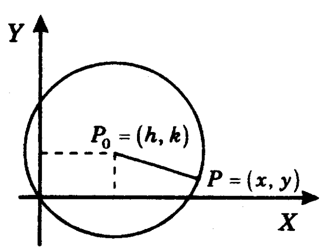
Capítulo 1

El Círculo

1.1. DEFINICION. Sea $P_0 = (h, k)$ un punto del plano euclideano $\mathbb{R}^2$ y r un número real > 0. Se llama *círculo C de centro P_0 y radio r*, al conjunto de todos los puntos del plano cuya distancia de P_0 es r. Así,

$$C = C(P_0; r) = \left\{P \in \mathbb{R}^2 \ / \ |P - P_0| = r\right\}$$



1.2 ECUACION DEL CIRCULO EN COORDENADAS CARTESIANAS

TEOREMA. La ecuación del círculo C de centro $P_0 = (h, k)$ y radio r en coordenadas cartesianas es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \tag{1.2.1}$$

Es decir, $(x, y) \in C \Leftrightarrow (x, y)$ satisface $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

PRUEBA. Sea $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Entonces en virtud de la definición 1.1 se tiene

$$P \in C \Leftrightarrow |P - P_0| = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$
$$\Leftrightarrow (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Nota. Desarrollando los cuadrados del primer miembro de la ecuación (1.2.1) se observa que C es la gráfica de la ecuación,

$$x^2 + y^2 - 2hk - 2ky + \left(h^2 + k^2 - r^2\right) = 0,$$

que es de la forma $\quad x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$

donde $\quad D = -2h, \quad E = -2k, \quad F = h^2 + k^2 - r^2$

De manera recíproca, podemos establecer lo siguiente

PROPOSICION. Sea C la gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Es decir, $\quad C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0\right\}$

Llamemos $\Delta = D^2 + E^2 - 4F$. Se tiene entonces que:

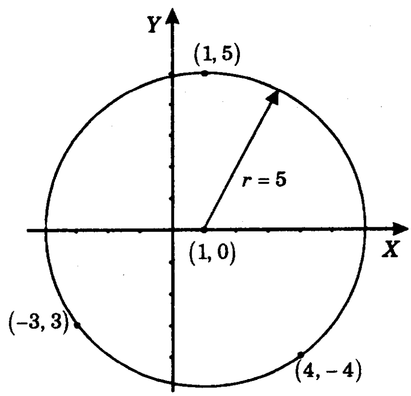
1) Si $\Delta > 0$, C es un círculo de centro $P_0 = \left(-\dfrac{D}{2}, -\dfrac{E}{2}\right)$ y radio $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{\Delta}$

2) Si $\Delta = 0$, C consiste solamente del punto $P_0 = \left(-\dfrac{D}{2}, -\dfrac{E}{2}\right)$.

3) Si $\Delta < 0$, C no posee puntos.

1.3 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Hallar la ecuación del círculo que pasa por los puntos $(1, 5)$, $(4, -4)$, $(-3, 3)$



SOLUCION. Sea $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ la ecuación del círculo. Puesto que los puntos dados pertenecen al círculo, ellos satisfacen esta ecuación. Luego se tiene

$$\begin{aligned} 26 + D + 5E + F &= 0 \\ 32 + 4D + 4E + F &= 0 \\ 18 - 3D + 3E + F &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$D = -2, \quad E = 0, \quad F = -24 .$$

RESPUESTA. $x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0 \quad$ o $\quad (x - 1)^2 + y^2 = 5^2$

PROBLEMA 2. Hallar la ecuación del círculo circunscrito al triángulo cuyos lados están sobre las rectas

$$L_1:\ x-2y+11=0$$
$$L_2:\ 3x-y-2=0$$
$$L_3:\ 7x+y+2=0$$

SOLUCION. Hallaremos los puntos P, Q y R en los que las rectas se intersecan y luego determinaremos el círculo que pasa por ellos, como el problema anterior.

P = *intersección de* L_1 *y* L_2. Resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} x-2y+11&=0\\ 3x-y-2&=0 \end{aligned}$$

y obtenemos: $x=3$, $y=7$, o sea $P=(3,7)$

Q = *Intersección de* L_2 *y* L_3. Resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} 3x-y-2&=0\\ 7x+y+2&=0 \end{aligned}$$

y obtenemos: $x=0$, $y=-2$, o sea $Q=(0,-2)$

R = *intersección de* L_1 *y* L_3. Resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} x-2y+11&=0\\ 7x+y+2&=0 \end{aligned}$$

y obtenemos: $x=-1$, $y=5$, o sea $R=(-1,5)$

Sea $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ la ecuación del círculo que pasa por P, Q y R. Puesto que tales puntos se encuentranm en el círculo se tendrá

$$\begin{aligned} 58+3D+7E+F&=0\\ 4-2E+F&=0\\ 26-D+5E+F&=0 \end{aligned}$$

y resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene $D=-6$, $E=-4$, $F=-12$

RESPUESTA. $x^2+y^2-6x-4y-12=0$ o $(x-3)^2+(y-2)^2=5$

PROBLEMA 3. Probar que si $\Delta=D^2+E^2-4F>0$, entonces la gráfica de la ecuación $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ es un círculo de centro $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ y radio $\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}$

SOLUCION. En la ecuación $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

completamos cuadrados $\left(x^2+Dx+\frac{D^2}{4}\right)+\left(y^2+Ey+\frac{E^2}{4}\right)-\frac{D^2}{4}-\frac{E^2}{4}+F=0$

y obtenemos $$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(D^2+E^2-4F\right) = \frac{1}{4}\Delta = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^2,$$

que es la ecuación del círculo de centro $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ y radio $\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}>0$

PROBLEMA 4. Hallar una ecuación de la cuerda común de los dos círculos $x^2+y^2-6y-12=0$ y $x^2+y^2+8x-2y+8=0$.

SOLUCION. Si (x_1, y_1) es un punto de intersección se tiene

$$x_1^2+y_1^2+4x_1-6y_1-12=0 \qquad (1)$$

$$x_1^2+y_1^2+8x_1-2y_1+\ 8=0 \qquad (2)$$

y restando miembro a miembro obtenemos

$$\begin{aligned} -4x_1-4y_1-20&=0 \\ x_1+\ \ y_1+\ 5&=0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Sustituyendo y_1 de (3) en (1) obtenemos la ecuación $2x_1^2+20x_1+43=0$

cuyas raíces son $x_1=-5\pm\frac{\sqrt{14}}{2}$

Luego los puntos de intersección son $\left(-5+\frac{\sqrt{14}}{2}, -\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$, $\left(-5-\frac{\sqrt{14}}{2}, \frac{\sqrt{14}}{2}\right)$. Ahora podemos calcular la ecuación de la recta conociendo dos puntos por los cuales pasa, o también de una manera más breve observando que los puntos de intersección según (3) satisfacen la ecuación de la recta $x+y+5=0$. Luego en cualquier caso, obtenemos $x+y+5=0$.

PROBLEMA 5. Encontrar una ecuación de la recta que es tangente al círculo $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ en el punto $(-1,1)$.

SOLUCION. La ecuación del círculo es $(x-2)^2+(y+3)^2=25$, y por lo tanto $(2,-3)$ es el centro del círculo.

La pendiente del segmento $(2,-3),(-1,1)$ es $\quad m = \dfrac{1-(-3)}{-1-(2)} = \dfrac{4}{-3} = -\dfrac{4}{3}$

La recta tangente al círculo en $(-1,1)$ es perpendicular al segmento que hemos indicado. Luego su pendiente es $3/4$.

Finalmente $\dfrac{y-1}{x-(-1)}=\dfrac{3}{4}$ nos da $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{7}{4}$, que es la ecuación buscada.

PROBLEMA 6. Hallar una ecuación de cada una de las rectas que tienen pendiente $-4/3$ y son tangentes al círculo:

$$x^2+y^2+2x-8y-8=0$$

SOLUCION. Determinaremos los puntos en los que las rectas son tangentes al círculo. De $(x+1)^2+(y-4)^2=5^2$ vemos que $(-1,4)$ es el centro del círculo. La ecuación del diámetro perpendicular a las rectas es

$$\frac{y-4}{x+1}=\frac{3}{4} \quad \text{o} \quad y=\frac{3}{4}x+\frac{19}{4}$$

Sustituyendo en la ecuación del círculo para hallar las coordenadas de los puntos de tangencia obtenemos $x^2-2x-15=0$, cuyas raíces son $x=-3,5$.
Las ordenadas de los puntos de tangencia son $y=\frac{5}{2}$, $\frac{17}{2}$,
y las ecuaciones buscadas

$$\frac{y-\frac{5}{2}}{x+3}=-\frac{4}{3} \quad \text{o} \quad 8x+6y+9=0$$

$$\frac{y-\frac{17}{2}}{x-5}=-\frac{4}{3} \quad \text{o} \quad 8x+6y-91=0$$

PROBLEMA 7. Probar que si la recta $y=mx+b$ es tangente al círculo $x^2+y^2=r^2$, entonces se cumple la ecuación $b^2=\left(1+m^2\right)r^2$.

SOLUCION. Sea (x,y) el punto en el que la recta es tangente al círculo. Puesto que (x,y) se encuentra tanto en la recta como en el círculo se tienen las relaciones:

$$y_1=mx_1+b \qquad \textbf{(1)}$$

$$x_1^2+y_1^2=r^2 \qquad \textbf{(2)}$$

La pendiente del segmento que une $(0,0)$ con (x_1,y_1) es $\frac{y_1}{x_1}$. Y como la recta es perpendicular a dicho segmento su pendiente m será

$$m=\frac{-x_1}{y_1} \qquad \textbf{(3)}$$

De (3) se tiene $x_1=-my_1$ y sustituyendo en (1) y (2) nos da

$$y_1=-m^2y_1+b \qquad y_1\left(1+m^2\right)=b$$

$$(-my_1)^2+y_1^2=r^2 \qquad y_1^2\left(1+m^2\right)=r^2$$

Finalmente, eliminamos y_1 y obtenemos $b^2=\left(1+m^2\right)r^2$

1.4 PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1. Determinar si la gráfica de las siguientes ecuaciones es un círculo, un punto o no posee puntos en el plano.

a) $x^2+y^2-2x+6y+9=0$

b) $x^2+y^2+2x-4y+5=0$

c) $x^2+y^2+6x+2y+6=0$

d) $x^2+y^2-4x+4y+9=0$

e) $x^2+y^2+8x-8y+7=0$

f) $x^2+y^2-2ax+2ay+4a^2=0 \quad (a\in\mathbb{R})$

PROBLEMA 2. Hallar la ecuación del círculo que pasa por los puntos $(4a,3a)$, $(a,-6a)$, $(a,4a)$.

PROBLEMA 3. Hallar la ecuación del círculo que pasa por los puntos $(0,0)$, (a,b), $(c,0)$.

PROBLEMA 4. Hallar la ecuación de la recta tangente al círculo $x^2+y^2+2x+4y+20=0$ en el punto $(2,2)$.

PROBLEMA 5. Hallar la ecuación de la cuerda común de los dos círculos $x^2+y^2+2x-4y-3=0$ y $x^2+y^2-4x+2y-7=0$.

PROBLEMA 6. Suponiendo que los círculos $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ y $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ tienen una cuerda común, probar que ésta tiene por ecuación

$$(d-D)x+(e-E)y+(f-F)=0 \ .$$

RESPUESTAS.

1. **a)** Un círculo **b)** Un punto **c)** Un círculo
d) No posee puntos **e)** Un círculo **f)** No posee puntos

2. $(x-a)^2+(y+a)^2=25a^2$

3. $\left(\frac{c}{2},\frac{a^2+b^2-ac}{2b}\right)$

4. $y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{2}$

5. $x-y+\frac{2}{3}=0$