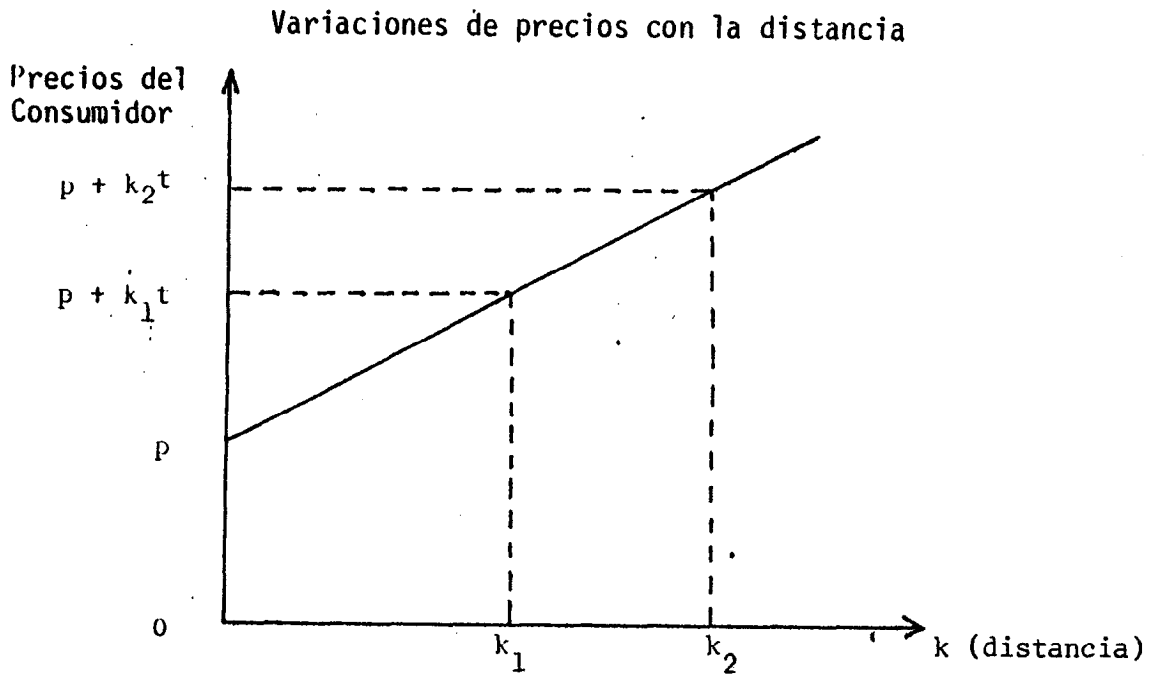
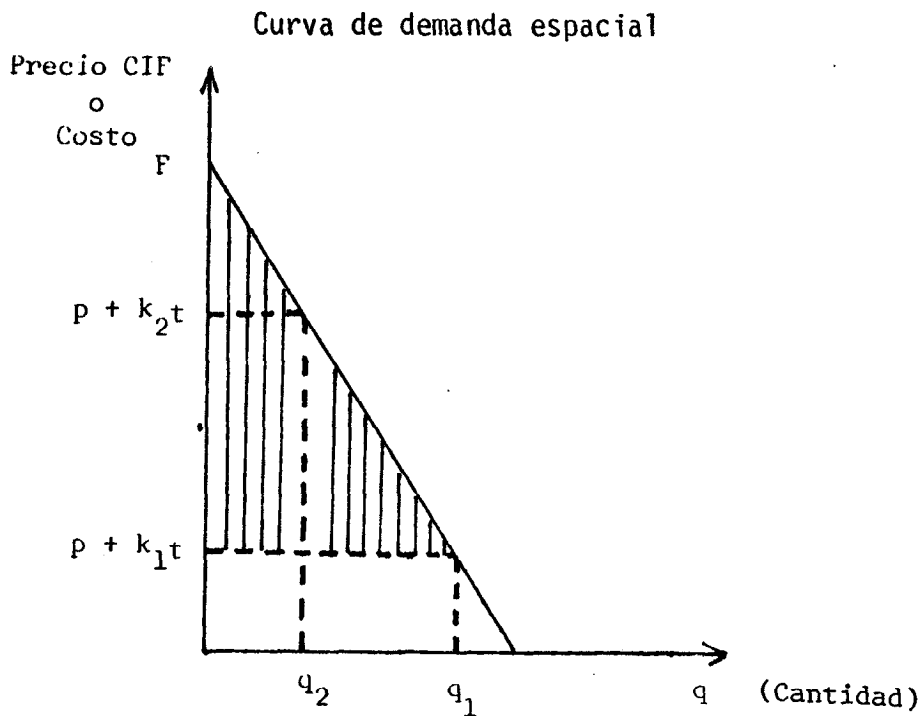


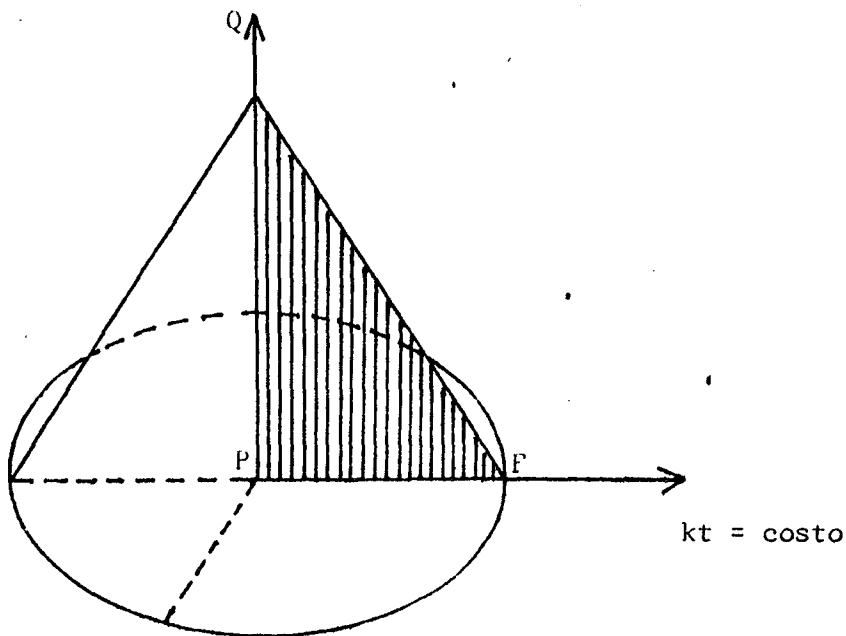
GRAFICO 5



El área del mercado para el productor dependerá de su curva de demanda y del precio CIF. El productor puede realizar sus ventas en cualquier dirección en torno a su "cervecería", de manera que, para cualquier precio, la demanda que le es dirigida puede expresarse mejor como un cono de demanda. (Ver Gráfico 6).

GRAFICO 6

Cono de demanda



La cantidad demandada por el consumidor contiguo a la fábrica es PQ. Si el consumidor está ubicado en (F) no compra nada. La venta total en función del precio es igual al volumen del cono generado por el triángulo PQF cuando gira alrededor del eje PQ. La distancia PF representa el costo de transporte "crítico" y corresponde al radio del círculo que constituye la base del cono de demanda.<sup>25/</sup> Lösch agrega que el volumen del cono de demanda debe multiplicarse por una constante

que proviene de la densidad de la población y el resultado indica, entonces, la demanda total (D) dados el precio en fábrica y la tarifa de transporte por unidad de distancia.

Sea  $b/2$  la densidad poblacional en la planicie homogénea. En términos algebraicos la demanda total (D) es igual a: 26/

$$D_i = b n \int_p^F f(p_i + c) c \, dc$$

En realidad, el precio del producto no está dado como hemos supuesto, sino que depende de la demanda total. Si la curva de costos medios a largo plazo (o curva de planeamiento como la denomina Lösch) es dada, entonces, pueden ser determinados los costos medios para diferentes niveles de producción.

El resultado anterior es registrado en el Gráfico 7. Vemos aquí, que solamente cuando la curva de costos medios a largo plazo corta o es tangente a la curva de demanda, la firma puede producir para el mercado. Si las curvas no se encuentran, el bien no llegará a ser un artículo de mercado, debido a que son muy altos los gastos de transporte, o escasas las ventajas de una producción en gran escala, que hacen que una producción pequeña sea antieconómica.

Las hipótesis precedentes implican que la forma del área de mercado de un centro será circular (ver Gráfico 8). Este esquema se modifica por la introducción de una restricción suplementaria: el espa



cio debe ser totalmente provisionado. A medida que nuevos vendedores aparecen, el espacio se divide en círculos que delimitan un área de mercado para cada firma. Estas áreas de mercado, estando dado, deben provisionar el máximo de espacio, deben ser tangentes.

GRAFICO 7

Curva de costo medio a largo plazo

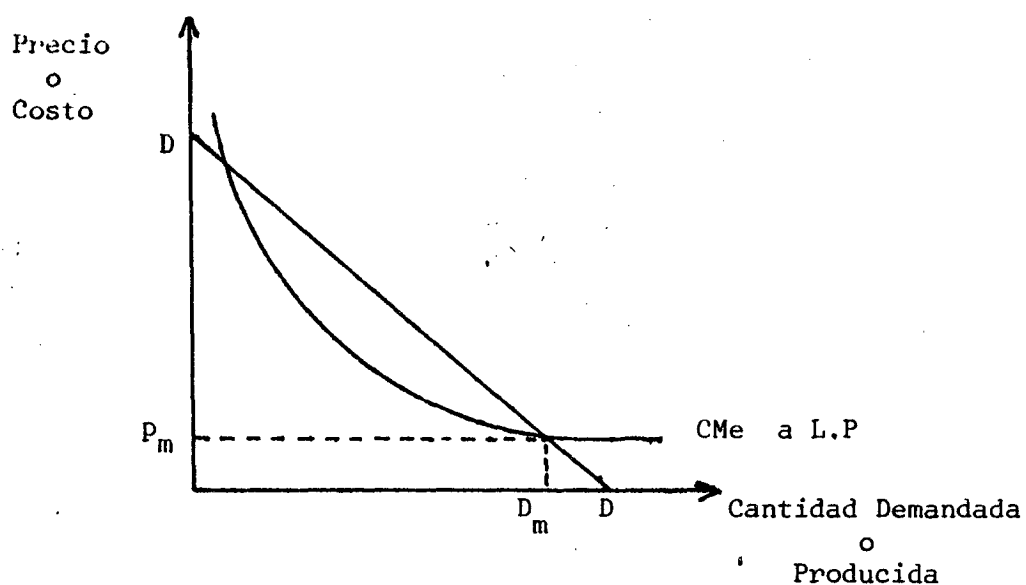
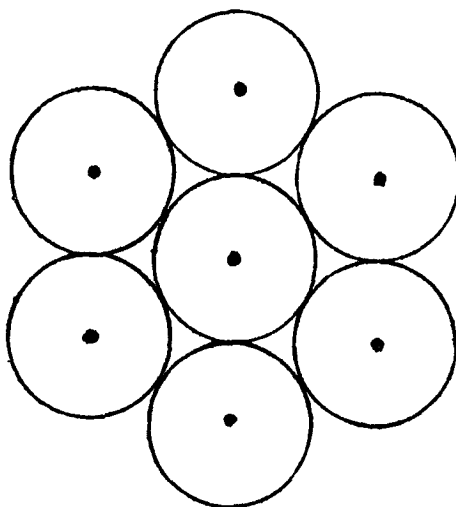


GRAFICO 8

Area de mercado circular

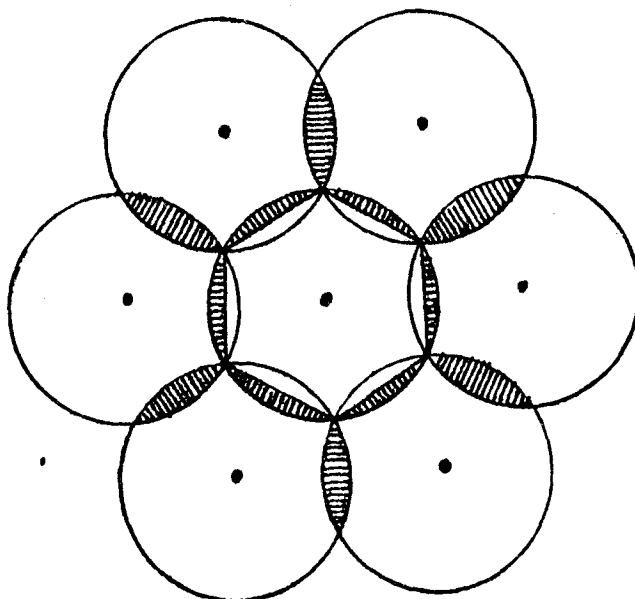


Con estas áreas circulares tangentes, siempre existirán espacios vacíos. Si tomamos dos productores, por ejemplo, sus áreas de mercado se irán aproximando y de tangentes devendrán secantes; los vacíos serán llenados y cada zona común a dos círculos se reparte por igual entre ellos según la recta que une sus puntos de intersección.

Si los consumidores son racionales frecuentarán el centro más próximo con el fin de minimizar sus costos de transporte. Al mismo tiempo, dado que todos los consumidores deben ser satisfechos, las áreas de mercado se interconectan como en el Gráfico 9, y toman una forma hexagonal: cada productor se encuentra en el centro de un hexágono, porque tiene seis competidores que lo rodean, luego seis segmentos de recta delimitarán su área de mercado.

GRAFICO 9

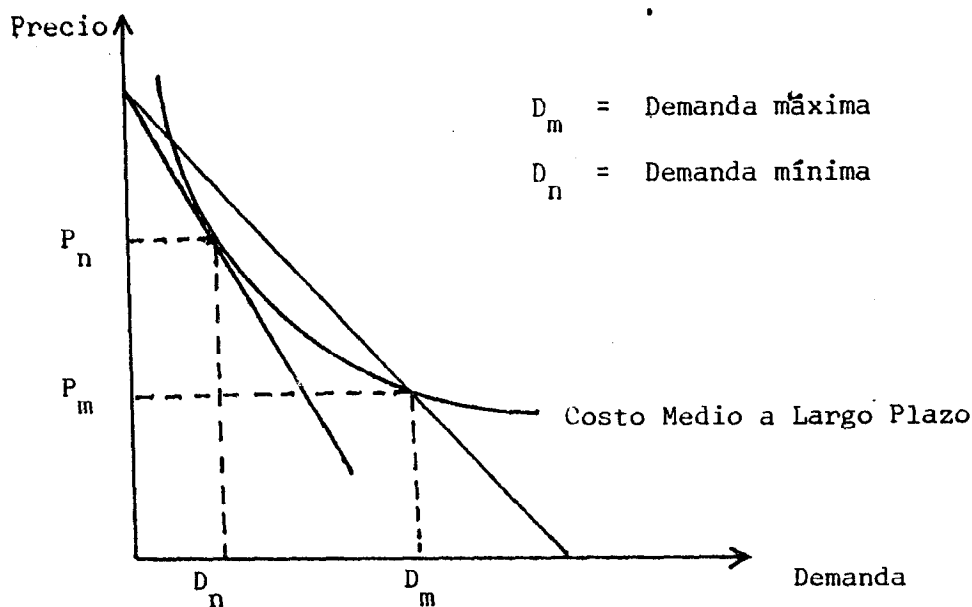
Areas de mercado hexagonales



La superficie del hexágono es menor que la del círculo que lo circunscribe, por lo tanto, la curva de demanda DD del Gráfico 7 se des<sup>u</sup>plaza hacia la izquierda como en el Gráfico 10. Si asumimos por hipóte<sup>u</sup>sis que hay libre entrada de firmas, el proceso de competencia espacial se intensifica y sólo se estabilizará cuando ya no exista ninguna firma que obtenga beneficios derivados de su situación espacial. En el equi<sup>u</sup>librio, la curva de demanda del bien es tangente a la curva de costo a largo plazo de la firma.<sup>27/</sup>

GRAFICO 10

Curva de demanda del bien en equilibrio

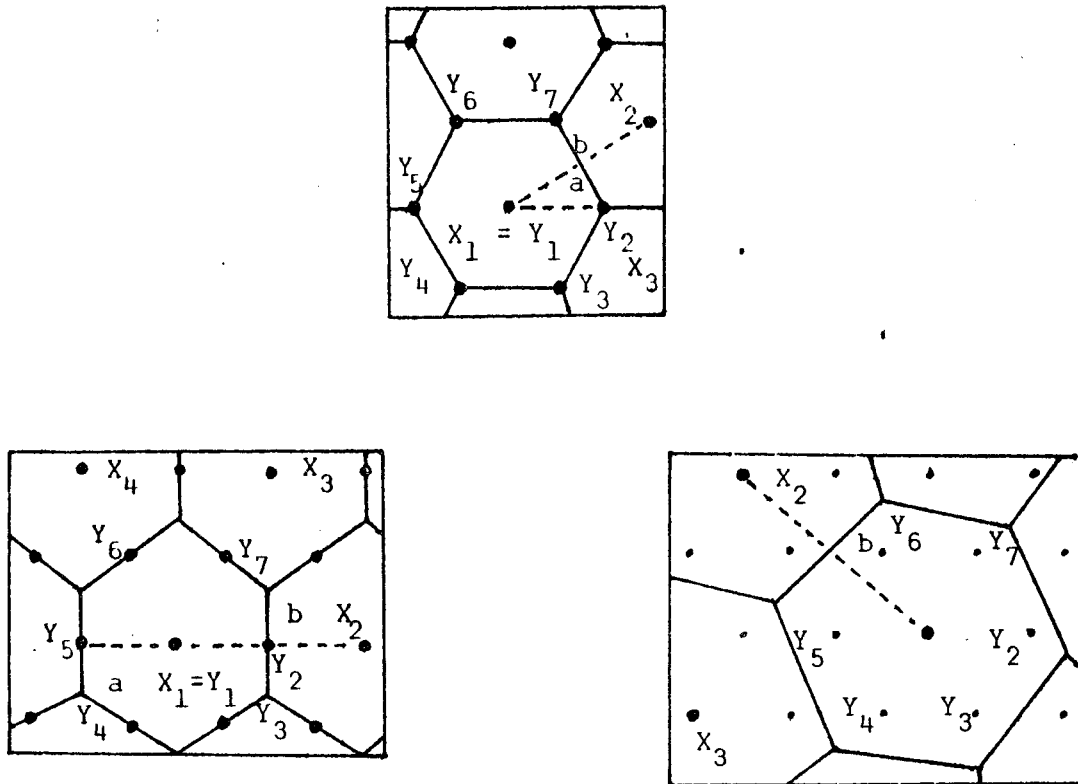


En la teoría loschiana, el hexágono representa el área elemen<sup>u</sup>tal de mercado y es a la vez la forma económicamente óptima. Aún supo<sup>u</sup>niendo que la repartición de la población es discontinua, ésta puede -

reagruparse en puntos equidistantes. Pueden existir, por lo tanto, -- tres disposiciones típicas de hexágonos que según su inclinación, permitirán que un mismo centro de producción  $X_1$  por ejemplo, pueda aprovisionar un número variable de fincas.<sup>28/</sup> (Ver Gráfico 11).

### GRAFICO 11

Localización de los compradores en los vértices, en los lados o al interior del hexágono



Según el caso de la distancia notada (a) entre un vendedor -  $X_1$  y un comprador espacialmente marginal -es decir, aquel consumidor - que se encuentra más alejado, pero su demanda es aún necesaria-  $Y_2$  va-- ría:

- i) Si los compradores se encuentran localizados en los vértices, la distancia entre el vendedor  $X_1$  ( $= Y_1$ ) y los compradores más alejados  $Y_2, Y_3, \dots, Y_7$  es igual a la distancia (a) entre  $X_1$  e  $Y_2, X_1$  e  $Y_3$  etc. Por la competencia de  $X_2$  y  $X_3$  en  $Y_2$ , de  $X_3$  y  $X_4$  en  $Y_3$  etc.,  $X_1$  aprovisionará tres centros y no siete como aparentemente sucede. En efecto,  $X_1$  se satisface asimismo ( $X_1 = Y_1$ ) y a un tercio de cada uno de los demás compradores situados en el mercado. La superficie del área de mercado de  $X_1$  es igual a  $3a^2 \sqrt{3/2}$  y la distancia (b) entre  $X_1$  y  $X_2, X_1$  y  $X_3, \dots, X_1$  y  $X_7$  es igual a  $a\sqrt{3}$ . Este es un sistema óptimo desde el punto de vista del aprovisionamiento. Este caso en general es notado por  $K = 3$ .
- ii) Cuando los compradores están situados en el medio de los lados, la distancia entre  $X_1$  ( $= Y_1$ ) e  $Y_2, Y_3, \dots, Y_7$  es igual a (a). Por la competencia de  $X_2$  en  $Y_2$ , de  $X_3$  en  $Y_3$ , etc.,  $X_1$  aprovisiona el valor de cuatro fincas, es decir,  $X_1$  ( $= Y_1$ ) completamente más un medio de las seis fincas restantes  $Y_2, Y_3, \dots, Y_7$ .

La distancia (b) de  $X_1$  a  $X_2$  es establecida por Lösch como igual a  $a\sqrt{4} = 2a$ .

Este sistema es óptimo desde el punto de vista de las comunicaciones, dada que la relación entre dos centros  $X_1$  pasa por un centro de orden inferior. La notación general es  $K = 4$ .

iii) Si los consumidores están localizados al interior del hexágono, el centro  $X_1$  aprovisiona entonces siete fincas:  $Y_1, Y_2, \dots, Y_7$ . La distancia (a) es siempre la misma, en cambio la distancia (b) de  $X_1$  a  $X_2$  es igual a  $a\sqrt{7}$ .

Este sistema es óptimo desde el punto de vista administrativo ya que las áreas de los centros aprovisionados están totalmente comprendidas en el área de influencia de  $X_1$ . - En este caso,  $K = 7$ .

Definidas la localización de los centros y la forma de sus áreas de mercado, nos queda por determinar tan sólo, la relación que mantienen los centros entre sí.

Esta relación es una relación funcional: la función de un centro es la de procurar bienes y servicios centrales a su hinterland, o dicho de otra manera, la función de un centro está relacionado con los bienes y servicios disponibles en el mismo.

Si un centro posee la función (m), posee igualmente todas las funciones de (m) a 1. Entonces, un centro de función (m) aprovisiona totalmente en bienes (m) a un número variable de centros de función (m-1) de acuerdo con las diferentes formas posibles de localización en las áreas hexagonales.

Lösch, contrariamente a Christaller, parte del centro que posee la función más pequeña y obtiene una red hexagonal para un solo con

junto de bienes. Alrededor de cada centro hay todo un conjunto de áreas hexagonales.

La relación obtenida por Lössch es muy simple: la distancia entre dos centros de producción, que llamamos (b), es igual a la distancia entre los centros aprovisionados, que llamamos (a), multiplicada por la raíz cuadrada de su número, ( $\sqrt{n}$ ):

$$b = a \sqrt{n}$$

La conclusión de Lössch está representada en el Cuadro 2, que indica para cada área los valores de (n) -número de centros completamente aprovisionados, comprendido el centro de producción-, de (b) y (a).

CUADRO 2

Area N°	n	b	a
1.....	3	$a \sqrt{3}$	a
2.....	4	$a \sqrt{4}$	a
3.....	7	$a \sqrt{7}$	a
4.....	9	$a \sqrt{9}$	$a \sqrt{3}$
5.....	12	$a \sqrt{12}$	2a
6.....	13	$a \sqrt{13}$	$a \sqrt{3}$
7.....	16	$a \sqrt{16}$	2a
8.....	19	$a \sqrt{19}$	2a
9.....	21	$a \sqrt{21}$	$a \sqrt{7}$
10.....	25	$a \sqrt{25}$	$a \sqrt{7}$

Fuente: Lössch, Teoría Económica Espacial.

Finalmente Lösch establece que el área de mercado de una finca es igual a:

$$a^2 n = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

pero no proporciona una fórmula que permita calcular el valor de (n).

Una expresión general para determinar (n) ha sido propuesta - por W. Känzig<sup>29/</sup>, dada por:

$$n = (K \sqrt{3})^2 + 1^2$$

para un área número (h), la cantidad de asentamientos abastecidos includa la finca central, cuando se determinan los valores K y 1.

En base a las consideraciones del párrafo anterior, Känzig - afirma que siempre existirá un número entero (m) tal que:

$$(m + 1) (m - 2) < h \leq (m + 1) (m - 2) + 2m$$

y haciendo la expresión  $(m + 1) (m - 2) + 2m = h_0$  presenta dos casos posibles:

$$1) \text{ Si } h_0 - h < m, \text{ entonces, } K = \frac{2m-1}{2}; \text{ y } 1 = \frac{2m-1}{2} - (h_0 - h)$$

$$2) \text{ Si } h_0 - h \geq m, \text{ entonces, } K = m-1; \text{ y } 1 = (2m-1) - (h_0 - h)$$



De esta forma, las 17 menores áreas de mercado tendrían las siguientes cantidades de compradores equivalentes: 3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, 19, 21, 25, 27, 28, 31, 37, 39, 43.

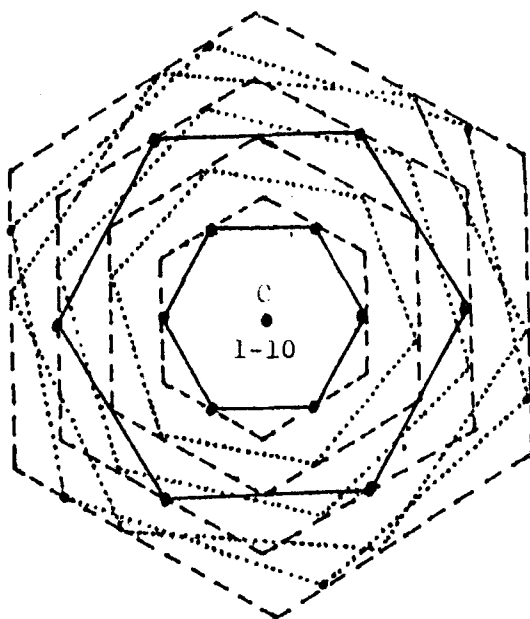
El gráfico establecido por Lösch para las 10 áreas de mercado más pequeñas y que nosotros reproducimos seguidamente, indica que, a pesar de la equidistancia de los centros de consumo, se llega con esta construcción rigurosamente geométrica a distinguir alrededor del centro C "seis sectores ricos en ciudades" -es decir lugares de producción- que alternan con otros "seis sectores pobres en ciudades".

El Gráfico 12, permite además darse cuenta que cada área de mercado es hexagonal y está generada por una multiplicidad de áreas de mercado superpuestas, lo que indica que las funciones espaciales en cada centro serán diferentes. Estas redes de hexágonos, se ordenan en un sistema de redes, cuando se combinan las áreas de mercado de varios productos heterogéneos, que Lösch los dispone de manera tal que tengan un centro de producción común C -que se beneficia de una importante demanda local- y luego comienza a hacer girar las redes alrededor del centro, lo que le permite obtener como antes seis sectores ricos en ciudades y, en consecuencia, líneas de transporte óptimas puesto que habrá una coincidencia creciente de actividades de los diversos asentamientos y una disminución correlativa de kilómetros de transporte. Lo que Lösch entiende por región es precisamente este sistema de redes de áreas de mercado, cuya dimensión depende del área de mercado más grande entre todas las áreas que lo componen. Este sistema es vecino de otros y constituye con ellos, cuando son lo suficientemente numerosos, las redes de sis

temas que están formadas igualmente por hexágonos.

### GRAFICO 12

Areas de mercados más pequeños ordenadas a partir de la primera



Resumiendo, la construcción de Lösch parte del hexágono o área de mercado específica de un producto, el sistema se complica paulatinamente hasta definir ensamblajes de regiones, reconstituyendo así las relaciones espaciales sobre una base estrictamente geométrica.

Este calificativo de geométrico caracteriza a la vez los méritos y límites de las teorías examinadas. Los méritos residen en la elaboración de hipótesis suficientemente generales y abstractas como -

para permitir la utilización de las herramientas matemáticas. Los límites provienen del hecho que el muestreo geométrico proporciona sólo representaciones que participan del carácter de las hipótesis en las cuales se basan, es decir una concepción esquemática del espacio, que conlleva a configuraciones -geométricas- en las cuales se percibe muy rápidamente el carácter parcial y las insuficiencias.

### 3. Otras Contribuciones

E. Mills y M. Lav,<sup>30/</sup> generalizaron el sistema de Lösch. Demostraron que el área de mercado hexagonal es sólo un caso particular de una forma más general. Las hipótesis de base del sistema loschiano son mantenidas, luego puede afirmarse que este modelo es sólo un refinamiento del de Lösch.

M. Beckman<sup>31/</sup> en un artículo clásico, formaliza el sistema de lugares centrales y parte del supuesto de una relación estable entre la población de un lugar central y la del área de mercado servida. Este modelo está muy extendido en la literatura,<sup>32/</sup> razón por la cual no será tratado por nosotros, aunque nos permitimos incluir algunos comentarios.

Cuando Beckman toma  $K = 3$  ( $K$ , representa el número de áreas de mercado de nivel  $m-1$  incluidas en un área de mercado de nivel  $(m)$ ) contabiliza la población del centro por partida doble: una, como población de un centro de nivel  $(m)$  y otra, en tanto que centro de nivel  $m-1$ . El error de Beckman puede ser atribuido al hecho que en un sistema  $K = 3$ ,

el número de centros en cada nivel, contados a partir del de rango más alto sugiere la secuencia 1, 2, 6, 18, 54, o sea, que después del segundo nivel hay 3 veces más centros que en el precedente, y esto es así - porque el autor supuso que los centros de un nivel dado dominan en bloque a todos los centros de rango inferior.

El modelo de Beckman ha sido reestructurado por J. Parr<sup>33/</sup>, - por M. Dacey<sup>34/</sup> y por Beckman y McPherson.<sup>35</sup>

El modelo de Parr es muy similar al de Beckman y sus resultados difieren sólo porque los términos son elevados a la potencia  $m-1$  - que el autor llama razón de proporción.

El aporte de Dacey es mucho más interesante. En efecto, parte de dos hipótesis:

- i) La población de un centro es una función lineal del empleo en el mismo, y
- ii) El empleo en un centro es función de la población del área de mercado de ese centro.

El análisis de Dacey y Beckman depende del supuesto de la relación entre la población de un lugar central y la población del área de mercado servida por ella. Sin embargo, el factor (k) empleado por ambos autores no es comparable pues no sólo emplean variables diferentes para encontrarlo sino que en Dacey varía con cada nivel de la jerar

quía, mientras que en Beckman es una proporción constante de la población del centro a la población total servida.

Ambos autores llegan a plantear que la población aprovisionada por un lugar de orden uno es igual a:

$$\frac{rk_1}{1-k_1} \text{ para Dacey; y a } \frac{r}{1-k} \text{ para Beckman}$$

relación en la cual ( $r$ ) representa a la población rural.

La diferencia sustancial entre ambos autores es que Dacey para determinar la población de un centro de función ( $m$ ), toma en cuenta ( $m$ ) valores de ( $k$ ), a diferencia de Beckman que utiliza solamente uno.

Las sugerencias de Parr y Dacey, llevaron a Beckman y PcPherson a elaborar un nuevo modelo en el que el factor ( $k$ ) varíe según el nivel de las ciudades en la jerarquía.

Sea:

$m$  = Nivel jerárquico dentro del sistema ( $m=1, \dots, N$ ).

$p_m$  = Población de un centro de nivel ( $m$ ).

$r_m$  = Población del área de mercado (área tributaria) de una ciudad de nivel ( $m$ ); la población de tal ciudad no se incluye.

$r_1$  = Población del área de mercado más pequeña, la cual con los supuestos usuales de la teoría del

lugar central es una población rural.

$K_{m-1}$  = Factor indicativo de la geometría del sistema de lugares centrales, que especifica el (equivalente) número de áreas de mercado de nivel  $m-1$  que entran en un área de mercado de nivel  $m$ , donde  $m > 1$  y en un sistema de lugares centrales de tipo Christaller  $K_{m-1}$  será idéntico para todos los  $m > 1$  y simplemente puede ser expresado por  $K$ .

$K_{m-1}^{-1}$  = El (equivalente) número de ciudades satélites -- del nivel  $m-1$ , los cuales son servidos por una ciudad de nivel  $m$ .

$k_m$  = Propensión a formar ciudades de funciones con un nivel  $m$ ; el valor  $k_m$  debe ser tal que sea --  $0 < k_m < 1$  y la  $\sum_{i=1}^N k_i$  debe ser menor que la undad.

Los autores representan la población de un centro de nivel  $u$  no por la ecuación:

$$p_1 = k_1 (r_1 + p_1) = r_1 k_1 (1 - k_1) \quad (1)$$

Para generalizar (1), explícitamente asumen que el tamaño de un centro es función de su población y de la del área complementaria. - La expresión (2) es derivada considerando una estructura jerárquica cuyo centro de orden  $m$  procure igualmente todos los bienes de orden más

bajo.

$$p_m = \sum_{i=1}^m k_i (p_m + r_i) \quad (2)$$

o bien

$$p_m (1 - \sum_{i=1}^m k_i) = \sum_{i=1}^m k_i r_i \quad (2')$$

Beckman y McPherson elaboran luego la expresión (3) que les permitirá valorar  $K_{m-1}$  y que varía con  $m > 1$ . La solución para  $p_m$  obtenida por ellos utilizando ecuaciones diferenciales y sustituciones sucesivas se escribe:

$$p_m = r_1 \left[ \frac{k_1}{1-k_1} + \frac{1}{1-k_1} \sum_{i=2}^m \frac{k_i}{1 - \sum_{t=1}^{i-1} k_t} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{k_j (1 - \sum_{v=1}^r k_v)}{1 - \sum_{v=1}^{j+1} k_v} \right]$$

Parr y colaboradores<sup>36/</sup> demuestran más tarde que el modelo de Beckman y McPherson y el de Dacey presentan cierta similitud. Prueban que el segundo es sólo un caso particular del primero y que ambos modelos pueden ser presentados en términos de la teoría de la base económica.

Un ejemplo de un sistema de lugares centrales en el cual  $K_{m-1}$  varía con  $m > 1$  es presentado a continuación:

Asumamos que  $K_{m-1}$  toma los valores  $K_1=3$ ,  $K_2=4$ ,  $K_3=3$ ,  $r_1 = 1,000$  -  
 $k_1 = 0.30$ ,  $k_2 = 0.25$ ,  $k_3 = 0.10$  y  $k_4 = 0.05$ .

En base a la ecuación (3) se ha calculado el Cuadro 3.

CUADRO 3  
 SISTEMA DE LUGARES CENTRALES CON  $K_{m-1}$  VARIABLE Y  
 $K_1=3$ ,  $K_2=4$  y  $K_3=3$

m	$k_m$	$r_m$	$p_m$	N° de ciu- dades	N° de Areas Centrales
1	0.30	1,000	429	24	36
2	0.25	3,858	2,809	9	12
3	0.10	23,859	10,429	2	3
4	0.05	92,435	27,573	1	1

Fuente: Parr y et.al. City Size Models and the Economic Base. J.Q.R.S. 1975, Pág. 7.

En síntesis, esta segunda formulación de Beckman y McPherson es más general que la del primer modelo, sobre todo porque el factor (k) varía de acuerdo con los niveles de los centros en la jerarquía. Además, llegan a poner en claro que la importancia de un centro depende básicamente de la densidad de la población rural.

La formulación actual de la teoría del lugar central, sin lugar a dudas, debe mucho a B. Berry que ha consagrado lo esencial de -



sus investigaciones a esta teoría. La obra que en cierta medida contiene lo central de sus contribuciones es su "Geografía de los Centros de Mercado y Distribución al por Menor"<sup>37/</sup> y en ella nos apoyaremos para escribir los párrafos siguientes.

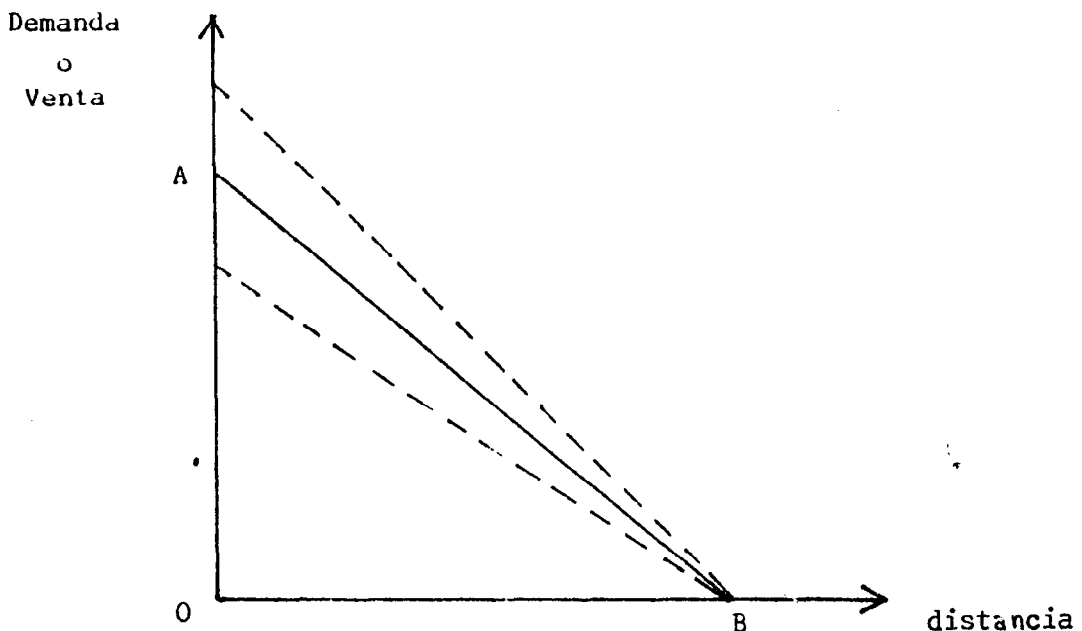
Para dar mayor flexibilidad a su teoría Berry introduce los conceptos de rango de un bien y nivel de mercado.

El rango de un bien es la distancia máxima que los consumidores están dispuestos a recorrer para procurarse el bien. El nivel de mercado es el número mínimo de consumidores necesarios.

Estos conceptos pueden presentarse esquemáticamente, tal como se hace en el Gráfico 13.

GRAFICO 13

Variaciones de la demanda en función de las variaciones de la distancia



Las ventas del lugar O disminuyen a medida que nos alejamos del mismo porque el precio del bien aumenta debido a que los costos de transporte se elevan. Los individuos que habitan entre O y B van a frecuentar el centro O para obtener allí el bien en cuestión. Las personas que habiten más allá de B irán a otro centro. La distancia OB puede ser interpretada como el rango del bien considerado mientras que el nivel de mercado está dado por la superficie del triángulo OAB. Si la demanda en O es inferior a A, la firma que ofrece el bien A en O tendrá interés en parar la producción del mismo, en cambio si la demanda en O es superior a A, la firma tendrá beneficios excesivos.

El método utilizado por Berry para clasificar los lugares centrales toma en cuenta no la población sino los bienes y servicios que puedan en él hallarse, para lo cual recurre a los procedimientos del llamado análisis factorial.<sup>38/</sup> Esta metodología le permite obtener una jerarquía de lugares centrales, pero para ello es necesario censar todas las funciones cumplidas por un centro.

Las conclusiones a las que llega Berry son difícilmente cuestionables y lo único que quizás podría admitir cierta reserva es el principio de base de los estudios funcionales. En efecto, los centros son clasificados <sup>por</sup> los bienes y servicios en él disponibles, lo que supone implícitamente que los establecimientos poseen ese bien, por lo tanto, la oferta del mismo debe estar perfectamente adaptada a la demanda. Asimismo, el tamaño del oferente no es tomado en consideración. En el plano empírico, el método implica el conocimiento de todos los establecimientos que se hallan en el centro.

Para la formalización del modelo, debe tenerse en cuenta que un sistema de lugares centrales se desarrolla en una región para proporcionar los bienes y servicios que demandan los consumidores que viven en esa región.

Sean:

$C$  = Población de un centro.

$r$  = Población del área servida por ese centro.

$P$  = Población total servida por el centro =  $C+r$ .

$D_m$  = Distancia máxima que los consumidores están dispuestos a recorrer para ir a un centro de tamaño dado.

$A$  = Superficie del área de mercado.

$d_r$  = Densidad de la población del área.

$d_p$  = Densidad total.

$L$  = Número de funciones centrales cumplidas por un centro.

$E$  = Número de establecimientos en un centro.

$F$  = Número de unidades funcionales en un centro (para los centros pequeños  $F > E$ ).

Berry plantea tres ecuaciones definicionales:

$$A = f(D_m) \quad (1)$$

La superficie del área de mercado es una función de la distancia máxima que el consumidor está dispuesto a recorrer.

$$r = Ad_r = f(D_m) d_r \quad (2)$$

La población del área de mercado es igual al producto de su superficie por su densidad.

$$P = Ad_p = f(D_m) d_p \quad (3)$$

El área del centro es no significativa con relación al área del mercado.

El modelo contempla, además, cuatro ecuaciones estructurales:

$$\log C = \alpha_1 + \beta_1 L \quad (4)$$

La población de un centro es función de sus actividades. La población aumenta a una tasa constante por cada función central adicionada.

$$\log F = \alpha_2 + \beta_2 L \quad (5)$$

El número de unidades funcionales crece a una tasa constante por cada función central agregada.

$$\log F = \alpha_3 + \beta_3 \log C \quad (6)$$

El número de unidades funcionales aumenta a una tasa igual que el incremento de la población.

$$\log D_m = \alpha_4 + \beta_4 L \quad (7)$$

Existe una distancia máxima que los consumidores están dispuestos a franquear para dirigirse a un centro de cierta función. Esta distancia aumenta con una tasa constante cuando una función central adicional es considerada.

A partir de las ecuaciones (4), (5), (6) y (7) Berry muestra que se pueden expresar las ecuaciones (1), (2) y (3) en la forma siguiente:

$$\log A = \log f(\log^{-1}(\alpha_4 - \beta_4 \alpha_1 \beta_1^{-1}) C^{\beta_4/\beta_1}) \quad (1')$$

$$\log r = \log d_r + \log f(\log^{-1}(\alpha_4 + \beta_4 L)) \quad (2')$$

$$\log P = \log d_p + \log f(\log^{-1}(\alpha_4 - \beta_4 \alpha_1 \beta_1^{-1}) C^{\beta_4/\beta_1}) \quad (3')$$

Estas ecuaciones indican respectivamente que: la superficie del mercado crece exponencialmente tal como ocurre con la población del centro; la población del área de mercado es función de la densidad y el número de funciones centrales del centro; y, que el crecimiento de la población total depende de la densidad del poblamiento y del crecimiento exponencial de la población urbana.

Al sistema de ecuaciones se le agregan tres desigualdades con el fin de mostrar las discontinuidades resultantes de la existencia de una jerarquía urbana. Estas desigualdades obtenidas de trabajos empíri

cos definen el límite superior del área de mercado y de la población - servida por un centro. Estos límites expresan a su vez, el tamaño máximo del centro en un nivel de jerarquía, dada la densidad de la población:<sup>39/</sup>

$$\log A \text{ pueblo} < 10.4 - 2.67 \log P$$

$$\log A \text{ ciudad} < 9.3 - 2.067 \log P$$

$$\log A \text{ centro} < 22.25 - 4.75 \log P$$

El modelo de Berry aún basándose en una concepción de espacio homogéneo y en una misma distribución de preferencias de los consumidores es interesante ya que profundiza las relaciones puestas en evidencia por Christaller y muestra que la jerarquía de centros proporcionada por la teoría del lugar central, puede coexistir con la continuidad de los tamaños de centros proclamada por el principio del "Rango-Tamaño" o "Ley de Zipf"<sup>40/</sup>.

## CAPITULO II

### CRITICA DE LOS FUNDAMENTOS DEL ANALISIS ESPACIAL TRADICIONAL

En el análisis económico es frecuente encontrar que implícitamente se supone que la actividad económica se desarrolla en un punto. No existe ni la distancia ni el transporte: estamos en una economía puntiforme.

El factor espacial no puede ser introducido como una variable independiente porque está ligado a cada una de las variables, en tal forma que distorsiona las relaciones establecidas en un esquema espacial. Incluir el espacio en la teoría económica equivale a considerar que éste no es un soporte neutro o es indiferente a los mecanismos económicos.

La consideración del factor espacial en la teoría económica depende de la función-objetivo perseguida. En la teoría de la firma, por ejemplo, cuando el fin es maximizar el beneficio en el corto plazo, el óptimo de producción no se sitúa necesariamente en la zona del costo marginal decreciente (suponiendo que el precio de venta es constante y uniforme en un área de demanda). Si el objetivo de la firma es minimizar sus costos medios de producción y transporte, es posible que se sitúe en la parte decreciente de la curva del costo medio de producción. En consecuencia, el nivel de las tasas de transporte incide en los volúmenes -

óptimos de producción y en los beneficios de la empresa, pudiendo afirmar por tanto que el espacio económico no es neutro.<sup>41/</sup>

La teoría económica espacial ha sido matemáticamente formalizada desde su inicio. Sin embargo, con relación a la teoría económica en general, está -a pesar de que los especialistas crean lo contrario- retrasada, principalmente por tres motivos:

a) El fundamento de la economía espacial es el mismo que el de la teoría económica en general, a saber, la teoría del valor.

En la teoría del valor, el tiempo ha sido considerado mediante el axioma de la depreciación, según el cual un bien disponible en el futuro no tiene el mismo valor en el presente -un sol hoy día no tendrá el mismo valor que el próximo año-. Todos los cálculos de actualización se apoyan en esta idea, la cual es simple, porque el tiempo cuesta;<sup>42/</sup> y además la existencia de mercados de futuros permite expresar el valor actual de un bien en el pasado o el futuro.

Desafortunadamente no es posible un tratamiento similar del espacio. En primer lugar, el espacio hasta ahora no ha sido considerado en la teoría de la utilidad o en la de la preferencia. En segundo lugar, el análisis espacial no consiste en introducir sólo los costos de transporte -no neutralidad del espacio-. Hubo una tentativa de G. Debreu,<sup>43/</sup> en el origen de la llamada escuela axiomática, según la cual, dos unidades del mismo bien o servicio son económicamente diferen



tes si están en lugares distintos o no están disponibles en el mismo instante. Esta solución no permite, sin embargo, explicitar las relaciones espaciales que existen entre dos unidades de bienes físicamente idénticos pero localizados en puntos diferentes, que permanecerán más bien implícitas.

En suma, las dificultades para integrar adecuadamente las consideraciones espaciales en la teoría del valor son la primera causa del atraso de la teoría económica espacial.

b) El atraso del análisis económico espacial se explica también por el privilegio otorgado al empleo de métodos deductivos en menoscabo de los inductivos en esta disciplina. Además, el análisis de la distancia y de la distribución espacial de los recursos y actividades se consideraba campo de los geógrafos "una casta por la que los economistas jamás sintieron gran estimación,"<sup>44/</sup> apreciación injusta por completo, pues en este sentido ellos tuvieron mucho más imaginación que los economistas para el uso de métodos inductivos en los albores de la disciplina.

c) La tercera razón por la que el análisis espacial no ha avanzado en igual medida que la teoría económica general, proviene justamente del hecho de haber sido formalizado matemáticamente desde su inicio, antes de que la observación y el material empírico recogido fuesen los suficientemente voluminosos como para permitir -y exigir- la formalización.

Por otra parte, el tipo de formalización elegida puso límites a la validez de las teorías espaciales debido al tipo de herramientas matemáticas utilizadas. Si aceptamos que las bases matemáticas actuales son una causa de ese retardo, entonces, el problema que se plantea es el de la correspondencia entre los espacios económicos y los espacios matemáticos o abstractos.

En el análisis espacial tradicional se ha privilegiado siempre una definición matemática particular del espacio: el segmento de recta o el plano euclidiano.

Un espacio matemático no es por naturaleza la representación de un espacio económico, aún cuando al formalizar los espacios económicos puedan utilizarse los espacios matemáticos.<sup>45/</sup>

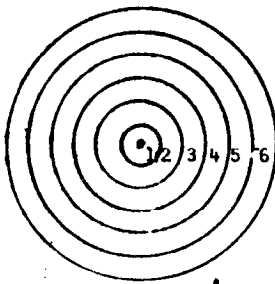
Esta representación formal mediante el segmento de recta o el plano euclidiano, realizada por los economistas, parecen ser natural y suficiente puesto que ha permitido una formalización rigurosa y abstracta que ha llevado a una "geometría espacial".<sup>46/</sup> Así por ejemplo, las localizaciones son asimiladas a puntos inmateriales, las áreas de mercado a rectas o círculos (Hotelling-Palander), las regiones a hexágonos (Lösch), el ordenamiento de cultivos a círculos (von Thünen) y las figuras de localización industrial a triángulos (Weber) o a polígonos cualquiera (Isard).

El espacio es ordinariamente percibido a través de una de sus características: la distancia en línea recta entre las localizaciones de

los elementos del sistema. Esta estructura tiende en la actualidad a ser abandonada, y tal como lo constata P. Moran, "es muy dudoso que puedan expresarse las complejidades de las relaciones espaciales por esquemas geométricos",<sup>47/</sup> porque el precio no necesariamente crece con la distancia o, al menos, no necesariamente igual que ella y además porque la configuración geográfica así como la gran variedad de medios de comunicación no permiten considerar las áreas de mercado como superficies continuas.

Es suficiente modificar o suprimir algunas de las hipótesis del análisis tradicional para que estas figuras de la geometría se distorsionen. Por ejemplo, cuando von Thunen elabora su modelo de círculos concéntricos (Gráfico 14) para explicar la repartición de los cultivos, supone entre otras cosas, un Estado aislado de otros por desiertos o en autarquía:

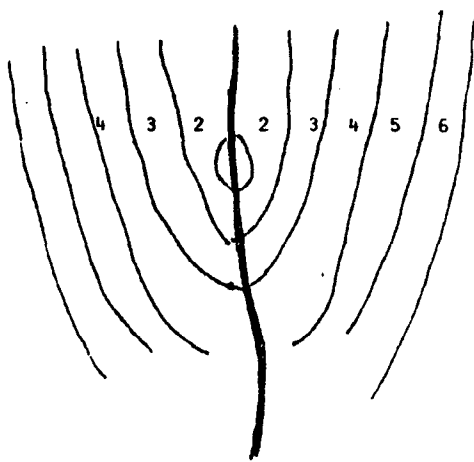
GRAFICO 14



- |                          |  |
|--------------------------|--|
| 1.- Huertos              | : verduras y frutas                              |
| 2.- Silvicultura         | : madera y combustibles                          |
| 3.- Arable intensa       | : cereales, engorde de ganado                    |
| 4.- Arable con carencia  | : cereales, leguminosa, trébol                   |
| 5.- Arable menos intensa | : granos, colza                                  |
| 6.- Ganadería, Lechería  | : mantequilla, queso, carne, lana, lino, tabaco. |

la presencia de un río navegable puede romper la simetría del esquema, tal como se indica en el Gráfico 15.

GRAFICO 15



Con estas distorsiones, la formalización es muy difícil y a veces imposible ya que el instrumental matemático aplicable en el plano euclidiano no lo permite. <sup>48/</sup>

No basta asimilar la noción de espacio a la de conjunto. Para que un conjunto sea un espacio sus elementos deben poseer por lo menos una propiedad que es la de ocupar posiciones que estén en relación con los demás elementos del mismo. Inversamente, se tendrá un espacio  $E = (X, d)$  cuando  $(X)$  sea un conjunto y  $(d)$  una distancia. Además, si  $(d)$  es una distancia topológica  $E = (X, d)$  es un espacio métrico.

Para asegurar la coherencia con este espacio matemático particular -el espacio euclidiano-, las hipótesis económicas forzosamente deben ser numerosas y restrictivas. Esta simplificación hace que el espa

cio económico así definido tenga muy poco valor operativo. Las hipótesis económicas de homogeneidad y continuidad aparecen como consecuencia de la transmutación del espacio económico en un espacio matemático abstracto, alejado de la realidad. Estas hipótesis corresponden en términos matemáticos a las del espacio métrico euclidiano y a la convexidad, como en seguida analizaremos.

Vista en estos términos, la teoría del lugar central, aparece como una esquematización excesiva de la organización del espacio. Plantear una nueva concepción del espacio significa, entre otras cosas, preguntarnos qué implicancias originará la misma en la teoría económica en general, así como, en la teoría del lugar central en particular.

## 1. El Espacio Métrico Euclidiano<sup>49/</sup>

### 1.1. Definición de espacio vectorial

Sea  $K$  un cuerpo, cuyos elementos serán llamados escalares.

Sea  $E$  un conjunto, cuyos elementos  $x, y, \dots$  serán llamados vectores.

El conjunto  $E$  está dotado de una estructura de espacio vectorial sobre  $K$ , si se realizan las siguientes condiciones:

1.1.1. Se puede definir en  $E$  una ley de composición interna sobre los elementos de  $E$  o una operación aditiva representada por  $\oplus$ , que posee las siguientes condiciones:

a) Estable o cerrada

Si  $x \in E$ ,  $y \in E$ , entonces:

$$x \theta y \in E$$

b) Asociativa

$\forall x \in E$ ,  $\forall y \in E$ ,  $\forall z \in E$ , se puede escribir:

$$(x \theta y) \theta z = x \theta (y \theta z)$$

c) Conmutativa

$\forall x \in E$ ,  $\forall y \in E$ , se tiene:

$$x \theta y = y \theta x$$

d) Admite un elemento neutro  $\vec{0}$ , es decir que: 50/

$\forall x \in E$ ,  $\exists \vec{0} \in E$ , tal que:

$$x \theta \vec{0} = x$$

e) Todo elemento admite un elemento simétrico por esta ley.

$\forall x \in E$ ,  $\exists x' \in E$ , tal que:

$$x \theta x' = \vec{0}$$

Das consecuencias importantes pueden ser extraídas de estas propiedades:

i) Esta operación interna que denominamos adición vectorial, confiere al conjunto  $E$  una estructura de grupo abeliano.

ii) Cualquiera que sea  $x$  que pertenece a  $E$ , se tiene: que si  $x' \oplus x = x'' \oplus x$ , entonces  $x' = x''$   
 en efecto, si  $x_.$  es el elemento simétrico de  $x$ , podemos escribir por definición:

$$(x' \oplus x) \oplus x_ = (x'' \oplus x) \oplus x_$$

por la propiedad de asociatividad:

$$x' \oplus (x \oplus x_ ) = x'' \oplus (x \oplus x_ )$$

pero  $x \oplus x_ = \vec{0}$  por definición, luego:

$$x' \oplus \vec{0} = x'' \oplus \vec{0} \quad \text{ó sea} \quad x' = x''$$

una operación que posee esta propiedad se dice es regular por el elemento  $x$ .

1.1.2. Se puede definir  $K$  y sobre  $E$  una ley de composición externa o multiplicación por un escalar, representada por  $\odot$ , que tiene las siguientes propiedades:

a) Cerrada

$$\forall \alpha \in K, \forall x \in E, \text{ la compuesta } x = \alpha \odot x$$

por esta ley externa es tal que:

$$E = (\alpha \odot x) \in E$$

b) Distributiva sobre la suma vectorial en E.

$\forall \alpha \in K, \forall x \in E, \forall y \in E$ , se puede escribir:

$$\alpha \otimes (x \oplus y) = (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y)$$

c) Distributiva sobre la adición en K.

$\forall \alpha \in K, \forall \beta \in K, \forall x \in E$ , tendremos:

$$(\alpha \oplus \beta) \otimes x = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x)$$

d) Asociativa con respecto a la multiplicación en K.

$\forall \alpha \in K, \forall \beta \in K, \forall x \in E$ , se tendrá:

$$\alpha \otimes (\beta \otimes x) = (\alpha \beta) \otimes x$$

e) Si el elemento neutro es 1 en la multiplicación en K, cualquiera que sea  $x \in E$ :

$$1 \otimes x = x$$

Por convención elegiremos para K el cuerpo de reales R.

## 1.2. Noción de norma y distancia

Sea un espacio vectorial E definido sobre R.



Una seminorma en  $E$  es toda aplicación  $l$  de  $E$  en  $\mathbb{R}$  tal que:

- a)  $\forall x \in E : l(x) \geq 0$  axioma de no negatividad.
- b)  $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R} : l(\alpha x) = |\alpha| l(x)$  axioma de homogeneidad.
- c)  $\forall x \in E, \forall y \in E : l(x+y) \leq l(x) + l(y)$  axioma de desigualdad triangular.

El axioma de homogeneidad implica que  $l(x) = l(-x)$

Diremos que  $l$  es una norma, si además se cumple:

- $\forall x \neq 0 : l(x) > 0$  axioma de separación.

A toda seminorma de  $x$  se le representa por  $\|x\|$

A toda seminorma se le asocia una separación.

Una separación o pseudo métrica en un conjunto  $E$  es toda aplicación  $f$  de  $E \times E$  en  $\mathbb{R}^+$  tal que: <sup>51/</sup>

- a)  $x = y \rightarrow f(x, y) = 0$  axioma de identidad
- b)  $f(x, y) = f(y, x)$  axioma de simetría
- c)  $f(x, z) \leq f(x, y) + f(y, z)$  axioma de desigualdad triangular.

Si  $E$  es un espacio vectorial dotado de una seminorma  $l$ , puede ser definida una separación:

$$\forall x, y \in E : d(x, y) = l(x - y)$$

en efecto:

a)  $d(x, y) \geq 0$       axioma de no negatividad

$d(x, y) = 0$       axioma de identidad

b)  $d(x, y) = d(y, x)$  puesto que  $l(x-y) = l(y-x)$

axioma de homogeneidad.

c)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  puesto que se da que

$l(x-y) \leq l(x-z) + l(z-y)$  axioma de desigualdad triangular.

En particular,  $R$  es un espacio métrico, la distancia de dos números reales  $x_1$  y  $x_2$  es el valor absoluto de su diferencia,  $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$ .

A toda norma se le asocia una distancia: se llama espacio métrico a toda pareja ordenada por un conjunto  $E$  y una aplicación  $d$  de  $E \times E$  en  $R^+$  tal que:<sup>52/</sup>

a)  $x = y \longrightarrow d(x, y) = 0$  axioma de identidad

b)  $d(x, y) = d(y, x)$  axioma de simetría

c)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  axioma de desigualdad triangular.

La aplicación  $d$  es una distancia, o sea que  $d(x, y)$  es la distancia de  $x$  a  $y$ .<sup>53/</sup>

Hemos definido de esta manera un espacio métrico, la norma retenida generalmente es la norma euclidiana definida por:

$$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

a la norma euclidiana le es asociada la distancia euclidiana:

$$d(X, Y) = \left( (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 \right)^{1/2}$$

o bien

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

### 1.3. Interpretación económica de la métrica Euclidiana

En un espacio geográfico, los economistas generalmente miden la distancia entre dos puntos por la distancia euclidiana.

Las condiciones que definen una distancia (axiomas de identidad, simetría y desigualdad triangular) constituyen en realidad una gruesa simplificación del espacio, en el sentido que conducen a postular una "superficie de transporte", o sea a admitir que cualquier punto del espacio puede estar en relación con otro por intermedio de un camino cualquiera, que en realidad corresponde a la línea recta.

Esta hipótesis aparentemente simple no solamente introduce una 'segunda dimensión allí donde una sólo sería suficiente,'<sup>54/</sup> sino que además en el momento de pasar a la realidad podría ocasionar, por ejemplo, que localicemos una empresa en medio del lago Titicaca, en la punta del Huascarán o más simplemente en un lugar ya ocupado o que no está en venta.

La condición de identidad impide razonar con la noción de vecindad, que es particularmente interesante en los casos de optimización simultánea.

La condición de simetría implica que siempre es posible el desplazamiento entre dos localizaciones en ambos sentidos lo cual no siempre es permisible en las redes de comunicación reales. Aún -- aceptando que el desplazamiento es simétrico en términos físicos no siempre lo será en términos económicos: el costo de desplazamiento entre Lima y Huancayo (pasando por Ticlio) no es el mismo que existe entre Huancayo y Lima.

La condición de desigualdad triangular significa que entre dos puntos siempre tenemos interés en desplazarnos en línea recta. Imaginamos fácilmente la restricción impuesta por esta hipótesis en un país como el nuestro de geografía tan difícil y desigual, en la que la existencia de cordilleras, lagos, desiertos, etc., no hacen ni siquiera imaginable la distancia en línea recta.

La teoría de los lugares centrales se fundamenta en la hipótesis de la llanura homogénea, en la cual los recursos y la población están uniformemente distribuidos. Esto significa que la distancia entre dos centros siempre es tomada en línea recta. Al mismo tiempo, los costos de transporte son iguales en cualquier dirección (simetría) y proporcionales al peso y a la distancia. En estas condiciones el área de mercado del centro es forzosamente circular. <sup>55/</sup>

## 2. La Hipótesis de Homogeneidad

Desde el punto de vista económico este postulado recubre el enunciado de dos hipótesis parecidas pero diferentes: homogeneidad y homogeneidad uniforme, es decir presencia de propiedades locales o generales del espacio.

### 2.1. Espacio homogéneo

El espacio económico, al igual que el espacio euclidiano, debe presentar las mismas propiedades en cualquier dirección. Es una propiedad de los elementos que se da o es verdadera punto por punto.

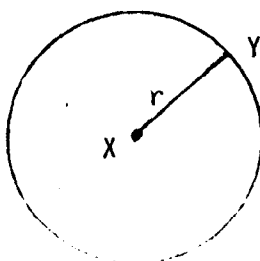
Este postulado de la homogeneidad en términos del economista es el de la isotropía en términos matemáticos. Más formalmente, diremos que un espacio económico es isótropo, si y sólo si, una propiedad  $P$  dada es la misma en cualquier dirección en torno a un punto del espacio  $E$  o bien, una misma magnitud  $G$  es constante en

todas las direcciones alrededor de un punto del espacio  $E$ .

Esto nos conduce a la noción de bola (esfera).

Definimos una bola de centro  $X$ , de radio positivo  $r$  asociado a la distancia  $d$ , al lugar  $B(X, r)$  de todos los puntos  $Y$ , tales que:

$$B(X, r) = \{ Y \in E \text{ y } d(X, Y) = r \}$$



En toda generalidad un círculo no representa una bola, pues para representarla es necesario tener una distancia euclidiana.

Si llamamos  $f$  a la representación geométrica de  $P$  o  $G$ , diremos que el espacio económico  $E$  es isótropo en el punto  $X \in E$ , si y solamente si,  $f$  es constante en toda bola  $B(X, r)$ .

Decir que  $E$  es isótropo en el punto  $X$  por  $P$  o  $G$  implica y recíprocamente que  $\forall r > 0, \exists c(r)$  tal que:

$$f(Y) = c(r), \forall Y \in B(X, r)$$

$E$  es isótropo por  $P$  o  $G$  implica y recíprocamente que  $E$  es isótropo en cada punto del mismo.

La isotropía no es una propiedad absoluta del espacio  $E$ , éste puede ser isótropo por la propiedad  $P_1$  y no por la  $P_2$ . Por ejemplo, la teoría neoclásica supone que los costos de transporte son proporcionales al peso y a la distancia. Esto implica la isotropía del espacio para el transporte, pero no será así necesariamente para otras cosas, tales como, la fertilidad del suelo o la densidad de la población.

Esta hipótesis de los costos de transporte es lo que se conoce con el nombre de isovector, que se define como el lugar geométrico de puntos para los cuales los gastos totales o parciales de transporte de una unidad de un bien desde un punto dado  $X$  son iguales en todas las direcciones.

Debemos plantear además las hipótesis que serían suficientes en relación a la tarifa de transporte  $r$  para que el espacio económico sea isótropo.

Si  $E \times E \xrightarrow{r} R^+$ , para cualquier  $r$ , entonces, para dos puntos  $Y_1$  e  $Y_2$  que pertenezcan al espacio  $E$  situados a igual distancia de  $X$ , se tendrá:

$$d(X, Y_1) = d(X, Y_2)$$

pero no necesariamente:

$$r(X, Y_1) = r(X, Y_2)$$

de donde se deduce que si no hay identidad de tarifas de transporte, - el input de transporte<sup>56/</sup> es diferente:

$$r(X, Y_1) \cdot d(X, Y_1) \neq r(X, Y_2) \cdot d(X, Y_2)$$

lo cual indica que el espacio es anisótropo.

Puede decirse además, que si la tarifa de transporte  $r$  depende del punto de origen  $X$  y de la distancia de  $X$  a cualquier otro punto  $d(X, \bullet)$  o lo que es lo mismo, si la tarifa de transporte depende solamente del origen y de la distancia a recorrer, entonces:

$$r(X, Y) = r\left[X, d(X, Y_1)\right] = r\left[X, d(X, Y_2)\right] = r(X, Y_2)$$

lo cual indica que los gastos de transporte son iguales y por consi--- guiente hay isotropía.

Si la tarifa de transporte  $r$  depende sólomente del lu gar de origen  $X$  -caso particular del precedente- se tendría aun isotropía. Por ejemplo, la tarifa postal al interior de un país.

La isotropía no se verifica en el espacio económico internacional a causa de los derechos de aduana y por la aplicación de - tarifas diferentes.



A veces los economistas consideran que el transporte de los inputs depende del punto de origen y el de los outputs del destino; en este caso, el espacio económico de la firma no será isótropo.

Si la tarifa de transporte entre un par ordenado de puntos que pertenecen al espacio  $E$ , depende de la distancia entre los mismos, es decir, del punto de origen o del punto de destino, el espacio económico  $E$  será pseudo-isótropo:

$\forall X \in E, Y \in E$ , se tiene:

$$r(X, Y) = r[X, d(X, Y)]$$

o bien,

$$r(X, Y) = r[Y, d(X, Y)]$$

La pseudo - isotropía es una propiedad general del espacio.

## 2.2. Homogeneidad uniforme o estricta

Muchas veces los economistas cuando hablan de espacio homogéneo en realidad pretenden decir que el espacio posee una misma propiedad (general o global) en todas partes. En otros términos una propiedad  $P$  se verifica en cualquier punto del espacio y/o una misma magnitud  $G$  es constante.

Tenemos ejemplos de homogeneidad uniforme, en los modelos de localización agrícola al suponer, como von Thunen, que la ferti

...idad del suelo es la misma en todo el espacio. En la teoría de áreas de mercado, Lössch supone que hay una repartición uniforme de materias primas en el territorio. En los modelos de localización industrial - Weber supone, entre otras cosas, que la oferta de trabajo es elástica.

En términos formales un espacio económico  $E$  será homogéneo por la propiedad  $P$  o por la magnitud  $G$  constante si:

$$P(X) \text{ es verdadera } \forall X \in E$$

y/o

$$G(X) \text{ es constante en el espacio } E.$$

la homogeneidad, así definida asegura la isotropía.

Un espacio homogéneo es isótropo, pero la recíproca generalmente no se cumple. Sin embargo si hacemos que:

$$\forall r > 0, \forall X \in E, \exists c(r) \text{ tal que}$$

$$f(Y) = c(r), \forall Y = B(X, r)$$

entonces, la isotropía implica la homogeneidad, y esto es así simple y llanamente porque  $f$  es una función constante.

Llamemos  $\bar{d}$  a un valor cualquiera de la aplicación  $d$ : la homogeneidad significa, en consecuencia, que el input de transporte es una constante independiente del lugar de origen  $X$ . Esto nos lleva

a dos consideraciones: en primer lugar, si la tarifa de transporte es constante o si depende únicamente de la distancia a ser recorrida, el espacio económico correspondiente es homogéneo. En segundo lugar, si la tarifa de transporte es considerada a partir de  $M_1, M_2, \dots, M_n$ ; y es constante, el espacio es homogéneo. En cambio, si tenemos un  $r_1$  asociado a  $M_1, r_2$  a  $M_2, \dots, r_n$  a  $M_n$ , es decir que la tarifa de transporte depende del bien y de la cantidad transportada, el espacio es isótropo y heterogéneo.

En resumen, el postulado de la homogeneidad define una propiedad local que se cumple punto por punto. La homogeneidad uniforme define más bien una propiedad global que se da en todo el espacio considerado. En ambos sentidos, este postulado de la homogeneidad, lleva necesariamente a razonar en el cuadro de un espacio métrico euclidiano y por ende a identificar la distancia -aun a riesgo de ser redundante- con la distancia euclidiana.

### 3. La Hipótesis de Continuidad

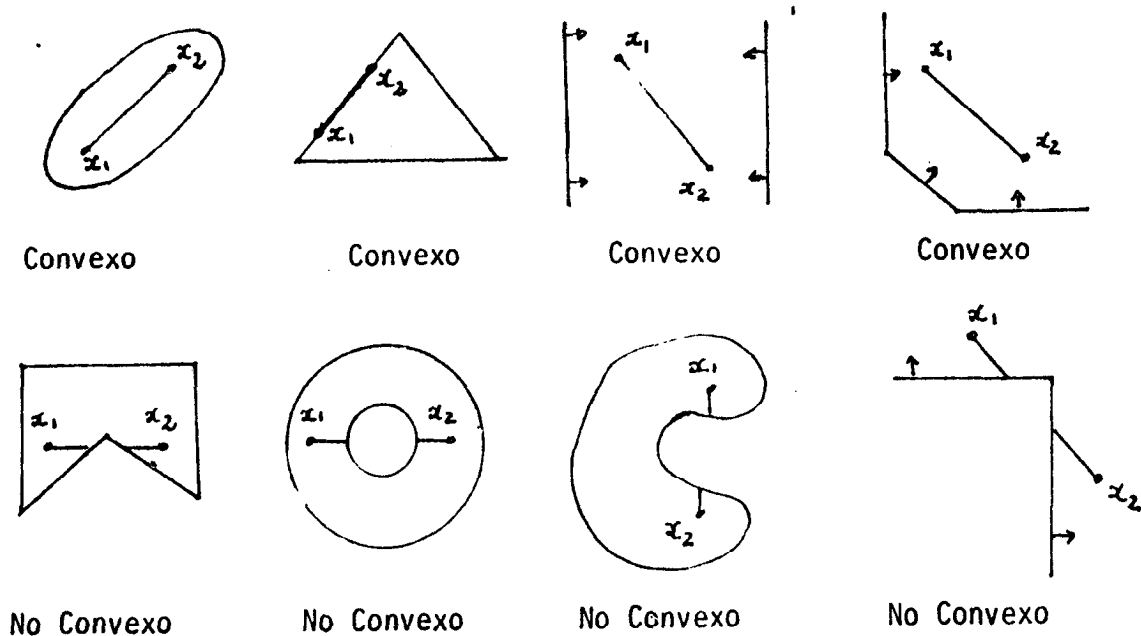
La teoría clásica ya limitada por la hipótesis de homogeneidad restringe aun más su carácter explicativo en la medida que sólo considera subconjuntos del espacio  $E$  que son convexos que de hecho aseguran la continuidad.<sup>57/</sup> Lo que quiere expresarse con la convexidad es que todos los puntos del espacio pueden ser alcanzados y utilizados para fines económicos. En la realidad el espacio económico es discontinuo, las fronteras nacionales, regionales, departamentales, provinciales e inclusive urbanas constituyen uno de los tantos ejemplos que

confirman el carácter discontinuo del espacio económico.

Sea  $R^n$  un espacio producto de conjuntos de base  $E$ . Si  $R^n$  posee 1, 2, ...,  $n$  dimensiones, se dice que un conjunto  $X \in R^n$  es convexo si conteniendo dos puntos  $x_1$  y  $x_2$ , contiene también al segmento que tiene a esos dos puntos por extremidades.

En economía generalmente se trabaja en el espacio  $R$ -segmento de recta- o en el espacio  $R \times R = R^2$  -Plano cartesiano-. Al utilizar además la métrica euclidiana, es natural que la noción de continuidad y la de convexidad sean equivalentes<sup>58/</sup>. Ejemplos de conjuntos convexos en  $R^2$  se presentan a continuación en el Gráfico 16.

GRAFICO 16



La noción de convexidad puede ser generalizada<sup>59/</sup>, más lo que nos interesa conocer intuitivamente es que un conjunto es convexo si -

dos puntos cualquiera están unidos por un segmento de recta contenido en el conjunto.

En economía espacial la hipótesis de continuidad no sólo es irreal sino que los procesos de optimización pueden ser muy complicados. Tomemos por ejemplo el caso aparentemente simple en el que se busca minimizar los costos de transporte con el objeto de encontrar la localización óptima de una firma.<sup>60/</sup>

Sean:

$P_i (x_i, y_i)$   $i = 1, 2, \dots, n$  mercados

$P (x, y)$  la localización buscada

La distancia entre  $P$  y uno de los  $P_i$  se expresa por:

$$\text{distancia} = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}$$

Asignado a la distancia existe un "peso" -de acuerdo con la teoría weberiana- que en el caso general es el producto de la cantidad de mercancías a transportar entre cada punto y la localización - multiplicada por el coeficiente de la tarifa aplicada a la mercancía:

$\alpha_i$   $i = 1, 2, \dots, n$  cantidades de mercancías relativas a los  $P_i$

$\beta_i$   $i = 1, 2, \dots, n$  coeficientes de las tarifas correspondientes

La distancia ponderada se escribe, en consecuencia:

$$\text{distancia ponderada} = \alpha_i \beta_i \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}$$

que representa el costo de transporte. La suma de las distancias ponderadas proporciona el costo total  $C$

$$\text{Costo total } C = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}$$

Las coordenadas de la localización óptima se obtienen minimizando la función de costo total:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial y} = 0$$

En teoría esto es muy simple, pero sucede en realidad que:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \frac{(x_i - x)}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}} = 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \frac{(y_i - y)}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}} = 0$$

como vemos, el proceso de diferenciación lleva las raíces cuadradas al denominador, en una suma en la que cada término posee un índice diferente y comporta ipso-facto radicales diferentes.

La distancia euclidiana aporta a los cálculos en este caso una complicación prácticamente infranqueable, porque sobrepasa los límites "humanos" del cálculo diferencial.<sup>61/</sup>

Además de estos problemas a nivel de la teoría económica en general que el espacio económico sea continuo en la teoría de los lugares centrales, significa que los recursos están repartidos uniformemente en el espacio. En esta teoría la acción de la distancia es puramente mecánica o física.

#### 4. Consecuencias

Al comenzar este capítulo nos planteamos la interrogante respecto a cómo los teóricos espaciales definen de una manera implícita el espacio. Al espacio real le es asociado un espacio abstracto que puede ser definido mucho más rigurosamente.<sup>62/</sup>

Los modelos formalizados del análisis espacial, tal como hemos visto se fundamentaron en un espacio matemático caracterizado por las siguientes propiedades:

- a) Es un espacio dotado de una métrica euclidiana.
- b) Es un espacio isótropo.
- c) Es un espacio homogéneo o uniformemente homogéneo.
- d) Es un espacio convexo.

Desde el punto de vista de la teoría abstracta, estos espacios privilegian las figuras de la geometría elemental.

Desde el punto de vista económico, las hipótesis deben ser coherentes con la isotropía del espacio:

a) Se postula un bien homogéneo sometido a la ley de la oferta y la demanda.

b) El efecto de transporte es indiferenciado. Esto es así porque, al trabajar en una superficie homogénea y continua, los costos de transporte son proporcionales al peso y a la distancia recorridas. El uso de isovectores necesariamente llevará a la identidad de las tarifas de transporte.

c) Posibilidad de desplazarse indiferentemente en cualquier dirección.

d) Las condiciones de demanda y oferta deben ser las mismas en todos los lugares y para todos los bienes. Por hipótesis se razona en una superficie de demanda en la cual, en ciertos casos, un segmento de recta representa a los mercados cuya demanda está uniformemente repartida. La ley de la demanda -relación cantidad precio- es la misma en cualquier punto.

La superficie de demanda -o el segmento de recta- se confunde con la superficie de transporte -o la línea de transporte-.



La oferta está concentrada en puntos que pertenecen a la superficie -o segmento de recta- de demanda.

e) Es necesario que la función de producción posea en todas partes propiedades análogas. En efecto, el criterio único de minimización de costos de transporte sólo es satisfecho por funciones de producción lineales y homogéneas.

f) La dispersión de los factores de producción debe ser la misma en cualquier lugar. Esta hipótesis se justifica en razón que el espacio considerado es uniformemente homogéneo.

g) Los precios F.O.B. son dados.

h) Los precios C.I.F. son iguales a los precios F.O.B. más la tarifa de transporte -los costos de transporte son proporcionados al peso y a la distancia.

i) La información es perfecta.

En definitiva, el hecho de haber asimilado el espacio económico a un espacio euclidiano limitó el alcance general de la teoría clásica por la hipótesis de homogeneidad y restringió su carácter explicativo en la medida que sólo puede analizar estructuras continuas. Pero, el espacio económico inevitablemente es heterogéneo y discontinuo; basta considerar las zonas monetarias, los costos de transporte degresivos con la distancia y los rendimientos agrícolas tan variables

en el espacio para estar convencidos de la heterogeneidad. Las fronteras políticas y administrativas, los accidentes geográficos no hacen - sino confirmar el carácter discontinuo del espacio económico.

Faltaría solamente, formular una definición del espacio que tomase en cuenta la crítica planteada y que fuese a la vez operativa y dinámica.

Como es natural, la concepción del espacio varía en los diferentes autores; algunas de ellas son difícilmente utilizables en el análisis económico y otras siendo muy operativas son incompletas en tanto no consideran los caracteres y funciones del espacio económico.

La definición propuesta insiste en la organización -aspecto estático- y la transformación -aspecto dinámico- de los elementos del sistema espacializado, y puesto que recoge en cierta forma parte o todas las características de algunas definiciones previas haremos una revisión de algunas de ellas y luego propondremos la nuestra:

Boudeville, J.<sup>63/</sup>: visualiza al espacio como geonómico lo - cual implica la reinclusión de variables económicas en un espacio geográfico, utilizándose para ello una variación matemática que describe un proceso continuo.

Claval, P.<sup>64/</sup>: El espacio es una extensión. Es a la vez el soporte biológico de los grupos humanos y el teatro de su actividad.

Fonseca, E.:<sup>65/</sup> Asimila el concepto de espacio al de región. "La región se entenderá como toda área que presenta una unidad económica y rasgos físicos y sociales que permiten una visión de conjunto".

George, P.<sup>66/</sup> El espacio es un soporte de las actividades de la colectividad humana. Esta porción de espacio implica de hecho una estratificación de espacios, determinados según la naturaleza de sus relaciones con las actividades y formas de existencia de los grupos considerados.

Lachene, R.<sup>67/</sup> Conceptúa el espacio según la óptica "del que contiene" y la óptica "del contenido". En otras palabras es la óptica geográfica y la del espacio sectorial.

Moran, P.<sup>68/</sup> El espacio es un conjunto en el cual se define una ley de pertenencia. En este conjunto se pueden operar series funcionales o territoriales.

Perroux, F.<sup>69/</sup> Distingue tres aspectos del espacio. El espacio como plan, el espacio como un campo de fuerzas y el espacio como un conjunto homogéneo.

Ponsard, C.<sup>70/</sup> Asimila el espacio económico a un espacio económico particular que sólo toma en cuenta el conjunto de relaciones binarias entre los elementos y constituyen una red (grafo).

Villey, D.<sup>71/</sup>: Estudia el espacio bajo tres formas. El espacio como distancia, el espacio como superficie y el espacio como un conjunto de lugares.

Para definir el espacio, nos basaremos en el trabajo de J. Guigou,<sup>72/</sup> que define el espacio económico como un conjunto de elementos llamados puntos-superficie con el fin de insistir en su naturaleza espacial. Cada punto superficie puede ser caracterizado por: (a) ser un cuadro de análisis, (b) ser un objeto de análisis y (c) cumplir ciertas funciones.

El espacio cuadro de análisis se define como una extensión y una estructura formal, que sirven de cuadro y de referencia a la distribución espacial de los elementos del sistema. Este espacio es fijo y está definido en el largo plazo.

La extensión del cuadro espacial se caracteriza por tener una superficie o dimensión y por su forma.

La superficie está constituida por la cantidad de tierra disponible, utilizable o no para el establecimiento de la actividad económica. Puede ser homogénea o heterogénea.

La forma del espacio está ligada a su "corte" natural o histórico lo cual conduce a puntos superficie convexos o no convexos. Por lo tanto, el espacio cuadro de análisis puede ser continuo o discontinuo.

La estructura del espacio cuadro de análisis se caracteriza a su vez por las propiedades de los puntos superficie y por su posición

Las propiedades naturales corresponden a los datos de la geografía física, estas propiedades son invariantes, permanecen fijas en el tiempo. Permiten, además, jerarquizar los espacios cuadro de análisis. Luego, definir una posición natural de los espacios cuadro desde el punto de vista de las propiedades fijas.

La posición de los puntos superficie del espacio cuadro de análisis, son geográficamente fijas, por consiguientes, son propiedades inalterables.

El espacio objeto de análisis es asimilado por Guigou a la noción de espacio estructurado o espacio sectorial. El espacio objeto de análisis se define como la extensión y la estructura de la distribución espacial de los elementos de un sistema económico, o lo que es lo mismo, como el espacio contenido por cada elemento del sistema económico. De manera más precisa, el estudio del espacio estructurado constituye el análisis del conjunto de relaciones espaciales entre los agentes económicos.

Este espacio tiene una extensión y una dimensión, que no son fijas. Del mismo modo las relaciones entre cada agente o grupos de agentes no necesariamente son relaciones de distancia. La principal característica del espacio objeto de análisis es la de ser variable.

Para completar la concepción de espacio debemos tratar las funciones que cumple el mismo. Las tres propiedades deben ser estudiadas al mismo tiempo, sólo que aquí por razones de comodidad las hemos separado.

Se ha sostenido durante mucho tiempo que la función del espacio era la de ser un soporte físico de las relaciones entre los agentes económicos. Ser un soporte no constituye en sí una función económica. En realidad el espacio cumple tres funciones:

a) Una función de producción

El suelo como factor de producción puede ser alquilado o comprado como los otros inputs por los agricultores o industriales, aunque no existe ninguna medida común del rol que juega un mismo input tierra en la función de producción de la agricultura o industria.

El valor económico del input tierra, es decir el valor económico de los puntos superficie, escribe Guigou, está ligado al conjunto de sus características -forma, superficie, posición y propiedades- y a los otros elementos que caracterizan la función. Por ejemplo, en las teorías de la localización agrícola, la teoría de la renta es un análisis del costo máximo de la ocupación del espacio, considerando los precios de venta de los productos en el mercado, los costos de producción y transporte.

### b) Una función de consumo

El espacio es considerado como una función de consumo durable.

Esta función ha sido señalada por W. Alonso en su importante estudio "Location and Land Use"<sup>73/</sup> en el cual presenta las relaciones entre el valor del suelo y la utilización que de éste se hace en las zonas urbanizadas.

Entre otras hipótesis Alonso plantea que el espacio puede ser indiferentemente utilizado para la industria, agricultura y habitación. Las familias constituyen en este último caso una categoría de agentes que buscan adquirir un cierto espacio para vivienda que maximice su utilidad global, cuenta habida de la superficie, distancia al centro de la ciudad -luego, sus costos de transporte, precio así como el conjunto de otros bienes que desean consumir. Otras utilidades del espacio para fines de consumo pueden ser tenidas en cuenta: los espacios para recreo por ejemplo.

### c) Función de atesoramiento o ahorro

Bajo el sistema de propiedad privada, el agente que detenta la propiedad de la tierra, se apropia de la plusvalía que resulta de un mercado fuertemente inelástico, ya que la tierra es un bien raro, no reproducible e inmóvil.

Un espacio económico, siempre cumple con la función de a-tesoramiento o ahorro. Al ser utilizado con fines de producción o consumo cumple con cualquiera de las otras dos.

El tener en cuenta las funciones del espacio nos permite capturar en términos dinámicos el hecho de que las mejores localizaciones serán adquiridas y/o utilizadas por los sectores en expansión, -- mientras que los sectores en regresión tomarán localizaciones residuales.



### CAPITULO III

#### REVISION DE LOS FUNDAMENTOS DEL ANALISIS ESPACIAL

La crítica realizada en el capítulo anterior muestra hasta que punto el espacio matemático que sirve de base para el análisis espacial es definido de una manera muy particular. Esta crítica nos conduce a plantear el problema mucho más general de correspondencia entre los espacios matemáticos y los espacios económicos.<sup>74/</sup>

Abordar el problema en toda su amplitud es tarea gigantesca. Tal como lo plantea C. Ponsard,<sup>75/</sup> es toda la problemática del análisis espacial la que tendría que ser reconsiderada.

¿Pueden ser utilizadas otras métricas diferentes a la métrica euclidiana? ¿Es posible abandonar toda métrica y definir espacios no métricos?. En ambas interrogantes la respuesta es afirmativa. En efecto, puede recurrirse a métricas no euclidianas, esto es, no resulta contradictorio trabajar con postulados no euclidianos incluso es posible plantear nuevas métricas cada vez que sea necesario adecuar un modelo matemático a un modelo económico, o bien orientarse hacia aquella parte de la topología llamada "Analysis Situs" o "Geometría de Posición", que en estos últimos años ha experimentado un desarrollo vigoroso bajo el nombre de "Teoría de Grafos".<sup>76/</sup>

La primera pregunta plantea el problema de correspondencia entre los espacios económicos y las llamadas estructuras ricas o estructuras que poseen muchas propiedades o, en otras palabras, los problemas de correspondencia entre los espacios económicos y los espacios métricos. La segunda, que conduce directamente a la teoría de grafos, utiliza estructuras matemáticas pobres, definidas por un cuerpo de hipótesis menos restrictivo, y permite formalizar problemas espaciales sin necesidad de asociar a los espacios económicos ningún espacio métrico.

Es interesante conocer qué vía puede o debe ser utilizada puesto que no existe una "receta" general. Investigadas las propiedades del espacio económico, la elección de cualquiera de las dos formalizaciones matemáticas dependerá en cada caso de las particularidades que pretendan ser estudiadas y de los problemas que se intente resolver. A priori no debe ser privilegiado ningún espacio matemático, al mismo tiempo hay que evitar caer en grandes sofisticaciones matemáticas para explicar pequeñas cosas.

En la parte 1, se expondrá una visión rápida de las llamadas estructuras ricas. En la sección 2 nos detendremos con mayor detalle en las llamadas estructuras pobres; sólo presentaremos, las definiciones, conceptos y desarrollos que nos servirán para la construcción e interpretación de nuestros modelos. Existe una bibliografía especializada en la materia y señalaremos oportunamente las principales obras.

## 1. Espacios Matemáticos y Estructuras Ricas

Es conocido que los geógrafos apprehenden el espacio con todas sus propiedades concretas, interviniendo toda la matemática de la geografía: altitud, longitud, latitud. Sólo en los estudios más abstractos se presenta el problema de aproximar una distancia geográfica con una distancia matemática, planteándose aquí el verdadero problema, puesto que se ha pasado de un espacio concreto a un espacio abstracto.

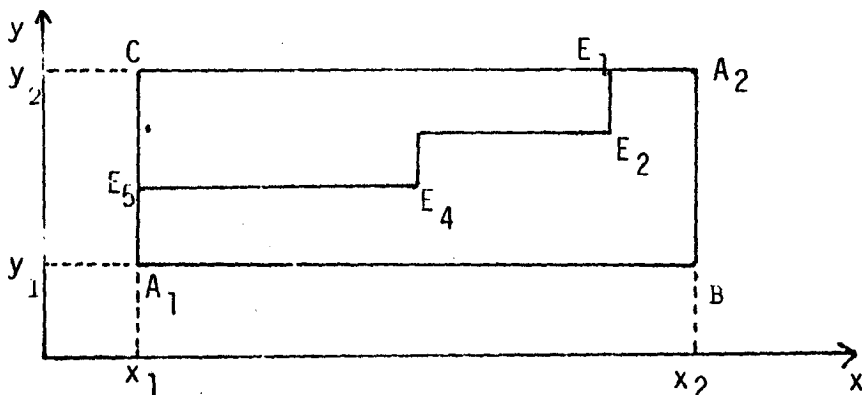
La distancia geográfica puede ser aproximada de múltiples maneras: la métrica euclidiana, que usa la línea recta; la métrica rectilínea; o alguna de las variantes de las llamadas métricas centrales.

### 1.1. La métrica rectilínea<sup>77/</sup>

La distancia rectilínea<sup>78/</sup> se mide paralelamente a los ejes de un sistema ortonormal (ver Gráfico 17). Varía en función de la orientación de los ejes. Entre los puntos  $A_1 (x_1, y_1)$  y  $A_2 (x_2, y_2)$  la distancia  $D (A_1, A_2)$  será igual al valor absoluto  $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$ :

GRAFICO 17

Distancia Rectilínea



Ha sido demostrado<sup>79/</sup> que esta métrica posee las tres propiedades matemáticas de una distancia:

- Identidad:

$$D(A_1, A_2) = 0 \iff A_1 = A_2$$

- Simetría:

$$D(A_1, A_2) = D(A_2, A_1)$$

- Desigualdad triangular: para cualquier  $A_1, A_2, A_3$

$$D(A_1, A_3) \leq D(A_1, A_2) + D(A_2, A_3)$$

La expresión de la distancia rectilínea:

$$D(A_1, A_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

es igual a la longitud de una de las series de segmentos  $A_1 B A_2, A_1 C A_2, A_1 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 A_2 \dots$ , todos los caminos al interior del rectángulo  $A_1 C A_2 B$  que correspondan a una función no decreciente o no creciente de  $y$  en  $x$  son de igual longitud.

Comparemos la métrica rectilínea y la métrica euclidiana entre un punto fijo  $A_1$  y otro  $A_2$  variable sobre una paralela al eje  $OY$  en función de  $\theta$ , como en el Gráfico 18:

$$A_1 B = A_1 A_2 \cos \theta$$

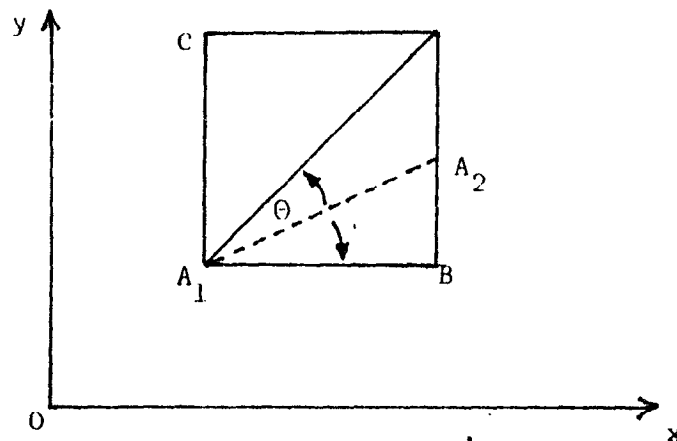
$$B A_2 = A_1 A_2 \operatorname{sen} \theta$$

luego:

$$A_1 B + BA_2 = A_1 A_2 (\cos \theta + \operatorname{sen} \theta)$$

### GRAFICO 18

Métrica euclidiana vs métrica rectilínea



Cuando  $\theta$  varía entre  $0$  y  $\pi/4$  se presentan tres casos:

a)  $\theta = 0$

Las dos distancias se confunden:  $A_1$  se encuentra en  $B$ , luego la distancia rectilínea y la euclidiana son iguales.

b)  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , en este caso  $A_1 B = BA_2$  y por tanto:

$$A_1 B + BA_2 = A_1 A_2 \sqrt{2} ;$$

la distancia rectilínea es igual a la distancia euclidiana multiplicada por  $\sqrt{2}$ .

c) Cuando  $\theta$  varía entre 0 y  $\pi/4$  se calcula una relación promedio entre las dos distancias, proporcionada por el valor promedio de la función continua de la variable  $\theta$ :

$$A_1 B + BA_2 = A_1 A_2 (\cos \theta + \sin \theta)$$

El valor promedio es igual a:

$$\frac{A_1 A_2}{\pi/4} \int_0^{\pi/4} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta = \frac{A_1 A_2 \cdot 4}{\pi} \approx 1.27 A_1 A_2$$

Si las direcciones de los desplazamientos están uniformemente distribuidas, la distancia rectilínea en promedio no está más alejada de la distancia real que la euclidiana. Por ejemplo, los investigadores operativos suelen ponderar la distancia euclidiana por el coeficiente 1.3 -derivado empíricamente- para reencontrar la distancia real.

Cuando los desplazamientos no tienen una orientación privilegiada, puede suponerse que poseen una distribución uniforme y aproximar de esta manera la distancia real por la distancia rectilínea.

Si existen desplazamientos con direcciones privilegiadas -a lo largo de un valle o según el curso de un río, por ejemplo- hará falta elegir un sistema de ejes de referencia, que posibilite la aproximación de la distancia real por la rectilínea.

Entre dos puntos fijos, la distancia rectilínea es una función de la orientación del sistema de ejes. Dado que la expresión de la distancia depende de la dirección, el espacio económico considerado será no homogéneo.

La distancia rectilínea, tal como acabamos de ver, en ciertos casos representa casi perfectamente la realidad -cuando el sistema de comunicación presenta orientaciones privilegiadas-, y en otros proporciona una buena aproximación media de la distancia real -cuando los desplazamientos toman cualquier dirección-.

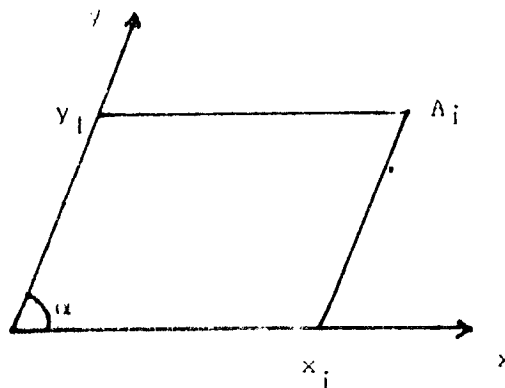
Una ventaja adicional de la métrica rectilínea en relación a la euclidiana, es que se presta bien para los cálculos de optimización. En efecto, cualquier minimización se lleva a dos minimizaciones de expresiones lineales en una sola variable, obteniendo, por consiguiente, una expresión que es suma de dos funciones convexas, por tanto convexas.

Los límites y dificultades de la métrica rectilínea - pueden ser resumidos en:

a) La distancia rectilínea entre dos puntos varía según el sistema de ejes elegido. Una consecuencia de esto, por ejemplo, es que en un problema de localización la posición del punto óptimo en relación a las ubicaciones existentes dependerá de la posición de los ejes.

b) La segunda dificultad proviene de la ortogonalidad de los ejes. Si los desplazamientos en lugar de realizarse por ángulos rectos, se hacen por ángulos  $\alpha$  cualquiera como generalmente sucede en la realidad -ver Gráfico 19-, las distancias reales serán mejor aproximadas usando una distancia medida paralelamente a los ejes del ángulo  $\alpha$ , y no con la rectilínea.

GRAFICO 19

Desplazamientos por ángulos  $\alpha$ .

### 1.2. Métricas centrales<sup>80/</sup>

Estas métricas poseen la propiedad común de que todos o parte de los movimientos involucrados se realizan a lo largo de rayos centrales, siendo esta la razón por la que se les llama métricas centrales.



### 1.2.1. Métrica radial

En muchos casos para ir de un punto a otro del espacio económico o geográfico no puede ser utilizado ni un desplazamiento en línea recta ni un segmento rectilíneo sino que hay restricciones de "itinerario" o de "redes" que obligan a pasar por un centro.

Sea  $M_0$  el centro de la red de transporte de origen de ejes en  $R^2$ ,  $d_r$  la distancia radial y  $d$  la distancia euclidiana.

i) Si los puntos A y B pertenecen a  $R^2$  y no están sobre un mismo rayo que pasa por el centro  $M_0$  de la red,

$$d_r (A, B) = d (A, M_0) + d (M_0, B)$$

es decir, que para definir la métrica radial se utiliza la métrica euclidiana combinada: la distancia euclidiana de A a  $M_0$  y de  $M_0$  a B.

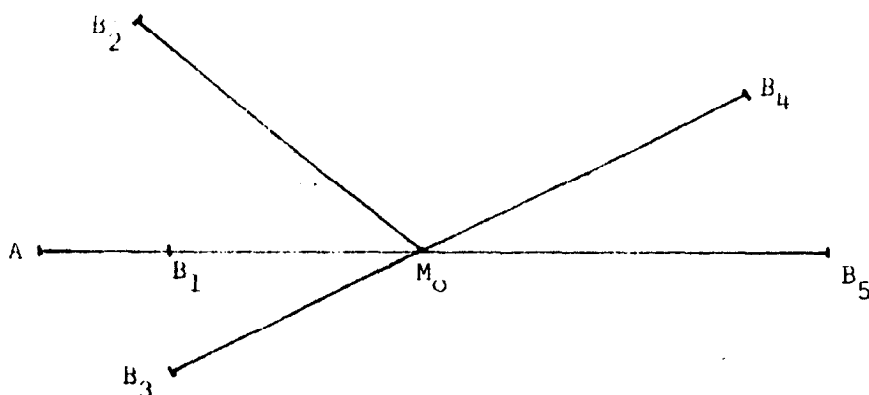
ii) Si los puntos A y B están en el mismo rayo,

$$d_r (A, B) = d (A, B)$$

En el Gráfico 20,  $d_r (A, B_1) = d (A, B_1)$  mientras que  $d_r (A, B_2) = d (A, M_0) + d (M_0, B_2)$ .

GRAFICO 20

## Ejemplos de movimientos radiales



La métrica radial, como verificaremos enseguida, satisface las cuatro propiedades matemáticas de una distancia:

- Positividad:

$$d_r(A,B) \geq 0, \text{ porque, } \left\{ \begin{array}{l} d(A,M_0) + d(M_0,B) \geq 0 \\ 0 \\ d(A,B) \geq 0 \end{array} \right\}$$

- Identidad:

$$d_r(A,B) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} d(A,M_0) + d(M_0,B) = 0 \\ 0 \\ d(A,B) = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} A = M_0 = B \\ 0 \\ A = B \end{array} \right\}$$

- Simetría:

$$d_r(A,B) = \left\{ \begin{array}{l} d(A,M_0) + d(M_0,B) \\ 0 \\ d(A,B) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} d(B,M_0) + d(M_0,A) \\ 0 \\ d(B,A) \end{array} \right\} = d_r(B,A)$$

- Desigualdad triangular:

$$d_r(A,C) = \left\{ \begin{array}{l} d(A,M_0) + d(M_0,C) \\ 0 \\ d(A,C) \end{array} \right\}$$

$$\leq \left\{ \begin{array}{l} d(A,M_0) + d(M_0,C) \leq d(M_0,B) + d(B,M_0) \\ 0 \\ d(A,B) + d(B,M_0) + d(M_0,C) \text{ y} \\ \text{simétricamente si B pertenece al rayo } M_0C \\ 0 \\ d(A,B) + d(B,C) \end{array} \right\} =$$

$$= d_r(A,B) + d_r(B,C).$$

Esta métrica ha sido inventada en el "Instituto de Matemáticas Aplicadas a la Economía" (I.M.E.), de la Universidad de Dijon, habiendo sido la intención de sus creadores mostrar el "peso" de un centro en un espacio polarizado.

### 1.2.2. Métrica periférica

Existen situaciones en las que no es posible efectuar un desplazamiento urbano siguiendo un camino lineal, rectilíneo o pasando por un centro, sino que es necesario tomar una perife--

ria. Las vías de circunvalación que rodean a muchas ciudades contemporáneas constituyen un buen ejemplo. Para representar estos movimientos, ha sido propuesto usar la métrica periférica. Llamamos  $d_p$  a la distancia periférica y la definimos:

i) Si los puntos  $A$  y  $B$  pertenecen a  $R^2$  y no están situados en un mismo rayo que pasa por el centro,

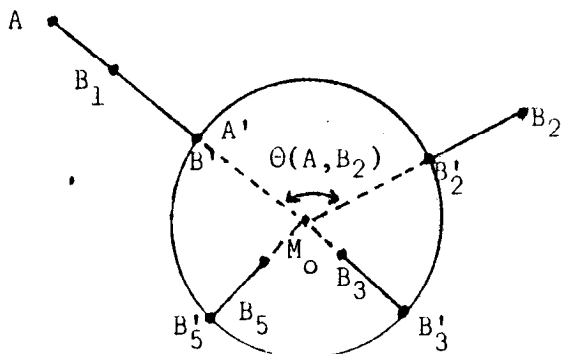
$$d_p(A,B) = d(A,A') + R |\Theta(A,B)| + d(B',B)$$

en donde  $A'$  y  $B'$  son proyecciones radiales en la circunferencia de los puntos  $A$  y  $B$ ;  $\Theta(A,B) \in [-\pi, \pi]$  es el ángulo central  $A'OB'$  y  $R$  es el radio de la circunferencia.

ii) Si los puntos  $A$  y  $B$  pertenecen al mismo rayo, entonces,  $d_p(A,B) = d(A,B)$ .

Mostramos en el Gráfico 21 algunos puntos con sus proyecciones. Es claro que  $d_p(A,B_1) = d(A,B_1)$ , mientras que  $d_p(A,B_2) = d(A,A') + R |\Theta(A,B)| + d(B',B_2)$ .

GRAFICO 21  
Ejemplos de Movimientos Periféricos



En esta métrica se verifican las cuatro propiedades matemáticas de la distancia:

- Positividad:

$$d_p(A,B) \geq 0, \text{ porque } \left\{ \begin{array}{l} d(A,A') + R |O(A,B)| + d(B',B) \geq 0 \\ d(A,B) \geq 0 \end{array} \right.$$

- Identidad:

$$d_p(A,B) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} d(A,A') + R |O(A,B)| + d(B',B) = 0 \\ d(A,B) = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} A = A' = B' = B \\ A = B \end{array} \right. \iff A = B$$

- Simetría:

$$d_p(A,B) = \left\{ \begin{array}{l} d(A,A') + R |O(A,B)| + d(B',B) \\ d(A,B) \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} d(B,B') + R |O(B,A)| + d(A',A) \\ d(B,A) \end{array} \right\} = d_p(B,A)$$

- Desigualdad Triangular:

$$d_p(A,C) = \left[ \begin{array}{c} d(A,A') + R | \theta(A,C) | + d(C',C) \\ \circ \\ d(A,C) \end{array} \right] \leq$$

$$\leq \left[ \begin{array}{c} d(A,A') + R | \theta(A,B) | + d(B',B) + \\ + d(B,B') + R | \theta(B,C) | + d(C',C) \\ \text{porque:} \\ | \theta(A,C) | \leq | \theta(A,B) | + | \theta(B,C) | \\ \circ \\ d(A,B) + d(B,B') + R | \theta(B,C) | + d(C',C) \text{ y} \\ \text{simétricamente si B pertenece al rayo } M_0C \\ \circ \\ d(A,B) + d(B,C) \end{array} \right] =$$

$$= d_p(A,B) + d_p(B,C)$$

Podemos apreciar que si  $R$  es igual a cero -o sea, si todas las proyecciones radiales se llevan al centro- la métrica radial se convierte en un caso particular de la métrica periférica.

En el campo de la localización, la métrica euclidiana permite el uso de la técnica de los isovectores o isodapanas, lo que en el caso de la métrica radial o periférica se vuelven muy complejas, disminuyendo en la práctica su valor operativo.

### 1.2.3. Métrica Circun-Radial

En algunos casos, la red de transporte puede permitir el uso de caminos radiales o periféricos simultáneamente. Estamos en presencia de un espacio económico que combina una red de transporte en estrella y una periferia. La métrica circun-radial puede utilizarse aquí. Concretamente esta herramienta ha sido usada con el fin de planificar la descongestión de los centros urbanos o bien evitar desvíos innecesarios, puesto que pasar por el centro puede a veces ocasionar pérdidas de tiempo importantes.

La distancia circun-radial -representada por  $d_c$ - ha sido definida de la siguiente manera:

$$d_c(A,B) = \min \left[ d_r(A,B), d_p(A,B) \right],$$

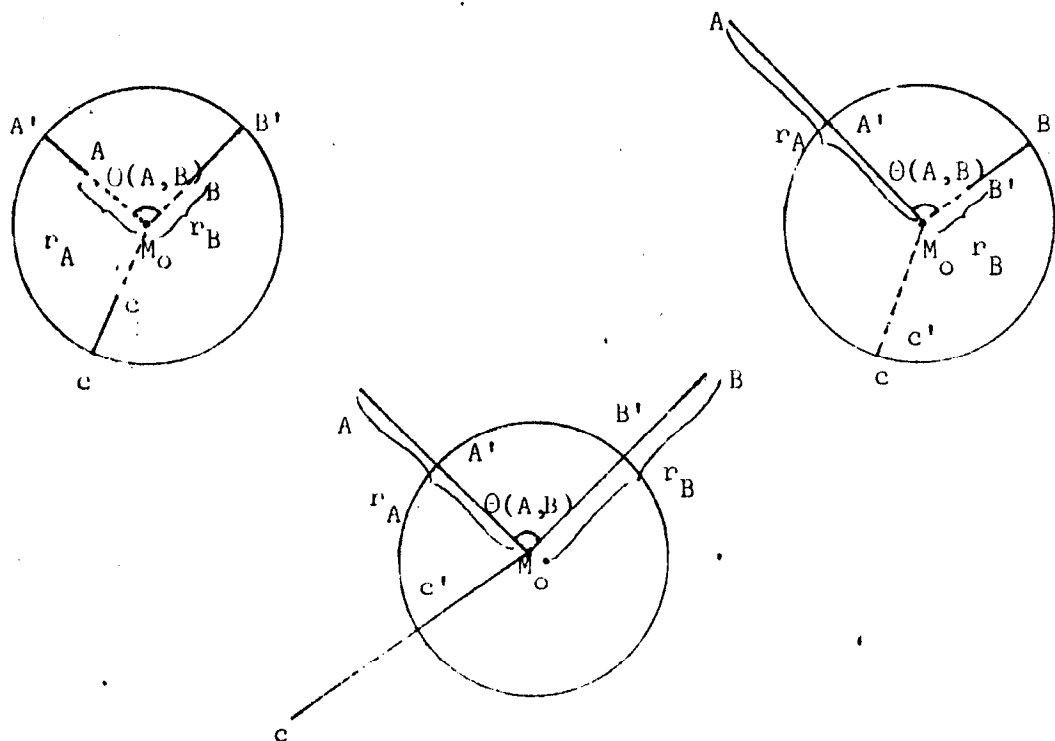
es decir, para ir de un punto A a otro B, se tomará el camino más corto -en longitud- de vías radiales o periféricas.

Si los puntos A y B están en el mismo rayo, --  
 $d_c(A,B) = d(A,B)$ .

Si A y B no están en el mismo rayo, pueden presentarse varios casos que graficamos en el Gráfico 22.

## GRAFICO 22

## Ejemplos de movimientos circun-radiales



Vemos entonces, que según los puntos A y B - sean interiores, uno interior y otro exterior o ambos exteriores, la distancia circun-radial entre A y B será igual, respectivamente a:



$$d_c(A,B) = \begin{cases} d_r(A,B) = d(A,M_0) + d(M_0,B) = r_A + r_B, \text{ sí y sólo sí,} \\ |O(A,B)| > 2 \left[ \min(R,r_A) + \min(R,r_B) - R \right] / R \\ \\ d_p(A,B) = R - r_A + R |O(A,B)| + R - r_B, \text{ sí y sólo sí,} \\ \text{la desigualdad de arriba es invertida} \\ 0 \\ \\ d_p(A,B) = d_r(A,B), \text{ sí y sólo sí, la susodicha desi-} \\ \text{gualdad es una ecuación.} \end{cases}$$

Probamos que  $d_c$  cumple las cuatro propiedades - de una distancia:

- Positividad:

$d_c(A,B) \geq 0$ , porque,  $d_r(A,B)$  y  $d_p(A,B)$  son no negativas.

- Identidad:

$$d_c(A,B) = 0 \iff \left[ d_r(A,B) = 0 \text{ ó } d_p(A,B) = 0 \right] \iff A = B.$$

- Simetría:

$$d_c(A,B) = \begin{Bmatrix} d_p(A,B) \\ 0 \\ d_r(A,B) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_p(B,A) \\ 0 \\ d_r(B,A) \end{Bmatrix} = d_c(B,A)$$

- Desigualdad Triangular:

Es una "conjetura" en el sentido matemático del término, o sea, es una propiedad probablemente cierta pero no demostrada. En los

casos de figura presentados esta propiedad se verifica, pero, en toda generalidad la dificultad reside en que no podemos decir que el mínimo de la suma de dos cantidades es igual a la suma de dos mínimos:

$$\inf (a+b) \neq \inf a + \inf b$$

En el Gráfico 22, el análisis de los diferentes casos posibles permite escribir:

$$d_c (A,C) \leq d_c (A,B) + d_c (B,C)$$

Las métricas centrales, tal como puede desprenderse de la discusión precedente, tienen en común una propiedad importante tanto desde el punto de vista teórico como empírico: procuran una localización -limitada a un conjunto finito de puntos- que minimiza el costo de transporte.

El interés de las métricas centrales no está circunscrita sólo al estudio de la ubicación. Así, la métrica circun-radial se presta bastante bien para el estudio de los desplazamientos urbanos, tal como ha sido demostrado por Perreur y Thisse.<sup>81/</sup> Puede ser utilizada también para modelos de localización urbana y es susceptible de algunas aplicaciones macroeconómicas.

## 2. Espacios Matemáticos y Estructuras Pobres

La formalización de los problemas espaciales sin tener que asociar a los espacios económicos ningún tipo de espacio métrico es posible. Al disponer de una topología menos rica es permisible hablar de estructuras pobres, o sea, estructuras definidas con la ayuda de elementos o hipótesis poco numerosas, siendo por lo tanto más coherentes con la realidad.

Llamada "geometría del plástico" por Maurice Frechet, la topología permite un análisis riguroso de ciertas propiedades cualitativas tales como los conceptos de vecindad, proximidad o distancia. Las estructuras topológicas parecen, por consiguiente, ser herramientas que se adaptan bastante bien para el estudio de los fenómenos económicos, sobre todo porque las propiedades topológicas de un conjunto son invariantes bajo ciertas condiciones de continuidad. El interés que presenta tal particularidad para el análisis económico es evidente, puesto que cualquier conjunto puede ser dotado de una topología: agentes económicos, sectores económicos, instituciones económicas, etc., pueden ser dotadas con esta estructura, basándose en las relaciones que mantienen los elementos del conjunto.

Debemos abrir, sin embargo, un paréntesis para hacer una precisión terminológica. Consideraremos un espacio topológico no en el sentido abstracto del término o sea espacios topológicos definidos a partir de conjuntos "de abiertos" sino más bien espacios asimilados a grafos, uno de los capítulos de la topología que toma a su cargo el de-

Desarrollo contemporáneo de la llamada "geometría de posición" o "análisis situs". Esta manera de enfocar el problema no es nueva, la aplicación de la teoría de grafos en el análisis económico viene siendo efectuada desde el año 1966 por el profesor Claude Ponsard<sup>82/</sup> y numerosos trabajos han sido emprendidos y realizados bajo su conducción en el "Institut de Matemáticas Aplicadas a la Economía de la Universidad de Dijon."<sup>83/</sup>

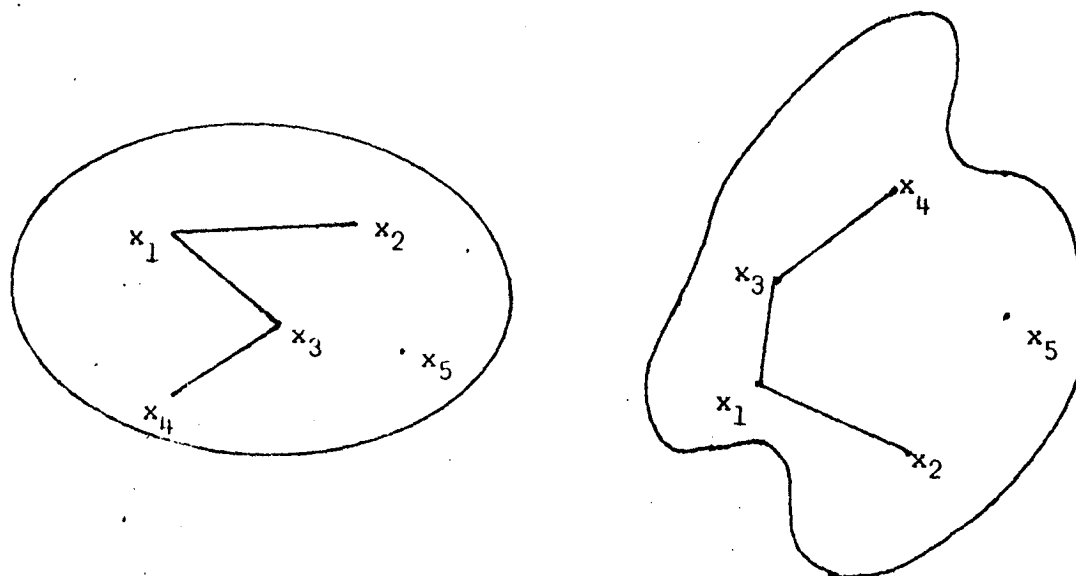
El hecho de ligar el espacio económico a un grafo tiene consecuencias importantes para el análisis:

a) Se respeta el carácter inevitablemente heterogéneo de las relaciones económicas ya que se diferencian y aislan cada una de las relaciones que establecen entre sí los elementos del sistema.

b) La disposición de los vértices del grafo es arbitraria, lo cual implica que la noción de convexidad ya no tiene ningún sentido. Esta teoría permite estudiar las deformaciones elásticas del plano, conservando al mismo tiempo la invariancia de sus propiedades; precisamente, el objeto de la teoría de grafos es estudiar esas propiedades invariantes. Así, por ejemplo, los grafos que se muestran en el Gráfico 23 son topológicamente idénticos.

c) Los problemas espaciales pueden ser formalizados sin tener necesidad de considerar a los espacios económicos como espacios dotados de una métrica.

GRAFICO 23



d) El espacio económico, asimilado a un espacio topológico, se beneficia con todos los algoritmos de este último.

En definitiva, la analogía espacio económico-espacio matemático -como cualquier analogía- es cómoda, aunque, como es natural, presenta algunos inconvenientes que deben ser explicitados.

Decimos que la analogía es cómoda porque todas las leyes del espacio matemático, así como las herramientas de análisis que le son propias se aplican al espacio económico por lo que no es necesario o no se hace imprescindible forjar herramientas propias para el análisis espacial.

Los inconvenientes provienen principalmente de tres causas.

En primer lugar, las propiedades de la estructura matemática se convierten en propiedades del espacio económico, y recíprocamente, las propiedades del espacio económico se limitan sólo a las propiedades del espacio matemático. Esta reciprocidad, lleva a que el análisis espacial se sitúe con un cuerpo de hipótesis muy restringido, lo que limitaría el alcance de su desarrollo y a imprimirle cierta rigidez. Especialmente, cuando se utiliza la geometría euclidiana, C. Ponsard advierte que "las hipótesis económicas implícitas o explícitas son tales que la teoría a las cuales sirven de fundamento cubren un campo exiguo", quiere decirse que su valor operativo es prácticamente nulo, de manera que el análisis es muy restringido.

En segundo lugar, los tipos de relaciones entre los elementos de un espacio matemático que resultan de su axiomática, son específicos a este espacio, es decir, no puede afirmarse que estas relaciones traduzcan otras relaciones que establezcan entre sí los elementos del espacio económico.

En tercer lugar, el progreso o desarrollo de la economía espacial estaría subordinada y sería dependiente del desarrollo de las herramientas matemáticas.

En lo que sigue, expondremos la axiomática de grafos necesaria para comprender con facilidad los modelos topológicos que se presenten más adelante, así como las aplicaciones que se deriven de los mismos. Es claro que esta presentación no es de ninguna manera exhaustiva, existen obras especializadas y aplicaciones económicas que pue-

den ser consultadas por el lector interesado, que ya se han indicado o se explicitaron oportunamente.

## 2.1. Generalidades sobre los grafos<sup>84/</sup>

### 2.1.1. Relación binaria

Sean dos conjuntos  $E$  y  $F$  distintos o no. Llamamos  $\mathcal{R}$  a una relación que confiere un carácter privilegiado a ciertas parejas ordenadas  $(x,y)$  del producto cartesiano  $E \times F$ . Esta relación es tal que la familia de pares ordenados de elementos que poseen la propiedad de estar unidos por  $\mathcal{R}$  forman una parte bien definida  $U$  del producto cartesiano  $E \times F$ : una relación de este tipo, es una relación binaria cuando la familia  $U$  satisface la definición de conjunto.

El hecho de que dos elementos  $x \in E$  e  $y \in E$  tengan la propiedad de estar unidos por la relación  $\mathcal{R}$  se enuncia diciendo:  $(x,y)$  verifica la relación  $\mathcal{R}$ , o " $x \mathcal{R} y$  es verdadero", o aún  $(x,y) \in U$ . La propiedad contraria entre esos mismos elementos se traducirá por " $x \mathcal{R} y$  es falsa" o  $(x,y) \notin U$ .

### 2.1.2. Aplicación unívoca

LLamaremos aplicación unívoca de  $E$  en  $F$  cualquier correspondencia que a todo elemento de  $E$  le hace corresponder un sólo elemento de  $F$ . Dado  $x$  perteneciente a  $E$  e  $y$  perteneciente a  $F$ , escribimos:

$$y = f(x)$$

A toda aplicación unívoca le corresponde una relación binaria, por lo que la propiedad " $x \mathcal{R} y$  es verdadera", si y solamente sí,  $y = f(x)$ .

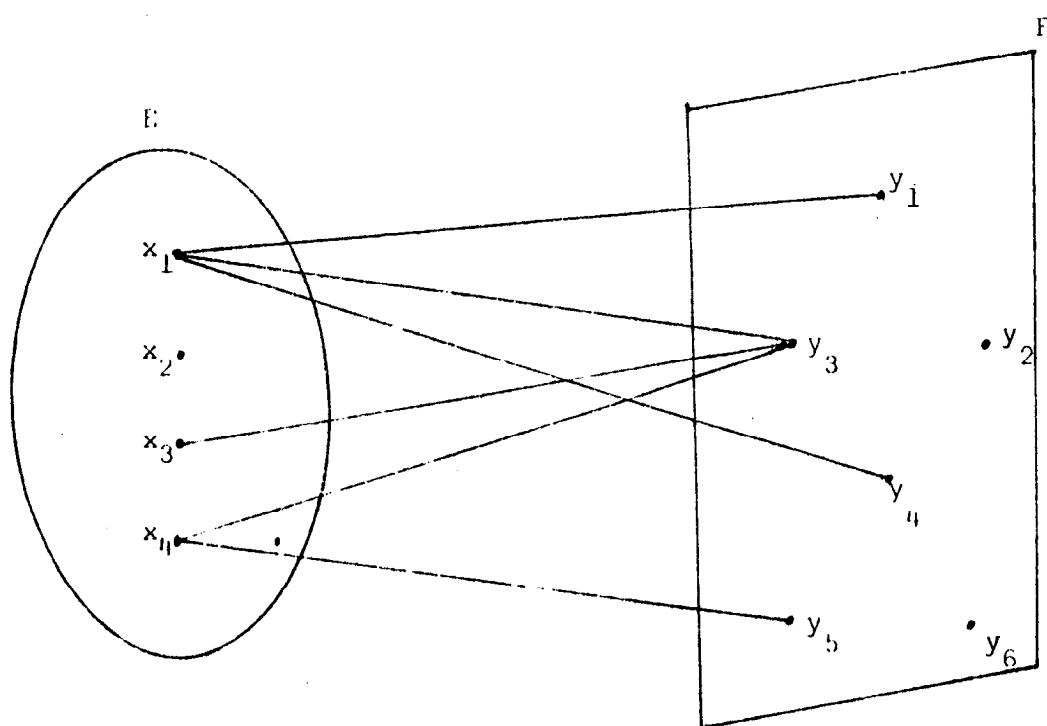
### 2.1.3. Aplicación multívoca

Es una extensión de la noción precedente y se emplea casi exclusivamente en teoría de grafos.

Daremos el nombre de aplicación multívoca o  $\Gamma$ , a un procedimiento o acción perfectamente definidos que permitan aso--ciar a cada elemento  $x$  de un conjunto -origen-  $E$ , uno o varios -eventualmente ningún- elementos de un conjunto -destino-  $F$ . Ver Gráfico 24.

GRAFICO 24

Aplicación multívoca





Llamemos  $\Gamma(x)$  al conjunto de elementos de  $F$  asociados a un elemento cualquiera  $x \in E$ . Si  $y \in \Gamma(x)$  se dice que  $y$  es una imagen de  $x$ ,  $\Gamma(x)$  por definición es el conjunto de imágenes de  $x$ . Este conjunto puede ser vacío, reducido a un sólo elemento o contener un número cualquiera de elementos.

Si  $E = F$ , definimos entonces, una aplicación mututiva de  $E$  sobre sí misma.

#### 2.1.4. Definición de grafo

Por definición, llamaremos grafo  $G$  a todo esquema situado en  $R^n$  constituido por:

- un conjunto  $X$  de puntos de  $R^n$  llamados vértices del grafo; salvo indicación contraria, supondremos que los vértices existen en número infinito.
- Un conjunto  $U$  de líneas uniendo cada una dos vértices (distintos o no) y estando cada línea enteramente definida por el par ordenado o el par  $(x_i, x_j)$  de vértices que une.

Si el par  $(x_i, x_j)$  está ordenado, la línea está dotada de una flecha convenientemente orientada y se llama arco. Si este par está desprovisto de orden -o considerado como la yuxtaposición de dos pares ordenados  $(x_i, x_j), (x_j, x_i)$ - la línea no tiene ninguna o-

orientación y se llama arista. Por convención se atribuye la misma significación a una arista y a dos arcos de sentido opuesto entre dos vértices, lo cual permite homogenizar la representación de una relación binaria o una aplicación multívoca sobre un mismo conjunto, lo que conduce a distinguir entre grafos orientados (Gráfico 25) y no orientados (Gráfico 26).

GRAFICO 25

Grafo orientado

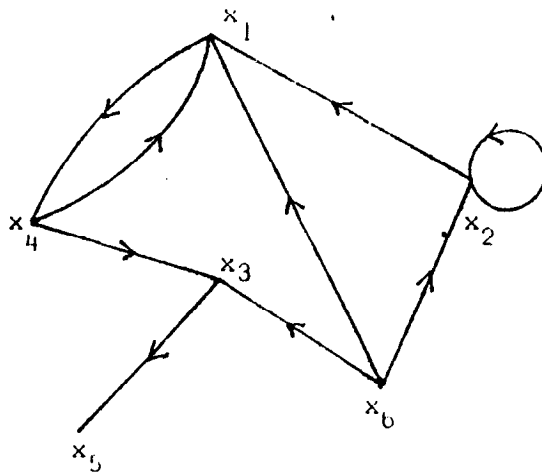
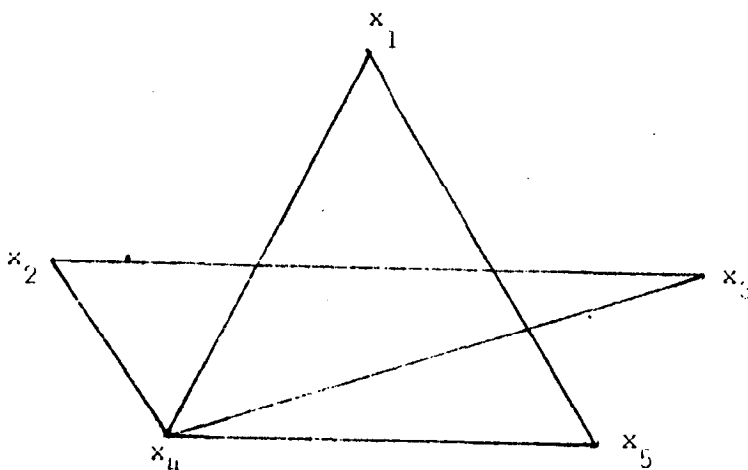


GRAFICO 26

Grafo no orientado



Se escribe  $G = (X, U)$  cuando se representa una relación binaria  $\mathcal{R}_p$  de  $X$  en  $X$ , y el conjunto  $U$  representa el conjunto de pares ordenados para los cuales la relación  $\mathcal{R}_p$  es verdadera. Se escribe  $G = (X, \Gamma)$  cuando el conjunto  $X$  representa los vértices y  $\Gamma$  las líneas que unen los elementos a su imagen o sus imágenes si ellas existen.

La coherencia de esta definición implica que en el grafo  $G = (X, U) = (X, \Gamma)$  la forma geométrica de las líneas es indiferente, puesto que éstas no tienen ninguna significación. Los esquemas de los Gráficos 27 y 28 no deben ser considerados como diferentes.

GRAFICO 27

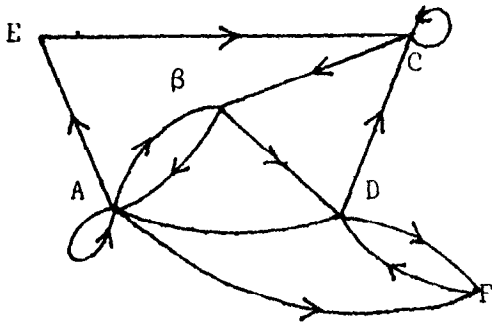
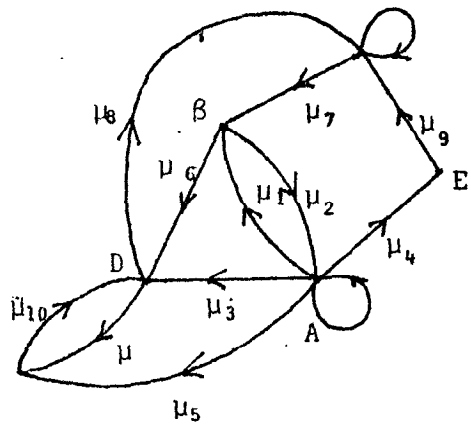


GRAFICO 28



Consideremos dos conjuntos disjuntos  $X_i$  e  $X_j$ , de manera que uno de ellos tenga la propiedad de ser un conjunto de origen y el otro un conjunto de destino; existirá una partición de  $X_k$  en dos partes  $X_i$  e  $X_j$ , tal que cada arco del conjunto  $U$  tenga su extremi--

dad inicial en  $X_i$  y su extremidad terminal en  $X_j$ . El grafo que presenta esta particularidad es llamado simple o bipartido. Por extensión, para más de dos conjuntos se definen los grafos multipartidos. Los Gráficos 29 y 30 ilustran las definiciones precedentes.

GRAFICO 29

Grafo simple

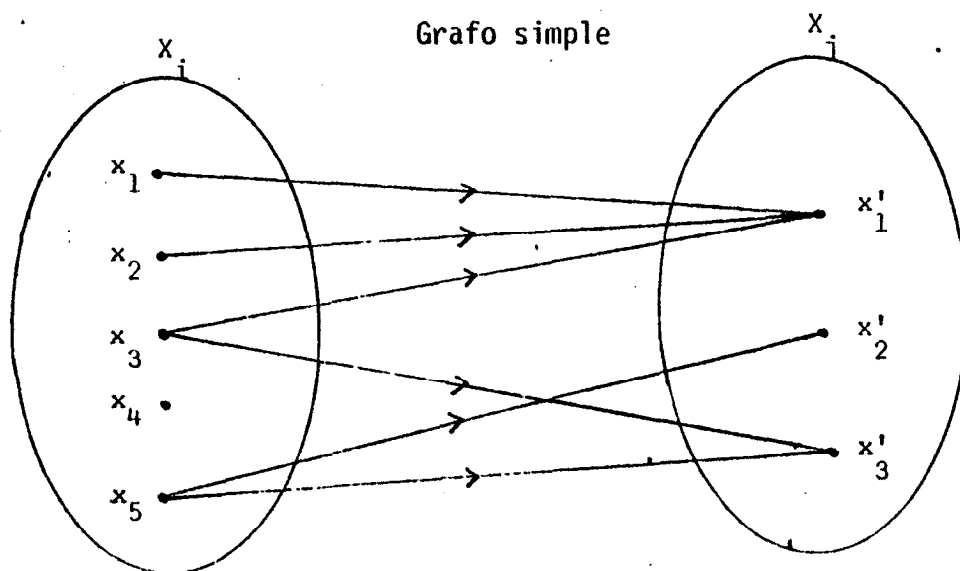
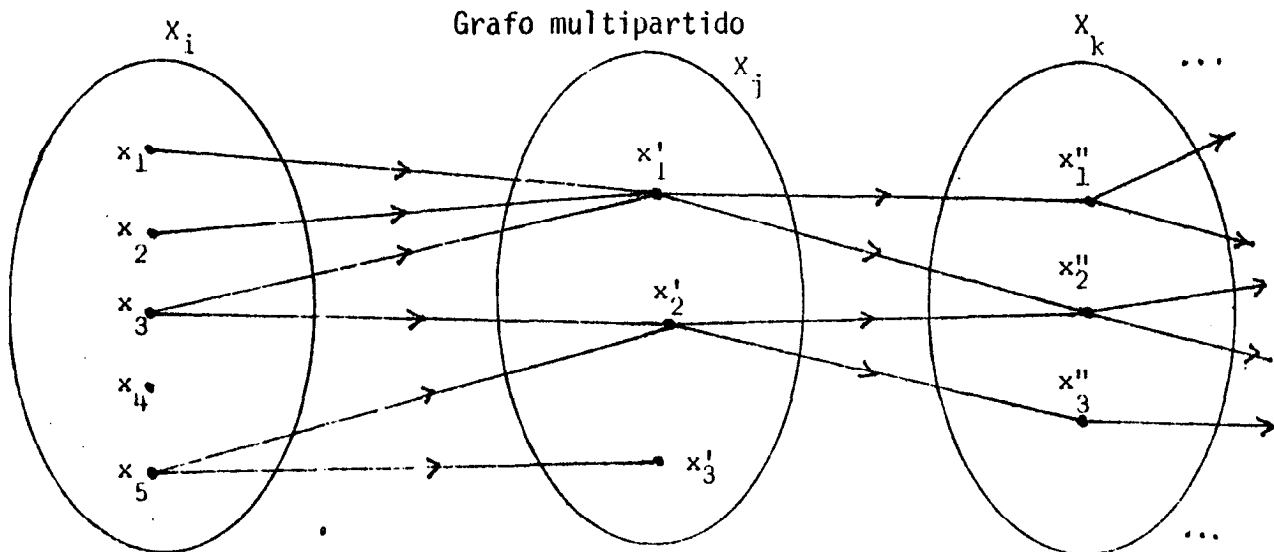


GRAFICO 30

Grafo multipartido



Llamamos multigrafo, a un grafo en el cual algunos vértices están unidos por más de un arco o una arista. Un --

$p$ -grafo es un multigrafo en el cual el orden de multiplicidad de cada línea es a lo más igual a un entero  $p$ , un multigrafo puede ser siempre interpretado como una supersposición de  $p$ -grafos que tienen un mismo conjunto de vértices. Con esta terminología, un 1-grafo es simplemente lo que hasta ahora hemos venido llamando grafo. En los Gráficos 31 y 32 presentamos un ejemplo.

GRAFICO 31

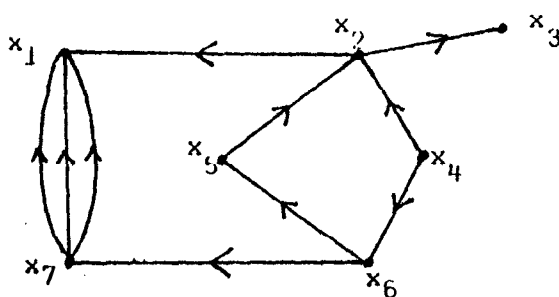
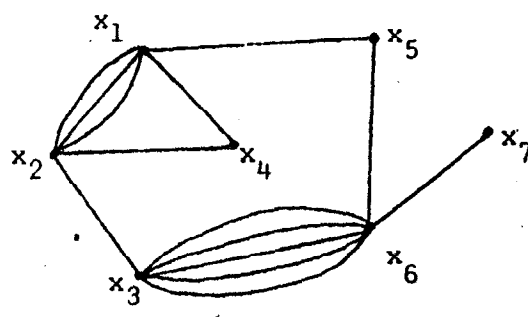
 $p$ -grafo $p = 3$ 

GRAFICO 32

Multigrafo



### 2.1.5. Algunos conceptos generales de la teoría de grafos

Sea un grafo  $G = (X, U)$  o  $G = (X, \Gamma)$

En un arco  $(x_i, x_j) = u$ , el vértice  $x_i$  recibe a veces el nombre de "extremidad inicial" y el  $x_j$  el de "extremidad final".

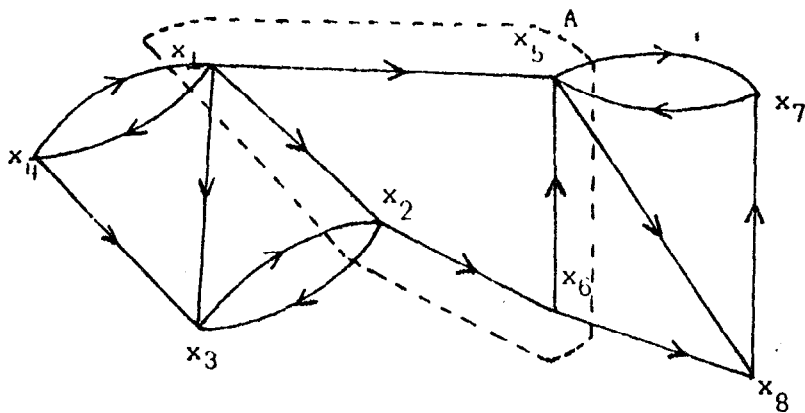
- BOUDEVILLE, J.  
1977 "Digraphe, Composantes Fortes et Condensation Structurale des Régions - Françaises". Cahiers du Centre Economie, Espace, Environnement. N° 1, - págs. 18-30.
- BOVENTER E von  
1968 "La Teoría de la Organizac-ón Espa- - cial como Fundamento de la Planifica- - ción Regional". En B. Secchi (ed), - Análisis de las Estructuras Territo- - riales. Gustavo Gili, Barcelona.
- CARVALHO, C.M. de  
1975 A evolucao das Teorias Clássicas da - Economia Espacial: suas Contribucoes para a Ana'lise de Concentraçao das Actividades. CEDEPLAR, Monografía - N° 10, Belo Horizonte.
- CLAVAL, P.  
1970 "L'Espace en Géographie Humaine" - Le Géographe Canadien. Vol. 14, N° 2.
- CHRISTALLER, W.  
1966 Central Place in Southern Germany. Englewood Cliffs.
- CHAMBERLIN, E.  
Teoría de la Competencia Monopólica. Fondo de Cultura Económica, México.
- DACEY, M.  
1966 "Population of Places in a Central - Place Hierarchy". Journal of Regio- - nal Science. Vol 6, N° 1, págs. 27-33.
- DEBREU, G.  
1973 Teoría del Valor: Un Análisis Axiomá- - tico del Equilibrio Económico. Bosch, Barcelona.
- DERYCKE, P.  
1970 L'Economie Urbaine. Presses Universi- - taires de France, París.
- FONSECA, E.  
1976 "Reexamen del Concepto de Espacio y su Aplicación a la Planificación en Costa Rica". Revista Interamericana de Plani- - ficación. Vol. 10, N° 39.
- GEORGE, P.  
1969 Sociología y Geografía. Península.
- GUIGOU, J.  
1972 Théorie Economique et Transformation de l'Espace Agricole. Gauthier-Villars, París. 2 Tomos.
- HARARY, F. et.al.  
1965 Structural Models. An Introduction to the Theory of Directed Graphs. Wiley.

- Preeuleriano, cuando pasa una vez al menos por cada uno de los arcos del grafo.

Un circuito  $\sigma$  es un camino finito y cerrado: - la extremidad inicial y terminal coinciden. Los calificativos de elemental, simple, hamiltoniano, euleriano, prehamiltoniano y preeuleriano se emplean para los circuitos con el mismo sentido que para los caminos con la s3la condici3n de considerar los v3rtices extremos de la serie como un mismo v3rtice.

Por ejemplo, en el grafo del Gr3fico 33:

GRAFICO 33



$\mu_1 = x_4, x_3, x_2, x_6$  define un camino elemental.

$\mu_2 = x_1, x_4, x_3, x_2, x_3$  define un camino no elemental pero simple.

$\mu_3 = x_1, x_4, x_3, x_2, x_6, x_8, x_7, x_5$  define un camino hamiltoniano.

$\sigma_1 = (x_3, x_2), (x_2, x_3)$  define un circuito elemental.

Consideremos un grafo  $G = (X, U)$  y sea  $A$  una parte cualquiera de  $X$ . Un arco  $u' \in U$  es incidente hacia el interior de  $A$  si tiene por extremidad inicial un vértice fuera de  $A$  y por extremidad terminal un vértice de  $A$ ; un arco  $u'' \in U$  será incidente hacia el exterior si presenta las características inversas. Notaremos por  $w'(A)$  y  $w''(A)$  el conjunto de arcos incidentes hacia el interior y exterior respectivamente.

En el Gráfico 33:

$$A = x_1, x_2, x_5, x_6 = A_{1256}$$

$$w'(A_{1256}) = (x_4, x_1), (x_3, x_2), (x_7, x_5)$$

$$w''(A_{1256}) = (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_3), (x_5, x_7), \\ (x_5, x_8), (x_6, x_8)$$

La definición de camino al igual que la de circuito hace un uso explícito de la orientación. Los conceptos de pseudocadena, cadena, pseudociclo y ciclo son en cambio conceptos no orientados; y dado que no necesitaremos recurrir a ellos (con excepción del concepto de cadena) en los modelos que presentaremos posteriormente, nos permitimos remitir al lector interesado a cualquiera de las obras que señalamos en la bibliografía.



Una cadena  $\gamma$  de un grafo  $G = (X, U)$  es una serie ordenada de vértices no necesariamente (todos) distintos:

$$\gamma = (x_1, x_2, \dots, x_p)$$

verificando:

$$(x_p, x_{p+1}) \in U \quad \text{o} \quad (x_{p+1}, x_p) \in U$$

para

$$p = (1, \dots, q - 1)$$

#### 2.1.6. Clases de grafos

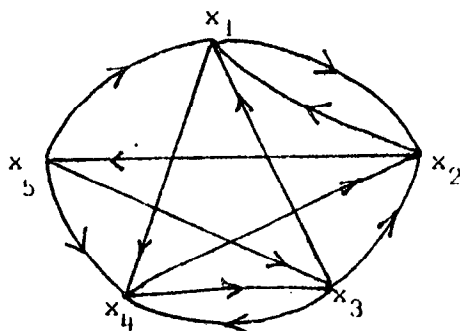
Estudiaremos ahora una nueva serie de definiciones relacionadas con algunos procedimientos corrientemente empleados para deducir de un grafo  $G = (X, U)$  otros grafos por modificaciones de los conjuntos de vértices y/o los arcos. (Esto puede ser empleado en caso de grafos no orientados sustituyendo el vocablo arco por arista).

Un grafo  $G = (X, U)$  es completo si entre dos vértices cualquiera hay siempre un arco que los une directamente (ver Gráfico 34). Es decir, si  $\forall x_i, x_j \in X$  con  $(x_i \neq x_j)$  tenemos:

$$(x_i, x_j) \notin U \longrightarrow (x_j, x_i) \in U$$

GRAFICO 34

Grafo completo

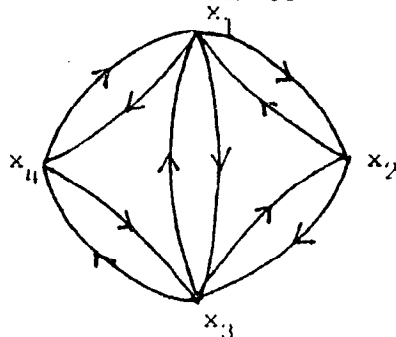


Un grafo es simétrico si  $(x_i, x_j) \in U \rightarrow (x_j, x_i) \in U$ .

Ver Gráfico 35.

GRAFICO 35

Grafo simétrico

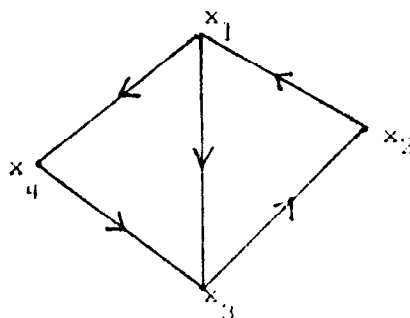


Un grafo es asimétrico si,  $(x_i, x_j) \in U \rightarrow (x_j, x_i) \notin U$ .

Ver Gráfico 36.

GRAFICO 36

Grafo asimétrico



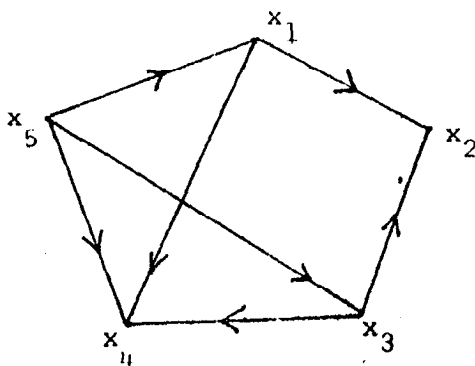
Sea un grafo  $G = (X, U)$ . Si conservamos todos los vértices de  $G$  y dejamos de lado algunos arcos, tenemos un grafo  $G'$ :

$$G' = (X, U'), \quad U' \subset U$$

decimos que el grafo  $G'$  es un grafo parcial de  $G$ . El Gráfico 37 muestra un grafo parcial del grafo del Gráfico 34.

GRAFICO 37

Grafo parcial



Si abandonamos una parte de los vértices y todos los arcos que les son incidentes, conservando los arcos restantes, obtenemos un grafo llamado subgrafo de  $G$ . Este subgrafo es engendrado por un subconjunto  $A$  formado por los vértices conservados, se lo notará por  $G_A$ :

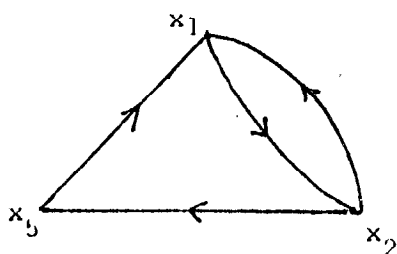
$$G_A = (A, U_A), \quad A \subset X$$

$U_A$  = conjunto de arcos de  $U$  que tienen sus extremidades en  $A$ .

En el Gráfico 38, presentamos un subgrafo del grafo del Gráfico 34.

GRAFICO 38

Subgrafo



Estos dos procedimientos que permiten deducir - de un grafo  $G$ , un grafo parcial  $G'$  y un subgrafo  $G_A$ , pueden ser combinados para obtener un subgrafo parcial de  $G$ :

$$G'_A = (A, U'_A) \quad , \quad A \subset X \quad \quad U'_A \subset U_A$$

### 2.1.7. Diversas formas de conexidad

En teoría de grafos, el estudio de la conexidad pone el acento en las relaciones que pueden existir entre los vértices.

Estudiaremos aquí la conexidad de los grafos orientados y sin bucles, denominados también grafos directos.

En la axiomática de la teoría de los grafos directos, existen diferentes relaciones entre los vértices; dos cualquiera de ellos son:

- a) 0-relacionados
- b) 1-relacionados, sí y solamente sí, existe una cadena elemental que los une.
- c) 2-relacionados, sí y solamente sí, existe un camino elemental que los une.
- d) 3-relacionados, sí y solamente sí, existen dos caminos elementales que los unen, el uno en un sentido, el otro en el sentido inverso.

En concordancia con lo anterior, pueden ser definidas cuatro categorías de conexidad:

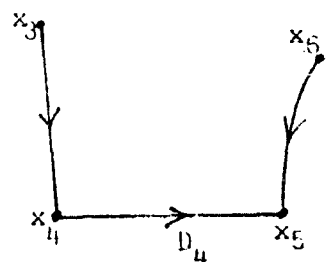
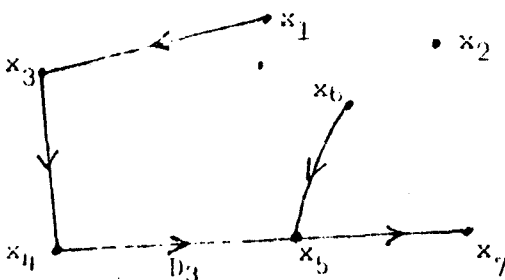
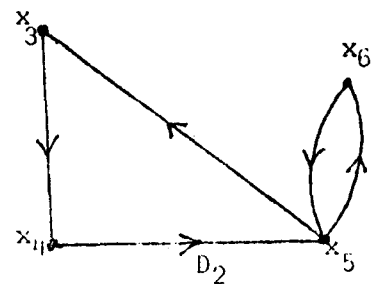
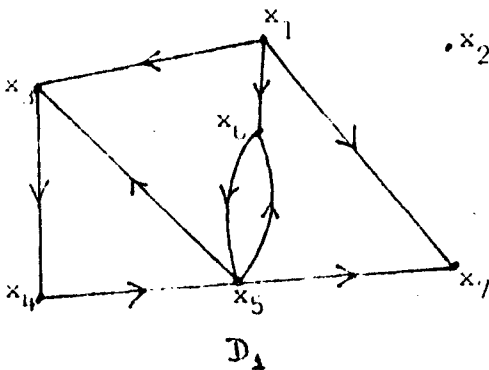
- a) No conexidad
- b) Conexidad simple:
  - $\forall x_i, \forall x_j$ ; existe una cadena elemental que va de  $x_i$  a  $x_j$
- c) Conexidad semi-fuerte:
  - $\forall x_i, \forall x_j$ , existe un camino elemental que va de  $x_i$  a  $x_j$  o de  $x_j$  a  $x_i$
- d) Conexidad fuerte:
  - $\forall x_i, \forall x_j$  existe un camino elemental que va de  $x_i$  a  $x_j$  y otro que va de  $x_j$  a  $x_i$

Un grafo  $G = (X, U)$  tiene tres clases de componentes:

- Una componente simplemente conexa de  $G$  es un subgrafo de  $G$ , máximo por la conexidad simple.
- Una componente semi-fuertemente conexa de  $G$ , es un subgrafo de  $G$ , máximo por la conexidad semi-fuerte.
- Una componente fuertemente conexa de un grafo  $G$  es un subgrafo de  $G$ , máximo por la conexidad fuerte.

Ilustremos estos conceptos por medio de los grafos directos del Gráfico 39.

GRAFICO 39



En el grafo  $D_1$ ,  $x_3$  y  $x_5$  son 3-relacionados, en cambio,  $x_1$  y  $x_5$  son 2-relacionados.

En el grafo  $D_3$ ,  $x_4$  y  $x_6$  son 1-relacionados.

El grafo  $D_1$  es no conexo;  $D_2$  es fuertemente conexo, y el grafo  $D_4$  es simplemente conexo. Estos grafos pertenecen respectivamente a las categorías de conexidad 0, 3 y 1.

### 2.1.8. Matriz de Boole asociada a un grafo

Esta asociación se presenta bajo la forma de una tabla de doble entrada cuyas filas y columnas indican los vértices  $x_i$  tomados en el mismo orden, tal como se muestra en el Gráfico 40.

GRAFICO 40

Matriz de Boole asociada a un grafo

	$x_1$	$x_2$	...	$x_j$	...	$x_n$
$x_1$						
$x_2$						
·						
·						
$x_i$				$a_{ij}$		
·						
·						
$x_n$						

Sea  $A = a_{ij}$  esta matriz

Las casillas corresponden a los pares ordenados  $(x_i, x_j)$  y se asume la convención siguiente:

$$a_{ij} = 1 \iff (x_i, x_j) \in U$$

$$a_{ij} = 0 \iff (x_i, x_j) \notin U$$

En un grafo orientado la lectura de cada fila de la matriz booleana muestra la lista de imágenes del vértice correspondiente, mientras que, la lectura de cada columna proporciona la enumeración de las imágenes inversas. La diagonal principal de esta matriz permite identificar los bucles del grafo, cuando existen.

Dado que estamos en presencia de un sistema binario, los procedimientos del cálculo booleano pueden ser aplicados.

#### 2.1.9. La matriz de caminos y el análisis de la conectividad

El estudio de esta matriz proporciona una característica del efecto global del conjunto de relaciones directas e indirectas entre los componentes de una estructura económica.

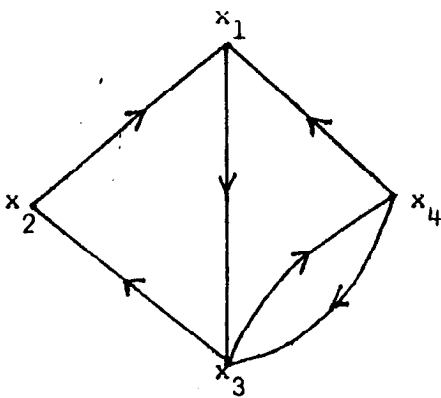
Llamamos a esta matriz  $R$ ; el término general  $r_{ij}$  será igual a 1 si  $x_j$  es un descendiente de  $x_i$ , es decir, si existe al menos un camino que va de  $x_i$  a  $x_j$ ;  $r_{ij} = 0$  en el caso contrario. Por convención se asume que cada vértice es su propio descendiente por un camino de longitud nula; y que la diagonal principal de  $R$  está formada por 1.



Podemos mostrar el cálculo de esta matriz por medio de un ejemplo a partir del grafo directo  $G = (X, U)$  y su matriz de Boole asociada  $A$ , del Gráfico 41.

GRAFICO 41

Ejemplo de matriz de Boole asociada a un grafo



$A =$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$x_1$			1	
$x_2$	1			
$x_3$		1		1
$x_4$	1		1	

En general  $R$  se determina a partir de  $A$ . Notemos por  $A^n$  el producto  $A^n$  calculado por medio de la aritmética pseudo-booleana y  $a_{ij}^{(n)}$  el elemento general de  $A^n$ . Este resultado es posible a partir de los teoremas siguientes: 84/

#### Teorema 1

Sea  $A$  una matriz booleana del grafo directo  $G$ . El elemento  $a_{ij}^{(n)}$  de  $A^n$  es el número de caminos de longitud  $n$  que van de  $x_i$  a  $x_j$ .

Este teorema y las reglas de la aritmética pseudo-booleana permiten enunciar el siguiente resultado:

Teorema 2

$a_{ij}^{(n)}$  es igual a 1, sí y sólo sí, el grafo directo  $G$ , contiene por lo menos un camino de longitud  $n$  que va de  $x_i$  a  $x_j$ .

Retomemos la información del Gráfico 41 y calculemos  $A^2$  y  $A^3$ :

$$A^2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 1 & & 1 \\ \hline & & 1 & \\ \hline 1 & & 1 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} ; \quad A^3 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & 1 & \\ \hline & 1 & & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Para cualquier grafo directo  $G$ , es posible definir una matriz de caminos de longitud inferior o igual a  $n$ :  $R_n$

Teorema 3

Para todo grafo directo  $G$  de  $p$  vértices, se tiene:

$$R = R_{p-1}$$

$$y \quad R_n = R_{p-1} \quad \text{para cualquier entero } n \text{ que verifique } n \geq p-1$$

Sabemos que existe un camino de longitud nula entre todo vértice y sí mismo. Luego,  $R_0$  es igual a la matriz unidad  $I$

de igual dimensión que  $A$ . La matriz  $A$  proporciona los caminos de longitud 1. Por lo tanto,  $A+I$  indica los caminos de longitud inferior o igual a 1. De la misma manera,  $I+A+A^2$  muestra los caminos de longitud inferior o igual a 2, y así sucesivamente.

Los datos del ejemplo tratado nos dan:

$$R_0 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$; R_1 = (I + A)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & 1 & \\ \hline 1 & 1 & & \\ \hline & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$R_2 = (I+A+A^2) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$; R = R_3 =$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Pero, no siempre es necesario calcular hasta la potencia  $(p-1)$  de  $A$  para encontrar  $R$ . En efecto:

#### Teorema 4

Sea  $k$  el entero más pequeño que verifica  $R_k = R_{k+1}$

Tenemos  $R_k = R$

Podemos enunciar la siguiente regla:

Teorema 5

$$R_n = (I + A + A^2 + \dots + A^n) = (I + A)^n$$

Por consiguiente, con  $k$  definido como en el teorema 4:

$$R = (I + A + A^2 + \dots + A^k)$$

En la práctica, calculamos las potencias sucesivas  $(I+A)$ ,  $(I+A)^2$ ,  $(I+A)^3$  .... hasta encontrar una potencia  $k$  tal que  $(I+A)^k = (I+A)^{k+1}$

$(I+A)^k$  será entonces la matriz de caminos  $R$ , y  $k$  será la longitud de la pista finita más larga en el grafo directo  $G$ .

Detectar sistemáticamente la existencia de al menos un camino entre dos vértices permite determinar fácilmente la categoría de conexidad del grafo directo estudiado, en particular un grafo directo  $G$  es fuertemente conexo, sí y sólo sí, su matriz de caminos está enteramente formada por 1.

### 2.1.10. La matriz de separaciones

La matriz de separaciones es obtenida a partir de la matriz de caminos.

La matriz de separaciones  $E$  es una matriz cuadrada de igual dimensión que la matriz de Boole  $A$  y cuyos elementos  $d_{ij}$  son las separaciones  $d(x_i, x_j)$  entre cada vértice  $x_i$  y cada vértice  $x_j$ .

Esta matriz se construye tomando en cuenta:

- a) Para cualquier  $i$ ,  $d_{ji} = 0$
- b) Si  $r_{ij} = 0$ ,  $d_{ij} = \infty$
- c)  $d_{ij}$  es la potencia mínima a la cual debe ser elevada la matriz  $A$  para que  $a_{ij}^{(n)}$  sea igual a 1.

Así por ejemplo, la matriz de separaciones se establece a partir de la matriz  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3 = R$

$E =$

0	2	1	2
1	0	2	3
2	1	0	1
1	2	1	0

## CAPITULO IV

### MODELOS TOPOLOGICOS DE JERARQUIA

Los modelos de jerarquización son numerosos y variados. Algunos son resultado inmediato de una decisión, de una elección, y corresponden a una intención deliberada de organización, otros, en cambio, aparecen como resultante de toda una serie de intervenciones en las cuales interfieren las acciones humanas, los comportamientos, los factores naturales. En cada caso, los diferentes modelos de jerarquización deben revelar la estructura del fenómeno, sus relaciones de subordinación, obtener sus componentes y enunciar sus propiedades.<sup>86/</sup>

Desarrollaremos sucesivamente cuatro modelos. En el primero, se analiza la Centralidad Absoluta, debida a Harary, Norman y Cartwright<sup>87/</sup>. En este análisis los polos de actividad están estrechamente sometidos a las iniciativas, impulsos e influencia irradiados por un centro único. La centralidad perfecta supone que no existen relaciones entre los satélites, conduciendo, por lo tanto a un ordenamiento muy elemental: un polo es centro o satélite, dominante o dependiente.

El análisis de la Centralidad Absoluta puede ser perfeccionado. El segundo modelo trata justamente esta posibilidad y se apoya -

en la noción de Centralidad Relativa originada en los trabajos de Bavelas.<sup>88/</sup> Demostraremos cómo los resultados del modelo son sensibles al punto de vista o criterio con el que se examina la relación.

Las insuficiencias de los dos primeros modelos llevan a la generalización de la noción de centro, aplicando la noción de potencia de un vértice<sup>89/</sup>, que se muestra como una herramienta de análisis muy eficaz, pues permite obtener una clasificación continua de vértices y desde el punto de vista teórico se adapta bastante bien para el análisis de los lugares centrales.

El último modelo se apoya en la teoría de la reducción, se trata de afectar un rango a los diferentes componentes conexos de un grafo, tomando en cuenta las posiciones relativas y la centralidad de las relaciones.<sup>90/</sup> Como demostraremos, este método es bastante poderoso y permite obtener importantes conclusiones en materia de economía regional.

La estructura matemática que emplearemos está compuesta por un conjunto de puntos entre los cuales pueden o no existir relaciones; sólo tiene importancia la situación de los vértices y las relaciones que mantienen entre sí, de manera que el espacio es deformable. En el análisis económico espacial, los vértices del grafo o grafos considerados serán puntos del espacio geográfico o económico, y sus relaciones pueden simbolizar la existencia de una vía de comunicación -por lo que el grafo será llamado de soporte material-, o cualquier relación de comu-

nicación posible entre puntos del espacio. Asimilaremos, el espacio, por tanto, a una constelación de centros puntuales agrupados en el seno de una red de interrelaciones, lo cual no constituye una hipótesis restrictiva a la vista de modelos concebidos en la tradición habitual.

Las hipótesis sobre la estructura del espacio se modifican: - en el caso de un grafo a soporte material, la continuidad se da a lo largo del soporte y no en todos los puntos del espacio. La distancia es definida como la longitud del camino más corto entre dos puntos, pero este camino más corto no es más postulado en referencia a la línea recta, lo cual significa que la hipótesis de homogeneidad es abandonada.

Los grafos valuados escribe B. Rouget<sup>91/</sup> solamente son casos de conceptos más generales, de manera que cada grafo traduce las propiedades del espacio económico que representa.

### 1. La Centralidad Absoluta

El análisis de la centralidad absoluta se fundamenta en un estudio comparativo de la longitud de las pistas o sea de los caminos más cortos que unen dos vértices.

Ha sido desarrollada por Harary, Norman y Cartwright, utilizando los llamados grafos directos (digrafos) que son grafos orientados y sin bucles, es decir que representan una relación binaria antireflexiva y que son en sí mismos antireflexivos.



A este tipo de grafo en lo que sigue lo señalaremos por la letra mayúscula D.

La separación  $d(x_i, x_j)$  entre dos vértices  $x_i, x_j$  se define por la longitud de la pista que va de  $x_i$  a  $x_j$ . Si no existe un camino que una  $x_i, x_j$ ,  $d(x_i, x_j) = \infty$ ; en caso que  $x_i, x_j$  estén superpuestos se tendrá que  $d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i) = 0$

La separación  $d(x_i, x_j)$  verifica las siguientes propiedades:

a)  $d(x_i, x_i) = 0$

b)  $d(x_i, x_j) + d(x_j, x_k) \geq d(x_i, x_k)$

además, si el grafo es simétrico se cumple:

c)  $d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i)$

Reconocemos en las propiedades anteriores, las condiciones de separación, desigualdad triangular y simetría que son las propiedades que definen a una distancia. Aquí, a diferencia de la distancia euclidiana que es siempre finita, la distancia puede ser infinita, siendo suficiente para esto, que no exista ningún camino que relacione a dos vértices.

A cada vértice le pueden ser asociadas dos medidas:

a) Alejamiento  $d^+(x_i)$ : máxima separación de  $x_i$  a otro vértice del grafo.

$$d^+(x_i) = \max_{x_j} d(x_i, x_j)$$

o sea, el término máximo de la línea  $i$ .

b) Antialejamiento  $d^-(x_i)$  : máxima separación de un vértice cualquiera del grafo al vértice  $x_i$

$$d^-(x_i) = \max_{x_j} d(x_j, x_i)$$

o sea, el término máximo de la columna  $i$ .

En el Capítulo III, desarrollamos la axiomática de la teoría de grafos. Definimos e interpretamos la matriz de caminos o accesibilidad notada  $R$ , así como la matriz booleana  $A$  asociada a un grafo. También explicamos cómo se deriva la matriz  $R$  a partir de la matriz  $A$  por medio de la aritmética pseudo-booleana, en la cual las operaciones:

$$\begin{array}{ll} 1 + 1 = 1 & 1 \times 1 = 1 \\ 1 + 0 = 1 & 1 \times 0 = 0 \\ 0 + 1 = 1 & 0 \times 1 = 0 \end{array}$$

Demostremos asimismo cómo determinar la matriz de separaciones  $E$  a partir de las diferentes matrices  $R_n$ . Lo que aquí nos interesa es cómo interpretar la matriz  $E$ , para lo cual, previamente deben ser tomadas en cuenta la siguiente serie de definiciones:

Los vértices que tienen el alejamiento más pequeño son llamados Centros, al valor de este alejamiento se le da el nombre de rayo externo ( $r^+$ ) del grafo.

Los vértices que tienen el antialejamiento más pequeño serán llamados Anticentros; al valor de este antialejamiento se le da el nombre de rayo interno ( $r^-$ ) del grafo.

El máximo alejamiento y antialejamiento es igual a la longitud de la pista más larga del grafo. El valor es el diámetro ( $d$ ) de la estructura.

Un vértice es Periférico cuando su alejamiento es igual al valor del diámetro.

Un vértice es Antiperiférico cuando su antialejamiento es igual al diámetro.

Estas definiciones duales permiten situar los vértices privilegiados con relación a la difusión de la influencia económica.

Un vértice es tanto más influyente cuando es centro y es tanto menos dependiente de otros vértices cuando es periférico. Paralelamente, está tanto más sometido a las perturbaciones del resto de la estructura cuando es anticentro y tanto menos cuando es periférico.

Considerando un vértice, los resultados pueden ser resumidos:

COMO TRANSMISOR DE INFLUENCIA		COMO RECEPTOR DE INFLUENCIA	
Más fuerte	Más débil	Más fuerte	Más débil
CENTRO	PERIFERICO	ANTICENTRO	ANTIPERIFERICO

Con el fin de ilustrar empíricamente la teoría expuesta, - con un ejemplo numérico muy simple, vamos a aplicarla a los datos del comercio interregional de los países del Pacto Andino, que se presentan en el Cuadro 4.

CUADRO 4

COMERCIO INTERREGIONAL ANDINO FOB, 1968  
(Miles de dólares)

Exportaciones = filas ; Importaciones = columnas

	Bolivia	Colombia	Ecuador	Perú	Venezuela	Total
Bolivia	-	-	-	2,271	2	2,273
Colombia	273	-	6,410	6,320	6,277	19,280
Ecuador	73	5,904	-	1,205	38	7,220
Perú	1,748	5,277	2,091	-	5,975	15,091
Venezuela	-	4,381	16,443	13,026	-	33,850
Total	2,094	15,562	24,944	22,822	12,292	77,714

Fuente: <sup>92</sup>/ Junta del Acuerdo de Cartagena. Indicadores Socioeconómicos de la Subregión Andina. Abril, 1979. Pág. 182-183.

La elección de un sentido de la dominancia es delicada. Al respecto R. Lantner<sup>93/</sup> expresa que son posibles dos convenciones de orientación:

a) La orientación es directa si el flujo se dirige conforme al sentido del tránsito físico, es decir, desde un polo oferente a un polo demandante. Tal orientación equivale a admitir la dominancia por la oferta. En esta concepción la dependencia interviene más al nivel de los aprovisionamientos que al nivel de las ventas. Este tipo de relaciones de dominancia - dependencia describe teóricamente un mecanismo real: la adaptación de la demanda a la oferta se hace necesaria - cuando esta última es restringida.

b) La orientación es inversa cuando el flujo del polo demandante se dirige hacia el polo oferente, es decir, que el nivel de actividad del polo oferente está directamente ligado al volumen de demanda que le es dirigido. Tal orientación, equivale entonces, a admitir la dominancia por la demanda.

Queda aún por determinar la valorización de los flujos.- Para tal efecto vamos a utilizar dos tipos de coeficientes:

El "coeficiente técnico"  $\theta_{ij}$  definido como  $\theta_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$  ;

llamaremos estructura de compras, a la estructura de los polos productivos cuyos flujos son valorizados por los "coeficientes técnicos". -

El "coeficiente de destino"  $\alpha_{ij}$  será definido como  $\alpha_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_i}$ ; denominaremos estructura de ventas a la estructura de polos productivos cuyos flujos son valorizados por los "coeficientes de destino".

Un estudio completo de la centralidad absoluta requeriría analizar sucesivamente la dominancia por la demanda, la dominancia por la oferta, y para cada una de estas, el análisis de las estructuras de compras y de ventas. No pretendemos realizar un análisis de este tipo, nuestro interés es mostrar el procedimiento de cálculo derivado de la teoría expuesta, así como, obtener algunas conclusiones muy preliminares. Se utilizará por consiguiente, la hipótesis de la dominancia por la demanda, utilizando los coeficientes  $\alpha_{ij}$ .

De la tabla de datos brutos del Comercio Interregional Andino, se obtiene la matriz de "coeficientes de destino", que se incluyen en el Cuadro 5.

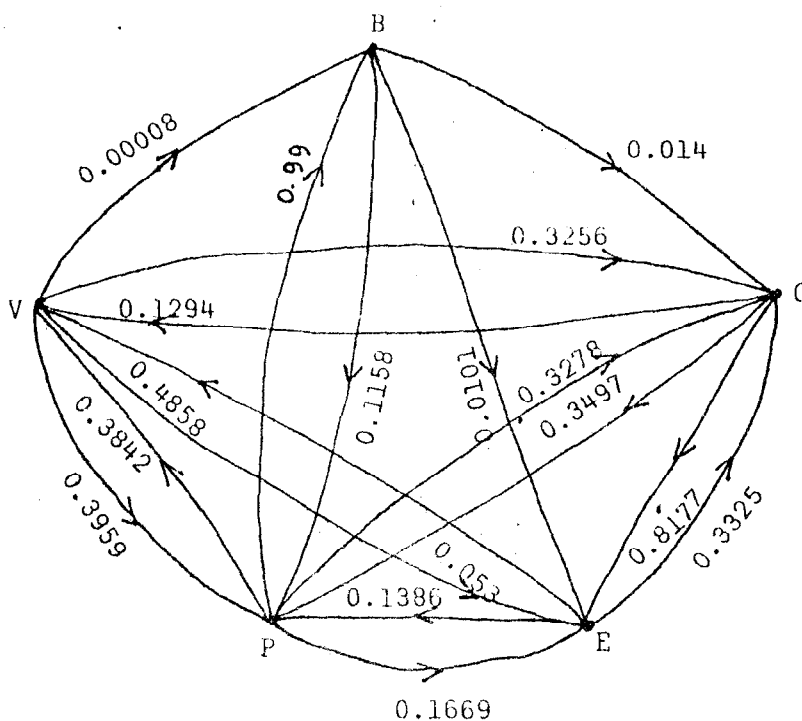
CUADRO 5  
MATRIZ DE COEFICIENTES DE DESTINO  $\alpha_{ij}$

	Bolivia	Colombia	Ecuador	Perú	Venezuela
Bolivia	0	0	0	0.9991	0.00008
Colombia	0.0142	0	0.3325	0.3278	0.3256
Ecuador	0.0101	0.8177	0	0.1669	0.0053
Perú	0.1158	0.3497	0.1386	0	0.3959
Venezuela	0	0.1294	0.4858	0.3848	0

En el Gráfico 42, se presenta el grafo del Comercio Interregional del Pacto Andino en el año 1968.

GRAFICO 42

Grafo de Comercio Interregional Pacto Andino 1968



La matriz de Boole  $A$  asociada al grafo que representa el Comercio Interregional del Pacto Andino en 1968, de acuerdo con las convenciones e hipótesis adoptadas es,

	B	C	E	P	V
Bolivia	0	1	1	1	0
Colombia	0	0	1	1	1
Ecuador	0	1	0	1	1
Perú	1	1	1	0	1
Venezuela	1	1	1	1	0

=  $A$

La búsqueda de la matriz de caminos  $R$ , es en este caso, muy simple:

$$R_1 = (A+I) = \begin{array}{c|ccccc} \varphi \downarrow & B & C & E & P & V \\ \hline B & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline C & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline E & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline P & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline V & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}; R_2 = (A+I)^2 = \begin{array}{c|ccccc} \varphi \downarrow & B & C & E & P & V \\ \hline B & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline C & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline E & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline P & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline V & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$R_1$  expresa que la transmisión o recepción de la influencia económica se efectúa por caminos de longitud inferior o igual a 1;  $R_2$  por caminos de longitud inferior o igual a 2.

Notemos también que la matriz  $R_2$  está completamente llena de 1, indica esto que la estructura de comercio es fuertemente conexa lo que hace que cualquier impacto en las relaciones de comercio a través del juego de efectos directos e indirectos alcance a todos los componentes de esta estructura económica.

La matriz de separaciones, notada  $E_1$  se obtiene de las matrices  $R_n$ :

$$= E_1 = \begin{array}{c|ccccc} \varphi \downarrow & B & C & E & P & V \\ \hline B & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline C & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline E & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline P & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline V & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$



Si no especificamos un nivel de intensidad debajo del cual las relaciones económicas no son contabilizadas, las compras de Colombia a Bolivia (0) y sus ventas a Venezuela (6,277) son tomadas como una misma cantidad. Esta consideración nos libera de la arbitrariedad que pueda atarse a la elección de un nivel de intensidad.

En base a estas consideraciones vamos a "forzar" el modelo y para tal efecto tomaremos "coeficientes de destino" superiores al 30%. Bajo estas consideraciones la matriz de Boole asociada es:

$\varphi$	B	C	E	P	V
B	0	0	0	1	0
C	0	0	1	1	1
E	0	1	0	0	0
P	1	1	0	0	1
V	0	0	1	1	0

El cálculo de la matriz de caminos proporciona:

$$R_1 = (A+I) =$$

$\varphi$	B	C	E	P	V
B	1	0	0	1	0
C	0	1	1	1	1
E	0	1	1	0	0
P	1	1	0	1	1
V	0	0	1	1	1

$$; R_2 = (A+I)^2 =$$

$\varphi$	B	C	E	P	V
B	1	1	0	1	1
C	1	1	1	1	1
E	0	1	1	1	1
P	1	1	1	1	1
V	1	1	1	1	1

$R_3 = (A+I)^3$  está completamente llena de 1.

La matriz de separaciones "significativas", ( $\alpha_{ij} \geq 30\%$ ) notada  $E_2$  se muestra a continuación:

	B	C	E	P	V	
B	0	2	3	1	2	= $E_2$
C	2	0	1	1	1	
E	3	1	0	2	2	
P	1	1	2	0	1	
V	2	3	1	1	0	

En base a lo anterior, podemos elaborar el cuadro resumen siguiente:

HIPOTESIS	Nivel $\alpha_{ij} \geq 0$ .		Nivel $\alpha_{ij} \geq 30\%$	
Matriz	$E_1$		$E_2$	
Alejamiento y Antialejamiento	$d^+$	$d^-$	$d^+$	$d^-$
POLOS				
Bolivia	2	2	3	3
Colombia	2	1	2	3
Ecuador	2	1	3	3
Perú	1	1	2	2
Venezuela	1	2	3	2

A la estructura más diferenciada, o sea, aquella cuyos coeficientes  $\alpha_{ij} \geq 30\%$ , le corresponde las características:

Rayo Externo 2	Rayo Interno 2	Diámetro 3
CENTRO	ANTICENTRO	PERIFERICOS
Colombia	Perú	Bolivia
Perú	Venezuela	Ecuador
		Venezuela
		ANTIPERIFERICOS
		Bolivia
		Colombia
		Ecuador

Colombia es centro y anti-periférico, por lo tanto, muy dominante.

Venezuela es anticentro y periférico, por lo tanto, muy dominado.

Este resultado parcial se ha obtenido a partir de una evaluación de las transacciones relativas a los outputs de los vendedores. Debería ser completado por el estudio del grafo valuado por los "coeficientes técnicos"  $\theta_{ij}$ , así como por un estudio bajo la hipótesis de oferta dominante.

Debemos remarcar sin embargo, que la técnica utilizada no permite detectar las verdaderas diferencias de posición entre los países estudiados, debido a la aparición de algunas disimetrías, razón por la cual haremos uso de la Noción de Centralidad Relativa, objeto del segundo modelo presentado.

## 2. La Centralidad Relativa

Los índices de centralidad han sido introducidos por A. Bavelas.<sup>94/</sup>

Examinando las redes del Gráfico 43, Bavelas señala intuitivamente que la red  $R_1$  es más centralizada que  $R_2$ ,  $R_2$  que  $R_3$  y  $R_3$  que  $R_4$ . Formaliza esta intuición definiendo un índice puntual de centralidad relativa a cada vértice  $x_i$ :

$$c_i = \frac{\sum_j d(x_i, x_j)}{\sum_j s_j} = \frac{s_i}{S}$$

estos índices se calculan a partir de la matriz de separaciones, en la cual la interacción de la  $i$ -ésima línea y la  $j$ -ésima columna proporcionan la separación entre los vértices  $x_i$  y  $x_j$ .  $S$  representa la suma total de separaciones de todos los vértices,  $s_i$  es la suma por línea de las separaciones.

Vemos que  $c_i$  es una función creciente del grado "intuitivo" de centralidad, el denominador disminuye con la centralidad del polo, el numerador es el mismo cualquiera que sea el polo considerado.

Con el fin de tomar en cuenta las disparidades que existen en las redes de las figuras precedentes, Bavelas define un índice global de centralidad:

$$c_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i$$

este índice sólo puede ser utilizado para comparar sistemas.

Caben formular algunas observaciones. En primer lugar, estos índices sólo tienen sentido si ninguna separación es infinita, ya que si hay alguna separación infinita el índice tomará la forma  $\infty/\infty$ . En segundo lugar, si el grafo es completo, todas las separaciones son iguales a 1 y el índice pierde todo su significado. En tercer lugar, sólo tiene interés para nosotros el índice de centralidad relativa, puesto que nos permite realizar una clasificación continua de vértices y presenta además, la ventaja de tomar en cuenta todas las relaciones entre los vértices, pero, también aquí se presenta su defecto más grande puesto que el valor promedio de las separaciones de un vértice a todos los demás puede no tener ninguna significación.

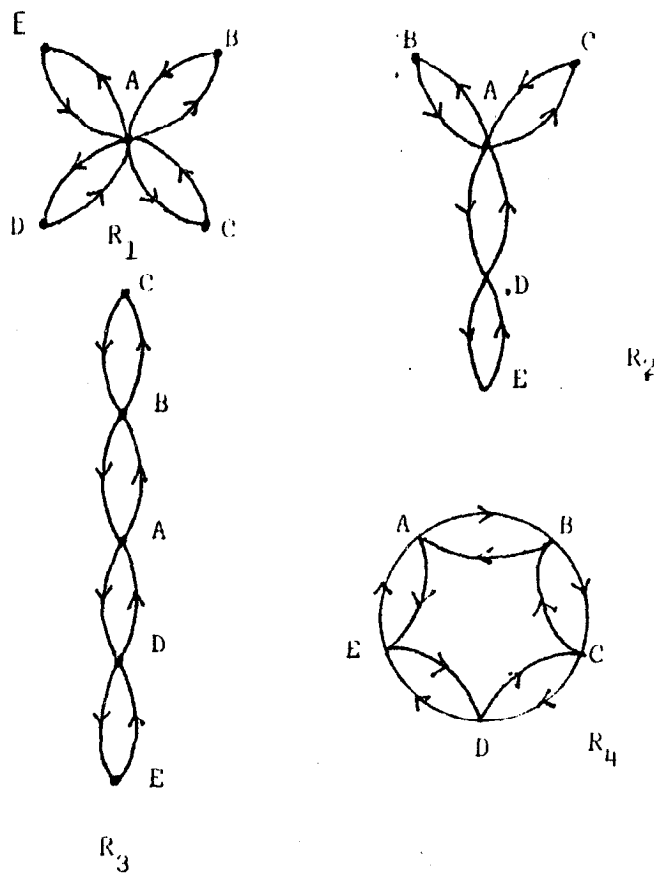
Por otra parte, Lantner sugiere una definición simétrica de anticentralidad relativa:

$$c'_i = \frac{\sum_j s_j}{\sum_i d(x_i, x_j)} = \frac{S}{s_j}$$

La centralidad relativa de un polo mide, entonces, su propensión a ser transmisor de influencia; de igual modo, la anticentralidad relativa su propensión a ser un receptor de influencia. Una función apropiada de estos dos índices, permite en consecuencia, definir un orden total de polos. Así por ejemplo, si adoptamos una función de dominancia que tome en cuenta los tamaños relativos de  $c_i$  y  $c'_i$  se tiene:

GRAFICO 43

Predisposición a la centralidad y anticentralidad en las redes de comunicación



Fuente: Bavelas A., "Communication Patterns in Task Oriented Groups."

$$D = \frac{c_i}{c_i}$$

que proporciona una dominación de polos.

La aplicabilidad de estos índices a la teoría de los Lugares Centrales, es muy delicada, el inconveniente más grande, es que el grafo debe ser fuertemente conexo.

Para el ejemplo que venimos trabajando, el cálculo de estos índices proporciona lo siguiente:

	B	C	E	P	V	$\Sigma$
B	0	1	1	1	2	5
C	2	0	1	1	1	5
E	2	1	0	1	1	5
P	1	1	1	0	1	4
V	1	1	1	1	0	4
$\Sigma$	6	4	4	4	5	S = 23

$E_1$ : Matriz de Separaciones  
( $\alpha_{ij} \geq 0$ )

	B	C	E	P	V	$\Sigma$
B	0	2	3	1	2	8
C	2	0	1	1	1	5
E	3	1	0	2	2	8
P	1	1	2	0	1	5
V	2	3	1	1	0	7
$\Sigma$	8	7	7	5	6	S = 33

$E_2$ : Matriz de Separaciones  
( $\alpha_{ij} \geq 30\%$ )

Nivel		$\alpha_{ij} \geq 0$			$\alpha_{ij} \geq 30\%$		
Matriz		$E_1$			$E_2$		
Indices		$c_i$	$c'_i$	$D_i$	$c_i$	$c'_i$	$D_i$
Polos de la Estructura	Bolivia	4.6	3.83	1.2	4.125	4.125	1
	Colombia	4.6	5.75	0.8	6.6	4.714	1.4
	Ecuador	4.6	5.75	0.8	4.125	4.714	0.875
	Perú	5.75	5.75	1.0	6.6	6.6	1.0
	Venezuela	5.75	4.6	1.25	4.714	5.5	0.857
Dominantes		1. Venezuela 2. Bolivia			1. Colombia 2. Bolivia, Perú		
Neutros		3. Perú			3. Ecuador		
Dominados		4. Colombia Ecuador			4. Venezuela		

Quando se toman en cuenta todos los coeficientes de destino  $d_{ij}$ , Venezuela es uno de los países que transmite más influencia, y recibe menos que Colombia, Ecuador y Perú. Bolivia transmite igual influencia que Colombia y Ecuador pero recibe menos que estos países lo cual explica en parte su posición en la jerarquía. Perú transmite una influencia grande, pero al mismo tiempo es también muy dominado. Colombia y Ecuador transmiten la influencia más pequeña pero reciben en cambio la más elevada. Al tomar en cuenta un coeficiente de destino  $\alpha_{ij}$  mayor o igual que el 30 por ciento con el fin de "eliminar" transacciones fortuitas o poco significativas los resultados se modifican: Colombia y Perú serían los más grandes transmisores de influencia seguidas de Venezuela, Ecuador y Bolivia, en cambio, desde el punto de -



la recepción de influencia Perú ocupa el primer lugar, siguiéndole en orden de importancia Venezuela, Colombia, Ecuador y Bolivia.

Vemos en primer lugar que la sensibilidad del método a los datos lleva a una dispersión de los resultados. Sin embargo, este análisis permite obtener algunos resultados: Bolivia es en general muy dominante por su demanda, mientras que Ecuador sería dominante por la oferta; Perú, permanece como una estructura en equilibrio, es decir, neutral. Los resultados tan disímiles para Venezuela y Colombia deben ser analizados en función de la hipótesis de oferta dominante, así como tomar en cuenta el valor del coeficiente  $\theta_{ij}$ , y los valores absolutos de su comercio. Este tipo de análisis escapa a las fronteras del presente trabajo, aunque puede realizarse sin dificultad con la metodología que hemos presentado.

### 3. La Generalización de la Noción de Centro

Las nociones de centro e índice de centralidad, son en cierta medida insuficientes para la obtención de una dominación de los polos en la estructura estudiada.

El fenómeno de la dominación puede ser capturado mediante la generalización de la noción de centro; dentro de ésta la potencia de un vértice definida por C. Berge<sup>95/</sup> nos será de mucha utilidad. -

### 3.1. Matriz asociada a un grafo

Sea un p-grafo  $G = (X, \Gamma)$  compuesto por  $n$  vértices y sea  $m_{ij}$  el número de arcos entre los vértices  $x_i$  y  $x_j$ .

Se llama matriz asociada del p-grafo, a la matriz cuadrada de orden  $(n \times n)$  tal que  $M = [m_{ij}]$ . Si el p-grafo es un grafo, la matriz asociada y la matriz booleana se confunden.

Al definir un criterio que permita obtener las relaciones de dominación de  $x_i$  sobre  $x_j$ , estamos operando con un grafo de dominación entonces, es posible construir un 2-grafo de influencia respetando las siguientes reglas:

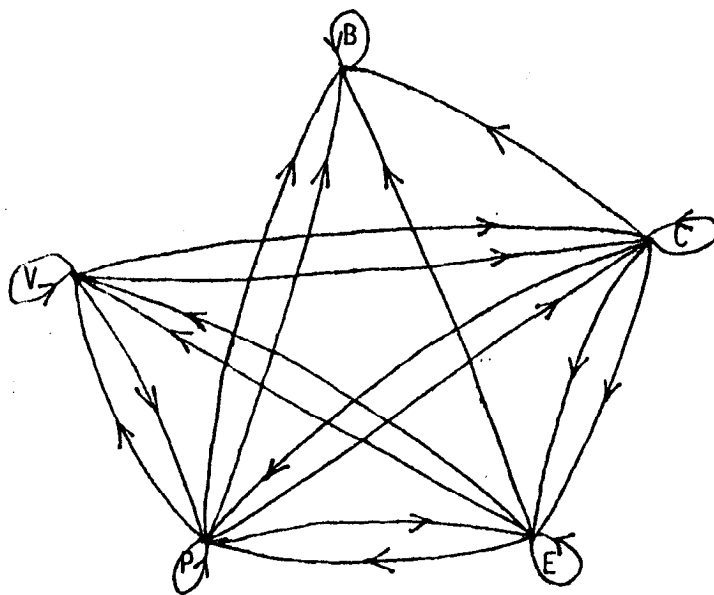
- La dominación del vértice  $i$  sobre el vértice  $j$  se representa por dos arcos orientados de  $i$  hacia  $j$ .
- Una influencia simétrica entre los vértices  $j$  y  $k$ , se representa por dos arcos orientados en sentido inverso entre  $j$  y  $k$ .
- Las relaciones internas se representan por un bucle en el vértice correspondiente.
- Dos vértices cualquiera pueden no estar relacionados por un arco.

El 2-grafo correspondiente al grafo de comercio intraregional de los países del Pacto Andino construido de conformidad con --

Las reglas enunciadas se muestra en el Gráfico 44.

GRAFICO 44

2-grafo de influencia del comercio intraregional



La matriz asociada a este 2-grafo se muestra a continuación:

	B	C	E	P	V
B	1	0	0	0	0
C	1	1	2	1	0
E	1	1	1	1	2
P	2	1	1	1	1
V	0	2	0	1	1

Para la construcción del grafo de dominación hemos supuesto que el vértice  $i$  domina al vértice  $j$  cuando  $\alpha_{ij} < \alpha_{ji}$  y la diferencia entre estos coeficientes ha sido mayor del 10%, si la diferencia ha sido menor del 10% hemos supuesto que hay simetría. La razón para tal elección reside en que cuando los vértices mantienen relaciones

más o menos importantes hablamos de influencia simétrica y para el caso del vértice B en relación con C y E suponemos solamente la existencia - de un arco entre ellos asumiendo un intercambio "cuasi simétrico" pero que en este caso al haber sólo comercio en un sentido y siendo el coeficiente muy débil hemos privilegiado sólo una dirección.

Puede argumentarse con toda razón (de acuerdo con lo expuesto) de que no consideramos todas las influencias indirectas que toman un camino cuya longitud sea igual o superior a 2. Aclaremos, sin embargo, que la generalidad del procedimiento permite razonar no sólo en un 2-grafo sino en un p-grafo, tomando así en cuenta las disparidades que pueden existir entre las relaciones.

Una interpretación general de la influencia o accesibilidad a las influencias que se propagan en la estructura es posible. En efecto, sea  $M = [m_{ij}]$  la matriz asociada al 2-grafo de influencia

$$M = \begin{matrix} & & & j \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ i & \dots & m_{ij} & \end{matrix} \quad ; \quad M^k = \begin{matrix} & & & j \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ i & \dots & p_{ij}^k & \end{matrix}$$

$m_{ij}$  = influencia directa de i sobre j, o bien accesibilidad de j a la influencia directa de i.

$p_{ij}^k$  = medida de la influencia indirecta de k-iésimo grado de  $i$  sobre  $j$  o de la accesibilidad de  $j$  a la influencia indirecta del k-iésimo grado de  $i$ .

$q_{ij} = m_{ij} + p_{ij}^{(2)} + \dots + p_{ij}^{(k)}$  representa la influencia global (directa e indirecta hasta el k-iésimo grado) de  $i$  sobre  $j$ , o la accesibilidad global de  $j$  a la influencia de  $i$ .

Razonemos ahora, en función de las líneas y las columnas de la matriz asociada.

$\sum_{j=1}^n m_{ij}$  = semigrado exterior del vértice  $i$ . Constituye una medida de la influencia directa ejercida por el  $i$ -ésimo vértice sobre todos los otros.

$\sum_{i=1}^n m_{ij}$  = semigrado interior del vértice  $j$ . Es una medida de la influencia directa recibida de todos los otros polos por el vértice considerado.

$\sum_{j=1}^n p_{ij}^{(k)}$  = número total de caminos de longitud igual a  $k$  que tienen el vértice inicial en  $i$ . Mide la influencia indirecta de k-iésimo grado ejercida por  $i$ .

$\sum_{i=1}^n p_{ij}^{(k)}$  = número total de caminos de longitud igual a  $k$  que tienen su vértice inicial en  $j$ . Mide la influencia indirecta de k-iésimo grado recibida por  $j$ .

De igual modo, el número total de caminos de longitud inferior a igual a  $k$  que tienen su origen o llegan a un vértice dado, representan la influencia global ejercida o recibida por este vértice o la accesibilidad del sistema a su influencia o la del vértice a las influencias propagadas en el sistema, respectivamente.

### 3.2. Potencia de un vértice

Se parte de la matriz asociada al 2-grafo. La potencia iterativa del orden de un vértice  $i$  es el semigrado exterior de ese vértice y donde  $p_{ij}^{(k)}$  es el coeficiente general de la matriz  $M^k$ . Llamaremos potencia iterativa de orden  $k$  del vértice  $i$  representada por  $p_k^{(i)}$  a la expresión:

$$p_k^{(i)} = p_{i1}^{(k)} + p_{i2}^{(k)} + \dots + p_{in}^{(k)}$$

En cada iteración se obtiene una clasificación de los diferentes vértices habida cuenta del número de caminos de longitud dada que une un vértice dado a todos los otros vértices. Esta clasificación converge con el número de iteraciones, lo cual lleva a definir la potencia  $\pi(i)$  de un vértice  $i$  como el límite cuando  $k$  tiende al infinito, de la relación del número total de caminos de longitud  $k$  que van de  $i$  a todos los otros vértices del grafo, al número total de caminos de longitud  $k$  en el grafo estudiado.

$$\pi(i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k^{(i)}}{p_k^{(1)} + \dots + p_k^{(n)}}$$

El teorema de Ferron-Froebenius permite probar que este límite siempre existe y tiende hacia un vector propio de la matriz asociada  $M$ .

$$\pi = \left[ \pi(1), \dots, \pi(n) \right]$$

De hecho, el procedimiento de cálculo es muy simple, - pues no es indispensable calcular las potencias sucesivas de la matriz asociada:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \sum_{j=1}^n m_{ij} \\ M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{matrix}$$

la  $k$ -ésima potencia de esta matriz es:

$$M^k = \begin{bmatrix} p_{11}^{(k)} & \dots & p_{1n}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1}^{(k)} & \dots & p_{nn}^{(k)} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \sum_{j=1}^n p_{ij}^{(k)} \\ p_k^{(1)} \\ \vdots \\ p_k^{(n)} \end{matrix}$$

Tenemos entonces:

$$p_2^{(1)} = m_{11}M_1 + \dots + m_{1n}M_n$$

$\vdots$

$$p_2^{(n)} = m_{n1}M_1 + \dots + m_{nn}M_n$$

... y de la misma forma:

$$p_3^{(1)} = m_{11}p_2^{(1)} + \dots + m_{1n}p_2^{(n)}$$

⋮

$$p_3^{(n)} = m_{n1}p_2^{(1)} + \dots + m_{nn}p_2^{(n)}$$

de manera general:

$$p_k^{(i)} = m_{i1}p_{k-1}^{(1)} + \dots + m_{in}p_{k-1}^{(n)}$$

Los valores del ejemplo nos dan:

$$p_1(B) = 1$$

$$p_1(C) = 5$$

$$p_1(E) = 6$$

$$p_1(P) = 6$$

$$p_1(V) = 4$$

$$p_2(B) = (1) \cdot (1) = 1$$

$$p_2(C) = (1) \cdot (1) + (1) \cdot (5) + (2) \cdot (6) + (1) \cdot (6) = 24$$

$$p_2(E) = (1) \cdot (1) + (1) \cdot (5) + (1) \cdot (6) + (1) \cdot (6) + (2) \cdot (4) = 26$$

$$p_2(P) = (2) \cdot (1) + (1) \cdot (6) + (1) \cdot (6) + (1) \cdot (6) + (1) \cdot (4) = 23$$

$$p_2(V) = (2) \cdot (5) + (1) \cdot (6) + (1) \cdot (4) = 20$$

Las potencias correspondientes aproximadas son:

$$\pi^*(B) = 0.00058$$

$$\pi^*(C) = 0.249$$

$$\pi^*(E) = 0.289$$



$$\pi^* (P) = 0.236$$

$$\pi^* (V) = 0.226$$

El vértice cuya potencia es máxima es el que está mejor ubicado para influenciar a todos los otros vértices, en otras palabras, es el vértice a partir del cual la accesibilidad a todos los otros vértices del grafo es máxima.

Un procedimiento análogo permite determinar la influencia global  $\bar{\pi} (i)$  recibida por todo vértice  $i$  del grafo; es suficiente efectuar los cálculos con la matriz transpuesta  $M'$  de  $M$ , asociada al grafo de influencia recibida, o bien operar en función de las columnas de  $M$ .

$$\bar{\pi}^* (B) = 0.237$$

$$\bar{\pi}^* (C) = 0.220$$

$$\bar{\pi}^* (E) = 0.191$$

$$\bar{\pi}^* (P) = 0.179$$

$$\bar{\pi}^* (V) = 0.173$$

La situación real de cada vértice es obtenida mediante la comparación de sus respectivos índices relativos.

Debe ser anotado, que los vértices que son menos dominantes no necesariamente son los más dominados. La utilización de la relación  $\pi^* / \bar{\pi}^*$  debe ser interpretada con cuidado, puesto que un vértice poco dominante y poco dominado es en cierta manera independiente -

con relación al sistema espacial estudiado.

	$\pi^* (i)$	$\bar{\pi}^* (i)$	$\pi^* (i)/\bar{\pi}^*(i)$
Bolivia	0.00058	0.237	0.0024
Colombia	0.249	0.220	1.1318
Ecuador	0.289	0.191	1.5131
Perú	0.236	0.179	1.3184
Venezuela	0.226	0.173	1.3064

De hecho, en un grafo complejo, no hay ninguna causa - para que el vértice o polo más dominante sea también al menos dominado.

#### 4. Reducción de la Estructura y Rango de un Componente Fuertemente Conexo

El método "no busca definir un orden en un conjunto de polos: intuitivamente sus autores sostienen que no tiene sentido jerarquizar centros que pertenecen a un mismo circuito puesto que cualquiera que - fuere la naturaleza de las hipótesis retenidas (dominancia por la oferta o dominancia por la demanda) dos polos de un mismo circuito se domi nan e influencian mutuamente".<sup>96/</sup>

La noción (matemática) de reducción es un concepto vecino - del complejo industrial, definido por W. Isard como "un conjunto de - actividades ejercidas en un punto dado y que pertenecen a un grupo de actividades que son objeto de una producción importante"<sup>97/</sup> y tal como

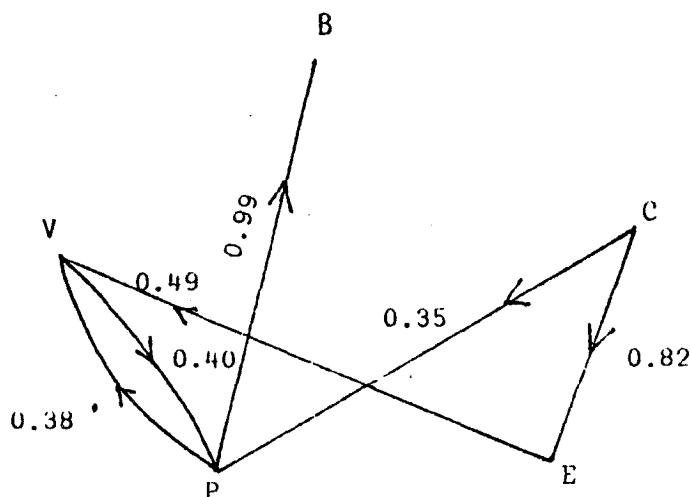
sostiene J.R. Boudeville "con el fin de estudiar un complejo y obtener su estructura se puede o triangularlo jerárquicamente o reducirlo a sus componentes fuertemente conexos. Noción vecina a la del complejo que pone en juego los circuitos multiplicadores".<sup>98/</sup>

En un grafo directo, una componente fuerte es un subgrafo - máximo en el cual cada par de puntos es mutuamente accesible, dicho de otra manera, lo que se investiga son los circuitos de la economía bajo estudio.

El grafo de Comercio Intraregional que corresponde a los - coeficiente  $\alpha_{ij} \geq 35\%$ , es decir aquel que contiene en cada línea las - ventas cuyos coeficientes  $\alpha_{ij} = x_{ij} / X_i$  son superiores al 35%, se pre - senta en el Gráfico 45.

GRAFICO 45

Estructura de influencias de las relaciones fuertes de ventas ( $\alpha_{ij} \geq 35\%$ )  
(Grafo parcial del grafo de influencia relativa)



En el grafo reducido, cada componente fuertemente conexa es representada por un polo, formando, por lo tanto, un "modelo reducido" sin circuitos de la estructura inicial.

Existen métodos alternativos para determinar los componentes fuertemente conexos. En un grafo pequeño, tal como el que estamos tratando, puede ser aplicado sin ninguna dificultad un algoritmo debido de B. Roy<sup>99/</sup> que permite obtener cómodamente los rangos de los vértices de un grafo sin circuitos.

Lantner<sup>100/</sup> proporciona la siguiente interpretación: el orden creciente de rangos es un orden creciente de dependencia económica de los polos o un orden decreciente de dominancia.

La clasificación obtenida es mostrada a continuación:

Rango	Polos	Dominancia o Dependencia
1	Colombia	Fuerte dominancia
2	Ecuador	dominante
3	Perú, Venezuela	dependencia
4	Bolivia	Fuerte dependencia

En el caso de tener una estructura más complicada que la actualmente analizada, es aconsejable determinar los componentes fuertemente conexos, aplicando el método de Boudeville.<sup>101/</sup>

Para tal efecto, este autor, define una matriz notada B que indica la accesibilidad en la cual no se busca el número de secuencias sino tan sólo conocer su existencia, es decir, que consideramos sólo la matriz booleana que hemos denominado A en la que figuran uno y cero. De manera general, para cada entero positivo n, se tiene  $B_n = (I+A)^n$ . Si p es el número de vértices del grafo D, la matriz de accesibilidad es  $B = (I+A)^{p-1}$ , y en esta matriz booleana, el término general  $b_{ij} = 1$  si j es accesible desde i, en el caso contrario  $b_{ij} = 0$ .

En el caso del grafo que venimos estudiando:

$$B_0 = I = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

en un grafo, cada vértice es accesible desde sí mismo. La diagonal está compuesta de 1 ;  $B_0 = I =$  matriz unidad

$$B_1 = (I+A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

j puede ser accesible desde i a lo más en una etapa si es accesible en 0 ó 1, puesto que la accesibilidad en una etapa, está dada por la matriz adyacente A, de donde  $B_1 = (I+A)$

$$B_2 = (I+A)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

j es accesible desde i por una secuencia de a lo más 2

$$B_3 = (I+A)^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$j$  es accesible desde  $i$  por una secuencia de a lo más 3

$$B_4 = (I+A)^4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$j$  es accesible desde  $i$  por una secuencia de a lo más 4

Para obtener los componentes fuertemente conexos se forma el producto término a término de las matrices  $BB'$  de accesibilidad y de su transpuesta. En el producto término a término  $BB'$ :

$b_{ij} = 1$  cuando  $j$  es accesible de  $i$

$b'_{ij} = 1$  cuando  $i$  es accesible de  $j$

$b_{ij} b'_{ij} = 1$  cuando  $i$  y  $j$  son mutuamente accesibles

$b_{ij} b'_{ij} = 0$  cuando  $i$  y  $j$  no son mutuamente accesibles

Tenemos entonces:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = BB'$$

Esta matriz, línea por línea o columna por columna, muestra los puntos mutuamente accesibles ya que una componente fuertemente conexa es un conjunto máximo de puntos de accesibilidad mutua.

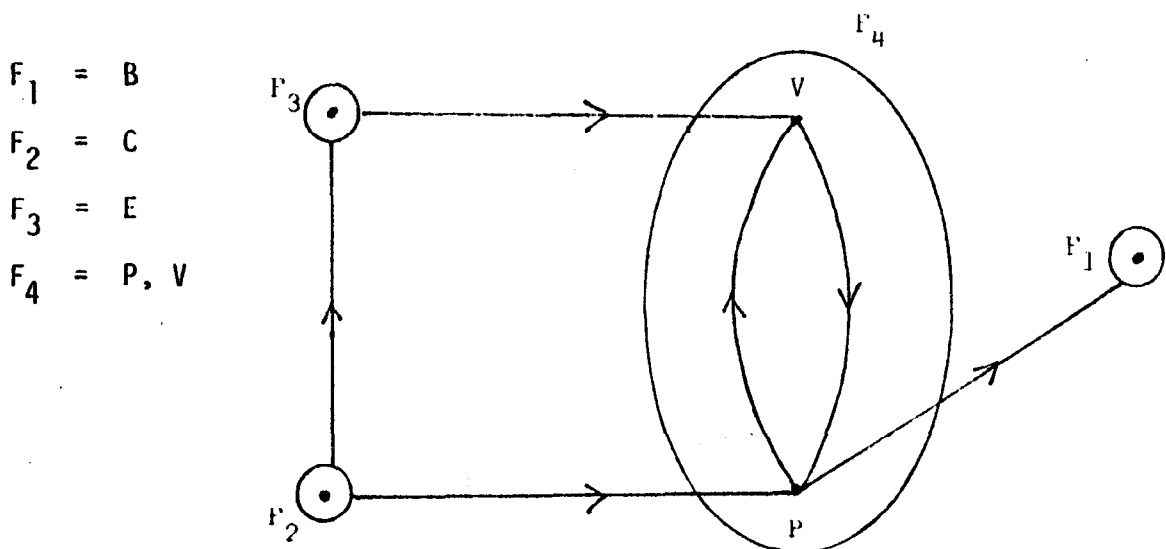
Leyendo línea por línea, obtenemos los componentes fuertemente conexos:

- 1ra. línea :  $F_1 = \text{Bolivia}$   
 2da. línea :  $F_2 = \text{Colombia}$   
 3ra. línea :  $F_3 = \text{Ecuador}$   
 4ta. línea :  $F_4 = \text{Perú, Venezuela}$

A partir de aquí, obtenemos la reducción del grafo (ver Gráfico 46). Existe un arco del punto  $F_i$  al punto  $F_j$  del grafo reducido  $G_r$ , si y solamente si, en el grafo originario  $G$ , hay al menos un arco

GRAFICO 46

Grafo reducido del Comercio Interregional, Pacto Andino 1968



En resumen, el grafo se particiona en componentes fuertes o circuitos en donde todas las actividades son mutuamente accesibles -- (multiplicador complejo). El grafo se ha reducido conservado su conectividad.<sup>102/</sup>

Es interesante anotar, que los componentes fuertemente conexos se presentan como multiplicadores cuyo coeficiente global es el producto de los coeficientes sucesivos de la cadena.

Al mismo tiempo, Boudeville señala que una noción vecina de la de componente fuertemente conexo es la noción de base de un punto o vértice. Una base se define como un conjunto mínimo de vértices a partir de los cuales todos los vértices que constituyen el grafo directo son accesibles. Se trata entonces, de ver el impacto generalizado sobre la economía existente a partir de un conjunto mínimo de actividades. La diferencia es que los componentes fuertemente conexos son conjuntos privilegiados de impactos parciales, es decir polos motrices de actividades interdependientes, mientras que las bases son conjuntos de actividades independientes unas de otras y de impacto generalizado.

Un conjunto de puntos  $P$  de un grafo directo  $D$  es una base de puntos si:

- a) Todo punto de  $D$  es accesible desde el conjunto  $P$ .
- b) Los puntos de  $P$  son inaccesibles, unos de otros.

Para encontrar una base de puntos de un grafo directo  $D$ , -- puede ser utilizado el algoritmo siguiente:<sup>103/</sup>

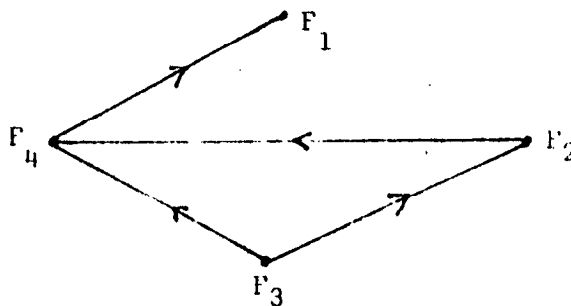


- Construir el grafo reducido  $G_r$ .
- Encontrar la base de puntos  $P_r$  de  $G_r$ , es decir, el conjunto de puntos del grafo reducido de entrada cero.
- Para cada punto de  $P_r$ , elegir un punto cualquiera de la componente fuertemente conexa correspondiente, del grafo directo  $G$ .

Hemos visto que el grafo representativo de las transacciones intraregionales se descomponen en cuatro componentes fuertemente conexos, de manera que el grafo reducido es muy simple, tal como se muestra en el Gráfico 47.

GRAFICO 47

Componentes fuertemente conexas de las transacciones interregionales



la matriz asociada  $A_r$  a este grafo es:

	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$
$F_1$				
$F_2$			1	1
$F_3$				1
$F_4$	1			

la base está dada por los puntos cuyo grado de entrada es nulo, es decir por  $F_2$  o sea que Colombia tiene un impacto generalizado sobre la estructura de intercambio interregional que venimos estudiando; lo que en definitiva nos lleva a plantear que este país ocupa un lugar privilegiado dentro de los componentes del Pacto Andino, y de manera general la confirmación de la dominación de este país en el seno de esta "Economía Regional".

## CAPITULO V

### LA JERARQUIA DE LUGARES CENTRALES EN EL PERU

#### 1. Introducción

La formulación moderna de la teoría del lugar central realizada por B. Berry<sup>104/</sup> libera de los complicados supuestos sobre la forma y el carácter homogéneo de las áreas de mercado, al presentarla en términos del concepto de "umbral" o dimensión mínima del mercado, -debajo de la cual todo centro es incapaz de proporcionar un bien "central".

Puede demostrarse que en condiciones ideales siempre aparecerá una estructura espacial jerárquica de lugares centrales que proporcionan bienes y servicios centrales. El argumento -como lo subraya Berry- exige únicamente los conceptos de "ámbito de difusión" o área de mercado de un lugar central para un bien determinado y de "umbral". Esta afirmación se demuestra de la siguiente forma:<sup>105/</sup>

Supongamos una zona abastecida con  $n$  tipos de bienes centralizados clasificados de 1 a  $n$ . El lugar central que proporcione el bien  $n$  deberá abastecer el área de mercado más grande: llamémosle A.

En el área existirán tantos centros A como "áreas de mercado umbral" existan, o sea, áreas capaces de justificar la presencia de las empresas que venden el bien  $n$ . Si el volumen total de ventas es múltiplo exacto de los "umbrales" para el bien  $n$ , las áreas de mercado quedarán limitadas por la superficie que tenga el centro A. En este caso las empresas tendrán beneficios normales debiendo localizarse en forma que minimicen los costos, mediante: (a) la reducción al mínimo de los costos de distribución si el producto debe ser pedido, y (b) minimizando los desplazamientos de los consumidores cuando estos se desplazan para adquirir los productos.

Tendrá lugar un exceso de beneficios si el volumen de ventas en la totalidad de un área es mayor que un múltiplo exacto del umbral, pero no lo suficientemente grande como para justificar otro centro A. El bien  $n-1$  será suministrado por el centro A porque el umbral de  $n-1$  es menor que el de  $n$  y, en consecuencia, la competencia espacial determina las áreas de mercado. El argumento es válido para los bienes  $(n-2, \dots, 1)$ .

Puede existir un bien  $n-i$  para el que la demanda situada entre las áreas de mercado umbral de los centros A que los suministran justifique la aparición de otras áreas de mercado mínimas. Se conseguirá en este caso una mayor eficiencia si los espacios libres se llenan con centros B que suministren el bien. El bien  $n-i$  recibe el nombre de "bien marginal jerárquico" y la cantidad de bienes de este tipo determina el número de orden de los lugares centrales dentro de la jerarquía.

En este sistema jerárquico, la provisión de bienes por parte de los centros puede disponerse en cierto orden, tal como se indica en el Cuadro 1.

Puede notarse, por ejemplo, como una serie de centro C y aquellos situados en sus áreas tributarias dependen tanto del centro B como del centro A para los bienes  $n-1$  a  $n-(j-1)$  y de A para los bienes  $n$  a  $n-(i-1)$ .

#### FORMA EN QUE M CENTROS SUMINISTRAN $n$ BIENES

(\*Indica un bien marginal jerárquico; X indica la serie de bienes suministrados por el centro)

Centros	Bienes				
	$n^*$ , $n-1$ , ...	$n-1^*$ , $n-(i+1)$ , ...	$n-j^*$ , $n-(j+1)$ , ...	... (k-1), ...	$1^*$
A	X	X	X	...	X
B		X	X	...	X
C			X	...	X
.				.	.
.				.	.
M					X

Fuente: Berry B. y Garrison W., Últimos Desarrollos de la Teoría del Central-Place.

La utilización de la teoría de grafos para poner en evidencia una jerarquía de lugares centrales no es nueva: Nystuen y Dacey,<sup>106/</sup> así como Lheritier,<sup>107/</sup> ya lo han intentado. Con respecto a los prime-

ros tenemos algunas objeciones con respecto a la metodología y a las herramientas matemáticas que emplean. En cuanto al segundo, estamos de acuerdo con la metodología, pero, en la aplicación empírica, su uso de la función de Grundy no nos parece permisible. Veamos esto con más detenimiento.

Nystuen y Dacey representan las ciudades por los vértices de un grafo, indicando los arcos la asociación entre dos vértices. El sentido de orientación elegido hace que el vértice inicial dependa del final. El grafo así definido posee tres propiedades:

- a) Un centro es independiente cuando su flujo máximo se dirige a uno más pequeño.
- b) El grafo en el que sólo se conservan los flujos más grandes debe ser transitivo: si  $X$  está subordinado a  $Y$  e  $Y$  está subordinado a  $Z$ , entonces,  $X$  está también subordinado a  $Z$ , y
- c) El grafo no contiene circuitos: una ciudad no está subordinada a ninguno de sus subordinados.

Los autores asocian a este grafo una matriz  $A$  cuyo término general  $a_{ij}$  representa el número de comunicaciones que van de  $i$  hasta  $j$ . Esta matriz, como veremos luego, es poco operativa.

Para tomar en cuenta las influencias indirectas, Nystuen y Dacey ajustan los datos de la matriz  $A$  dividiendo cada  $a_{ij}$  por el máxi

mo de la columna de esta matriz:

$$y_{ij} = \frac{a_{ij}}{\max_j \sum_j a_{ij}}$$

En un grafo de  $n$  puntos obtienen las siguientes inecuaciones:

$$0 \leq y_{ij} < 1 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

$$0 < \sum_j y_{ij} \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

En base a esto, el valor de todos los arcos es proporcionado por la matriz  $Y$  de término general  $y_{ij}$ .

La matriz  $Y$  es elevada al cuadrado, el término general de la matriz  $Y^2$  indicará el valor de los caminos de longitud 2 que van de  $i$  hasta  $j$ . Como  $0 \leq y_{ij} < 1$ , el valor de los caminos, si es que existen, disminuirá con la longitud de los mismos. Análogamente, el coeficiente de la matriz  $Y^n$  indica el valor de los caminos de longitud  $n$  que unen  $i$  con  $j$ .

Enseguida suman las matrices:

$$B = Y + Y^2 + Y^3 + \dots + Y^n + \dots \quad (3)$$

El término general  $b_{ij}$  de la matriz  $B$  representa la influencia total directa e indirecta de  $i$  hacia  $j$ . Sin embargo, los mismos autores reconocen que "es extremadamente dudoso que la matriz  $B$  sea

la medida más apropiada de las influencias totales directas e indirectas, es más una medida de un contacto indirecto casual entre dos centros".<sup>108/</sup> Por nuestra parte agregamos que la matriz B subestima la influencia indirecta ya que ésta se propaga sólo por algunos canales importantes y no por todos los caminos.

Para obtener finalmente la matriz B, Nystuen y Dacey usan la siguiente identidad:

$$(I - Y)^{-1} = I + Y^2 + \dots + Y^n + \dots \quad (4)$$

por lo tanto,

$$B = (I - Y)^{-1} - I \quad (5)$$

ecuación donde I es la matriz identidad. La inversa  $(I - Y)^{-1}$  existe si las inecuaciones (1) y (2) se cumplen.

El análisis de la metodología utilizada nos permite decir, en primer lugar, que las relaciones indirectas se realizan sólo por los caminos más importantes, pues como los mismos autores lo reconocen es extremadamente dudoso que la matriz B sea la medida más apropiada de las influencias totales directas e indirectas, lo cual implica que la mayoría de relaciones indirectas no sean tomadas en cuenta. En segundo lugar, el coeficiente  $y_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_j a_{ij}}$  no creemos sea el más significativo para definir una relación de dominación entre dos vértices cualquiera, esta apreciación será vista con más claridad un poco más adelante. En tercer lugar, el método no se liga lo suficientemente con la teoría de los lugares centrales, y el potencial a--



portado por la teoría de grafos para obtener una jerarquía de centros urbanos en la región de Seattle no es utilizado en toda su extensión.

Como ya lo expresamos anteriormente, Lheritier logra establecer una metodología adecuada en el planteo de las relaciones de dominación, con lo cual consigue articular la teoría de grafos y la de lugares centrales. Sin embargo, en la aplicación empírica se queda a la mitad del camino, pues los modelos utilizados para la jerarquización de los centros urbanos de las regiones de la Borgoña y Franche-Comté, tienen como fundamento la función de Grundy,<sup>109/</sup> lo que no es adecuado.

Consideremos un grafo  $G = (X, \Gamma)$  y una función  $g$  que haga corresponder a todo vértice  $x_j \in X$  un número entero  $g(x_j) \geq 0$ . Se dice que  $g(x_j)$  es una función de Grundy definida sobre el grafo  $G$ , si para todo  $x_j \in X$ ,  $g(x_j)$  es el entero no negativo más pequeño que no pertenece al conjunto:

$$\left\{ g(x_j) \mid x_j \in \Gamma\{x_i\} \right\}$$

siendo,

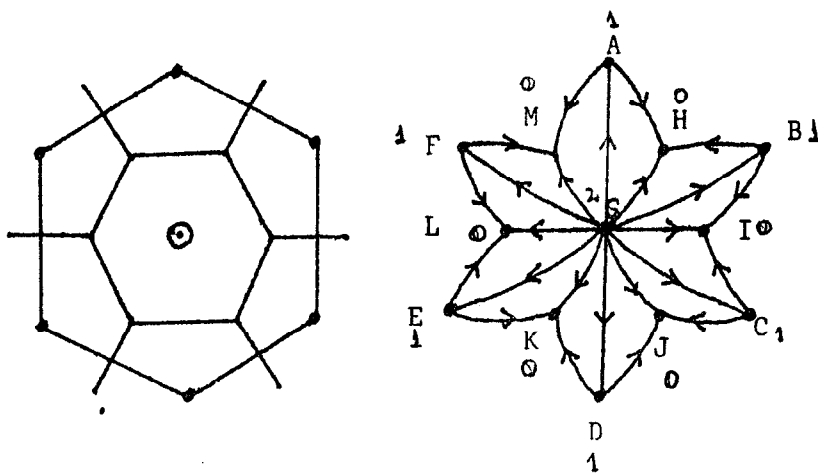
$$g(x_j) = 0 \quad \text{si} \quad x_j = \emptyset$$

Tomemos a manera de ejemplo el modelo hexagonal de Christaller y Losch así como el grafo correspondiente, en el Gráfico 48. El cálculo de la función de Grundy se realiza así:

$x_i$	$\Gamma x_i$	$g(x_i)$	$\{g(x_j) / x_j \in \Gamma \{x_i\}\}$
A	H, M	1	$g(H) = 0, g(M) = 0$
B	H, I	1	$g(H) = 0, g(I) = 0$
C	I, J	1	$g(I) = 0, g(J) = 0$
D	J, K	1	$g(J) = 0, g(K) = 0$
E	K, L	1	$g(K) = 0, g(L) = 0$
F	L, M	1	$g(L) = 0, g(M) = 0$
G	A, B, C, D, E, F, H, I, J, K, L, M	2	$g(A) = 1, \dots, g(F) = 1$ $g(H) = 0, \dots, g(M) = 0$
H	$\emptyset$	0	
I	$\emptyset$	0	
J	$\emptyset$	0	
K	$\emptyset$	0	
L	$\emptyset$	0	
M	$\emptyset$	0	

GRAFICO 48

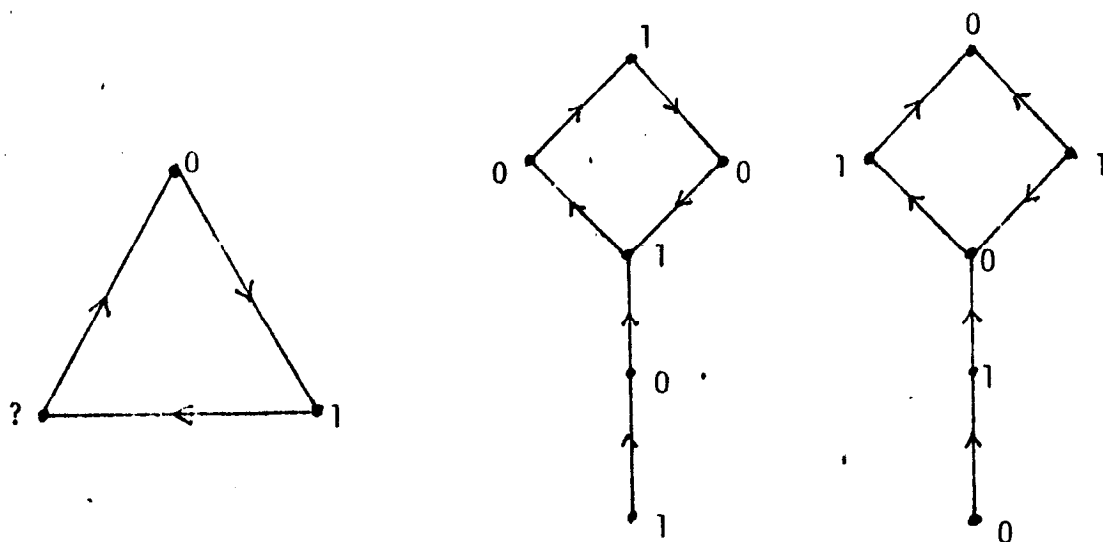
Modelo hexagonal de Christaller y Losch, grafo asociado y función de Grundy



La aplicación de la función de Grundy cuando el grafo es muy complejo es prácticamente imposible; además, un grafo no siempre posee una función de Grundy o bien puede existir más de una función cuando se presentan circuitos. Para un ejemplo de lo anterior, ver el Gráfico 49.

GRAFICO 49

Grafos sin función de Grundy o con más de una función



El nivel (0) atribuido a los centros que no tienen descendientes es no homogéneo, puesto que siempre es posible encontrar un centro cualquiera que está dominado por otro al cual se le ha atribuido el nivel (0). En el caso que comentamos, la función de Grundy puede dar resultados significativos sólo a condición de definir los centros de manera homogénea, lo cual no es viable puesto que las estadísticas telefónicas utilizadas por Lheritier no lo permiten.

## 2. Los Datos

Una de las pocas fuentes de información que permiten el estudio de las relaciones inter-ciudades lo constituyen las estadísticas de tráfico telefónico.

Las asociaciones urbanas son por naturaleza multidimensionales; por consiguiente, los hinterlands urbanos están definidos por una multiplicidad de flujos que corresponden a cada función del lugar central. Estos flujos pueden ser financieros, comerciales, migratorios, postales, telefónicos, etc., y a cada función le corresponde una jerarquía de centros.

Los especialistas en economía espacial han propuesto utilizar el número de llamadas telefónicas como un índice de la asociación multidimensional entre centros.<sup>110/</sup> Este índice, naturalmente, no está exento de críticas; la principal es que las comunicaciones personales podrían perturbar las relaciones funcionales entre los centros. En nuestro conocimiento no hay ningún estudio que confirme o no la validez de la misma, además la ausencia de otras fuentes estadísticas de relaciones entre ciudades nos llevan a aceptar, al igual que otros autores, que los flujos telefónicos son uno de los mejores índices individuales de todos los contactos funcionales, pues presentan la gran ventaja de obviar el uso de algún coeficiente que pondere las contribuciones individuales.

La información que emplearemos proviene de la Empresa Nacional de Telecomunicaciones del Perú (ENTEL-PERU), que releva -- -- conteos trimestrales del número de llamadas y minutos hablados. Para tal efecto, la Empresa ha "regionalizado" al país en 11 zonas que cubren prácticamente todo el territorio nacional:

<u>Zonas</u>	<u>Número de Centrales</u>
Arequipa	28
Cuzco	16
Chiclayo	22
Chimbote	30
Huacho	13
Huancayo	14
Ica	22
Lima	25
Piura	19
Tarma	23
Trujillo	25

Las cifras utilizadas provienen de los listados proporcionados por la Empresa para el trimestre Abril/Junio de 1978, e indican el número de unidades de comunicaciones intercambiadas entre dos centrales.

El caudal de información -la matriz nacional tiene una dimensión de 237 x 237- hace extremadamente difícil el tratamiento de la misma, razón por la cual hemos elegido trabajar con lo que denominaremos - "Región Norte" que engloba las zonas de Chiclayo, Chimbote, Piura y Trujillo.

En la matriz "Regional Norte", que emplearemos en lo sucesivo, hemos eliminado sistemáticamente todas aquellas centrales cuya demanda zonal es inferior a la del promedio respectivo. Los centros conservados así como el número de comunicaciones entre ellos se presentan en el Cuadro 6.

Para algunos centros del país, ENTEL-PERU nos proporcionó una matriz de tráfico en Erlangs para el año 1979, que contiene información relativa al tiempo de ocupación de los circuitos en las horas punta -9 am. a 11 am.- Esta matriz la hemos convertido a número de llamadas apoyándonos en parámetros proporcionados por el Departamento de Tráfico de la mencionada Empresa. La información pertinente se encuentra contenida en el Cuadro 7.

### 3. Lugares Centrales y Modelos Topológicos de Jerarquía: Aplicación Empírica

Los modelos propuestos tienen como pretensión no solamente articular la teoría del lugar central con la teoría de grafos, sino también la puesta en práctica de un análisis estructural, que permita apprehender la realidad económica no tanto como un conjunto equilibrado de relaciones de igualdad sino más bien como un encaballado de relaciones de dominación o influencia, de dependencia y de interdependencia.

Veremos sucesivamente cómo a medida que perfeccionamos las herramientas de análisis lograremos en cierta forma cumplir con los objetivos que nos hemos impuesto.

CUADRO 6  
MATRIZ DE TRAFICO: ZONA NORTE  
Abril - Junio 1978

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1. Piura	-	1,669	1,312	2,438	4,004	2,824	1,717	4,244	20	19	127	46
2. Catacaos	1,628	-	20	18	84	12	25	45	-	-	-	-
3. Chulucanas	1,749	4	-	4	19	2	11	89	1	-	3	-
4. Paíta	3,108	15	10	-	175	143	21	63	-	-	5	11
5. Sullana	7,401	59	33	175	-	423	187	392	-	4	7	11
6. Talara	4,290	8	14	65	280	-	114	187	-	1	2	-
7. Tumbes	2,368	18	16	27	160	148	-	336	-	12	11	6
8. Chiclayo	4,138	56	83	204	406	285	544	-	479	1,491	2,814	1,733
9. Etén Puerto	23	-	1	1	-	3	1	483	-	7	14	44
10. Ferreñafe	27	1	-	-	4	5	12	1,861	11	-	71	35
11. Lambayeque	153	3	7	4	10	4	18	2,835	21	55	-	74
12. Pimentel	53	-	1	9	1	3	7	1,904	36	33	71	-
13. Trujillo	1,703	40	55	155	373	346	330	6,326	30	62	147	89
14. Chepén	50	3	1	17	17	3	7	827	3	15	29	3
15. Guadalupe	15	-	1	-	9	3	3	290	2	5	15	1
16. Pacasmayo	97	-	-	33	12	3	15	764	108	-	16	12
17. San Pedro	17	1	-	-	2	-	1	95	-	-	4	-
18. Cajamarca	120	3	-	-	12	9	14	776	-	-	31	11
19. Chimbote	274	5	20	89	35	79	130	1,390	4	19	24	11
20. Casma	4	1	1	-	1	-	4	37	-	-	3	-
21. Huarney	8	-	-	-	3	-	8	5	-	1	-	-
22. Huaraz	10	-	-	-	3	2	4	62	-	2	5	1

(Continuación)

CUADRO 6  
MATRIZ DE TRAFICO: ZONA NORTE  
Abril - Junio 1978

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	Total
1. Piura	1,669	31	13	115	17	88	368	15	4	10	20,780
2. Catacaños	21	-	-	-	-	-	9	-	-	1	1,863
3. Chulucanas	32	-	-	1	1	1	13	-	-	-	1,930
4. Paíta	72	-	-	17	1	-	101	-	-	-	3,743
5. Sullana	406	2	-	23	1	2	28	-	2	-	9,156
6. Talara	260	-	1	10	4	8	42	-	-	-	5,286
7. Tumbes	232	3	1	12	2	11	94	-	1	3	3,461
8. Chiclayo	5,153	588	231	701	81	962	932	37	27	63	21,008
9. Etén Puerto	13	1	-	25	-	3	15	-	-	-	634
10. Ferreñafe	38	10	-	11	1	12	22	-	-	-	2,121
11. Lambayeque	106	12	5	11	6	37	24	-	-	2	3,387
12. Pimentel	96	5	-	11	-	3	8	-	-	1	2,242
13. Trujillo	-	761	319	1,432	267	1,877	4,969	165	47	358	19,851
14. Chepén	908	-	675	675	315	126	52	9	-	7	3,682
15. Guadalupe	261	375	-	210	115	49	44	1	2	1	1,402
16. Pacasmayo	1,627	600	264	-	653	187	96	4	-	7	4,498
17. San Pedro	285	174	99	634	-	21	28	-	2	1	1,364
18. Cajamarca	1,292	85	14	121	29	-	120	3	-	6	2,646
19. Chimbote	4,616	59	45	117	22	202	-	1,332	181	1,420	10,074
20. Casma	173	-	-	3	-	11	1,027	-	215	130	1,610
21. Huarney	67	1	1	2	1	-	287	324	-	57	765
22. Huaraz	404	23	-	1	-	10	936	60	24	-	1,547

Fuente: Confeccionado por el autor en base a listados programados por ENTEL-PERU.



CUADRO 7  
MATRIZ DE TRAFICO: NIVEL NACIONAL  
1979

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1. Tumbes	-	512	46	2,494	862	-	-	-	-	-	-	-
2. Talara	302	-	142	3,493	475	-	-	-	-	-	-	-
3. Paíta	69	302	-	2,599	238	-	-	-	-	-	-	-
4. Piura	1,678	2,586	2,355	-	8,525	-	-	4,080	-	825	470	-
5. Chiclayo	628	512	187	7,885	-	1,167	1,095	6,919	-	1,277	425	-
6. Pacasmayo	-	-	-	-	1,598	-	279	2,750	-	-	-	-
7. Cajamarca	-	-	-	-	1,118	396	-	1,798	-	-	-	-
8. Trujillo	-	-	-	3,827	7,580	2,193	2,099	-	725	6,280	967	-
9. Huaraz	-	-	-	-	-	-	-	651	-	1,144	511	-
10. Chimbote	-	-	-	1,062	1,678	-	-	8,288	1,212	-	1,937	-
11. Huacho	-	-	-	425	565	-	-	1,396	489	1,797	-	-
12. Pisco	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
13. Chíncha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2,099
14. Ica	-	-	-	355	238	-	-	400	-	163	498	2,166
15. Cuzco	-	-	-	95	165	-	-	142	-	52	46	-
16. Tacna	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
17. Puno	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
18. Juliaca	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
19. Moquegua	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
20. Arequipa	-	-	-	238	283	-	-	355	-	333	237	-
21. Huancaayo	-	-	-	142	96	-	-	283	-	188	238	-
22. Lima	3,002	4,132	1,487	15,389	19,858	2,505	3,493	21,909	5,810	20,067	10,220	5,665
23. Resto	561	699	512	-	-	1,117	1,072	-	396	-	-	862

//.

(Continuación)

CUADRO 7  
MATRIZ DE TRAFICO: NIVEL NACIONAL  
1979

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	Total
1. Tumbes.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6,115	958	10,987
2. Talara	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7,179	771	12,362
3. Paita	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2,222	794	6,224
4. Piura	-	332	51	-	-	-	-	355	74	27,276	-	48,607
5. Chiclayo	-	260	193	-	-	-	-	142	187	33,712	-	54,589
6. Pacasmayo	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3,590	584	8,741
7. Cajamarca	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5,007	817	9,136
8. Trujillo	-	615	192	-	-	-	-	498	543	36,589	-	62,108
9. Huaraz	-	-	-	-	-	-	-	-	-	9,022	561	11,889
10. Chimbote	-	8	46	-	-	-	-	332	260	23,582	-	38,515
11. Huacho	-	375	74	-	-	-	-	495	475	14,165	-	20,756
12. Pisco	1,798	2,659	-	-	-	-	-	-	-	7,343	674	12,474
13. Chíncha	-	3,265	-	-	-	-	-	-	-	11,204	1,490	18,058
14. Ica	2,076	-	141	-	-	-	-	1,678	875	18,485	-	27,075
15. Cuzco	-	193	-	305	1,166	884	69	3,002	802	14,143	-	21,064
16. Tacna	-	-	238	-	328	69	1,212	3,375	-	8,830	165	14,267
17. Puno	-	-	1,107	233	-	2,937	46	2,573	-	4,742	96	11,734
18. Juliaca	-	-	967	46	-3,426	-	23	3,233	-	2,882	74	10,651
19. Moquegua	-	-	52	2,216	69	46	-	1,747	-	2,007	164	6,301
20. Arequipa	-	803	2,426	3,100	2,750	2,796	1,354	-	305	32,106	-	47,086
21. Huancayo	-	847	443	-	-	-	-	520	-	23,594	-	26,351
22. Lima	6,093	10,549	12,345	6,495	3,280	2,075	1,227	24,813	12,842	-	-	193,256
23. Resto	771	-	-	302	69	46	115	-	-	-	-	6,522

Fuente: Confeccionado por el autor en base a información proporcionada por ENTEL-PERU.

### 3.1. Los modelos de centralidad absoluta y centralidad relativa

Si cada polo o ciudad depende o influencia a todas las demás, intuitivamente es claro que esta dependencia o influencia no es tan sólo simétrica sino que por el contrario existen importantes disimetrías en esta especie de interdependencia general. Se trata entonces, de detectar en el sistema espacial de ciudades la situación de cada una de ellas en el interior de la estructura analizada.

Hemos explicado ya cómo construir la matriz de separaciones, cuyo término general  $d_{ij}$  es la separación del vértice  $x_i$  del  $x_j$ , es decir, la longitud del itinerario mínimo de la propagación de una influencia de una ciudad  $x_i$  a otra  $x_j$ . La matriz de separaciones permite, en consecuencia, afectar a cada vértice su alejamiento -término máximo de la fila correspondiente- y su anti-alejamiento -término máximo de la columna correspondiente-.

En nuestra terminología, una ciudad que corresponde a un centro estará mejor emplazada que las otras para influenciarlas; una ciudad correspondiente a un vértice Periférico estará, por el contrario, peor ubicada que el resto para influenciarlas. De la misma manera, una ciudad que corresponde a un Anti-centro estará mejor situada que las restantes para recibir una influencia; y, una ciudad que corresponde a un vértice Anti-periférico estará peor situada que las otras para recibir una influencia.

En particular, hay dos grupos de ciudades que se oponen netamente: aquellas que corresponden a vértices que son a la vez Centros y Anti-periféricos, o sea más transmisoras que receptoras de influencia y aquellas que pertenecen a vértices que son Anti-centros y Periféricos, o sea, más receptoras que transmisoras de influencia.

El análisis de la Centralidad Absoluta permite obtener algunas conclusiones interesantes. Sin embargo, la técnica utilizada es - aún muy burda, razón por la cual se hace indispensable profundizar la simple noción de centralidad.

En el capítulo cuarto, llegamos a la conclusión de que los índices apropiados para medir la propensión de los diferentes vértices a ser transmisores o receptores de influencia serían los llamados índices de Centralidad Relativa y Anti-centralidad Relativa. El cálculo de las Centralidades y Anti-centralidades Relativas nos mostrará de una manera más exacta la posición más o menos favorable de las diferentes ciudades para la emisión de una influencia. Tal como veremos más adelante, los valores de estos índices son mucho más diferenciados que aquellos que proporcionan el simple Alejamiento y Anti-alejamiento.

Es de esperar, al igual que en el caso de la Centralidad Absoluta, que aparezca una oposición entre ciudades asociadas a vértices de fuerte centralidad relativa y débil anti-centralidad relativa, que posean por tanto una influencia global superior a su dependencia global; y ciudades que están relacionadas a vértices de débil centralidad relativa y fuerte anti-centralidad relativa, que tienen una dependencia

global mayor que su influencia global. Con el fin de detectar estos dos grupos, hace falta construir un índice combinado de posición, que tome en cuenta al mismo tiempo los índices de influencia global y dependencia global, que será el que proporcione una clasificación, una jerarquía de ciudades según la influencia global neta.

### 3.1.1. El análisis de la centralidad en la región norte

Vamos a representar las relaciones inter-ciudades por un Grafo Directo que notaremos  $G$ , en el cual cada vértice representa una ciudad y un arco entre un par de vértices una comunicación cuyo sentido es contrario al del flujo real -hipótesis de demanda dominante-, tal como ha sido discutido en el capítulo cuarto.

El Gráfico del Grafo Directo  $G$ , es particularmente enredado pues posee 22 vértices y 364 arcos -véase Cuadro 6-. Por el contrario, la representación matricial es simple y clara. Llamemos para este efecto  $A$  a la matriz booleana que resulta de reemplazar todos los casilleros del Cuadro 6 en donde existen llamadas por 1 y los otros por un cero, teniendo en cuenta la convención adoptada para el sentido de los flujos. En esta estructura, los valores calculados para el Alejamiento y el Anti-alejamiento son muy pequeños, lo cual confirma la interdependencia del sistema espacial bajo estudio.

Tener una idea más cabal de los fenómenos complejos escondidos por la simple propiedad de la interdependencia, implica en cierta forma forzar el análisis, a fin de distinguir las rela

ciones inter-ciudades por grandes categorías según su amplitud. El análisis de la dependencia en grafos parciales elegidos en forma económicamente significativa, permite examinar en la estructura el efecto de las diferencias de intensidad de las relaciones y al mismo tiempo, establecer un orden de ciudades según la influencia cuantitativa global neta efectiva sobre el conjunto de los otros polos.

Dado que debemos diferenciar las relaciones inter-ciudades y considerar al mismo tiempo la intensidad de las mismas, es totalmente permisible construir una serie de grafos parciales del grafo Directo  $G$ , en los cuales se retenga solamente valores relativos de las relaciones inter-ciudades. Para tal efecto, las llamadas totales del Cuadro 6, las expresamos en porcentaje, en el Cuadro 8, que contiene el número de comunicaciones de un centro  $i$  hacia otro  $j$  dividido por el número de llamadas que van de  $i$  hacia todos los otros centros considerados.

Llamemos  $G_0$  al Grafo Directo correspondiente al Cuadro 8, y sea  $A_0$  la matriz booleana -transpuesta- asociada que toma en cuenta sólo aquellas relaciones que son superiores o iguales al 1%, e  $I_0$  matriz unidad de igual dimensión que la matriz  $A_0$ .

La matriz de caminos o accesibilidad denominada  $R_0$  se obtiene por multiplicaciones matriciales sucesivas de la suma  $(A_0 + I_0)$ . En este caso calculamos  $(A_0 + I_0)^2$  y  $(A_0 + I_0)^3$  que bastan para obtener una matriz completamente llena de 1, resultado que -

CUADRO 8  
 MATRIZ DE TRAFICO (DOMINACIÓN) DE LA ZONA NORTE EN PORCENTAJE  
 (sólo se toman coeficientes  $\geq 1\%$ )

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1. Piura	-	8.03	6.31	11.73	19.26	13.59	8.26	20.42	-	-	-
2. Catacaos	87.39	-	1.07	-	4.51	-	1.34	2.41	-	-	-
3. Chulucanas	90.62	-	-	-	-	-	-	4.61	-	-	-
4. Paíta	83.03	-	-	-	4.68	3.82	-	1.68	-	-	-
5. Sullana	80.82	-	-	1.91	-	4.62	2.04	4.28	-	-	-
6. Talara	81.16	-	-	1.23	5.30	-	2.16	3.54	-	-	-
7. Tumbes	68.36	-	-	-	4.62	4.27	-	9.70	-	-	-
8. Chiclayo	19.70	-	-	-	1.93	1.36	2.59	-	2.28	7.10	13.39
9. Etén Puerto	3.63	-	-	-	-	-	-	76.18	-	1.10	2.21
10. Ferreñafe	1.27	-	-	-	-	-	-	87.74	-	-	3.35
11. Lambayeque	4.52	-	-	-	-	-	-	83.70	-	1.62	-
12. Pimentel	2.36	-	-	-	-	-	-	84.92	1.61	1.47	3.17
13. Trujillo	8.57	-	-	-	1.88	1.74	1.66	31.87	-	-	-
14. Chepén	1.36	-	-	-	-	-	-	22.46	-	-	-
15. Guadalupe	1.07	-	-	-	-	-	-	20.68	-	-	-
16. Pacasmayo	2.16	-	-	-	-	-	-	16.99	2.40	-	-
17. San Pedro	1.25	-	-	-	-	-	-	6.96	-	-	-
18. Cajamarca	4.54	-	-	-	-	-	-	29.33	-	-	1.17
19. Chimbote	2.72	-	-	-	-	-	1.29	13.80	-	-	-
20. Casma	-	-	-	-	-	-	-	2.29	-	-	-
21. Huarney	1.05	-	-	-	-	-	1.05	-	-	-	-
22. Huaraz	-	-	-	-	-	-	-	4.00	-	-	-

//.

(Continuación)

CUADRO 8  
MATRIZ DE TRAFICO (DOMINACION) DE LA ZONA NORTE EN PORCENTAJE  
(sólo se toman coeficientes  $\geq 1\%$ )

	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1. Piura	-	8.17	-	-	-	-	-	1.77	-	-	-
2. Catacaos	-	1.18	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3. Chulucanas	-	1.66	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4. Paíta	-	1.92	-	-	-	-	-	2.70	-	-	-
5. Sullana	-	4.41	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6. Talara	-	4.92	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7. Tumbes	-	6.70	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8. Chiclayo	8.25	24.53	2.80	1.10	3.34	-	4.58	4.44	-	-	-
9. Etén Puerto	6.94	2.05	-	-	3.94	-	-	2.36	-	-	-
10. Ferreñafe	1.65	1.79	-	-	-	-	-	1.04	-	-	-
11. Lambayeque	2.18	3.13	-	-	-	-	1.09	-	-	-	-
12. Pimentel	-	4.28	-	-	-	-	-	-	-	-	-
13. Trujillo	-	-	3.83	1.61	7.21	1.34	9.46	25.03	-	-	1.80
14. Chepén	-	24.66	-	16.70	18.33	8.56	3.42	1.41	-	-	-
15. Guadalupe	-	18.62	26.75	-	14.98	8.20	3.50	3.14	-	-	-
16. Pacasmayo	-	36.17	13.34	5.87	-	14.52	4.16	2.13	-	-	-
17. San Pedro	-	20.89	12.76	7.26	46.48	-	1.54	2.05	-	-	-
18. Cajamarca	-	48.83	3.21	-	4.57	1.10	-	4.54	-	-	-
19. Chimbote	-	45.82	-	-	1.16	-	2.00	-	13.22	1.80	14.09
20. Casma	-	10.75	-	-	-	-	-	63.79	-	13.35	8.07
21. Huarmey	-	8.76	-	-	-	-	-	37.51	42.35	-	7.45
22. Huaraz	-	26.11	1.48	-	-	-	-	60.50	3.88	1.55	-

Fuente: Confeccionado por el autor en base a datos contenidos en el Cuadro 6, 1.



permite afirmar que en la estructura hay interdependencia.

De las diferentes matrices  $R_0$  obtenemos la matriz de separaciones  $E_0$ , de término general  $d_{ij}$  que señala la separación  $d(x_i, x_j)$  entre cada vértice  $x_i$  y  $x_j$ .

Con el mismo procedimiento hemos elaborado el grafo directo  $G_1$  cuya matriz asociada  $A_1$  considera aquellas relaciones que son superiores o iguales a 3%. La matriz converge en la iteración  $(A_1 + I_1)^4$ , pero debemos señalar que la estructura pierde su categoría de conexidad y, por lo tanto, la de interdependencia, lo que nos permite afirmar que en la Región Norte son las relaciones funcionales muy débiles -entre 1% y 2%- las verdaderas responsables de la interdependencia. Los resultados cifrados se presentan a continuación:

MATRIZ DE BOOLE DEL GRAFO DIRECTO  $G_0$ : REGION NORTE

(Relaciones  $\geq 1\%$ )

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1. Piura		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	
2. Catacaos	1																					
3. Chulucanas	1	1																				
4. Paita	1				1	1																
5. Sullana	1	1		1		1	1	1					1									
6. Talara	1			1	1		1	1					1									
7. Tumbes	1	1			1	1		1					1						1		1	
8. Chiclayo	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1
9. Etén Puerto								1				1				1						
10. Ferreñafe								1	1		1	1										
11. Lambayeque								1	1	1	1	1						1				
12. Pimentel								1	1	1	1	1										
13. Trujillo	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1
14. Chepén								1					1		1	1	1	1				1
15. Guadalupe								1				1	1	1	1	1	1					
16. Pacasmayo								1	1			1	1	1	1	1	1	1	1			
17. San Pedro												1	1	1	1	1	1	1				
18. Cajamarca								1		1		1	1	1	1	1	1	1				
19. Chimbote	1			1				1	1	1			1	1	1	1	1	1		1	1	1
20. Casma																			1		1	1
21. Huarney																			1	1		1
22. Huaraz													1						1	1	1	

MATRIZ DE SEPARACIONES  $E_0$  DEL GRAFO DIRECTO  $G_0$ : REGION NORTE

(Relaciones  $\geq 1\%$ )

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1. Piura	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2
2. Catacaos	1	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	2	3
3. Chulucanas	1	1	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	2	3
4. Paita	1	2	2	0	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	2	3
5. Sullana	1	1	2	1	0	1	1	1	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
6. Talara	1	2	2	1	1	0	1	1	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
7. Tumbes	1	1	2	2	1	1	0	1	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	1	2	1	2
8. Chiclayo	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
9. Etén Puerto	2	2	2	2	2	2	2	1	0	2	2	1	2	2	2	1	2	2	2	2	3	2
10. Ferreñafe	2	2	2	2	2	2	2	1	1	0	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	2
11. Lambayeque	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	0	1	2	2	2	2	2	1	2	2	3	2
12. Pimentel	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	0	2	2	2	2	2	2	2	2	3	2
13. Trujillo	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14. Chepén	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	1	0	1	1	1	1	2	2	2	1
15. Guadalupe	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	1	1	0	1	1	2	2	2	2	2
16. Pacasmayo	2	2	2	2	2	2	2	1	1	2	2	2	1	1	1	0	1	1	1	2	2	2
17. San Pedro	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	0	1	2	2	2	2
18. Cajamarca	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	1	2	1	1	1	1	1	0	1	2	2	2
19. Chimbote	1	2	2	1	2	2	2	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
20. Casma	2	3	3	2	3	3	3	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2	2	1	0	1	1
21. Huarney	2	3	3	2	3	3	3	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2	2	1	1	0	1
22. Huaraz	2	3	3	2	3	3	3	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2	2	1	1	1	0

MATRIZ DE SEPARACIONES  $E_1$  DEL GRAFO DIRECTO  $G_1$ : REGION NORTE

(Relaciones  $\geq 3\%$ )

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1. Piura	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2	2	2	2	1	2	2	2	2
2. Catacaos	1	0	2	2	2	2	2	2	2	3	2	3	2	3	3	3	3	2	3	3	3	3
3. Chulucanas	1	2	0	2	2	2	2	2	2	3	2	3	2	3	3	3	3	2	3	3	3	3
4. Païta	1	2	2	0	2	2	2	2	2	3	2	3	2	3	3	3	3	2	3	3	3	3
5. Sullana	1	1	2	1	0	1	1	2	2	3	2	3	2	3	3	3	3	2	3	3	3	3
6. Talara	1	2	2	1	1	0	1	2	2	3	2	3	2	3	3	3	3	2	3	3	3	3
7. Tumbes	1	2	2	2	2	2	0	2	2	3	2	3	2	3	3	3	3	2	3	3	3	3
8. Chiclayo	1	2	1	2	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1
9. Etén Puerto	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
10. Ferreñafe	2	3	2	3	2	2	2	1	2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	2
11. Lambayeque	2	3	2	3	2	2	2	1	2	1	0	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	2
12. Pimentel	2	3	2	3	2	2	2	1	1	2	2	0	2	2	2	2	2	2	2	3	3	2
13. Trujillo	1	2	2	2	1	1	1	1	2	2	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14. Chepén	2	3	3	3	2	2	2	2	2	2	3	2	1	0	1	1	1	1	2	2	2	2
15. Guadalupe	3	3	3	3	3	3	3	2	2	3	3	3	2	1	0	1	1	2	3	3	3	3
16. Pacasmayo	2	3	2	3	2	2	2	1	1	2	2	2	1	1	1	0	1	1	2	2	2	2
17. San Pedro	3	3	3	3	3	3	3	2	2	3	3	3	2	1	1	1	0	2	3	3	3	3
18. Cajamarca	2	3	2	3	2	2	2	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	0	2	2	2	2
19. Chimbote	2	3	2	3	2	2	2	1	2	2	2	2	1	2	1	2	1	0	1	1	1	1
20. Casma	3	4	3	4	3	3	3	2	3	3	3	3	2	3	2	3	3	3	1	0	1	1
21. Huarney	4	4	4	4	4	4	4	3	4	4	4	4	3	4	3	4	4	3	2	1	0	2
22. Huaraz	3	4	3	4	3	3	3	2	3	3	3	3	2	3	2	3	3	3	1	1	1	0

CUADRO 9  
ALEJAMIENTO y ANTI-ALEJAMIENTOS  
(Región Norte)

Hipótesis	Relaciones $\geq 1\%$		Relaciones $\geq 3\%$			
	$E_0$		$E_1$		$E_1^*$	
Matriz	$d^+$	$d^-$	$d^+$	$d^-$	$d^+$	$d^-$
Alejamiento y Anti-alejamiento	$d^+$	$d^-$	$d^+$	$d^-$	$d^+$	$d^-$
1. Piura	2	2	2	$\infty$	2	4
2. Catacaos	3	3	3	$\infty$	3	4
3. Chulucanas	3	3	3	$\infty$	3	4
4. Paíta	3	2	3	$\infty$	3	4
5. Sullana	2	3	3	$\infty$	3	4
6. Talara	2	3	3	$\infty$	3	4
7. Tumbes	2	3	3	$\infty$	3	4
8. Chiclayo	2	2	2	$\infty$	2	3
9. Etén Puerto	3	2	$\infty$	3		
10. Ferreñafe	3	2	3	$\infty$	3	4
11. Lambayeque	3	3	3	$\infty$	3	4
12. Pimentel	3	3	3	$\infty$	3	4
13. Trujillo	1	2	2	$\infty$	2	4
14. Chepén	2	2	3	$\infty$	3	3
15. Guadalupe	2	2	3	$\infty$	3	4
16. Pacasmayo	2	2	3	$\infty$	3	3
17. San Pedro	2	2	3	$\infty$	3	4
18. Cajamarca	2	2	3	$\infty$	3	4
19. Chimbote	2	2	3	$\infty$	3	3
20. Casma	3	3	4	$\infty$	4	3
21. Huarmey	3	3	4	$\infty$	4	3
22. Huaraz	3	3	4	$\infty$	4	3

$E_1^*$ : Estructura privada del polo 9.

A la estructura más diferenciada  $E_1^*$  y por ende más rica en información le corresponden las características siguientes:

Rayo Externo 2	Diámetro 4	Rayo Interno 3	Diámetro 4
CENTRO	PERIFERICO	ANTICENTRO	ANTIPERIFERICO
Piura Chiclayo Trujillo	Casma Huarmey Huaraz	Chulucanas Chepén Pacasmayo Chimbote Casma Huarmey Huaraz	Piura Catacaos Chulucanas Paíta Sullana Talara Tumbes Ferreñafe Lambayeque Pimentel Trujillo Guadalupe San Pedro Cajamarca

Piura y Trujillo son los dos únicos polos que son a la vez Centros y Antiperiféricos, luego, son ciudades que son muy dominantes al interior de la Región. Por el contrario, Casma, Huarmey y Huaraz son Periféricos y Anticentros, por lo tanto ciudades muy dominadas por el resto del sistema.

Esta aproximación permite tener una idea bastante burda por cierto, del fenómeno de dominación, en consecuencia es indispensable profundizar la noción de centralidad con el objeto de sacar a la luz, las importantes disimetrías "escondidas" en la estructura justamente por el fenómeno de interdependencia.

Habiendo ya calculado la matriz de separaciones, el análisis de la Centralidad y Anticentralidad Relativa puede ser llevado a cabo sin ninguna dificultad. A partir de la matriz  $E_1$  de relaciones mayores o iguales al 3%, se confecciona el Cuadro 10.

CUADRO 10  
CENTRALIDAD Y ANTICENTRALIDAD RELATIVAS  
(Región Norte)

$x_i$	$\max_j d_{ij}$	$d_i$	$c_i$	$\max_j d_{ji}$	$d'_i$	$c'_i$
1. Piura	2	30	30.5	4	38	24.1
2. Catacaos	3	49	18.7	4	52	17.6
3. Chulucanas	3	49	18.7	4	45	20.4
4. Paita	3	49	18.7	4	52	17.6
5. Sullana	3	45	20.4	4	43	21.3
6. Talara	3	46	19.9	4	42	21.8
7. Tumbes	3	49	18.7	4	41	22.3
8. Chiclayo	2	24	38.2	3	33	27.8
9. Etén Puerto	-	-	-	-	-	-
10. Ferreñafe	3	43	21.3	4	50	18.3
11. Lambayeque	3	41	22.3	4	44	20.8
12. Pimentel	3	43	21.3	4	49	18.7
13. Trujillo	2	24	30.2	4	35	26.2
14. Chepén	3	40	22.9	3	44	20.8
15. Guadalupe	3	51	18.0	4	40	22.9
16. Pacasmayo	3	36	25.4	3	44	20.8
17. San Pedro	3	51	18.0	4	45	20.4
18. Cajamarca	3	37	24.8	4	37	24.8
19. Chimbote	3	35	26.2	3	44	20.8
20. Casma	4	53	17.3	3	47	19.5
21. Huarney	4	68	13.5	3	47	19.5
22. Huaraz	4	53	17.3	3	44	20.8
		916			916	

$x_i$  = ciudades

$\max_j d_{ij} = d^+(x_i)$  = alejamiento;  $\max_j d_{ji} = d^-(x_i)$  = antialejamiento

$d_i$  = suma de separaciones por fila.

$d'_i$  = suma de separaciones por columna

$c_i$  = índice de centralidad relativa

$c'_i$  = índice de anticentralidad relativa

El Cuadro 11 contiene la clasificación de ciudades según los valores del Índice de Influencia Global Neta (IGN). El IGN es igual a la unidad para los polos que calificamos como "neutros". Es mayor que uno cuando la ciudad es más transmisora que receptora de influencia menor que 1 cuando sea más receptora que transmisora de influencia o dicho de otra manera, tiene una dependencia global neta muy importante.

Debemos señalar que no debe atribuírse mucha significación a los valores absolutos del índice, éste muestra más una predisposición que una realidad concreta. La clasificación presentada sigue el orden decreciente del índice y contiene cinco grupos. Las ciudades cuyas Influencias y Dependencias Globales Netas son débiles, prácticamente pueden ser consideradas como neutras. Los dos grupos susceptibles de oponerse, se encuentran al principio y al fin de la clasificación.

Es de observar que en el primer grupo encontramos centros muy dinámicos comercial e industrialmente como Piura, Chiclayo y Trujillo o puertos como Chimbote, Pacasmayo y Pimentel, que mueven una cantidad apreciable de productos agrícolas de exportación, o aún, ciudades que albergan una industria relativamente importante como Ferreñafe y Chepén con las piladoras de arroz. Notamos, en cambio, en el segundo grupo, ciudades cuya actividad industrial o portuaria es escasa.



## . CUADRO 11

CLASIFICACION DE CIUDADES DE LA REGION NORTE SEGUN VALORES  
 DECRECIENTES DEL INDICE DE INFLUENCIA GLOBAL NETA

Ciudades $x_i$	IGN ( $x_i$ )
<u>Fuerte Influencia Global Neta</u>	
Chiclayo	1.374
Piura	1.266
Chimbote	1.259
Pacasmayo	1.221
Ferreñafe	1.164
Trujillo	1.153
Pimentel	1.139
Chepén	1.100
<u>Débil Influencia Global Neta</u>	
Lambayeque	1.072
Catacaos	1.063
Paita	1.063
<u>Neutros (Estrictamente)</u>	
Cajamarca	1.000
<u>Débil Dependencia Global Neta</u>	
Sullana	0.958
Chulucanas	0.917
Talara	0.913
<u>Fuerte Dependencia Global Neta</u>	
Casma	0.887
San Pedro	0.882
Tumbes	0.839
Huaraz	0.832
Guadalupe	0.786
Huarmey	0.692

### 3.1.2. El análisis de la centralidad para algunas ciudades del Perú.

El tratamiento es similar al realizado en la sección anterior.

La matriz de tráfico telefónico del Cuadro 7 es expresada en porcentajes en el Cuadro 12.

La construcción del Grafo Directo  $G_0$  así como el de la matriz booleana  $A_0$  se lleva a cabo a partir de los datos contenidos en el Cuadro 12. Se ha conservado la hipótesis de demanda dominante, luego los flujos de acuerdo con nuestra convención -- tendrán una orientación inversa. La matriz booleana  $A_0$  toma en cuenta las relaciones que son superiores o iguales al 3%, además, con el fin de retener sólo a las ciudades individualizadas, se ha eliminado el polo correspondiente al "Resto de la República".

Al igual que anteriormente, a partir de la matriz  $A_0$  hemos calculado las matrices de caminos o accesibilidad  $R$  y, en base a éstas, la matriz de separaciones, a partir de la cual construimos el Cuadro 13 de Centralidades y Anticentralidades.

Como era de esperar, el único vértice que es Centro y Antiperiférico es el que corresponde a Lima, que como sabemos ocupa un lugar indiscutible de transmisor de influencia y de dominación en el país. Existen nueve centros que son Anticentros y Periféri

CUADRO 12

MATRIZ DE TRAFICO (DOMINACION) A NIVEL NACIONAL EN PORCENTAJE  
(Sólo se toman coeficientes  $\geq 1\%$ )

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1. Tumbes	-	4.66	0.42	22.70	7.84	-	-	-	-	-	-	-
2. Talara	2.44	-	1.15	28.26	3.84	-	-	-	-	-	-	-
3. Paíta	1.11	4.85	-	41.76	3.83	-	-	-	-	-	-	-
4. Piura	3.45	5.32	4.84	-	17.54	-	-	8.39	-	1.70	0.97	-
5. Chiclayo	1.15	0.94	0.34	14.44	-	2.14	2.01	12.67	-	2.34	0.78	-
6. Pacasmayo	-	-	-	-	17.60	-	3.19	31.46	-	-	-	-
7. Cajamarca	-	-	-	-	12.24	4.33	-	19.68	-	-	-	-
8. Trujillo	-	-	-	6.16	12.20	3.53	3.38	-	1.17	10.11	1.56	-
9. Huaraz	-	-	-	-	-	-	-	5.48	-	9.62	4.30	-
10. Chimbote	-	-	-	2.76	4.36	-	-	21.52	3.15	-	5.03	-
11. Huacho	-	-	-	2.05	2.72	-	-	6.73	2.36	8.66	-	-
12. Pisco	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
13. Chíncha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	11.52
14. Ica	-	-	-	1.31	0.88	-	-	1.48	-	0.60	1.84	8.00
15. Cuzco	-	-	-	0.45	0.78	-	-	0.67	-	0.25	0.22	-
16. Tacna	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
17. Puno	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
18. Juliaca	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
19. Moquegua	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
20. Arequipa	-	-	-	0.51	0.60	-	-	0.75	-	-	0.71	0.50
21. Huancayo	-	-	-	0.54	0.36	-	-	1.07	-	0.71	0.71	0.90
22. Lima	1.55	2.14	0.77	7.96	10.26	1.30	1.81	11.34	3.01	10.38	5.29	2.93
23. Resto	8.60	10.72	7.84	-	-	17.13	16.44	-	6.07	-	-	13.22

//.

(Continuación)

CUADRO 12

MATRIZ DE TRAFICO (DOMINACION) A NIVEL NACIONAL EN PORCENTAJE  
(Sólo se toman coeficientes  $\geq 1\%$ )

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1. Tumbes	-	-	-	-	-	-	-	-	-	55.66	8.72
2. Talara	-	-	-	-	-	-	-	-	-	58.07	6.24
3. Paita	-	-	-	-	-	-	-	-	-	35.70	12.75
4. Piura	-	0.68	0.11	-	-	-	-	0.73	0.15	56.12	-
5. Chiclayo	-	0.48	0.35	-	-	-	-	0.26	0.34	61.76	-
6. Pacasmayo	-	-	-	-	-	-	-	-	-	41.07	6.68
7. Cajamarca	-	-	-	-	-	-	-	-	-	54.81	8.94
8. Trujillo	-	1.00	0.31	-	-	-	-	0.80	0.87	58.31	-
9. Huaraz	-	-	-	-	-	-	-	-	-	75.88	4.72
10. Chimbote	-	0.30	0.12	-	-	-	-	0.86	0.67	61.23	-
11. Huacho	-	4.22	0.35	-	-	-	-	2.38	2.29	68.24	-
12. Pisco	14.41	21.32	-	-	-	-	-	-	-	58.87	5.40
13. Chincha	-	18.08	-	-	-	-	-	-	-	62.05	8.25
14. Ica	7.67	-	0.52	-	-	-	-	6.20	3.23	68.27	-
15. Cuzco	-	0.92	-	1.45	5.53	4.20	0.33	14.25	3.81	67.14	-
16. Tacna	-	-	1.67	-	2.31	0.49	8.52	23.74	-	62.11	1.16
17. Puno	-	-	9.43	1.99	-	25.03	0.39	21.93	-	40.41	0.82
18. Juliaca	-	-	9.08	0.43	32.17	-	0.22	30.35	-	27.06	0.69
19. Moquegua	-	-	0.83	35.17	1.09	0.73	-	27.73	-	31.85	2.60
20. Arequipa	-	1.71	5.15	6.58	5.84	5.94	2.88	-	0.65	68.18	-
21. Huancayo	-	3.21	1.68	-	-	-	-	1.97	-	89.56	-
22. Lima	3.15	5.46	6.39	3.36	1.70	1.07	0.64	12.84	6.65	-	-
23. Resto	11.82	-	-	4.63	1.06	0.71	1.76	-	-	-	-

cós, por tanto muy dominados, que son: Tumbes, Talara, Paita, Pacasmayo, Cajamarca, Pisco, Puno, Juliaca y Moquegua.

Debe observarse que aun considerando solamente relaciones que son superiores o iguales al 3%, la estructura conserva su categoría de conexidad; en otras palabras, la propiedad de interdependencia no depende de relaciones funcionales pequeñas, lo que indica que la propagación de la influencia es generalizada a través de un juego de efectos directos e indirectos, cuyo itinerario de propagación, pensamos no debe tener caminos que excedan una longitud de tres. Un estudio de este tipo es factible de ser realizado y de hecho debe ser llevado a cabo si nuestra pretensión es conocer los efectos de una determinada política a nivel regional.

La clasificación de ciudades obtenida en función del IGN no requiere de mayores comentarios. Las herramientas de análisis son aun demasiado toscas. Sin embargo conviene puntualizar que en el Norte, Chiclayo, en el Centro, Huancayo y en el Sur, Arequipa, son polos muy hegemónicos, dominantes y que ocupan una posición privilegiada al interior de la República. Llama poderosamente la atención que en el contexto espacial nacional sólo dos ciudades serranas presenten una cierta dinámica de transmisión de influencia: Huancayo y en menor grado Cuzco; el resto, -Cajamarca, Puno, Juliaca, Moquegua- así como sus respectivas áreas de influencia, ocupan un lugar totalmente secundario.

MATRIZ DE SEPARACIONES: NIVEL NACIONAL

(Coeficiente  $\geq 3\%$ )

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1. Tumbes	0	2	1	2	3	3	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2. Talara	1	0	1	1	2	3	3	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3. Paíta	2	2	0	1	2	3	3	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4. Piura	1	1	1	0	1	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
5. Chiclayo	1	1	1	1	0	1	1	1	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
6. Pacasmayo	3	3	3	2	2	0	1	1	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
7. Cajamarca	3	3	3	2	2	1	0	1	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
8. Trujillo	2	2	2	1	1	1	1	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
9. Huaraz	2	2	2	2	2	2	2	2	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
10. Chimbote	2	2	2	2	2	2	2	1	1	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
11. Huacho	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
12. Pisco	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3
13. Chincha	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2
14. Ica	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	0	2	2	2	2	2	2	2	2
15. Cuzco	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	2	1	1	2	1	2	1
16. Tacna	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	2	2	1	1	2	1
17. Puno	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	1	2	0	1	2	1	3	2
18. Juliaca	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	1	2	1	0	2	1	3	2
19. Moquegua	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1	3	3	0	1	3	2
20. Arequipa	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	0	2	1
21. Huancaayo	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	2	2	2	2	2	0	1
22. Lima	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

CUADRO 13  
CENTRALIDADES Y ANTICENTRALIDADES RELATIVAS  
(Nivel Nacional)

$x_i$	$\max_j d_{ij}$	$d_i$		$\max_j d_{ji}$	$d'_i$	$c_i$
Tumbes	3	57	17.0	3	44	22.0
Talara	3	55	17.6	3	45	21.5
Paita	3	57	17.0	3	44	22.0
Piura	2	36	26.9	3	40	24.2
Chiclayo	2	33	29.3	3	43	22.5
Pacasmayo	3	54	17.9	3	45	21.5
Cajamarca	3	54	17.9	3	45	21.5
Trujillo	2	34	18.5	3	40	24.2
Huaraz	2	40	24.2	3	44	22.0
Chimbote	2	38	25.5	3	45	21.5
Huacho	2	39	24.8	3	47	20.6
Pisco	3	59	16.4	3	47	20.6
Chincha	2	39	24.8	3	47	20.6
Ica	2	37	26.2	3	43	22.5
Cuzco	2	38	25.5	3	44	22.0
Tacna	2	39	24.8	3	45	21.5
Puno	3	53	18.3	3	44	22.0
Juliacca	3	53	18.3	3	44	22.0
Moquegua	3	58	16.9	3	45	21.5
Arequipa	2	35	27.7	3	42	23.0
Huancayo	2	39	24.8	3	49	19.8
Lima	1	21	46.1	3	36	26.9
		968			968	

$x_i$  = ciudades

$\max_j d_{ij} = d^+(x_i)$  = alejamiento;  $\max_j d_{ji} = d^-(x_i)$  anti-alejamiento

$d_i$  = suma de separaciones por fila

$d'_i$  = suma de separaciones por columna

$c_i$  = índice de centralidad relativa

$c'_i$  = índice de anticentralidad relativa.

## CUADRO 14

CLASIFICACION DE CIUDADES A NIVEL NACIONAL SEGUN VALORES  
DECRECIENTES DEL INDICE DE INFLUENCIA GLOBAL NETA

Ciudades $x_i$	IGN ( $x_i$ )
<u>Fuerte Influencia Global Neta</u>	
Lima	1.714
Chiclayo	1.302
Huancayo	1.253
Arequipa	1.204
Huacho	1.204
Chincha	1.204
Chimbote	1.186
Trujillo	1.178
Ica	1.164
Cuzco	1.159
Tacna	1.153
<u>Débil Influencia Global Neta</u>	
Piura	1.111
Huaraz	1.100
<u>Fuerte Dependencia Global Neta</u>	
Pacasmayo	0.833
Cajamarca	0.833
Puno	0.832
Juliaca	0.832
Talara	0.819
Moquegua	0.786
Tumbes	0.773
Paita	0.773



### 3.2. La generalización de la noción de centro

Los modelos de Centralidad Absoluta y Centralidad Relativa permiten, esperamos haberlo demostrado, una clasificación cualitativa de polos -Centros, Periféricos, Anticentros y Antiperiféricos- pero de ninguna manera autorizan a jerarquizarlos.

Ambos modelos proporcionan una primera aproximación al problema de ordenación; su campo de aplicación lo constituyen las estructuras de interrelaciones no cuantificables. Estos modelos encuentran su fundamento en la hipótesis según la cual "un polo es tanto más influyente cuando demanda al mayor número posible o está más próximo -de todo el resto -de polos- por intermedio del juego de relaciones indirectas de oferta de las cuales él -el polo- está al origen".

El enunciado anterior evidencia la dicotomía posición -intensidad de las relaciones, que en buena cuenta perjudica sustancialmente a cualquier análisis de estructuras cuantificadas de interrelaciones. Por nuestra parte hemos intentado corregir esta situación tomando en cuenta niveles de interrelaciones, reintroduciendo así la intensidad de las mismas en una teoría fundada exclusivamente en su posición.

El modelo preconizado por C. Berge no solamente nos sirve para llevar a cabo un análisis estructural "cuantitativo" sino que al mismo tiempo relaciona la Teoría del Lugar Central con la Teoría de Grafos. El modelo que hemos llamado "Potencia de un Vértice", respon-

de a estas exigencias como intentaremos demostrar en las siguientes - páginas.

### 3.2.1. La potencia de un vértice

Este modelo busca establecer relaciones de domi  
nación entre los centros considerados.

Sea A una matriz cuyo término general  $a_{ij}$  indica el número de llamadas de i a j. El grafo G asociado a esta matriz A es muy complejo y además cada arco está afectado o valuado por el nú  
mero de comunicaciones telefónicas.

Definamos una matriz A' de término general  $a'_{ij}$  i  
gual al número de llamadas de i a j dividido por las llamadas tot  
ales de i hacia los otros centros:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_j a_{ij}}$$

en la matriz A' el término  $a'_{ij}$  no es considerado porque no nos intere-  
san las relaciones al interior de un mismo centro.

Asociamos un grafo G' a la matriz A', de manera que es posible comparar el porcentaje de relaciones de  $x_i$  a  $x_j$  y de  $x_j$  a  $x_i$ , y por tanto retener las relaciones de dominación de  $x_i$  a  $x_j$ .

Sea  $G''$  un grafo que contiene únicamente las relaciones de dominación:

$$a'_{ij} > a'_{ji} \iff x_{ji} \text{ existe,}$$

lo que quiere decir que si el porcentaje de llamadas telefónicas de  $x_i$  a  $x_j$  con relación al número total de llamadas de  $x_i$  es superior al porcentaje de llamadas de  $x_j$  a  $x_i$  con relación al número total de llamadas de  $x_j$ , entonces, podemos afirmar que  $x_j$  domina a  $x_i$ .

La matriz  $A''$  asociada al grafo de dominación  $G''$  debe ser tal que:

$$a''_{ij} = 0 \implies a''_{ji} = 1$$

Además, si dos ciudades tienen relaciones no significativas -porcentajes muy bajos- es lícito suponer que no hay relación entre las mismas, con lo cual dejamos de definir relaciones de dominación que serían sin fundamento:

$$a_{ij} = a_{ji} = 0$$

En conclusión, es a partir del Grafo de dominación  $G''$  que el modelo será aplicado.

### 3.2.1.1. Jerarquía de centros en la región norte del Perú

Las cifras en porcentaje del Cuadro 8

expresan las comunicaciones de un centro  $i$  hacia otro centro  $j$  dividido por el número de llamadas que van de  $i$  hacia los demás centros.

Puede apreciarse igualmente en el el Cuadro 8 que existen enormes diferencias en las relaciones que mantienen un centro  $i$  con otro  $j$  e inversamente. Por ejemplo, 19% de comunicaciones de Piura van dirigidas a Sullana, en cambio, 81% de llamadas van de Sullana a Piura. Consideraciones de este tipo son las que nos facultan el definir una relación de dominación entre dos ciudades. Máx explícitamente, diremos que si la cantidad de llamadas de  $i$  hacia  $j$  en relación al total de llamadas de  $i$  es inferior al número de llamadas de  $j$  hacia  $i$  en relación al total de llamadas de  $j$ , el centro  $i$  domina al centro  $j$ .

La determinación de las influencias - simétricas entre dos ciudades requiere de la elección de un nivel de intensidad, más allá del cual dos coeficientes serán tomados como lo - suficientemente diferentes para que una ciudad domine a la otra; hemos elegido el nivel de 3% luego, si los coeficientes difieren en menos - de esta cantidad los polos  $i$  y  $j$  no pueden ser diferenciados.

En base a las hipótesis anteriores el 2-grafo de dominación ha sido construido como sigue:

- Si el centro  $i$  domina a  $j$ , por convención, dos arcos irán de  $i$  a  $j$ .

- Si  $i$  y  $j$  se influncian simétricamente, es decir sus coeficientes no difieren en más de 3%, un arco irá de  $i$  a  $j$  y otro de  $j$  a  $i$ .

- Si hay una relación entre  $i$  y  $j$ , pero no hay una relación entre  $j$  e  $i$  y la intensidad es inferior al 3%, un arco irá de  $i$  a  $j$ .

- Si en el caso anterior, el coeficiente es superior al 3%, habrán dos arcos dirigidos de  $i$  a  $j$ .

- Cada polo es afectado de un bucle.

El procedimiento de cálculo es el siguiente: la matriz asociada al 2-grafo indica el número de arcos que van del vértice  $i$  al vértice  $j$ ; la suma por línea de la matriz constituye la potencia de orden uno de cada vértice. Los resultados de las iteraciones convergen muy rápidamente, aunque son susceptibles de ligeras modificaciones en el curso de las mismas y constituyen por este hecho una aproximación de las potencias reales  $\pi(i)$ , y han sido calculadas a partir de la fórmula:

$$\pi^*(i) = \frac{p_6^{(i)}}{p_6^{(1)} + \dots + p_6^{(22)}} \cdot 100$$

Para el cálculo de  $\bar{\pi}^*(i)$  se ha utilizado un procedimiento análogo, razonando esta vez sobre las columnas de la matriz asociada.

Recordemos que  $\pi^* (i)$  nos informa sobre la influencia global directa e indirecta emitida por una ciudad, y  $\bar{\pi}^* (i)$  cuantifica la influencia global directa e indirecta recibida por una ciudad. Dado que no existe ninguna razón teórica para que los polos que transmiten más influencia sean simultáneamente los que reciban menos influencia, hemos calculado la posición real de cada ciudad de la estructura mediante la relación  $\pi^* (i) / \bar{\pi}^* (i)$  que nos reseña en última instancia de la posición que ocupa cada ciudad en la jerarquía.

Los resultados obtenidos son presentados en los Cuadros que se incluyen a continuación:

MATRIZ ASOCIADA AL GRAFO DE DOMINACION

(Región Norte)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1. Piura	1	2	2	2	2	2	2	1	2	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1	0	1	0
2. Catacaos	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3. Chulucanas	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4. Paíta	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5. Sullana	0	2	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6. Talara	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7. Tumbes	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
8. Chiclayo	1	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	0	2
9. Etén Puerto	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
10. Ferreñafe	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11. Lambayeque	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
12. Pimentel	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13. Trujillo	1	1	1	1	1	2	2	0	1	1	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
14. Chepén	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	0	2	1	0	0	0	1
15. Guadalupe	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
16. Pacasmayo	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	2	1	2	1	1	0	0	0
17. San Pedro	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
18. Cajamarca	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	2	1	1	1	1	0	0	0
19. Chimbote	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	2	1	1	1	1	2	2	2
20. Casma	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	2
21. Huarney	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
22. Huaraz	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	1

CUADRO 15

ITERACIONES: REGION NORTE

	Lugar en la Jerarquía					Π*
	1ra Iteración	2da Iteración	3ra Iteración	4ta Iteración	...	
1. Piura	3	3	2	2		20.20
2. Catacaos	21	20	21	21		0.00000297
3. Chulucanas	18	21	20	20		0.0000179
4. Paita	16	12	10	10		2.98
5. Sullana	6	5	4	4		9.82
6. Talara	10	7	6	5		7.15
7. Tumbes	9	9	9	7		4.23
8. Chiclayo	1	1	1	1		22.14
9. Etén Puerto	18	18	14	13		0.00636
10. Ferreñafe	14	12	16	16		0.00517
11. Lambayeque	10	12	12	12		0.00987
12. Pimentel	10	11	13	14		0.00637
13. Trujillo	2	2	3	3		16.81
14. Chepén	8	10	11	11		0.00994
15. Guadalupe	18	19	19	19		0.00139
16. Pacasmayo	5	6	7	8		2.82
17. San Pedro	16	16	15	15		0.00609
18. Cajamarca	6	8	8	9		2.58
19. Chimbote	4	4	5	6		6.35
20. Casma	10	15	18	18		0.00146
21. Huarney	21	21	21	21		0.00000297
22. Huaraz	14	16	17	17		0.00246



CUADRO 16

ITERACIONES: REGION NORTE

	Lugar en la Jerarquía					$\bar{\pi}^*$
	1ra Iteración	2da Iteración	3ra Iteración	4ta Iteración	....	
1. Piura	21	22	22	22		1.47
2. Catacaos	9	11	11	13		3.38
3. Chulucanas	18	19	21	21		1.51
4. Paíta	14	15	14	14		3.35
5. Sullana	14	15	15	15		3.16
6. Talara	9	12	12	12		3.41
7. Tumbes	9	13	16	16		3.13
8. Chiclayo	21	20	19	19		1.59
9. Etén Puerto	3	4	6	3		6.34
10. Ferreñafe	14	13	13	11		3.53
11. Lambayeque	7	8	9	9		4.48
12. Pimentel	14	17	17	17		3.07
13. Trujillo	20	20	20	20		1.55
14. Chepén	5	6	4	5		6.57
15. Guadalupe	1	1	1	1		12.10
16. Pacasmayo	9	8	8	8		5.23
17. San Pedro	2	2	2	2		10.22
18. Cajamarca	3	3	3	4		7.40
19. Chimbote	9	10	10	10		4.46
20. Casma	18	18	18	18		2.62
21. Huarney	5	5	5	6		6.17
22. Huaraz	7	7	7	7		5.16

En la región norte, la jerarquía encontrada en función de la Influencia Global Emitida y Recibida (ver Cuadro 17), permite afirmar que Chiclayo, Piura y Trujillo son centros de primer orden.

De las 22 ciudades que conforman la región, sólo 10 transmiten una influencia global que puede ser considerada como significativa. Sin embargo, Cajamarca la única ciudad serrana que está incluida en este grupo recibe una influencia cuatro o cinco veces más elevada que la recibida por Chiclayo, Piura o Trujillo por ejemplo. El resto de ciudades, tal como se desprende del Cuadro 17 transmiten una influencia global prácticamente nula y reciben en cambio una fuerte influencia global que es entre 2 y 7 veces más alta que la recibida por Chiclayo, Piura o Trujillo.

Llama la atención el hecho de que a nivel regional, Piura esté mejor ubicada que Trujillo, esto podría explicarse en razón de que Piura mantiene relaciones muy fuertes con sus centros complementarios (Sullana, Talara, Tumbes, Catacaos, Paita y Chulucanas), lo que no es el caso de Trujillo que en cierta forma "comparte" la influencia irradiada a sus hinterlands con Chiclayo, como lo confirma la información contenida en el Cuadro 8. De todas maneras Trujillo a nivel nacional mantiene una posición muy superior a la de Piura, pero a nivel regional, no creemos que sea posible "corregir esta situación de manera objetiva.

CUADRO 17

COMPARACION DE LA INFLUENCIA GLOBAL EMITIDA Y DE LA  
INFLUENCIA GLOBAL RECIBIDA

Polos	Influencia Global Transmitida $\pi^* (i)$	Influencia Global Recibida $\bar{\pi}^* (i)$	$\pi^* / \bar{\pi}^*$
Chiclayo	22.14	1.59	13.9245
Piura	20.20	1.47	13.7415
Trujillo	16.81	1.55	10.8452
Sullana	9.82	3.16	3.1076
Talara	7.15	3.41	2.0968
Chimbote	6.35	4.46	1.4238
Tumbes	4.23	3.13	3.3514
Paíta	2.98	3.35	0.8896
Pacasmayo	2.82	5.23	0.5392
Cajamarca	2.58	7.50	0.3440
Lambayeque	0.00987	4.48	0.002203
Pimentel	0.00637	3.07	0.002075
Chepén	0.00994	6.57	0.001513
Ferreñafe	0.00517	3.53	0.001465
Etén Puerto	0.00636	6.34	0.001003
San Pedro	0.00609	10.22	0.0005959
Casma	0.00146	2.62	0.0005573
Huaraz	0.00246	5.16	0.0004767
Guadalupe	0.00139	12.10	0.0001149
Chulucanas	0.0000179	1.51	0.00001185
Catacaos	0.00000297	3.38	0.000000858
Huarmey	0.00000297	6.17	0.00000047

En síntesis, la influencia global transmitida es la que determina la posición de cada ciudad en la jerarquía, lo cual implica que el nivel de actividad socio-económica desarrollada en un centro, desde el punto de vista de la teoría del lugar central, es la verdadera causante de la estructuración y ordenación de este espacio regional.

La jerarquía de lugares centrales a Nivel Nacional mostrada en el Cuadro 20, reproduce el patrón de la Región Norte: las ciudades que emiten las influencias más grandes son las que ocupan los primeros lugares en la jerarquía.

La comparación de la Influencia Global Emitida y de la Recibida, indica que sólo siete ciudades estructuran el espacio nacional: Lima, Trujillo, Arequipa, Huancayo, Chiclayo, Chimbote e Ica.

Evidentemente, el elemento determinante de esta estructuración es la localización de las actividades productivas y particularmente de las actividades industriales, porque el desarrollo económico de una región (polo) es esencialmente función de su estructura industrial. Esta dispersión geográfica de las fuerzas productivas que se presenta en el país es particularmente explosiva, pues las distancias entre la distribución espacial de la fuerza de trabajo, los medios de producción y la infraestructura que les es necesaria se hace cada vez más grande entre el Perú urbano costero y el Perú rural serrano.

MATRIZ ASOCIADA AL GRAFO DE DOMINACION O INFLUENCIA

(Nivel Nacional)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
1. Tumbes	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2. Talara	1	1	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
3. Paíta	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4. Piura	2	2	2	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
5. Chiclayo	2	1	2	2	1	2	2	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
6. Pacasmayo	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
7. Cajamarca	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
8. Trujillo	0	0	0	2	1	2	2	1	2	2	2	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
9. Huaraz	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
10. Chimbote	0	0	0	1	1	0	0	0	2	1	2	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
11. Huacho	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
12. Pisco	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
13. Chincha	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
14. Ica	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	2	2	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
15. Cuzco	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	2	2	1	0	0	0	0	0
16. Tacna	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	0	0	0	0	2
17. Puno	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	0	0	0	0	1
18. Juliaca	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1
19. Moquegua	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1
20. Arequipa	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	2	2	2	2	2	2	1	1	0	0	0
21. Huancayo	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	2	0	0	0	0	1	1	0	0	0
22. Lima	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	0	0
23. Resto	1	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1

CUADRO 18  
ITERACIONES: NIVEL NACIONAL

	Lugar en la Jerarquía					$\pi^*$
	1ra iteración	2da iteración	3ra iteración	4ta iteración	5ta iteración ....	
1. Tumbes	16	21	22	18	18	0.2606
2. Talara	13	12	12	12	12	1.3489
3. Paíta	23	23	23	23	23	0.0410
4. Piura	5	9	9	9	9	6.2964
5. Chiclayo	2	4	4	4	4	9.1474
6. Pacasmayo	16	17	18	19	19	0.1774
7. Cajamarca	16	17	18	19	19	0.1774
8. Trujillo	4	3	3	3	2	10.6338
9. Huaraz	22	22	17	15	14	0.8356
10. Chimbote	8	8	6	6	6	7.7866
11. Huacho	10	10	10	10	10	6.1535
12. Pisco	16	17	18	19	19	0.1774
13. Chíncha	16	17	18	19	19	0.1774
14. Ica	7	7	7	7	7	7.0332
15. Cuzco	5	6	8	8	8	6.5019
16. Tacna	10	11	11	11	11	1.4029
17. Puno	14	14	14	14	15	0.5409
18. Juliaca	16	16	16	17	17	0.4130
19. Moquegua	15	13	13	13	13	1.0445
20. Arequipa	2	2	2	2	3	10.4563
21. Huancaayo	9	5	5	5	5	8.8259
22. Lima	1	1	1	1	1	20.1123
23. Resto	10	15	15	16	16	0.4553

CUADRO 19  
ITERACIONES: NIVEL NACIONAL

	Lugar en la Jerarquía						$\bar{\pi}^*$
	1ra iteración	2da iteración	3ra iteración	4ta iteración	5ta iteración	...	
1. Tumbes	11	11	11	11	11		4.8838
2. Talara	20	18	18	18	18		2.8799
3. Paíta	5	5	5	5	5		5.9673
4. Piura	4	4	4	4	4		6.4049
5. Chiclayo	8	9	10	10	9		5.0612
6. Pacasmayo	16	18	19	19	19		2.4567
7. Cajamarca	16	18	19	19	19		2.4567
8. Trujillo	16	15	16	15	15		3.4012
9. Huaraz	14	17	15	15	17		3.7762
10. Chimbote	8	9	9	8	8		5.0694
11. Huacho	3	3	3	3	2		6.7544
12. Pisco	21	21	21	21	21		1.7067
13. Chingha	21	21	21	21	21		1.7067
14. Ica	5	7	7	6	7		5.9007
15. Cuzco	2	2	1	1	1		7.3389
16. Tacna	16	16	17	17	16		3.2879
17. Puno	11	11	12	12	12		4.7621
18. Juliaca	5	6	6	7	6		5.9715
19. Moquegua	8	8	8	8	10		4.9668
20. Arequipa	14	14	14	14	14		3.9679
21. Huancayo	11	13	13	13	13		4.6295
22. Lima	23	23	23	23	23		0.000008104
23. Resto	1	1	2	2	3		6.6661

CUADRO 20  
COMPARACION DE LA INFLUENCIA GLOBAL EMITIDA Y DE LA  
INFLUENCIA GLOBAL RECIBIDA A NIVEL NACIONAL

Polos	Influencia Global Transmitida $\pi^* (i)$	Influencia Global Recibida $\bar{\pi}^* (i)$	$\pi^* / \bar{\pi}^*$
Lima	20.1123	0.000008104	2483000.0
Trujillo	10.6338	3.4012	3.1265
Arequipa	10.4563	3.9679	2.6352
Huancayo	8.8259	4.6295	1.9064
Chiclayo	9.1474	5.0612	1.8074
Chimbote	7.7866	5.0694	1.5360
Ica	7.0332	5.9007	1.1919
Piura	6.2964	6.4049	0.9831
Huacho	6.1535	6.7544	0.9110
Cuzco	6.5019	7.3389	0.8860
Talara	1.3489	2.8799	0.4684
Tacna	1.4029	3.2879	0.4267
Huaraz	0.8356	3.7762	0.2213
Moquegua	1.0445	4.9668	0.2103
Puno	0.5409	4.7621	0.1136
Pisco	0.1774	1.7067	0.1039
Chincha	0.1774	1.7067	0.1039
Pacasmayo	0.1774	2.4567	0.07221
Cajamarca	0.1774	2.4567	0.07221
Juliaca	0.4130	5.9715	0.06916
Resto del País	0.4553	6.6661	0.06830
Tumbes	0.2606	4.8838	0.05336
Paita	0.0410	5.9673	0.006871



### 3.3. Reducción de la estructura y rango de un componente fuertemente conexo

El análisis de la conexidad es importante en Economía Espacial porque uno de los problemas claves inherentes a todo espacio económico es el de la accesibilidad.

El cálculo de las potencias de un vértice nos ha permitido dotar a cada uno de ellos de un índice cardinal, representativo de su posición en el grafo. La relación de influencia que definimos tuvo como una de sus características esenciales ser reflexiva, propiedad que nos aseguraba la presencia de circuitos, condición necesaria para la aplicación del procedimiento de cálculo.

Esta hipótesis puede indudablemente ser cuestionada ya que puede argüirse con toda razón que el sistema espacial puede estar estructurado en forma tal que no posea circuitos.

Planteada así la situación, es necesario reformular la metodología hasta ahora utilizada y encontrar algún procedimiento de cálculo que permita obtener una jerarquía de los vértices de un grafo cuando la relación de influencia no sea reflexiva.

La llamada teoría de la reducción hace posible disponer de una estructura en la que cada componente sea fuertemente conexo. Autores como R. Lantner o J.R. Boudeville, se han servido de esta técnica

para el análisis de tablas de Insumo Producto nacionales o interregionales, habiendo demostrado que la determinación de los niveles o rangos de un grafo proporciona una clasificación ordinal de sus vértices en la cual uno o varios de ellos pueden pertenecer a un mismo rango.

### 3.3.1 Determinación de los rangos de la región norte

Con el fin de establecer una clasificación ordinal de las principales ciudades que conforman la Región Norte, a partir del 2-grafo de dominación  $G''$  hemos construido un grafo parcial de influencia asociada en base a las siguientes consideraciones:

- los vértices del grafo son las 22 ciudades,
- la existencia de un arco  $(i, j)$  significa que la ciudad  $i$  domina a la  $j$ , sujeta a la restricción:

$$a_{ij} \frac{a_{ij}}{\sum_j a_{ij}} \geq 3\%$$

Bajo estas condiciones la matriz booleana correspondiente al 2-grafo de dominación  $G''$  no tiene ningún circuito.

El método práctico para determinar los rangos o niveles de un grafo sin circuitos es muy simple.<sup>111/</sup> De la matriz booleana formamos una línea  $A_0$  en la que aparece la suma de las columnas de la matriz. Los ceros de  $A_0$  proporcionan los vértices que no se hallan precedidos de ningún otro -el 8: Chiclayo- que constituyen el rango  $R_0$ . A -

continuación se resta de  $A_0$  la fila 8 obteniendo así la línea  $A_1$  en la que el cero de la línea  $A_0$  ha sido reemplazada por un aspa (X). El cero o ceros que aparecen en  $A_1$  proporcionan los vértices que no se hallan precedidos por ningún otro cuando se ha eliminado el vértice 8; el vértice 1: Piura constituye el Rango  $R_1$ ; y así sucesivamente hasta agotar todos los vértices. Cuando el grafo posee un circuito existe una línea  $A_i$  en la que resulta imposible hacer aparecer un nuevo cero.

Los resultados se presentan en el Cuadro 21. Nuevamente Chiclayo ocupa el primer lugar en la Jerarquía, razón por la cual podemos afirmar que esta ciudad constituye a nivel Regional, un centro de primer orden. Además, si cada componente fuertemente conexo es representado por un polo, entonces el grafo asociado a la matriz booleana es un modelo reducido de la estructura inicial; en otras palabras, la notación de base nos hace ver que en la región solamente Chiclayo tiene un impacto generalizado sobre la economía existente, lo que hace posible que este centro influencie todas las actividades regionales.

Llama poderosamente la atención el caso de Chulucanas que está en el mismo rango que Trujillo. Una ciudad, influenciada por un número pequeño de polos, es en efecto, una ciudad poco dependiente vis-a-vis del conjunto del sistema. Pero esta independencia no constituye una ventaja sino que es más bien sinónimo de fragilidad: si los centros hacia los cuales, directa o indirectamente, Chulucanas emite su influencia son poco numerosos, hay más bien una dependencia creciente relativa a esos polos. La concentración de su influencia hacia Piura principalmente equivale más bien a una vulnerabilidad importante.

MATRIZ BOOLEANA DEL GRAFO DE DOMINACION: REGION NORTE

(Coeficientes  $\geq 3\%$ )

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
1. Piura		1	1	1	1	1	1						1						1				
2. Catacaos																							
3. Chulucanas																							
4. Paíta																							
5. Sullana		1			1		1	1															
6. Talara				1			1																
7. Tumbes																							
8. Chiclayo	1		1		1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1
9. Etén Puerto																							
10. Ferreñafe																							
11. Lambayeque										1		1											
12. Pimentel									1														
13. Trujillo					1	1	1				1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14. Chepén															1		1						
15. Guadalupe																							
16. Pacasmayo									1					1	1		1	1					
17. San Pedro															1								
18. Cajamarca														1	1								
19. Chimbote															1			1		1	1	1	
20. Casma																					1		
21. Huarney																							
22. Huaraz																				1	1		

## CUADRO 21

## DETERMINACION DE LOS RANGOS DE LA REGION NORTE

A <sub>0</sub>	1	2	2	3	3	4	5	0	3	2	2	3	2	4	7	2	4	5	2	3	4	3
A <sub>1</sub>	0	2	1	3	2	3	4	X	2	1	1	2	1	3	6	1	3	4	1	3	4	2
A <sub>2</sub>	X	1	0	2	1	2	3	X	2	1	1	2	0	3	6	1	3	3	1	3	4	2
A <sub>3</sub>	X	1	X	2	0	1	2	X	2	1	0	1	X	2	5	0	2	2	0	2	3	1
A <sub>4</sub>	X	0	X	1	X	0	1	X	1	0	X	0	X	1	3	X	1	0	X	1	2	0
A <sub>5</sub>	X	X	X	0	X	X	0	X	0	X	X	X	X	0	2	X	1	X	X	0	1	X
A <sub>6</sub>	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	1	X	0	X	X	X	0	X
A <sub>7</sub>	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	0	X	X	X	X	X	X	X

Rango 1 : Chiclayo

Rango 2 : Piura

Rango 3 : Trujillo, Chulucanas

Rango 4 : Sullana, Lambayeque, Pacasmayo, Chimbote

Rango 5 : Catacaos, Talara, Ferreñafe, Pimentel, Cajamarca, Huaraz

Rango 6 : Paita, Tumbes, Etén Puerto, Chepén, Casma

Rango 7 : San Pedro, Huanmey

Cajamarca y Huaraz, las dos únicas ciudades serranas relativamente importantes, ocupan el quinto rango de la Jerarquía y como vemos sólo anteceden centros de importancia reducida en la estructura regional.

En definitiva son ciudades costeñas las que influyen y dominan en la región norte: Chiclayo, Piura y Trujillo son centros de primer orden, seguidas por Sullana, Lambayeque, Pacasmayo y Chimbote. El resto son centros simplemente muy dominados, poco significativos industrialmente y más proveedores de materias primas y mano de obra barata, que permitirán un desarrollo capitalista -a su vez dependiente- de los centros dominantes.

### 3.3.2 Determinación de los rangos a nivel nacional

Las consideraciones teóricas y metodológicas son las mismas de antes.

La matriz booleana del grafo de dominación fue obtenida en función de datos contenidos en el Cuadro 12.

La estructuración por rangos es exactamente equivalente. Ver Cuadro 22.

Lima, es vanal decirlo, ocupa el primer lugar en la Jerarquía y es el único centro que tiene la característica de ser una base, y por tanto tener un impacto a nivel nacional.

MATRIZ BOOLEANA DEL GRAFO DE DOMINACION NACIONAL

(Coeficientes  $\geq 3\%$ )

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
1. Tumbes																								1
2. Talara	1		1																					
3. Paíta																								
4. Piura	1	1	1																					
5. Chiclayo	1	1	1	1		1	1			1														1
6. Pacasmayo							1																	1
7. Cajamarca																								
8. Trujillo				1	1	1	1		1	1	1													1
9. Huaraz																								
10. Chimbote									1		1													
11. Huacho									1															1
12. Pisco																								1
13. Chíncha												1	1	1										
14. Ica												1	1	1				1	1					
15. Cuzco																		1		1				1
16. Taçna																			1					
17. Puno																								
18. Juliaca																								
19. Moquegua														1	1	1	1	1	1	1				
20. Arequipa														1	1	1	1	1	1	1				
21. Huancayo														1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
22. Lima	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
23. Resto	1		1																					

GUADRO 22

DETERMINACION DE LOS RANGOS A NIVEL NACIONAL

A <sub>0</sub>	5	3	5	3	2	3	4	1	4	3	4	3	2	3	3	2	3	4	3	1	1	0	7
A <sub>1</sub>	4	2	4	2	1	2	3	0	3	2	3	2	1	2	2	1	2	3	2	0	0	X	7
A <sub>2</sub>	4	2	4	1	0	1	2	X	2	1	2	2	1	0	0	0	1	2	1	X	X	X	7
A <sub>3</sub>	3	1	3	0	X	0	1	X	2	0	1	1	0	X	X	X	0	1	0	X	X	X	6
A <sub>4</sub>	2	0	2	X	X	X	0	X	1	X	0	0	X	X	X	X	X	0	X	X	X	X	4
A <sub>5</sub>	1	X	1	X	X	X	X	X	0	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	1
A <sub>6</sub>	1	X	1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	0
A <sub>7</sub>	0	X	0	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Rango 1 : Lima

Rango 2 : Trujillo, Arequipa y Huancayo

Rango 3 : Chiclayo, Ica, Cuzco, Tacna

Rango 4 : Piura, Pacasmayo, Chimbote, Chincha, Puno, Moquegua

Rango 5 : Talara, Cajamarca, Huacho, Pisco, Juliaca

Rango 6 : Huaraz

Rango 7 : Resto



Si excluimos Lima, tres ciudades podrían ser consideradas como bases: Trujillo, Arequipa y Huancayo. Aparentemente habría una contradicción en el caso de Trujillo, ya que de acuerdo con resultados anteriores sería Chiclayo el polo más importante en la Región Norte. Esta contradicción puede ser explicada por el juego de influencias directas e indirectas. En efecto, a nivel regional analizamos una parte sin relación a la totalidad; Trujillo ocupa a nivel nacional una situación superior a Chiclayo porque posiblemente esté más integrada al resto de la República que Chiclayo. Otra fuente de distorsión lo constituye el material estadístico. Para el nivel regional los datos corresponden a un trimestre del año 1978, mientras que para el nacional el tráfico corresponde solamente a las horas punta del año 1979, razón por la cual los resultados deben ser comparados teniendo en cuenta esta situación.

Es sintomático que a nivel nacional, se reproduzca una situación semejante a la observada a escala regional: las ciudades serranas, con excepción de Huancayo y en menor grado Cuzco, sistemáticamente son centros muy dominados por el resto del sistema.

Debemos señalar, por último, que la no homogeneidad de los datos estadísticos utilizados -número de llamadas telefónicas entre centros- hace que sea inútil la utilización de las funciones de Grundy.

Es tentador investigar como una estructura jerárquica se modifica en el tiempo. Desafortunadamente hemos sido prisio-

neros de las fuentes estadísticas. No nos fue posible encontrar datos para años anteriores a 1978 aun habiendo contado con la generosidad y el buen deseo del personal del Departamento de Tráfico de ENTEL-PERU.

## C O N C L U S I O N E S

A medida que hemos ido avanzando en nuestro trabajo, la teoría espacial tradicional nos ha parecido limitada por la definición clásica de espacio en la que se apoya; la teoría de grafos constituye desde este punto de vista una herramienta que permite ir más allá del análisis habitual. Debemos señalar así mismo, el carácter no limitativo de las aplicaciones propuestas y sin duda alguna pensamos es posible ampliar su campo de aplicación y hacer progresar el análisis siempre y cuando logremos explotar mejor las múltiples posibilidades abiertas por la teoría.

La teoría de grafos nos autoriza a introducir desde el inicio una nueva concepción del espacio y nos permite además tratar en términos matemáticos una verdadera estructura espacial: las repercusiones de una modificación local de los flujos del sistema espacial completo pueden ser estudiadas puesto que los efectos directos o indirectos que les son inherentes se propagan por los vértices de un grafo.

La obtención de una jerarquía de lugares centrales se ha visto considerablemente facilitada por el recurso a la teoría de grafos. Matemáticamente hemos logrado tratar las relaciones espaciales, pero debemos señalarlo, la teoría utilizada no proporcionará elementos de juicio para la explicación causal de los fenómenos, subsistiendo de este

modo el problema del fundamento de los modelos.

El análisis realizado es estático (una estructura es tomada - en un momento dado del tiempo) o de estática comparativa (efectos ocasionados por la supresión de vértices o arcos o combinaciones de vértices y arcos) y no engloba las modificaciones que puedan sobrevenir a mediano o largo plazo en la estructura analizada. Esta característica origina que el uso de la teoría de grafos en el análisis espacial sea una herramienta privilegiada para el estudio del crecimiento regional, pues, la comparación de estructuras jerarquizadas en el tiempo - nos proporcionaría información relevante respecto a cómo una estructura se modifica en el tiempo, aumenta su influencia de un centro en una región dada, los centros se integran en un conjunto regional o bien como algunos polos están en regresión.

En términos aún más explícitos, si fuese necesario hacer una apreciación de conjunto sobre el análisis de los lugares centrales, - diríamos que aún contando tan sólo con la justificación que nos puede dar el sentido común, los modelos que hemos utilizado responden a los objetivos del análisis, a saber, el estudio de las relaciones funcionales espaciales entre grupos de ciudades completado por el estudio - de la posición relativa de cada elementos constitutivo de la estructura. Los modelos que hemos llamado "topológicos de jerarquía" nos permiten contar con herramientas de análisis espacial perfeccionadas y operacionales y deben contribuir en este sentido a desarrollos futuros, facilitados por los progresos recientes del análisis espacial en relación a los problemas de acondicionamiento de territorio.

Un modo de producción no sólo funciona en un espacio, produce un espacio estructurado de acuerdo con las exigencias técnicas y sociales de su reproducción. La localización de las actividades económicas es el momento determinante de esta estructuración. Si aceptamos que el desarrollo económico de una región es principalmente función de su estructura industrial y agregamos a esto la concentración de la población, las decisiones y los recursos productivos fundamentales en seis o siete ciudades de un país, vemos cómo las medidas de política económica (parques industriales, incentivos tributarios, servicios financieros, por ejemplo) pueden sólo agravar el desarrollo desigual de la economía, por ejemplo de la peruana, en el caso que hemos analizado. Si realmente se quieren evitar riesgos de graves rupturas sociales, la política económica debe integrar necesariamente objetivos espaciales, enunciando esta necesidad en términos de reconversión industrial, equilibrio población/empleo, equilibrio empleo/vivienda, equilibrio población/nutrición, por ejemplo.

Podría preguntarse, por último, ¿la teoría de grafos ha modificado sustancialmente la teoría del lugar central? No lo pensamos; a pesar de que las hipótesis de base de la teoría referentes a la naturaleza del espacio han sido modificadas, las hipótesis que conciernen al comportamiento de los consumidores no han sido tomadas en consideración, vía que creemos merece ser investigada por sí misma.

C I T A S

- 1/ Richardson H., 1973, pp: 3.
- 2/ Massam B., 1972, pp: 282 y siguientes.
- 3/ Los modelos intraurbanos, en particular el Empiric, Polimetric y - Herbert-Stevens, son discutidos por Massam.
- 4/ Berry B. y Norton F., 1970.
- 5/ Heckscher E., 1969.
- 6/ Ohlin B., 1971.
- 7/ El criterio único de la minimización de los gastos de transporte - sólo es cierto en el caso particular de una función de producción lineal y homogénea. Véase por ejemplo: Moses L., 1958.
- 8/ Weber A., 1929.
- 9/ Christaller W., 1966.
- 10/ Lösch A., 1957.
- 11/ Obras de síntesis y que marcan un hito en la introducción del factor espacial en la economía son:  
Isard W., 1956.  
Ponsard C., 1955.
- 12/ Tiebout Ch., 1968.
- 13/ El estudio de las actividades, así como el de la atracción urbana - ha sido efectuado por autores tales como:  
Piatier A., 1956  
Tinbergen J., 1968.
- 14/ Boventer E von, 1968.
- 15/ Richardson H., 1975, pp: 97 y siguientes.
- 16/ Christaller W., op.cit.
- 17/ Johnson E., 1970, en especial el Capítulo Cuatro.
- 18/ Christaller W., óp.cit., pp: 15 y 16.
- 19/ Christaller W., op.cit., pp: 19 y 45.
- 20/ Por definición, el hinterland es un lugar delimitado por la interacción de un centro.

- 21/ Derycke P., 1970, principalmente Capítulos I y II.
- 22/ Para una discusión más detallada sobre el punto, véase: Johnson E. 1970, pp: 137 y siguientes.
- 23/ Lösch A., 1957.
- 24/ En términos matemáticos, la "superficie de transporte" de los economistas es el espacio  $R^2$  o un subconjunto de  $R^2$  convexo, dotados de la métrica euclidiana. En algunos casos es el espacio  $R$ , con idénticas propiedades que el espacio  $R^2$  el que predomina: los economistas hablan entonces de una "línea de transporte".
- 25/ Observar que el triángulo hachurado de los Gráficos 5 y 6 tienen igual área; la denominación de los ejes ha sido invertida.
- 26/ El teorema de Pappus permite derivar rápidamente el volumen del cono de demanda. Véase: Leferber L., 1966 pp: 55 y siguientes.
- 27/ Observar que estamos utilizando las herramientas analíticas de la teoría de la competencia monopólica. Véase: Chamberlin E.
- 28/ Ponsard C., 1974, pp: 15 y siguientes.
- 29/ Citado por C.M. de Carvalho, 1975, pp: 182 y 183.
- 30/ Mills E. y Lav M., 1964.
- 31/ Beckman M., 1958.
- 32/ Consúltese al respecto:  
Nourse H., 1969, pp: 58 y siguientes.  
Richardson H., 1975, pp: 100 y siguientes.
- 33/ Parr J., 1969, pp: 239 y siguientes.
- 34/ Dacey M., 1966.
- 35/ Beckman y McPherson, 1970.
- 36/ Parr J., Denike K., y Mulligan G., 1975.
- 37/ Berry B., 1967.
- 38/ Los tres principales tipos de análisis factorial son:
- el análisis en factores comunes y específicos
  - el análisis en componentes principales
  - el análisis de correspondencias.

El primero es utilizado por los psicólogos para tratar de encontrar los "factores escondidos" que explicarían el comportamiento de las personas. Los dos últimos métodos se prestan mejor para el análisis económico: son algoritmos de reducción de datos alrededor de ciertos ejes privilegiados. Estos ejes factoriales constituyen los factores explicativos de la intensidad de las ligazones -en el

caso del análisis en componentes principales- o de la forma de las mismas -en el caso del análisis de correspondencia-. Véase, por ejemplo: Gauthier-Vilars, Bertier P. y Bouroche J., 1975. Guigou J. 1972, Tomo 2: Metodología y Análisis.

- 39/ Según Berry, un pueblo tiene en promedio 500 habitantes y una veintena de establecimientos de comercio y servicios; su área de mercado tendría en promedio entre 500 y 500 pobladores. Las ciudades albergan unos 1,500 habitantes y a una centena de establecimientos, poseyendo su área de mercado entre 2,500 y 3,000 habitantes en promedio.

Los centros urbanos pueden ser pequeños o regionales. Un centro pequeño cuenta con unos 6,000 habitantes, 400 establecimientos y su área de mercado es de unos 20,000 habitantes. Un centro regional posee unas 60,000 personas y su área de mercado 100,000 habitantes.

- 40/ La regla del "Rango-Tamaño" es una resultante de múltiples relaciones, pero, esta regla no dice nada de las interdependencias de los centros, los cuales son determinados sólo por su población. Aquí el espacio está ausente, la distancia entre los centros no es tomada en consideración.

En definitiva, la regla del Rango-Tamaño muestra una continuidad de tamaños de centros, en tanto, la teoría de los Lugares Centrales supone la existencia de una jerarquía por niveles. Beckman en el plano teórico y Berry en el empírico han demostrado que estos dos principios pueden coexistir.

- 41/ Lantner R. y Thisse J., 1974

- 42/ Becker G., 1977, Capítulo IX.

- 43/ Debreu G., 1973, Capítulo II.

- 44/ Richardson H., 1975, pp: 15.

- 45/ Un espacio matemático se define por un conjunto de elementos relacionados por una ley de pertenencia en la que se han definido relaciones. Las estructuras matemáticas así conceptuadas, pueden ser más o menos bien adaptadas a las estructuras económicas que se desean estudiar.

- 46/ Guigou J., 1972, Tomo 1, pp: 109.

- 47/ Moran P., 1966, pp: 119.

- 48/ La distorsión de las figuras geométricas pueden carecer de importancia si dicha distorsión es un homeomorfismo, o mejor aun, un difeomorfismo.

- 49/ Véase en particular:

Karlin S., 1962, pp: 362 y siguientes.

Kaufmann A. y Precigout A., 1970, Capítulos XII y XIII.



- 50/ Lo representamos así para no confundir el escalar 0 y el vector nulo  $\vec{0}$ .
- 51/  $R^+$  es el cuerpo de reales positivos incluido el infinito. Una separación puede ser infinita, así como, dos puntos diferentes pueden tener una separación nula.
- 52/ El axioma de no negatividad, no es necesario dado que trabajamos en  $R^+$ .
- 53/ Para que una separación sea una distancia debe verificarse que  $d(x,y)$  sea finita, y que  $d(x,y) = 0 \implies x = y$ .
- 54/ Schärliig A., 1969, pp: 36.
- 55/ Este resultado ha sido demostrado en el Capítulo I. Véase también: Nourse H., 1969, pp: 51 y siguientes.
- 56/ Isard W., 1956, Capítulo VI, propone operar substituciones entre los gastos de transporte y los precios de los inputs con el fin de optimizar los gastos de transporte y el beneficio optimal del empresario. La idea de introducir al transporte como input le permite considerar a éste al mismo nivel que la compra de materia prima.
- 57/ Se trata de una continuidad en sentido económico y no matemático.
- 58/ Un espacio es convexo si:  $x_1, x_2 \in E \implies \forall t \in [0,1]$  se tendrá  $tx_1 + (1-t)x_2 \in E$ .
- 59/ Prevot M., 1975, pp: 8 y siguientes.
- 60/ Schärliig A., 1969, pp: 36 y 37.
- 61/ Para la solución del problema generalizado de Weber, se ha propuesto un método de solución por aproximaciones sucesivas, la cual es posible sólo porque la optimización está dirigida sobre los gastos de transporte.  
Kuhn H y Kuenne R., 1962.
- 62/ Moran P., 1966, pp: 17, dice: "La noción de espacio abstracto fue elaborada por el matemático M. Frechet, partiendo de la noción de clase abstracta definida como un conjunto de elementos de la misma naturaleza; esta clase abstracta es un espacio abstracto métrico cuando puede ser definida una distancia. Cuando no es posible dar un sentido a los axiomas que definen una distancia se define una vecindad, teniéndose entonces un espacio abstracto no métrico".
- 63/ Boudeville J., 1966, pp: 2.
- 64/ Claval P., 1970
- 65/ Fonseca E., 1976, pp: 92.
- 66/ George P., 1969, pp: 27.

- 67/ Lachene R., 1965, pp: 17 y 39.
- 68/ Moran P., 1966, pp: 21.
- 69/ Perroux F., 1954 y también 1964, pp: 139
- 70/ Ponsard C., 1973.
- 71/ Villey D., 1957 (citado por P. Moran)
- 72/ Guigou J., 1972, Tomo 1, pp: 125 y siguientes.
- 73/ Alonso W., 1964.
- 74/ Ortiz A., 1977 b.
- 75/ Ponsard C., 1973.
- 76/ Ciertos autores los llaman también "Redes" o "Gráficas".
- 77/ Huriot J. y Perreur J., 1973.  
Wesolowsky G. y Love R., 1971.
- 78/ La distancia rectilínea también es conocida con el nombre de -  
"Distancia Rectangular" o "Distancia Manhattan".
- 79/ Huriot J. y Perreur J., 1973, pp: 642.
- 80/ Perreur J. y Thisse J., 1973 a, pp: 1 y siguientes.
- 81/ Perreur J. y Thisse J., 1973 b.
- 82/ Ponsard C., 1966.
- 83/ Lantner R., 1978.
- 84/ En nuestra opinión los textos que nos parecen indispensables para  
lograr un buen manejo de la teoría de grafos son:  
Berge C., 1963 y 1970  
Kaufmann A., 1971 y 1976  
Pellet R., 1966  
Roy B., 1965 y 1968
- 85/ Huriot J., 1974, pp: 84 y siguientes.
- 86/ Ponsard C., 1968, pp: 127.
- 87/ Harary F., Norman R., y Cartwright D., 1965.
- 88/ Bavelas A., 1950, pp: 726 y siguientes.
- 89/ Berge C., 1963.
- 90/ Lantner R., 1974, pp: 191 á 199.
- 91/ Rouget B., 1972, pp: 94
- 92/ Junta del Acuerdo de Cartagena, 1979, pp: 182 y 183.
- 93/ Lantner R., 1974, pp: 16-18.
- 94/ Bavelas A., 1950.
- 95/ Berge C., 1963, Capítulo XIV.

- 96/ Lantner R., 1974, pp: 191.
- 97/ Isard W., 1973, Capítulo IX.
- 98/ Boudeville J., 1977, pp: 18 y siguientes.
- 99/ Las componentes fuertemente conexas de un grafo pueden ser encontradas sin dificultad aplicando un algoritmo debido a B. Roy. - Para la construcción de una componente fuertemente conexa que con tenga un vértice  $x$  cualquiera de un grafo  $G = (X, \Gamma)$  se procede de la siguiente manera:
- a) Marcar  $\pm$  el vértice  $x$ ;
  - b) Marcar  $+$  todo siguiente del vértice marcado  $+$  ;
  - c) Marcar  $-$  todo precedente del vértice marcado  $-$
- El conjunto de vértices marcados  $\pm$  constituye la componente buscada.
- 100/ Lantner R., 1974, pp: 197.
- 101/ Boudeville J., 1977, pp: 20
- 102/ Para una discusión en términos económicos sobre la conectividad y su impacto en una estructura económica, puede consultarse:  
Ortiz A., 1977 a.
- 103/ Boudeville J., 1977, pp: 27.
- 104/ Berry B. y Garrison W., 1968.
- 105/ Richardson H., 1973, pp: 174.
- 106/ Nystuen J. y Dacey M., 1961, pp: 29 y siguientes.
- 107/ Lheritier P., 1970, pp: 115, y siguientes.
- 108/ Nystuen J. y Dacey M. 1961, pp: 37.
- 109/ Para un tratamiento sencillo y algunos ejemplos de aplicación de las funciones de Grundy, véase:  
Kaufmann A., 1971, pp: 222
- 110/ Véanse por ejemplo, estudios de Christaller, Nystuen y Dacey y el de Lheritier.
- 111/ Kaufmann A., 1971, pp: 223 y siguientes.

B I B L I O G R A F I A

- ALONSO, W.  
1964                      Location and Land Use: Towards a - -  
General Theory of Land Rent. Har- -  
vard University Press, Cambridge, -  
Massachusetts.
- BAVELAS, A.  
1950                      "Communications Patterns in Task Orien-  
ted Groups". J. Acoust. Soc. Amer.  
N° 22, págs. 725-730.
- BECKER, G.  
1977                      Teoría Económica. Fondo de Cultura E  
conómica, México.
- BECKMAN, M.  
1958                      "City Hierarchies and the Distribu---  
tion of City Size". Economic Develop-  
ment and Cultural Change. Vol. 6, págs.  
243-248.
- BECKMAN, M. y McPHERSON  
1970                      "City Size Distribution in a Central  
Place Hierarchy: An Alternative Appro-  
ach". Journal of Regional Science. -  
Vol. 10, N° 1, págs. 25-33.
- BERGE, C.  
1963                      Théorie des Graphes et ses Applica---  
tions. Dunod, París.
- BERGE, C.  
1970                      Graphes et Hypergraphes. Dunod, París.
- BERRY, B.  
1967                      Geographic and Market Centers and -  
Retail Distribution. Prentice Hall,  
BERRY, B. y GARRISON, W.  
1968                      "Últimos Desarrollos de la Teoría del  
Central Place". En B. Secchi (ed), -  
Análisis de las Estructuras Territo--  
riales. Gustavo Gili, Barcelona.
- BERRY, B. y HORTON, P.  
1970                      Geographic Perspectives on Urban Sys-  
tems. Englewood Cliffs, Prentice Hall.
- BERTIER, P. y BOUROCHE, J.  
1975                      Analyse des Données Multidimensionnel-  
les. Presses Universitaires de France  
París.
- BOUDEVILLE, J.  
1966                      Problems of Regional Economic Planning.  
Edinburgh University Press.

- BOUDEVILLE, J.  
1977 "Digraphe, Composantes Fortes et Condensation Structurale des Régions - Françaises". Cahiers du Centre Economie, Espace, Environnement. N° 1, - págs. 18-30.
- BOVENTER E von  
1968 "La Teoría de la Organizac-ón Espacial como Fundamento de la Planificación Regional". En B. Secchi (ed), - Análisis de las Estructuras Territoriales. Gustavo Gili, Barcelona.
- CARVALHO, C.M. de  
1975 A evolucao das Teorias Clássicas da Economia Espacial: suas Contribucoes para a Ana'lise de Concentraçao das Actividades. CEDEPLAR, Monografía - N° 10, Belo Horizonte.
- CLAVAL, P.  
1970 "L'Espace en Géographie Humaine" - Le Géographe Canadien. Vol. 14, N° 2.
- CHRISTALLER, W.  
1966 Central Place in Southern Germany. Englewood Cliffs.
- CHAMBERLIN, E.  
Teoría de la Competencia Monopólica. Fondo de Cultura Económica, México.
- DACEY, M.  
1966 "Population of Places in a Central - Place Hierarchy". Journal of Regional Science. Vol 6, N° 1, págs. 27-33.
- DEBREU, G.  
1973 Teoría del Valor: Un Análisis Axiomático del Equilibrio Económico. Bosch, Barcelona.
- DERYCKE, P.  
1970 L'Economie Urbaine. Presses Universitaires de France, París.
- FONSECA, E.  
1976 "Reexamen del Concepto de Espacio y su Aplicación a la Planificación en Costa Rica". Revista Interamericana de Planificación. Vol. 10, N° 39.
- GEORGE, P.  
1969 Sociología y Geografía. Península.
- GUIGOU, J.  
1972 Théorie Economique et Transformation de l'Espace Agricole. Gauthier-Villars, París. 2 Tomos.
- HARARY, F. et.al.  
1965 Structural Models. An Introduction to the Theory of Directed Graphs. Wiley.

- HECKSCHER, E.  
1949  
"The Effect of Foreign Trade on the Distribution of Income". En Ellis H.S. Metzler (ed), Readings in the Theory of International Trade. Blakinston, Filadelfia.
- HURIOT, J.  
1974  
Dépendance et Hiérarchie dans une Structure Interindustrielle. Sirey, Paris.
- HURIOT, J. y PERREUR, J.  
1973  
"Modèles de localisation et Distance Rectilinéaire". Revue d'Economie Politique. Vol. 83, N° 4, págs. 640-662.
- ISARD, W.  
1956  
Location and Space-Economy. The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts.
- ISARD, W.  
1973  
Métodos de Análisis Regional. Ariel, Barcelona.
- JOHNSON, E.  
1970  
The Organization of Space in Developing Countries. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.
- JUNTA DEL ACUERDO DE CARTAGENA  
1979  
Indicadores Socio-económicos de la Sub-región Andina. Mimeografiado, Lima.
- KARLIN, S.  
1962  
Mathematical Methods and Theory in Games Programming and Economics. Addison Wesley, Palo Alto. Tomo I.
- KAUFMANN, A. y PREGIGOUT, A.  
1970  
Curso de Matemáticas Nuevas: Actualización de Conocimientos para Ingenieros y Economistas. CECSA, Barcelona.
- KAUFMANN, A.  
1971  
Introducción a la Combinatoria. CECSA, Barcelona.
- KAUFMANN, A.  
1976  
Puntos y Flechas .... Teoría de Grafos. Marcombo, Barcelona.
- KUHN, H. y KUENNE, R.  
1962  
"An Efficient Algorithm for the Numerical Solution of the Generalized Weber Problem in Spatial Economics". Journal of Regional Science. Vol. 4, N° 2, págs. 21-33.
- LACHENE, R.  
1965  
"Contribution à l'Analyse de l'Espace Economique". Metra, Série Especial, N° 6.

- LANTNER, R.  
1974 Théorie de la Dominance Economique. Dunod, Paris.
- LANTNER, R. y THISSE, J.  
1974 "Une Revision des Conditions d'Equilibre de la Firme: k'Intégration du Facteur Spatial". Revue d'Economie - Politique. Vol. 84, N° 1, págs. 108-113.
- LANTNER, R.  
1978 L'Apport de la Théorie des Graphes - aux Représentations de l'Espace Economique, Institut de Mathématiques Economiques. Documento de Trabajo N° 27, Universidad de Dijon.
- LEFERBER, L.  
1966 Location and Regional Planning. Center of Planning and Economic Research, Atenas.
- LHERITIER, P.  
1970 La Théorie des Places Centrales. Tesis, D.E.P. (inédita), Universidad de Dijon.
- LOSCH, A.  
1954 Teoría Económica Espacial. El Ateneo Buenos Aires.
- MASSAM, B.  
1972 "Construction des Modèles Urbains". - Metra Vol. 11, N° 2 págs. 279-282.
- MILLS, E. y LAV, M.  
1964 "A Model of Market with Free Entry". Journal of Political Economy, Vol. 72. págs. 278-288.
- MORAN, P.  
1966 L'Analysis Spatial en Science Economique. Cujas, Paris.
- MOSES, L.  
1958 "Location and Theory of Production". Quarterly Journal of Economics. Vol. 73, N° 2, págs. 259-272.
- NOURSE, H.  
1969 Economía Regional. Oikos-Tau, Barcelona.
- NYSTUEN, J. y DACEY, M.  
1961 "A Graph Theory Interpretation of Nodal Regions". Papers and Proceedings of the Regional Science Association. Vol. 7, págs. 29-43.
- OHLIN, B.  
1971 Comercio Regional e Interregional. Oikos-Tau, Barcelona.

- ORTIZ, A.  
1977 a  
Interdependencia, Dependencia y Jerarquía en la Estructura Interindustrial Peruana. Instituto de Investigaciones Económicas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima.
- ORTIZ, A.  
1977 b  
Espacios Económicos y Estructuras Matemáticas. Instituto de Investigaciones Económicas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima.
- PARR, J.  
1969  
"City Hierarchies and the Distribution of City Size a Reconsideration of Beckman's Contribution". Journal of Regional Science. Vol. 9, N° 2, págs. 27-33
- PARR, J. et.al.  
1975  
"City Size Models and the Economic Base". Journal of Regional Science. Vol. 15. N° 1, págs. 1-8.
- PELLET, R.  
1966  
Initiation à la Théorie des Graphes. Enterprise Moderne d'Edition, Paris.
- PERREUR, J. y THISSE, J.  
1974 a  
"Central Metrics and Optimal Location" Journal of Regional Science. Vo.. 14, N° 3, págs. 411-421.
- PERREUR, J. y THISSE, J.  
1974 b  
"Une Application de la Métrique Circum Radiale à l'Etude des Déplacements Urbains". Revue Economique. Vol. 25 N° 2, págs. 298-315.
- PERROUX, F.  
1954  
"Les Espaces Economiques". Economie Appliquée. Págs. 225-244.
- PERROUX, F.  
1964  
La Economía del Siglo XX. Ariel, Barcelona.
- PIATIER, A.  
1956  
"L'Attraction commerciale des Villes. Une Nouvelle Méthode de Mesure: l'enquête d'essai menée dans le Loir-et-Cher". Revue Juridique et Economique du Sud-Quest. N° 4, págs. 567-601.
- PONSARD, C.  
1955  
Economie et Espace: Essai d'intégration du Facteur Spatial dans l'Analyse Economique. Sedes, Paris.
- PONSARD, C.  
1966  
"Une Application de la Théorie des Graphes à l'analyse de l'Espace Economique: un modèle de localisation optimale de l'unité de production dans -



- une Structure De Concurrence". En -  
 "Travaux sur l'Espace Economique", -  
Techniques Economiques Modernes, N° 4  
 págs. 1-21.
- PONSARD, C.  
 1968  
 "Les modèles de Hiérarchisation et la  
 Pseudo-fonction de Grundy". Rivista  
 Internazionale di Scienze Economiche  
 e Commerciali. Vol. 15, N° 2, págs.  
 122-131.
- PONSARD, C.  
 1973  
 Curso de "Mathématiques Appliquées à  
 l'Economie" Universidad de Dijon, -  
 1973-1974.
- PONSARD, C.  
 1974  
Une Revision de la Théorie des Aires  
 de Marche. Sirey, Paris.
- PREVOT, M.  
 1975  
Convexite. Institut de Mathématiques  
 Economiques, Documento de Trabajo N° 6  
 Universidad de Dijon.
- RICHARDSON, H.  
 1973  
Economía Regional: Teoría de la Locali-  
 zación, Estructuras Urbanas y Creci-  
 miento Regional. Vicens-Vives, Barce-  
 lona.
- RICHARDSON, H.  
 1975  
Elementos de Economía Regional. Alian-  
 za Universidad, Madrid.
- ROUGET, B.  
 1972  
Modèles de Gravitation et Théorie des  
 Graphes.
- ROY, B.  
 1965  
 "Cheminement et Connexite dans les -  
 Graphes. Application aux Problèmes -  
 d'Ordonnancement" Metra. Série Espe-  
 cial, N° 1.
- ROY, B.  
 1968  
Algèbre Moderne et Théorie des Graphes  
 Dunod, Paris, 2 Tomos.
- SCHARLIG, A.  
 1969  
 "Localisation Optimale et Théorie des  
 Graphes". Cahiers Vilfredo Pareto, N°  
 19, Droz, Ginebra.
- TIEBOUT, Ch.  
 1968  
 "Nuevo Examen del Análisis de la Base  
 Económica". En B. Secchi (ed), Análi-  
 sis de las Estructuras Territoriales.  
 Gustavo Gili, Barcelona.

TINBERGEN, J.  
1968

"La Dispersión Espacial de la Producción: Una Hipótesis". En B. Secchi - (ed). Análisis de las Estructuras Territoriales. Gustavo Gili, Barcelona.

VILLEY, D.  
1957

Lecons de Démographie. Montchrestien, Paris.

WESOLOWSKY, G. y LOVE, R.  
1971

"The Optimal Location of New Facilities Using Rectangular Distances". Operations Research, Vol. 19, N° 1, págs. 640-662.

WEBER, A.  
1929

Alfred Weber's Theory of Location of Industries. Traducción, introducción y notas de C.J. Friedrich. University of Chicago Press.