# Capítulo 3

# ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON DOS VARIABLES

En este capítulo presentaremos en primer término, algunos lugares geométricos definidos por propiedades específicas y que representan gráficas de ecuaciones de segundo grado con dos variables.

En la segunda parte veremos como las ecuaciones de los lugares geométricos tratados anteriormente pueden ser deducidas partiendo de una propiedad común a todas ellas. Esta propiedad común permitirá establecer la llamada definición general de las cónicas.

Al final del capítulo daremos razones que justifican la denominación de secciones cónicas a los lugares geométricos de ecuaciones de segundo grado con dos variables.

## 3.1 LA CIRCUNFERENCIA

Definiremos a una *circunferencia* como el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo denominado *centro* de la circunferencia.

La distancia de cualquier punto de la circunferencia al centro se llama *radio*.

Si $P\ (x, y)$ es un punto genérico de una circunferencia de centro $C\ (h, k)$ y radio $r$, entonces por la definición de circunferencia se tiene: $d\ (P, C) = r$, es decir:

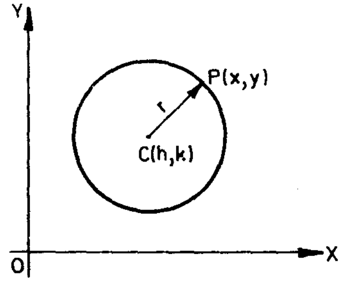



Fig. 3.1

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r\,,\quad \text{ó}\quad (x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \qquad (3.1)$$

Si la circunferencia tiene su centro en el origen de coordenadas, entonces $h = 0$ y $k = 0$; y la ecuación (3.1) se reduce a la ecuación: $x^2 + y^2 = r^2$ .

**Ejemplo 3.1.** La ecuación de la circunferencia con centro en (–1/2, 4) y radio $\sqrt{3}$ es:

$$(x + 1/2)^2 + (y - 4)^2 = 3$$

Si desarrollamos y ordenamos la ecuación (3.1), obtenemos la ecuación:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

Ecuación que tiene la forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (3.2)$$

y se denomina ecuación general de una circunferencia.

Luego, toda ecuación de una circunferencia será de la forma de la ecuación (3.2). Recíprocamente, dada una ecuación de la forma (3.2), podemos completar cuadrados en ella y escribirla bajo la forma:

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\,(D^2 + E^2 - 4F)$$

Comparando esta ecuación con la ecuación (3.1): $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ , observamos que toda ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ representará una circunferencia de centro

$$\left(h = -\frac{D}{2} \quad , k = -\frac{E}{2}\right)$$

y radio

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} \quad ,$$

siempre que se cumpla la condición $D^2 + E^2 - 4F > 0$

Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$, entonces $r = 0$, y la circunferencia se reduce a un punto, el centro.

Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, entonces $r$ es imaginario y se dice que la ecuación representa a una circunferencia imaginaria.

**Ejemplo 3.2.** Determinar el centro y el radio de la circunferencia de ecuación:

$$4x^2 + 4y^2 - 12x + 16y + 9 = 0$$

Llevemos la ecuación dada a la forma (3.1). Dividiendo entre 4:

$$x^2 + y^2 - 3x + 4y + \frac{9}{4} = 0 \quad ,$$

completando cuadrados:

$$(x - 3/2)^2 - \frac{9}{4} + (y + 2)^2 - 4 + \frac{9}{4} = 0$$

simplificando:

$$(x - 3/2)^2 + (y + 2)^2 = 4.$$

Por tanto:

$$C\ (3/2, -2) \quad \text{y} \quad r = 2$$

La ecuación ordinaria (3.1) o la ecuación general (3.2) de una circunferencia contienen 3 constantes arbitrarias, por tanto es necesario, en general, imponer 3 condiciones geométricas para definir su ecuación.

**Ejemplo 3.3.** Determinar la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A$ (4, 6), $B$ (–2, –2) y $C$ (–4, 2)

**Solución 1.** Los 3 puntos dados siempre que no estén sobre una misma recta, determinan 3 condiciones geométricas que permiten definir a la circunferencia. Reemplazando las coordenadas de cada punto en la ecuación general de una circunferencia, $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, se obtienen 3 ecuaciones con 3 incógnitas o constantes arbitrarias $D$, $E$ y $F$:

$$4D + 6E + F = -52$$

$$-2D - 2E + F = -8$$

$$-4D + 2E + F = -20$$

Resolviendo el sistema se encuentran los valores: $D = -2$, $E = -4$, $F = -20$. La ecuación de la circunferencia es: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$.

Esta primera solución se ha determinado siguiendo un método estríctamente algebraico.

**Solución 2:** Dados 3 puntos en un plano se puede trazar la circunferencia que pasa por ellos determinando el centro de la circunferencia, que se encuentra en la intersección de las mediatrices de los segmentos determinados por los 3 puntos dados. El radio es igual a la longitud del segmento que une al centro con uno cualquiera de los puntos dados.

Así, la pendiente de la recta que pasa por $C$ y $A$ es $1/2$ y el punto medio del segmento $\overline{CA}$ es $(0, 4)$. La pendiente de la mediatriz es $-2$ y $(0, 4)$ un punto de paso, luego: $y + 2x - 4 = 0$ es su ecuación.

Análogamente podemos determinar que la ecuación de la mediatriz del segmento $\overline{CD}$ es: $2y - x - 3 = 0$.

El punto de intersección de las mediatrices nos determina el centro $O$ de la circunferencia ($h = 1$, $k = 2$). El radio $r = d\ (A, O) = 5$, y aplicando (3.1), la ecuación buscada es:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25 \ .$$

**Ejemplo 3.4.** Una circunferencia de radio $r = 1$ es tangente a las rectas $3x - 4y = 0$ y $4x - 3y = 0$. Hallar su ecuación sabiendo que su centro está en el primer cuadrante.

Usando los datos del problema se presenta un croquis en la figura 3.2. Hay 4 circunferencias tangentes a las rectas dadas, pero la que tiene su centro en el primer cuadrante será aquella cuyo centro esté sobre la bisectriz del ángulo agudo formado por las tangentes. La ecuación de esta bisectriz es:

$$-\ \frac{4x - 3y}{-\sqrt{25}} = \frac{3x - 4y}{-\sqrt{25}}$$

ó

$$y = x.$$

Luego, si $C\ (h, k)$ es el centro, entonces $h = k$ (1)

La distancia de $C\ (h, k)$ a la recta $4x - 3y = 0$, (ó a la recta $3x - 4y = 0$) es 1, luego

$$-\ \frac{4h - 3k}{-\sqrt{25}} = 1 \qquad (2)$$

Resolviendo (1) y (2) se obtiene $h = 5$ y $k = 5$.

La ecuación de la circunferencia es: $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 1$ ó en su forma general $x^2 - 10x + y^2 - 10y + 49 = 0$.

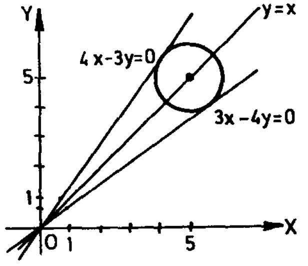



Fig. 3.2

**Ejemplo 3.5.** La ecuación de una circunferencia es $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 20$. Hallar la ecuación de la tangente a esta circunferencia en el punto (6, 7).

La pendiente de la recta que pasa por C(4, 3) y el punto de tangencia (6, 7) es:

$$m = \frac{7 - 3}{6 - 4} = 2 \quad ,$$

la pendiente de la tangente es $-1/2$ y su ecuación:

$$y - 7 = -\frac{1}{2}(x - 6), \quad \text{ó} \quad x + 2y - 20 = 0.$$

## 3.2 LA PARABOLA

La *parábola* se define como el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo *(el foco)* y de una recta fija *(la directriz)*. La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz es un eje de simetría de la curva y se denomina *eje de la parábola*. El punto de intersección del eje con la parábola se llama *vértice*.

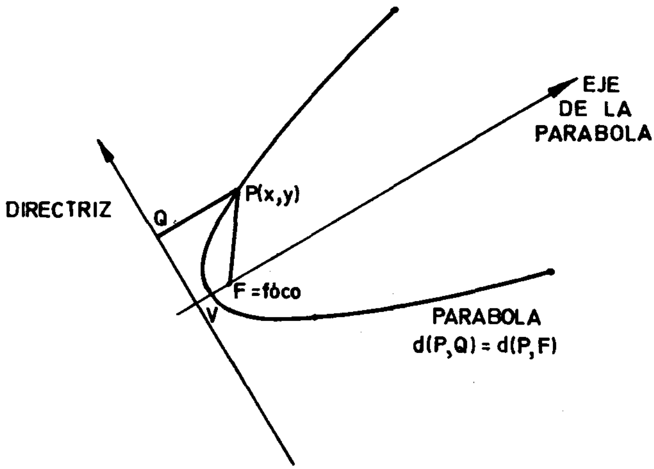



Fig. 3.3

## ECUACION DE UNA PARABOLA CON VERTICE EN EL ORIGEN Y EJE UNO DE LOS EJES COORDENADOS

Veremos que en el caso de que una parábola tenga su vértice en el origen y su eje coincida con uno de los ejes coordenados entonces su ecuación toma la forma más sencilla, conocida como *forma canónica.*

Sea $F\ (0, p)$ el foco e $y = -p$ la directriz de una parábola de eje confundido con el eje de ordenadas. Sea $P\ (x, y)$ un punto cualquiera de la parábola y $Q$ el punto de intersección de la perpendicular a la directriz, que pasa por $P$. Las coordenadas de $Q$ son $(x, -p)$. Por definición de parábola: $d\ (P, F) = d\ (P, Q)$, es decir:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2}$$

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

Efectuando operaciones y simplificando:

$$x^2 = 4py \qquad (3.3)$$

El vértice de la parábola está en el origen y su eje es el eje $Y$, eje de simetría de la curva.

Si la parábola tiene por foco $F$ $(p, 0)$ y directriz $x = -p$, entonces en forma análoga se puede deducir que su ecuación es:

$$y^2 = 4px \tag{3.4}$$

Su vértice está en el origen y su eje es el eje de abscisas.

En las ecuaciones (3.3) y (3.4), el valor absoluto de la constante $p$ es igual a la distancia del foco al origen o la distancia de la directriz al origen.

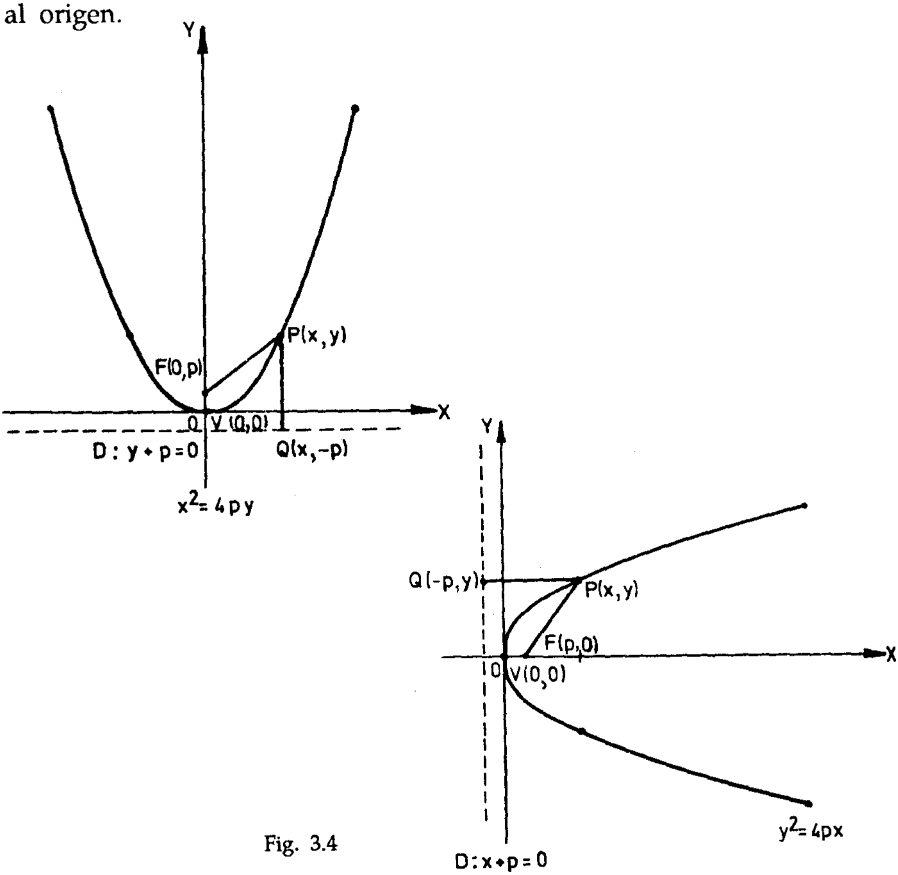



Fig. 3.4

Si analizamos los posibles valores de $p$ en la ecuación $x^2 = 4py$, vemos que si:

$p > 0$, entonces sólo podemos tomar valores de $y \geq 0$. Además, conforme el valor de $y$ crece, el valor de $x$ también crecerá. Luego el lugar geométrico de (3.3) es una curva abierta que se extiende, en el semi-plano superior, hacia arriba indefinidamente;

$p < 0$, entonces $y \leq 0$ y la curva se extenderá indefinidamente hacia abajo permaneciendo siempre en el semi-plano inferior.

**Ejemplo 3.6.** Hallar la ecuación de la parábola con foco (0, 4) y directriz $y + 4 = 0$

El eje será el eje de ordenadas y el vértice el origen. Su ecuación será de la forma: $x^2 = 4py$, donde $p$ = ordenada del foco = 4.

La ecuación es $x^2 = 16y$.

**Ejemplo 3.7.** Una parábola cuyo vértice está en el origen y su eje coincide con el eje $Y$, pasa por el punto (6, – 3). Determinar la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz.

La ecuación será de la forma $x^2 = 4py$ .

El punto (6, – 3) satisface la ecuación, luego $36 = 4p(-3)$, de donde $p = -3$.

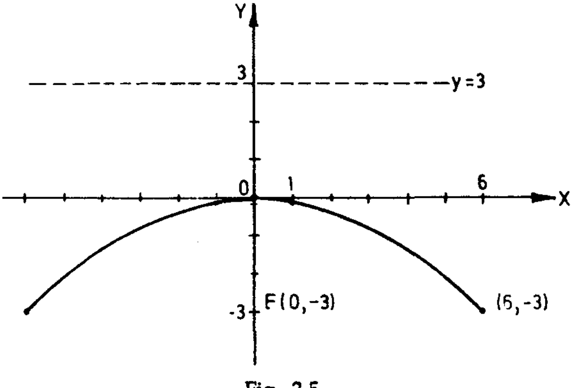



Fig. 3.5

La ecuación de la parábola es $x^2 = -12y$, las coordenadas del foco $F\ (0, p) = (0, -3)$ y la ecuación de la directriz $y = -p = 3$. (Fig. 3.5).

Si en la ecuación $y^2 = 4px$, se tiene:

$p > 0$, la ecuación se extiende hacia la derecha del eje de ordenadas y hacia arriba y abajo del eje de abscisas;

$p < 0$, la curva se extiende hacia la izquierda del eje de ordenadas y hacia arriba y abajo del eje de abscisas.

## ECUACION DE UNA PARABOLA DE VERTICE V (h, k) Y EJE PARALELO A UNO DE LOS EJES COORDENADOS .

Sea $F\ (x_0\ , y_0)$ el foco e $y = l$ la ecuación de la directriz de una parábola de eje vertical. Si $P\ (x, y)$ es un punto cualquiera de la parábola, entonces:

$$d\ (P, F) = d\ (P, Q)$$

donde Q tiene coordenadas $(x, l)$. Luego:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = |y - l| \quad ,$$

y elevando al cuadrado: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (y - l)^2$ .

Si expresamos $x_0$, $y_0$ y $l$ en función de las coordenadas del vértice $V\ (h, k)$ y de la distancia del vértice al foco o a la directriz, que como anteriormente llamaremos $p$, se tiene:

$$x_0 = h \quad , \quad y_0 = k + p \quad , \quad l = k - p \ .$$

Reemplazando en la ecuación anterior:

$$(x - h)^2 + [(y - k) - p]^2 = [(y - k) + p]^2$$

Efectuando y simplificando: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ , (3.5) ecuación que corresponde a una parábola de vértice en $(h, k)$ y eje paralelo al eje de ordenadas. El foco tiene coordenadas $(h, k + p)$ y la ecuación de la directriz es: $y = k - p$ .

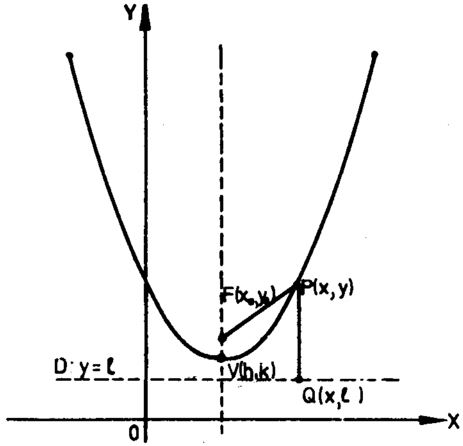



Fig. 3.6

La ecuación (3.5) se puede escribir en la forma:

$$x - h = \pm \sqrt{4p\ (y - k)} \quad .$$

Entonces:

si $p > 0$ la parábola se abre hacia arriba de la recta $y = k$, y
si $p < 0$ la parábola se abre hacia abajo de la recta $y = k$.

**Ejemplo 3.8.** Determinar la ecuación de la parábola de vértice en $V\ (-2, -3)$, eje paralelo al eje de ordenadas y que pasa por el punto $P\ (0, -5)$.

La ecuación será de la forma $(x - h)^2 = 4p\ (y - k)$. En este problema $h = -2$, $k = -3$, luego: $(x + 2)^2 = 4p\ (y + 3)$. Además el punto $P\ (0, -5)$ pertenece a la parábola, por tanto sus coordenadas satisfacen la ecuación:

$(2)^2 = 4p\ (-5 + 3)$ : de donde $p = -\dfrac{1}{2}$

La ecuación de la parábola es:

$(x + 2)^2 = -2\ (y + 3)$, ó desarrollando:

$x^2 + 4x + 2y + 10 = 0$

Las coordenadas del foco son: $x_0 = h = -2$, $y_0 = k + p = -3 - 1/2 = -7/2$

La ecuación de la directriz es $y = k - p = -3 + 1/2 = -5/2$ (fig. 3.7).

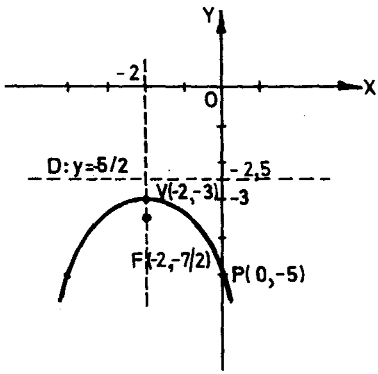



Fig. 3.7

Utilizando un procedimiento análogo al seguido para deducir la fórmula (3.5), podemos encontrar que la ecuación de una parábola de vértice $V\ (h,\ k)$ y eje paralelo al eje de abscisas es:

$$(y - k)^2 = 4p\ (x - h) \tag{3.6}$$

Siendo $|p|$ la distancia entre el foco y el vértice.

Si $p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha de la recta $x = h$, si $p < 0$, se abrirá hacia la izquierda.

El foco estará en $F\ (h + p,\ k)$ y la ecuación de la directriz es $x = h - p$.

**Ejemplo 3.9.** Demostrar que la ecuación $y^2 - 4y - 4x - 4 = 0$ representa una parábola y hallar las coordenadas del vértice, del foco y la ecuación de la directriz.

Completando cuadrados en la ecuación $y^2 - 4y - 4x - 4 = 0$, se obtiene: $(y - 2)^2 = 4\ (x + 2)$.

Ecuación de la forma (3.6) que corresponde a una parábola de eje paralelo al eje $X$, con valor de $p = 1$ y coordenadas del vértice $(-2, 2)$. Las coordenadas del foco son: $(h + p,\ k) = (-1, 2)$, y la ecuación de la directriz: $x = h - p = -2 - 1 = -3$.

## ECUACION GENERAL DE UNA PARABOLA DE EJE PARALELO A UNO DE LOS EJES COORDENADOS

Desarrollando y ordenando las ecuaciones (3.5) y (3.6), se obtienen ecuaciones de las formas:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad \text{y}$$

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0\ , \qquad \text{respectivamente.}$$

La primera de estas ecuaciones, es la ecuación general de una parábola de eje paralelo al eje $Y$.

Si $E = 0$, la ecuación representa dos rectas paralelas al eje $Y$, dos rectas coincidentes paralelas al eje $Y$ ó ningún lugar geométrico, según las raíces de la ecuación $x^2 + Dx + F = 0$ sean reales distintas, reales iguales o complejas, respectivamente.

La segunda ecuación, es la ecuación general de una parábola de eje paralelo al eje de abscisas. Si $D = 0$, la ecuación representa dos rectas paralelas al eje $X$, dos rectas coincidentes o ningún lugar geométrico, según las raíces de la ecuación $y^2 + Ey + F = 0$ sean raíces reales distintas, reales iguales o complejas, respectivamente.

Podemos generalizar lo anterior diciendo que la ecuación de toda parábola de eje paralelo a uno de los ejes coordenados es de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ donde: $A = 0$, $(D \neq 0)$ ó $C = 0$, $(E \neq 0)$.

Recíprocamente, una ecuación de segundo grado del tipo anterior, donde $A = 0$, $(D \neq 0)$, ó $C = 0$, $(E \neq 0)$, tiene por gráfica una parábola de eje paralelo a uno de los ejes coordenados.

En efecto, supongamos $A = 0$ pero $D$ y $C$ distintos de cero en la ecuación de segundo grado con dos variables $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Completando cuadrados se obtendrá la ecuación:

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{D}{C}\left(x + \frac{4CF - E^2}{4CD}\right)$$

que es de la forma (3.6) y que representa a una parábola de eje paralelo al eje de abscisas.

En forma análoga se procede para el caso $C = 0$.

**Ejemplo 3.10.** Determinar la ecuación de la recta tangente a la parábola: $y^2 + 4x + 2y + 9 = 0$ en el punto de contacto $(-6, 3)$.

La ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto de tangencia $(-6, 3)$ es:

$$y - 3 = m\,(x + 6) \qquad \text{ó} \qquad y - mx - 6m - 3 = 0.$$

Debemos encontrar el valor de $m$ de manera que la intersección de la recta $y - mx - 6m - 3 = 0$ y la parábola sea un solo punto. Despejando $x$ de la ecuación de la recta:

$$x = \frac{y - 6m - 3}{m}, \quad m \neq 0,$$

y reemplazando en la ecuación de la parábola se tiene:

$$y^2 + 4\left(\frac{y - 6m - 3}{m}\right) + 2y + 9 = 0$$

Efectuando operaciones y ordenando: $my^2 + (4 + 2m)\, y - (15m + 12) = 0$.

Esta ecuación debe tener dos raíces iguales (para obtener un sólo punto de intersección), luego el discriminante de esta ecuación de segundo grado en $y$, debe ser cero:

$$(4 + 2m)^2 + 4m\,(15m + 12) = 0.$$

Desarrollando: $4m^2 + 4m + 1 = 0$ ó $(2m + 1)^2 = 0$.

Es decir $m = -1/2$. La ecuación de la tangente es:

$$y + \frac{1}{2}x - 6\left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = 0 \quad ,$$

$$y + \frac{1}{2}x = 0 \qquad \text{ó} \qquad 2y + x = 0 \;;$$

Para $m = 0$ se encuentra la recta $y = 3$, paralela al eje de la parábola y que también la corta en un solo punto, $(-6, 3)$, pero no es tangente.

**Ejemplo 3.11.** Encontrar la ecuación de la parábola cuyo eje principal es paralelo al eje $Y$ y pasa por los puntos $P_1$ (1, 1), $P_2$ (–2, –11), $P_3$ (3, –1).

La ecuación general de una parábola de eje paralelo al eje $Y$ es de la forma:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Esta ecuación tiene 3 coeficientes por determinar, pero los 3 puntos de paso permiten establecer las condiciones para su determinación.

Reemplazando las coordenadas de $P_1$ (1, 1) , $P_2$ (–2, –11) y $P_3$ (3, –1), se obtienen las ecuaciones:

$$1 + D + E + F = 0$$

$$4 - 2D - 11E + F = 0$$

$$9 + 3D - E + F = 0$$

Resolviendo el sistema: $D = -3$, $E = 1$, $F = 1$.

La ecuación es: $x^2 - 3x + y + 1 = 0$, ó completando cuadrados:

$$(x - 3/2)^2 = -(y - 5/4) \quad ,$$

ecuación que corresponde a una parábola con vértice en $V$ (3/2, 5/4) y $p = -1/4$.

## EJERCICIOS 3.1

1.— Determinar las coordenadas del centro y el radio de cada una de las circunferencias.

a) $2x^2 + 2y^2 = 4x + y$
b) $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 6$

2.— Determinar la ecuación de la circunferencia en cada uno de los casos siguientes:

a) El diámetro de la circunferencia es el segmento que une los puntos (–2, 5) y (6, –1).
b) El centro de la circunferencia está en el eje de abscisas y pasa por los puntos (–1, 3) y (7, 5).
c) El radio es 10 y pasa por los puntos (4, 0) y (6, 2).

3.— Determinar la ecuación del diámetro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ que biseca la cuerda cuya ecuación es: $3y + x - 6 = 0$.

4.— Determinar la ecuación del lugar geométrico generado por un punto que se mueve de manera que su distancia al punto (2, –1) es 5 veces su distancia a la recta $4x + 3y + 1 = 0$.

5.— Establecer la ecuación de una circunferencia tangente al eje de abscisas en el punto (10, 0) y a otra circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 10x - 14y + 58 = 0$.

6.— Hallar las ecuaciones de las circunferencias que son tangentes a las rectas concurrentes: $7x - y - 5 = 0$; $x + y + 13 = 0$ y que pasan por el punto (1, 2).

7.— Determinar la ecuación de las siguientes parábolas:

a) Vértice (0, 0), foco (0, –3)
b) Foco (0, 0), vértice (0, –3)
c) Foco (3, 2), directriz $y = 4$
d) Eje $y = 3$ y los puntos (6, –1) y (3, 1) están en la parábola.

8.— Determinar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz en cada una de las parábolas siguientes:

a) $x^2 = 12y$ b) $y^2 = -14x$ c) $5y^2 = 2x$
d) $y + 6x^2 = 0$ e) $2x^2 + 3y = 0$.

9.— Determinar las coordenadas del vértice y del foco y las ecuaciones de la directriz y del eje de las parábolas:

a) $x^2 + 4x - 6y - 2 = 0$.
b) $y^2 + x + 6y + 6 = 0$.

10.—Determinar la ecuación de la parábola de foco (0, –1) y directriz $y - x - 2 = 0$.

11.- Encontrar las ecuaciones de las tangentes a la curva $y^2 - 2y - 4x - 7 = 0$, trazadas desde el punto (–4, 1).

12.—Un triángulo equilátero inscrito en la parábola de ecuación $y^2 - 2y - 4x - 7 = 0$, tiene uno de sus vértices coincidente con el vértice de la parábola.
Determinar las coordenadas de los otros dos vértices del triángulo.

13.—Demostrar que la ecuación de la recta que es tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en el punto $P_1$ $(x_1 , y_1)$ es $y_1 y = 2p (x + x_1)$ .

14.- Hallar en la parábola $y^2 = 64x$ el punto $P$ más próximo a la recta $4x + 3y + 86 = 0$ y calcular la distancia del punto $P$ a esta recta.

15.—Hallar la ecuación de la recta que es tangente a la parábola $x^2 = 16y$, y es perpendicular a la recta $x + 2y + 3 = 0$.

16.—Determinar la ecuación del lugar geométrico de un punto $P\ (x, y)$ que se mueve de manera tal que la pendiente de la recta que pasa por $P$ y $A\ (4, 4)$ es siempre menor en una unidad que la pendiente de la recta que pasa por $P$ y $B\ (2, 2)$.

17.—Determinar el área del sector circular que forman las rectas $L_1$ y $L_2$ que pasan por el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 + x - y - 7/2 = 0$ y con pendientes 2 y 1/3 respectivamente.

18.– Determinar la ecuación de la recta de pendiente positiva, que pasa por el punto $(1, -1)$ y forma la base (lado desigual) de un triángulo isósceles con las rectas $y = 5$, $4x + 3y - 11 = 0$.

19.—Hallar la ecuación de una circunferencia tangente a la recta $7x - 24y - 55 = 0$, y cuyo centro es el de la circunferencias $x^2 + y^2 - 8x - 4y = 0$.

20.—Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por $P\ (0, 2)$ y es tangente en el origen a la recta $y + 2x = 0$.

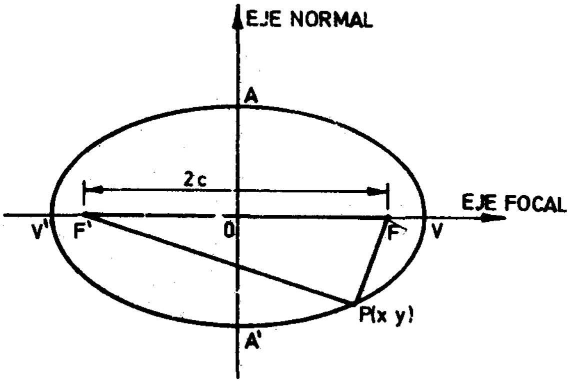
## 3.3. LA ELIPSE

Una *elipse* es un conjunto de puntos de un plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los puntos fijos.

Los puntos fijos se denominan *focos* de la elipse.

Si $F$ y $F'$ son los dos focos de una elipse, entonces la distancia entre ellos se llama *distancia focal* y se designa por $2c$.

Al punto medio del segmento $\overline{FF'}$ se le denomina el *centro* de la elipse. La recta determinada por los focos se llama *eje focal.* Este eje focal corta a la elipse en dos puntos $V$ y $V'$, llamados *vértices.* El segmento que une los vértices $V$ y $V'$ se llama *eje mayor.* Finalmente, se denomina *eje normal,* a la recta que pasa por el centro de la elipse y es perpendicular al eje focal. El eje normal corta a la elipse en dos puntos $A$ y $A'$. el segmento $\overline{AA'}$ se llama *eje menor.*




Elipse:

$d\ (P,\ F) + d\ (P,\ F') = \text{cte} > d\ (F,\ F')$

Fig. 3.8

## ECUACION DE LA ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL UNO DE LOS EJES COORDENADOS

Consideremos primero el caso de una elipse de centro en el origen de coordenadas y cuyo eje focal coincide con el eje de abscisas. Si designamos por 2c a la distancia focal, entonces las coordenadas de los focos son $F\ (c,\ 0)$ y $F'\ (-c,\ 0)$.

Sea $P\ (x,\ y)$ un punto cualquiera de la elipse. Por la definición dada, el punto $P$ debe satisfacer la condición:

$$d\ (P,\ F) + d\ (P,\ F') = 2a \quad ,$$

donde $a$ es una constante positiva mayor que $c$.

Esta condición puede expresarse por la ecuación:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \tag{3.6a}$$

con $a > c > 0$ .

Pasando el segundo radical al segundo miembro y elevando al cuadrado:

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

Simplificando: $cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ . Elevando al cuadrado nuevamente:

$$c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2[(x+c)^2+y^2]=a^2x^2+2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2 \quad ,$$

ordenando: $\qquad (a^2-c^2)\,x^2+a^2y^2=a^2\,(a^2-c^2)$ .

Siendo $a^2 > c^2$ , se tiene que $a^2 - c^2$ es un número positivo al que llamaremos $b^2$, es decir: $b^2 = a^2 - c^2$ .

Reemplazando en la ecuación anterior: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2\,b^2$ .

Dividiendo por $a^2\,b^2$ : $\qquad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ , $\qquad$ (3.7)

Ecuación que corresponde a una elipse con centro en el origen y eje focal el eje X.

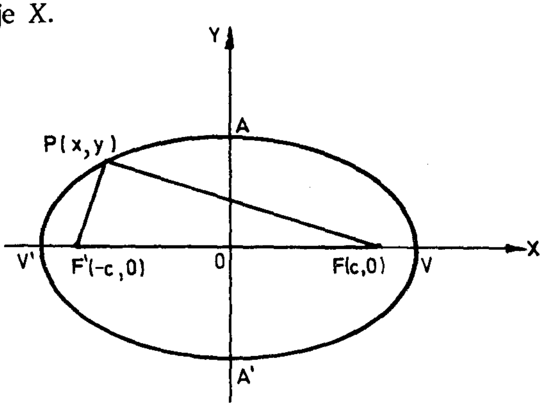



Fig. 3.9

Analicemos la ecuación (3.7). Las intersecciones con el eje $X$ (eje focal) son $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, luego por definición, estas son las coordenadas de los vértices $V$ y $V'$ respectivamente.

La distancia entre los vértices es entonces 2a, es decir, la longitud del eje mayor de la elipse. Las intersecciones con el eje $Y$ son $A$ $(0, b)$ y $A'$ $(0, -b)$, lo que hace que la longitud del llamado eje menor sea 2b.

La ecuación (3.7) nos permite asegurar que la elipse es simétrica con respecto al eje $X$, al eje $Y$ y al origen, o lo que es lo mismo, simétrica con respecto al eje focal, al eje normal y al centro de la elipse.

Si despejamos la variable $y$ de (3.7) obtenemos:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad ,$$

que nos indica que el dominio de la ecuación es $-a \leq x \leq a$.

Si despejamos $x$ :

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \quad ,$$

se concluye que el rango es: $-b \leq y \leq b$.

Luego la elipse está limitada por el rectángulo de lados $x = \pm a$ e $y = \pm b$.

Si la elipse tiene su centro en el origen pero su eje focal coincide con el eje de ordenadas entonces los focos son $F$ $(0, c)$ y $F'$ $(0, -c)$ y siguiendo el método anterior, se puede determinar que la ecuación correspondiente es:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \tag{3.8}$$

Las expresiones (3.7) y (3.8) se llaman las formas canónicas de la ecuación de una elipse.

**Nota.—** Observemos que si la ecuación de una elipse está dada en sus formas canónicas [ecuaciones (3.7) y (3.8)] , entonces, desde que $a^2 > b^2$ , el denominador mayor corresponderá a la variable vinculada al eje coordenado con el cual coincide el eje mayor de la elipse.

**Ejemplo 3.12.** Determinar la ecuación de la elipse de vértices en $V$ (5, 0), $V'$ (–5, 0) y focos en $F$ (4, 0), $F'$ (–4, 0).

El centro es (0, 0), el origen de coordenadas, y su eje focal coincide con el eje $X$, por tanto la ecuación es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

El valor de $a$ es igual a la longitud del semieje mayor, es decir, la mitad de la distancia entre $V$ y $V'$ . Luego $a = 5$. El valor de $b$, semieje menor, lo definimos por $b^2 = a^2 - c^2$ , donde $c$ es la mitad de la distancia focal, $d\ (F, F') = 8$. Por tanto: $b^2 = 25 - 16 = 9$ , y $b = 3$.

La ecuación es entonces:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

**Ejemplo 3.13.** La ecuación de una elipse es

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Determinar las coordenadas de los focos y vértices y las longitudes de los ejes mayor y menor.

Según la nota de la parte superior, la ecuación corresponde a una elipse de centro en el origen y eje focal coincidente con el eje $Y$. La ecuación (3.8) nos indica que $a^2 = 16$ y $b^2 = 8$. Luego: $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 8 = 8$.

Las coordenadas de los vértices son $V = (0, a) = (0, 4)$ y $V' = (0, -a) = (0, -4)$.

Las coordenadas de los focos son: $F = (0, c) = (0, 2\sqrt{2})$ y $F' = (0, -c) = (0, -2\sqrt{2})$ .

El eje mayor es $2a = 8$ y el eje menor $2b = 4\sqrt{2}$.

La gráfica está representada en la figura 3.10.

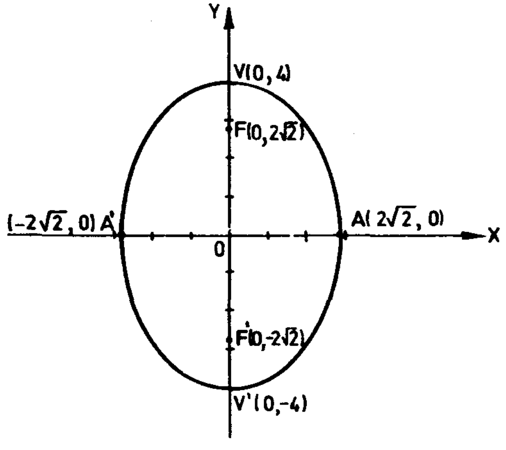



Fig. 3.10

## ECUACION DE UNA ELIPSE DE CENTRO C (h, k) Y EJES PARALELOS A LOS EJES COORDENADOS

Consideremos una elipse de centro $C\ (h, k)$ y eje focal paralelo al eje $X$. Si como anteriormente, llamamos $2c$ a la distancia focal, entonces las coordenadas de los focos son: $F\ (h + c, k)$ y $F'\ (h - c, k)$. Sea $P\ (x, y)$ un punto cualquiera de la elipse. Por definición se cumple la relación:

$$d\ (P, F) + d\ (P, F') = 2a\ ,$$

siendo como en el caso anterior, $a$ una constante positiva mayor que $c$. Es decir:

$$\sqrt{[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2} + \sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2} = 2a$$

ó también:

$$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}=2a$$

Hagamos $x - h = x'$ , $y - k = y'$ , quedando:

$$\sqrt{(x'-c)^2+y'^2}+\sqrt{(x'+c)^2+y'^2}=2a$$

que representa a la ecuación (3.6a) de la página 148, donde se ha cambiado $x$ por $x'$ e $y$ por $y'$. Luego realizando operaciones y simplificando se obtendrá la ecuación (3.7) correspondiente:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1.$$

Como $x' = x + h$ , e $y' = y + k$ , se obtiene finalmente:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1\,. \tag{3.9}$$

Ecuación de una elipse con eje focal paralelo al eje $X$, centro en $C\ (h, k)$, focos en: $F\ (h + c, k)$, $F'\ (h - c, k)$, vértices en: $V\ (h + a, k)$, $V'\ (h - a, k)$. La longitud del semieje mayor es $a$ y la del semieje menor es $b$. La distancia del centro a cada foco es $c$ y la relación que liga las constantes $a$, $b$ y $c$ es: $c^2 = a^2 - b^2$ .

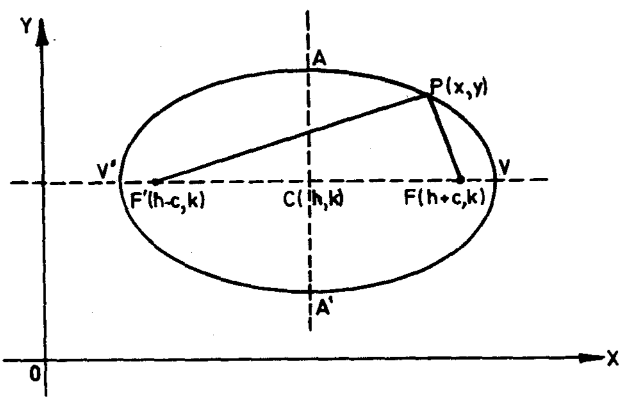



Fig. 3.11

Si el eje focal es paralelo al eje $Y$ y el centro está en $(h, k)$, la fórmula correspondiente es:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1. \tag{3.10}$$

**Ejemplo 3.14.** Los vértices de una elipse son $V$ (5, –2) y $V'$ (–1, –2). Encontrar la ecuación de la elipse si uno de sus focos está en la recta $y - 2x + 10 = 0$.

El centro es $C$ (2, –2), punto medio que une $V$ y $V'$.

El eje focal, paralelo al eje de abscisas, tiene ecuación $y = -2$.

Las coordenadas de uno de los focos se encuentran resolviendo simultáneamente las ecuaciones $y - 2x + 10 = 0$, $y = -2$. Se obtiene $F$ (4, –2).

Luego:

$c$ = distancia del centro a uno de los focos = $d(C, F) = 2$

$a$ = semieje mayor = distancia del centro a uno de los vértices $= d(C, V) = 3$.

De donde: $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$.

La ecuación es de la forma (3.9), por tanto:

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{5} = 1, \text{ es la ecuación pedida.}$$

## ECUACION GENERAL DE UNA ELIPSE DE EJES PARALELOS A LOS EJES COORDENADOS

Si desarrollamos las ecuaciones (3.9) y (3.10) vemos que éstas pueden expresarse en las formas:

$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + (b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2) = 0$, y

$a^2x^2 + b^2y^2 - 2a^2hx - 2b^2ky + (a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2) = 0$, respectivamente.

Ambas expresiones corresponden a una ecuación de 2° grado con dos variables del tipo:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad ,$$

donde $A$ y $C$ tienen diferente valor pero el mismo signo. ($A$ y $C \neq 0$).

Recíprocamente, dada una ecuación de segundo grado, del tipo anterior, con $A$ y $C$ distintos de cero y del mismo signo, bastará completar cuadrados para demostrar que su gráfica es una elipse.

En efecto completando cuadrados y ordenando:

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4AC}$$

Si $CD^2 + AE^2 - 4ACF = 0$, la ecuación representa al punto

$$\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$$

Si es distinto de cero, obtenemos:

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C}} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4AC^2}} = 1 \, ,$$

que es una ecuación de las formas (3.9) ó (3.10).

Si $A = C$, entonces los ejes mayor y menor de la elipse son iguales y la gráfica correspondiente es una circunferencia. Si los denominadores son negativos, la elipse es imaginaria.

**Ejemplo 3.15.** Determinar el centro, los focos, los vértices y la longitud de los semiejes de la elipse de ecuación:

$$25x^2 + 9y^2 + 150x - 36y + 36 = 0$$

Completando cuadrados:

$$25\ (x^2 + 6x) + 9\ (y^2 - 4y) + 36 = 0 \quad ,$$

$$25\ (x + 3)^2 - 225 + 9\ (y - 2)^2 = 0$$

$$25\ (x + 3)^2 + 9\ (y - 2)^2 = 225\ .$$

Dividiendo por 225 :

$$\frac{(x + 3)^2}{9} + \frac{(y - 2)^2}{25} = 1\ .$$

Luego la elipse tiene:

Eje focal: Paralelo al eje $Y$ ;
Semieje mayor: $a = 5$
Semieje menor: $b = 3$
Centro: $C\ (-3,\ 2)$. $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16\ ;\ c = 4$.
Focos: $F\ (-3,\ 2 + c) = (-3,\ 6)\ ,\ F'\ (-3,\ 2 - c) = (-3,\ -2)$.
Vértices: $V\ (-3,\ 2 + a) = (-3,\ 7),\ V'\ (-3,\ 2 - a) = (-3,\ -3)$.

**Ejemplo 3.16.** Una elipse de eje paralelo al eje de abscisas, pasa por el punto (6, 0) y tiene sus vértices en la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$ y es concéntrica con ella. Determinar su ecuación.

El centro de la elipse está confundido con el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$ ó $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 25$. Es decir $C\ (4,\ -2)$.

Además la longitud del semieje mayor $a$ es igual al radio de la circunferencia, $a = 5$.

Siendo la elipse de eje focal paralelo al eje $X$, su ecuación es de la forma:

$$\frac{(x - 4)^2}{25} + \frac{(y + 2)^2}{b^2} = 1.$$

Las coordenadas de $P$ (6, 0) satisfacen esta ecuación:

$$\frac{(6-4)^2}{25} + \frac{4}{b^2} = 1.$$

De donde se obtiene el valor $b^2 = \dfrac{100}{21}$

La ecuación es entonces:

$$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{100/21} = 1 , \qquad \text{ó}$$

$$4x^2 + 21y^2 - 32x + 84y + 48 = 0 .$$

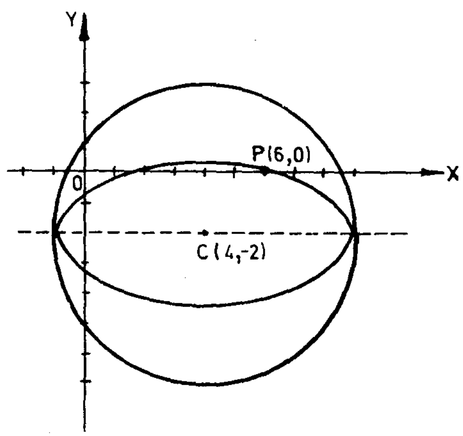



Fig. 3.12

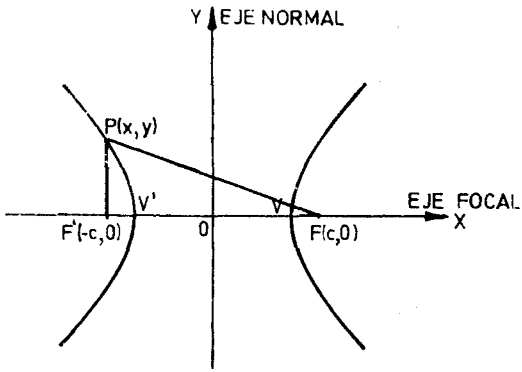
## 3.4 LA HIPERBOLA

Se llama *hipérbola* al lugar geométrico de los puntos de un plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es constante y menor que la distancia entre los puntos fijos.

Los dos puntos dados se llaman *focos* de la hipérbola y la distancia entre ellos, cuya medida se designa por $2c$, se llama *distancia focal.*

Al punto medio del segmento que une los focos se le denomina *centro* de la hipérbola.

La recta que pasa por los focos se llama *eje focal.* El eje focal corta a la hipérbola en dos puntos que se denominan *vértices* de la hipérbola. El segmento que une los vértices se llama *eje transverso* o *focal.* finalmente, se llama *eje normal,* a la recta perpendicular al eje focal y que pasa por el centro.




Hipérbola:
$|d\ (P, F) - d\ (P, F')| = cte. < d\ (F, F')$.
Fig. 3.13

## ECUACION DE LA HIPERBOLA CON CENTRO EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL UNO DE LOS EJES COORDENADOS

Consideremos la hipérbola de centro el origen de coordenadas y eje focal ó transverso coincidente con el eje $X$ (fig. 3.13). Las coordenadas de los focos son en este caso, $F$ (c, 0) y $F'$ (–c, 0), siendo $c$ una constante positiva.

Sea $P$ $(x, y)$ un punto genérico de la hipérbola, entonces por la definición, el punto $P$ debe satisfacer la condición geométrica siguiente:

$$|d\ (P, F) - d\ (P, F')| = 2a\ ,$$

en donde $a$ es una constante positiva tal que $2a < 2c$.

La condición geométrica es equivalente a las dos relaciones siguientes:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \quad ,$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=-2a \ .$$

Siguiendo el mismo procedimiento empleado para deducir la ecuación de la elipse, podemos demostrar que las dos ecuaciones últimas se reducen cada una a la ecuación:

$$(c^2-a^2)\ x^2-a^2y^2=a^2\ (c^2-a^2)\ .$$

Por ser $c > a > 0$, $c^2 - a^2$ es siempre positivo y podemos designar a esa diferencia por $b^2$ . Sustituyendo en la última ecuación se tiene: $b^2\ x^2 - a^2\ y^2 = a^2\ b^2$ . Dividiendo por $a^2\ b^2$ :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{3.11}$$

ecuación que corresponde a una hipérbola con centro en el origen, eje focal el eje de abscisas y $c^2 = a^2 + b^2$ . Estudiemos la ecuación (3.11). Las intersecciones con el eje X son los puntos $V\ (a,\ 0)$ y $V'\ (-a,\ 0)$. Luego el eje transverso mide $2a = d\ (V,\ V')$. No hay intersecciones con el eje $Y$, sin embargo los puntos $A\ (0,\ b)$ y $A'\ (0,\ -b)$, que están sobre el eje normal, determinan un segmento al que se le llama *eje conjugado.* La longitud del eje conjugado es entonces $2b$.

La gráfica de (3.11), la hipérbola, es simétrica con respecto a los dos ejes coordenados y con respecto al origen.

Si despejamos la variable $y$ de (3.11), obtenemos:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\ ,$$

que nos indica que el dominio de la ecuación es $]-\infty,\ -a] \cup [a,\ +\infty[$.

Si despejamos $x$,

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}\quad ,$$

vemos que $x$ es real para todo valor real de $y$. Luego el rango es $\mathbb{R}$ .

Según lo anterior podemos concluir que la hipérbola representada por la ecuación (3.11), no es una curva cerrada sino que consta de dos ramas diferentes, una que se extiende indefinidamente hacia la derecha de $x = a$ y otra hacia la izquierda de $x = -a$ y ambas hacia arriba y abajo del eje $X$.

Si la hipérbola tiene su centro en el origen pero su eje focal es coincidente con el eje $Y$, entonces los focos son $F\ (0,\ c)$ y $F'\ (0,\ -c)$ y siguiendo el método anterior se obtiene la ecuación respectiva:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad (3.12)$$

Las expresiones (3.11) y (3.12) se llaman las *formas canónicas* de la ecuación de una hipérbola.

## ECUACION DE UNA HIPERBOLA DE CENTRO C (h, k) Y EJES PARALELOS A LOS EJES COORDENADOS

La deducción de las ecuaciones en este caso, se deja como ejercicio al estudiante. En todo caso, es idéntica a la utilizada para la elipse en la sección correspondiente.

Las ecuaciones son:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (3.13)$$

Centro $C\ (h,\ k)$ y eje focal paralelo al eje de abscisas.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \qquad (3.14)$$

Centro $C\ (h,\ k)$ y eje focal paralelo al eje de ordenadas.

**Nota.—** En la hipérbola, a diferencia de la elipse, donde siempre $a > b$, se puede tener $a > b$, $a < b$ ó $a = b$. Luego la posición de una hipérbola con respecto a los ejes coordenados debe determinarse de manera distinta a la indicada para la elipse.

Se estudia la ecuación de la hipérbola en su forma canónica y se observa que la variable de coeficiente positivo corresponde al eje coordenado que contiene al eje transverso (eje focal) de la hipérbola.

**Ejemplo 3.17.** Determinar la ecuación de una hipérbola de focos $(\pm \frac{5}{2}, 0)$ y cuyo eje conjugado mide 4.

El centro es el origen y el eje focal el eje X, luego la ecuación será de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Además, como el eje conjugado mide 4, entonces $b = 2$.

La distancia focal es $d(F, F') = 5 = 2c$. De donde $c = \frac{5}{2}$.

La ecuación que relaciona $a$, $b$, y $c$ en una hipérbola es $c^2 = a^2 + b^2$.

Luego $a^2 = c^2 - b^2 = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4}$

La ecuación es:

$$\frac{4x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{ó} \quad 16x^2 - 9y^2 - 36 = 0.$$

**Ejemplo 3.18.** Determinar las coordenadas del centro, de los focos y de los vértices y las longitudes de los ejes transverso y conjugado de la hipérbola:

$$4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0.$$

Completando cuadrados:

$4\,(x^2 + 8x) - 9\,(y^2 - 4y) + 64 = 0.$

$4\,(x + 4)^2 - 64 - 9\,(y - 2)^2 + 36 + 64 = 0\,,$

$4\,(x + 4)^2 - 9\,(y - 2)^2 = -36$ . Multiplicando por $-\dfrac{1}{36}$ :

$$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+4)^2}{9} = 1.$$

Siendo el signo del coeficiente de la variable $y$, positivo, por la aclaración anterior sabemos que la hipérbola tiene su eje focal paralelo al eje $Y$. Su centro es $C\,(-4,\,2)$ y como $a = 2$ y $b = 3$ entonces las longitudes de los ejes transverso y conjugado son 4 y 6 respectivamente. Además: $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13.$ Luego $c = \sqrt{13}$ y las coordenadas de los focos son $F\,(-4,\,2 + \sqrt{13})$ y $F'\,(-4,\,2 - \sqrt{13})$. Las coordenadas de los vértices son: $V\,(-4,\,4)$ y $V'\,(-4,\,0)$.

## ASINTOTAS DE LA HIPERBOLA

Consideremos la hipérbola de centro el origen de coordenadas y eje focal coincidente con el eje $X$, de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Las dos rectas representadas por la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

tienen una relación muy importante con la ecuación anterior. Demostraremos que estas rectas son asíntotas de la hipérbola considerada.

En el primer capítulo estudiamos las asíntotas verticales y horizontales, es decir, paralelas a los ejes coordenados. Las asíntotas que no son paralelas a los ejes coordenados se denominan asíntotas oblicuas. El concepto de asíntota, sea esta paralela a los ejes u oblicua, es el mismo. Una recta se llama *asíntota* de una curva, si a medida que un punto de la curva se aleja indefinidamente del origen, la distancia de ese punto a la recta decrece continuamente tendiendo a cero.

La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 ,$$

puede expresarse por

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0 ;$$

donde el primer factor representa a la recta de ecuación

$$L_1 : y = \frac{b}{a}x \quad ,$$

y el segundo a la recta

$$L_2 : \; y = - \frac{b}{a}x$$

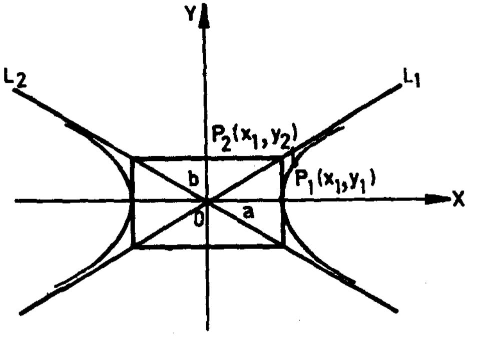



Fig. 3.14

Sea $P_1\ (x_1\ ,\ y_1)$ un punto de la parte superior de la rama derecha de la hipérbola considerada.

Sea $P_2\ (x_1\ ,\ y_2)$ el punto sobre $L_1$ que está en la vertical que pasa por $P_1$ . La longitud de $\overline{P_1\ P_2}$ no es la distancia de $P_1$ a la recta, pero si probamos que $d\ (P_1,\ P_2)$ tiende a cero cuando $P_1$ se aleja del origen, habremos también probado que la distancia de $P_1$ a la recta tiende a cero, puesto que esta última distancia es menor o igual que $d\ (P_1,\ P_2)$ .

Como

$$y_2 = \frac{b}{a}\, x_1 \quad \text{e} \quad y_1 = \frac{b}{a}\, \sqrt{x_1^2 - a^2}\ , \quad \text{entonces:}$$

$$y_2 - y_1 = \frac{b}{a}\,(x_1 - \sqrt{x_1^2 - a^2})\ .\ \text{Racionalizando:}$$

$$y_2 - y_1 = \frac{b}{a}\left[\frac{x_1^2 - (x_1^2 - a^2)}{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}\right] = \frac{ab}{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}$$

Si $P_1$ se mueve hacia la derecha a lo largo de la curva y alejándose indefinidamente del origen, entonces $x_1$ aumenta también indefinidamente de valor y la diferencia $y_2 - y_1$ decrecerá continuamente aproximándose a cero.

En forma similar se demuestra que en los casos en que $P_1$ se desplaza sobre la parte inferior de la rama derecha o sobre la parte superior o inferior de la rama izquierda, el valor absoluto de la diferencia $y_2 - y_1$ tiende a cero. $P_2$ se tomará sobre $L_1$ ó $L_2$ según sea el caso. Observemos que las asíntotas $L_1$ y $L_2$ de la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, son las diagonales del rectángulo determinado por las rectas $x = \pm\ a$ e $y = \pm\ b$, donde $a$ y $b$ son las longitudes de los semiejes transverso y conjugado respectivamente. (Ver fig. 3.14).

**Ejemplo 3.19.** Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 5y^2 = 8$.

Igualando a cero el primer miembro: $9x^2 - 5y^2 = 0$.

Factorizando: $(3x - \sqrt{5}\,y)\ (3 + \sqrt{5}\,y) = 0$.

Las ecuaciones de las asíntotas son: $3x - \sqrt{5}\,y = 0$, $3x + \sqrt{5}\,y = 0$.

## HIPERBOLAS CONJUGADAS

Dos hipérbolas se dice que son *conjugadas* si el eje transverso de cada una es igual al eje conjugado de la otra.

Así, si la ecuación de una hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ ,$$

entonces la ecuación de su conjugada es

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1\ .$$

Dos hipérbolas conjugadas tienen siempre un centro común, las mismas asíntotas y todos los focos equidistan del centro.

Hipérbolas Conjugadas

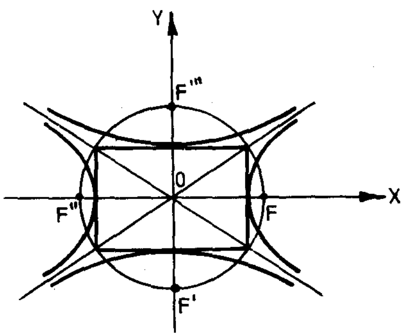



Fig. 3.15

**Ejemplo 3.20.** Dada la hipérbola $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y = 68$, determinar la ecuación de sus asíntotas y la ecuación de la hipérbola conjugada.

Completando cuadrados: $4(x^2 - 2x) - 9(y^2 - 4y) = 68$,

$$4(x - 1)^2 - 4 - 9(y - 2)^2 + 36 = 68$$

$$4(x - 1)^2 - 9(y - 2)^2 = 36 \quad \text{ó}$$

$$\frac{(x - 1)^2}{9} - \frac{(y - 2)^2}{4} = 1 \, .$$

Igualando a cero el primer miembro de la penúltima ecuación, encontramos las ecuaciones de las asíntotas: $4(x - 1)^2 - 9(y - 2)^2 = 0$. Factorizando la expresión:

$[2(x - 1)]^2 - [3(y - 2)]^2 = 0$ , se obtiene:

$[2(x - 1) + 3(y - 2)]\ [2(x - 1) - 3(y - 2)] = 0$ .

De donde:

$2x + 3y - 8 = 0$ y $2x - 3y + 4 = 0$ , son las ecuaciones de las asíntotas.

Para encontrar la ecuación de la conjugada, bastará cambiar el signo a uno de los miembros de la última ecuación:

$$\frac{(y - 2)^2}{4} - \frac{(x - 1)^2}{9} = 1 \, , \quad \text{ó} \quad 9y^2 - 4x^2 + 8x - 36y = 4 \, .$$

## HIPERBOLA EQUILATERA O RECTANGULAR

Una hipérbola que tiene sus ejes transverso y conjugado iguales, es decir $a = b$, se llama *hipérbola equilátera.*

En el caso de una hipérbola equilátera, la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ , se convierte en: } x^2 - y^2 = a^2 \qquad (3.15) \, ,$$

y su conjugada en $y^2 - x^2 = a^2$ . Sus asíntotas son las rectas $y = \pm x$, es decir rectas que forman 45° y 135° con los ejes de abscisas, respectivamente y un ángulo entre ellas de 90°. Debido a que sus asíntotas se cortan en ángulo recto, es que algunas veces son llamadas *hipérbolas rectangulares.*

Una hipérbola equilátera de ecuación particularmente simple es aquella que tiene por asíntotas los ejes coordenados, pero que por tener su eje focal oblicuo, la estudiaremos en detalle, en la sección 3.6. Tal ecuación tiene la forma $xy = k$ (Fig. 3.16), donde $k$ es una constante cualquiera distinta de cero.

Si $k > 0$, $x$ e $y$ tienen que tener siempre el mismo signo y la gráfica tiene una rama en el primer cuadrante y otra en el tercero.

Si $k < 0$, $x$ e $y$ tienen signos contrarios y las ramas están en el 2° y 4° cuadrante.

$xy = k$

$k > 0$

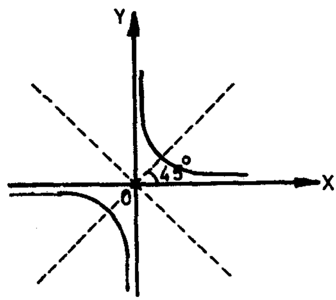



Fig. 3.16

## ECUACION GENERAL DE UNA HIPERBOLA DE EJES PARALELOS A LOS EJES COORDENADOS

Las ecuaciones (3.13) y (3.14) al desarrollarse toman las formas:

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2hx + 2a^2ky + (b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2) = 0 \text{ , y}$$

$$b^2y^2 - a^2x^2 + 2a^2hx - 2b^2ky + (b^2k^2 - a^2h^2 - a^2b^2) = 0 \text{ ,}$$

respectivamente. Ambas corresponden a una ecuación de 2° grado de la forma:

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde $A$ y $C$ tienen signos opuestos. ($A$ y $C \neq 0$).

Recíprocamente, dada una ecuación de 2° grado del tipo anterior, con $A$ y $C$ de signos opuestos, bastará completar cuadrados para demostrar que su gráfica es una hipérbola. En efecto, completando cuadrados y ordenando:

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4AC}$$

Si $CD^2 + AE^2 - 4ACF \neq 0$, entonces dividiendo por el segundo miembro:

$$\frac{\left(x + \dfrac{D}{2A}\right)^2}{\dfrac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C}} + \frac{\left(y + \dfrac{E}{2C}\right)^2}{\dfrac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4AC^2}} = 1 ,$$

que es una ecuación de las formas (3.13) ó (3.14) desde que $A$ y $C$ tienen signos opuestos.

En el caso particular de que $CD^2 + AE^2 - 4ACF = 0$ , entonces la penúltima ecuación puede factorizarse en dos factores de primer grado que representan dos líneas rectas que se cortan.

## EJERCICIOS 3.2

1.— Determinar el centro, los focos, los vértices y los semiejes de las elipses siguientes:

a) $5x^2 + 20x + 9y^2 - 54y + 56 = 0$
b) $9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0$

2.— Encontrar, en cada caso, la ecuación de la elipse que tiene:

a) Vértices $(\pm 5, 0)$ y focos $(\pm 4, 0)$.
b) Vértices $(-3, 2)$ y $(7, 2)$ y focos $(5, 2)$ y $(-1, 2)$ .
c) Focos $(3,8)$ y $(3, 2)$, longitud de eje menor igual a 8.

3.— El eje mayor de una elipse es 18 y el punto $(6, 4)$ pertenece a la curva. Determinar su ecuación sabiendo que el centro es el origen de coordenadas y el eje focal el eje $X$.

4.— Determinar la ecuación de la tangente a la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 ,$$

en el punto de contacto $P$ cuya abscisa es $x = 1$ y su ordenada es positiva.

5.— Determinar $n$ para que la recta $y = 2x + n$ sea tangente a la elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

6.— Determinar la ecuación del lugar geométrico descrito por el vértice de un triángulo cuya base mide 4, y la suma de los otros lados es constante e igual a 8.

7.— Determinar la ecuación de la hipérbola correspondiente en cada uno de los casos siguientes:

a) Focos $(-1, 1)$ y $(5, 1)$, un vértice en $(0, 1)$.
b) Focos $(-1, 3)$ y $(-7, 3)$, longitud del eje conjugado igual 4.

8.— Determinar las coordenadas del centro, los focos, los vértices y las ecuaciones de las asíntotas de las hipérbolas:

a) $x^2 - 2x - 4y^2 - 16y = 31$
b) $y^2 + 6y - 2x^2 - 4x + 3 = 0.$

9. Demostrar que el producto de las distancias de un punto cualquiera de una hipérbola a sus asíntotas es constante.
(Sugerencia: Sin perder generalidad, puede probarse para una hipérbola de centro el origen y de ejes los ejes coordenados).

10.- Utilizando el resultado del ejercicio anterior, determinar la ecuación de una hipérbola cuyas asíntotas son $2x - y - 1 = 0$, $2x + y - 3 = 0$ y pasa por el punto (4, 6).

11.—Los focos de una hipérbola son ($\pm 10$, 0) y las ecuaciones de sus asíntotas son $y = \pm 2x$. Encontrar su ecuación.

12.—Determinar los puntos de intersección de las cónicas $x^2 - y^2 = 7$, $x^2 + y^2 = 25$.

13.—Determinar un punto de la hipérbola

$$\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{4} = 1 ,$$

tal que su abscisa es el doble de su ordenada.

14.—El eje transverso de una hipérbola es 10 y el punto (6, 4) pertenece a la hipérbola. Determinar su ecuación si su centro es el origen de coordenadas.

15.—Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la hipérbola

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1 ,$$

y que son paralelas a la recta $2y - 4x + 1 = 0$.

16.- Encontrar las ecuaciones de las cuatro rectas tangentes comunes a las cónicas $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + 16y^2 = 4$.

17.—Los focos de la elipse

$$\frac{(x+3)^2}{16} + \frac{(y+5)^2}{9} = 1$$

son los vértices de una hipérbola y a su vez los focos de esta última coinciden con los vértices de la elipse. Determinar la ecuación de la hipérbola.

18.—Hallar los puntos de intersección de la recta $4x - 3y - 16 = 0$, y la hipérbola

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1 .$$

19.—Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $x^2 - y^2 = 16$, trazadas desde el punto $(-1, -7)$.

20.—Determinar la ecuación de la hipérbola equilátera que tiene su centro en el origen de coordenadas y uno de sus focos en $(0, -\sqrt{2})$.

21.—Calcular el área del triángulo formado por las asíntotas de la hipérbola

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{y la recta } x = 4.$$

22.—Determinar la distancia entre las dos rectas paralelas a $4x - 4y + 11 = 0$ y tangentes a la hipérbola $x^2 - 2y^2 + 4x - 8y - 6 = 0$.

23.—Sabiendo que el área de una elipse está dada por la fórmula $\pi ab$, calcular el área de la elipse $16x^2 + y^2 + 32x - 4y + 16 = 0$.

24.– La base de un triángulo es de longitud fija y sus extremos son $A$ $(1, 0)$ y $B$ $(5, 0)$. Hallar la ecuación del lugar geométrico del tercer vértice si uno de los ángulos de la base del triángulo es el doble del otro.

25.– El punto $P$ $(m, n)$ de la elipse $4x^2 + y^2 - 72 = 0$ es tal que su distancia a la recta $2x + y - 16 = 0$ es máxima. Calcular las coordenadas de $P$.

**Resumen.**— Dada una ecuación de segundo grado, lo visto anteriormente nos permite conocer, el tipo de cónica que representa.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

| Relación entre los coeficientes | Tipo de Cónica | Casos excepcionales |
|---|---|---|
| $A = C$ | Circunferencia | Un punto<br>Ningún lugar geométrico |

| | | |
|---|---|---|
| $A = 0$ ó $C = 0$ | Parábola | Dos rectas paralelas<br>Dos rectas coincidentes<br>Ningún lugar geométrico |
| $A$ y $C$ iguales signos | Elipse | Un punto<br>Ningún lugar geométrico |
| $A$ y $C$ distintos signos | Hipérbola | Dos rectas que se cortan |

## 3.5 DEFINICION GENERAL DE LAS CONICAS

Las diversas cónicas estudiadas difieren mucho entre si, como hemos podido comprobar por sus gráficas, sin embargo es posible establecer una ley común que las genere:

Una *sección cónica* es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la relación entre su distancia a un punto fijo $F$ y su distancia a una recta fija $D$ es una constante dada $e$.

El punto fijo $F$ se llama *foco*, la recta fija $D$ se llama *directriz* y la constante dada $e$, *excentricidad*.

Según sea el valor de la excentricidad $e$, el lugar geométrico representará una parábola, una elipse o una hipérbola.

Para simplificar los desarrollos, pero sin que esto signifique pérdida de generalidad en la demostración, asumiremos que la directriz es el eje $Y$ y que el foco está en el eje de abscisas.

Sean, $F(s, 0)$ el foco, $P(x, y)$ un punto genérico del plano y $Q$ el pie de la perpendicular bajada de $P$ a la directriz (*eje Y*) (fig. 3.17).

Por la definición general de una sección cónica tenemos que:

$$\frac{d(P, F)}{d(P, Q)} = e.$$

Reemplazando:

$$d\ (P,\ F) = \sqrt{(x - s)^2 + y^2} \quad , \quad d\ (P,\ Q) = |x| \text{ , se obtiene:}$$

$$\frac{\sqrt{(x - s)^2 + y^2}}{|x|} = e$$

Elevando el cuadrado y ordenando:

$$x^2 - 2sx + y^2 + s^2 - e^2x^2 = 0$$

ó $$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2sx + s^2 = 0 \qquad (3.17)\ .$$

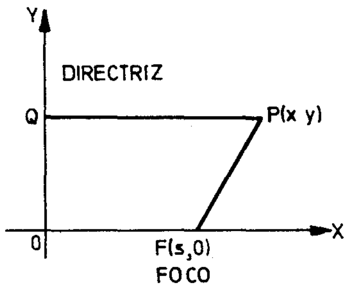



Fig. 3.17

La ecuación (3.17) es una ecuación de segundo grado en dos variables de la forma: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, luego de acuerdo al resumen anterior, representa:

a) Una parábola; si el coeficiente de $x^2$ es cero (el coeficiente de $y^2$ es 1), es decir si $1 - e^2 = 0$, o sea si $e = 1$ ;
b) una elipse; si los coeficientes de $x^2$ e $y^2$ son del mismo signo, es decir si $1 - e^2 > 0$ o sea si $e < 1$ ;
c) una hipérbola; si los coeficientes de $x^2$ e $y^2$ son de signos contrarios, es decir $1 - e^2 < 0$ o sea $e > 1$ ;

Como $e$, cociente de dos distancias, es siempre positiva, entonces podemos establecer que si la excentricidad vale:

$e = 1$, la curva es una *parábola,*
$0 < e < 1$, la curva es una *elipse,*
$e > 1$, la curva es una *hipérbola.*

Veamos la relación que hay entre la excentricidad $e$ y los valores $a$ y $b$ de una elipse.

Supongamos una elipse de centro el origen de coordenadas, focos en $F\ (c, 0)$ y $F'\ (-c, 0)$ y ecuación de la directriz correspondiente al foco $F$, $x = l$ .

Recordemos que en una elipse, el valor de $c$ en función de $a$ y $b$ es $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ .

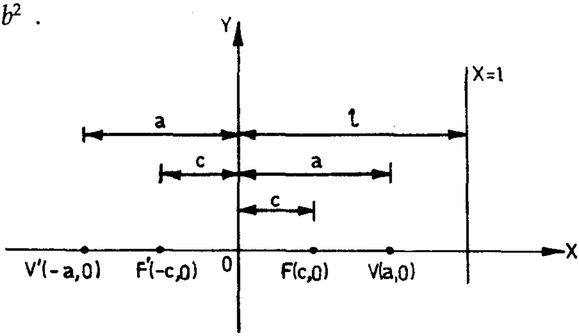



Fig. 3.18

Los vértices $V\ (a, 0)$ y $V'\ (-a, 0)$ de la elipse, pertenecen al lugar geométrico luego satisfacen las relaciones:

$$\frac{d\ (V, F)}{d\ (V, Q)} = e\ , \quad \frac{d\ (V', F)}{d\ (V', Q)} = e\ .$$

De la figura 3.18 se obtiene entonces:

$$\frac{a - c}{l - a} = e\ , \qquad \frac{a + c}{l + a} = e\ ,$$

o también: $a - c = e\ (l - a)$ y $a + c = e\ (l + a)$.

Sumando miembro a miembro y simplificando:

$$l = \frac{a}{e}\ , \tag{3.18}$$

distancia de la directriz al centro de la elipse.

Restando miembro a miembro y simplificando:

$c = a\ e$ (3.19), distancia del foco al centro de la elipse.

Procediendo en forma similar pero ahora considerando una hipérbola con centro en el origen y focos en $F\ (c,\ 0)$ y $F'\ (-c,\ 0)$ y directriz $x = l$ se tiene (fig. 3.19):

$$\frac{d\ (V,\ F)}{d\ (V,\ Q)} = e\ , \qquad \frac{c - a}{a - l} = e \quad , \qquad c - a = e\ (a - l) \qquad \text{y}$$

$$\frac{d\ (V',\ F)}{d\ (V',\ Q)} = e\ , \qquad \frac{c + a}{a + l} = e \quad , \qquad c + a = e\ (a + l).$$

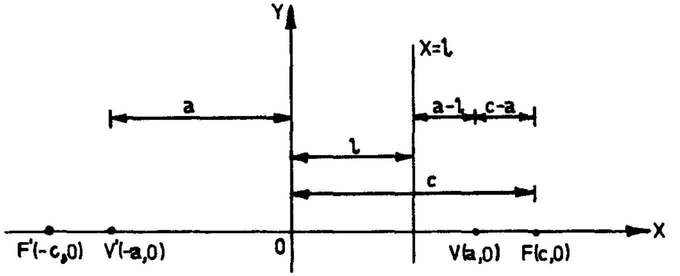



Fig. 3.19

Sumando y restando las dos últimas ecuaciones se obtiene:

$l = \dfrac{a}{e}$ , distancia de la directriz al centro de la hipérbola,

$c = ae$ , distancia del foco al centro de la hipérbola.

(Recordemos que en una hipérbola: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$)

**Ejemplo 3.21.** Determinar la ecuación de una elipse de vértices $V\ (3,\ 5)$, $V'\ (3,\ -1)$ y excentricidad $e = 1/3$.

$$d\ (V,\ V') = 2a = 6 \quad , \quad a = 3$$

Como se trata de una elipse de eje horizontal, entonces

$$h = 3, \quad k = \frac{5 - 1}{2} = 2.$$

Luego el centro es: $C\ (3,\ 2)$ .

Por la fórmula (3.19), $c = ae = \frac{1}{3}\,3 = 1.$

Además $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 1 = 8$ .

La ecuación es entonces:

$$\frac{(x-3)^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

ó

$$9x^2 + 8y^2 - 54x - 32y + 41 = 0$$

**Ejemplo 3.22.** Los focos de una hipérbola coinciden con los focos de la elipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Hallar la ecuación de la hipérbola si la excentricidad es: $e = 2$ .

En la elipse: $a = 5$, $b = 3$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4.$

En la hipérbola: c = 4, $e = 2$ y $a = \frac{c}{e} = \frac{4}{2} = 2.$

Además $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$ .

La ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \quad \text{ó} \quad 3x^2 - y^2 = 12 .$$

## EJERCICIOS 3.3.

1.— Se denomina *lado recto (latus rectum)* de una cónica, a la longitud de la cuerda que pasa por uno de los focos y es perpendicular al eje focal.
Demostrar que el lado recto de una parábola es $|4p|$, y el de una elipse ó hipérbola es $\frac{2b^2}{a}$ .

2.— Demostrar que en toda hipérbola equilátera la excentricidad es $\sqrt{2}$ .

3.— Hallar la ecuación de la elipse de excentricidad $e = 1/2$, foco $(-4, 1)$ y directriz correspondiente $y + 3 = 0$.

4.— La excentricidad de una hipérbola es $e = 3$. Si la distancia de un punto $P$ de la hipérbola a la directriz más cercana es 4, calcular la distancia del punto $P$ al foco más cercano.

5.— Hallar la ecuación de una elipse, sabiendo que $e = 1/2$, $F\ (3, 0)$ y la directriz correspondiente tiene por ecuación $x + y - 1 = 0$.

6.— Encontrar la ecuación de una elipse de centro en $(0, 0)$ y eje mayor sobre el eje de las abscisas sabiendo que su lado recto es 6 y su excentricidad $e = 1/2$.

7.— Determinar la ecuación de la hipérbola que tiene por directrices $x = 4$ y $x = 0$, eje transverso la recta $y = 1$ , y excentricidad $e = 2$.

8.— Una elipse es tangente a una circunferencia de tal manera que sus focos se encuentran también sobre la circunferencia. Calcular su excentricidad.

9.— Determinar la excentricidad de la cónica que tiene su centro en $C\ (1, -3)$, uno de sus focos en $F\ (0, -6)$ y el punto de intersección de una de sus directrices con el eje focal es $(3, 3)$.

10.—Los focos de una hipérbola coinciden con los focos de la elipse.

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Hallar la ecuación de la hipérbola si su excentricidad es igual a 3.

## 3.6 TRASLACION Y ROTACION DE EJES

Al estudiar las cónicas hemos podido comprobar que las ecuaciones de las gráficas correspondientes pueden ser más o menos simples según sea el sistema de coordenadas al cual estén referidas. Así por ejemplo, la elipse de semiejes mayor y menor iguales a 2 y 1 respectivamente, centro en el origen de coordenadas y eje focal coincidente con el eje de abscisas, tiene por ecuación $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$. Sin embargo, si consideramos que la misma elipse tiene sus ejes paralelos a los ejes coordenados y su centro en (1, 2), su ecuación es en este caso $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$. Finalmente, si consideramos la elipse original referida a un sistema de coordenadas tal que su eje de abscisas forma 45° con el eje focal y mantenemos el centro en (1, 2), la nueva ecuación es aún menos simple que la anterior: $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 2x - 14y + 5 = 0$ .

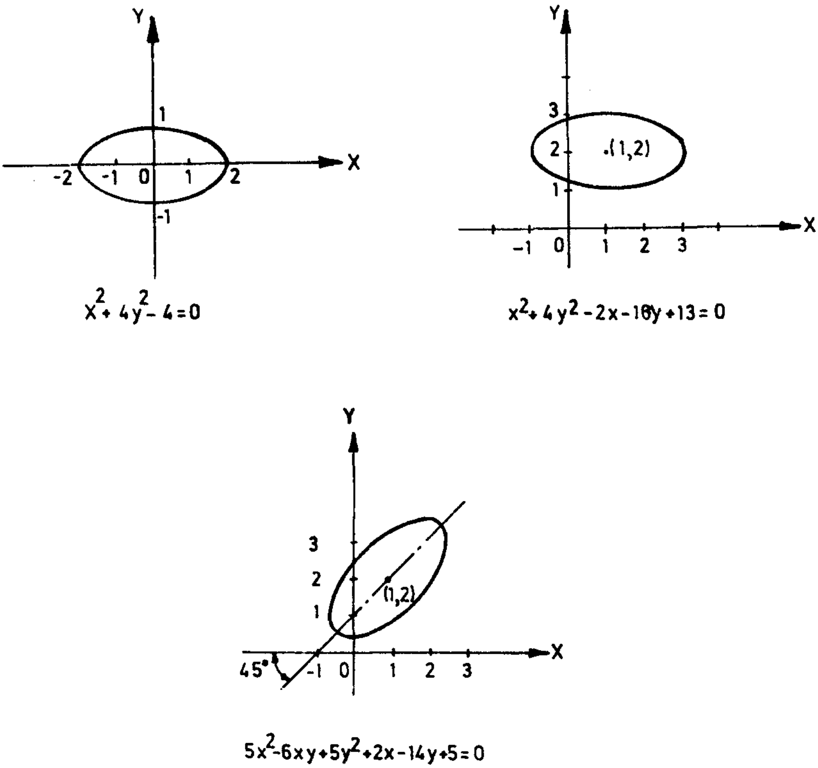



Fig. 3.20

Este ejemplo nos muestra la importancia que tiene el escoger convenientemente el sistema de coordenadas cuando el problema nos lo permite. Sin embargo, muchas veces tanto la gráfica como el sistema de coordenadas ya están dados y sólo nos queda entonces recurrir a una transformación de ejes si deseamos expresar la ecuación de la gráfica dada en una forma más simple. En esta sección trataremos las transformaciones denominadas traslación de ejes y rotación de ejes. La primera de ellas, la traslación, ya ha sido usada de una manera indirecta al estudiar las cónicas cuando el centro (caso de la elipse o hipérbola) o el vértice (caso de la parábola) no estaban en el origen de coordenadas.

## TRASLACION DE EJES

Dado el sistema de coordenadas $XY$ (Fig. 3.21), consideremos además el sistema $X'Y'$ con origen de coordenadas en el punto $(h, k)$ y con los ejes $X'$ e $Y'$ paralelas a los ejes $X$ e $Y$, respectivamente.

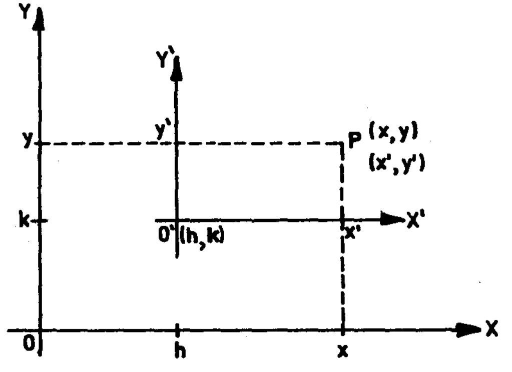



Fig. 3.21

Cualquier punto $P$ puede ser considerado con dos pares de coordenadas: el par $(x, y)$ referido al sistema $XY$ y el par $(x', y')$ referido al sistema $X'Y'$ .

La relación que puede establecerse entre los pares que corresponden a $P$ es:

$$x' = x - h \qquad y' = y - k \tag{3.20}$$

o en forma equivalente:

$$x = x' + h \qquad y = y' + k \tag{3.21}$$

Si dos sistemas de coordenadas $XY$ y $X'Y'$ satisfacen la relación (3.20), diremos que el sistema XY ha sido trasladado paralelamente al punto $(h, k)$.

**Ejemplo 3.23.** Referir la ecuación $y = (3/2)x + 3$ al sistema $X'Y'$ obtenido al trasladar $XY$ paralelamente al punto (2, 6).

Las ecuaciones (3.21) de traslación de ejes son, en este caso;

$$x = x' + 2$$

$$y = y' + 6$$

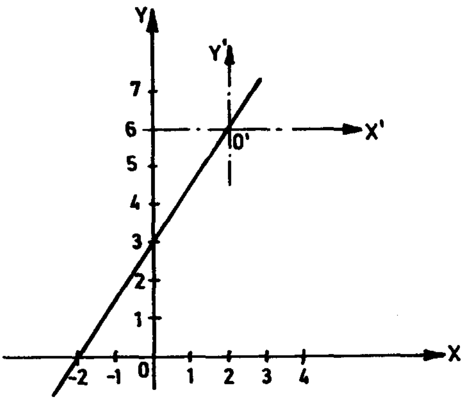


Fig. 3.22

Reemplazando estos valores en la ecuación dada se tiene

$$y' + 6 = (3/2)(x' + 2) + 3, \quad \text{ó}$$

$$y' = (3/2)x' \quad ,$$

que corresponde a una recta que pasa por el origen del nuevo sistema $X'Y'$.

Algunas veces el origen del sistema trasladado no se conoce y debe ser determinado convenientemente de acuerdo a las condiciones del problema.

**Ejemplo 3.24.** Usando una traslación adecuada expresar la ecuación $y^3 - 6y^2 - x + 12y - 12 = 0$ en una forma más simple.

Reemplazando las ecuaciones de traslación (3.21) se tiene:

$$(y' + k)^3 - 6\,(y' + k)^2 - (x' + h) + 12\,(y' + k) - 12 = 0$$

Desarrollando y ordenando:

$$y'^3 + (3k - 6)\,y'^2 + (3k^2 - 12k + 12)\,y' - x' - h + k^3 - 6k^2 + 12k - 12 = 0$$

El término $y'^3$ no desaparecerá cualquiera que sean los valores escogidos para $h$ y $k$.

En cambio si podemos eliminar el término correspondiente a $y'^2$ si hacemos su coeficiente $3k - 6 = 0$. Esto nos obliga a fijar el valor de $k = 2$. Reemplazando este valor en la ecuación anterior ésta se convierte en:

$$y'^3 - x' - h - 4 = 0.$$

Nos queda todavía la opción de escoger el valor de $h$ convenientemente de manera que se anule el término independiente. Es decir, tomar $-h - 4 = 0$, o sea $h = -4$. Con este valor de $h$ la ecuación queda reducida finalmente a la forma: $y'^3 = x'$, referida al sistema $X'Y'$ obtenido al trasladar $XY$ al punto $(-4, 2)$.

Es obvio que la gráfica puede ahora ser dibujada con más facilidad.

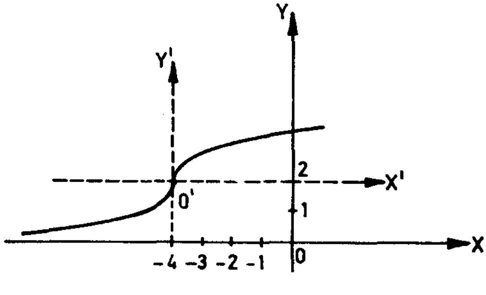



Fig. 3.23

**Ejemplo 3.25.** Utilizando traslación de ejes simplificar la ecuación $9x^2 - 36x + 4y^2 - 8y + 4 = 0$.

Tratándose de una ecuación de segundo grado sin el término $xy$, el método más simple para encontrar el nuevo centro del sistema consiste en completar cuadrados.

La ecuación anterior puede expresarse como:

$$9(x + 2)^2 + 4(y - 1)^2 = 36$$

Si trasladamos el sistema al punto (–2, 1), las ecuaciones de traslación de ejes son: $x' = x + 2$, $y' = y - 1$. La ecuación dada se transforma en $9x'^2 + 4y'^2 = 36$ ó

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1 .$$

## ROTACION DE EJES

Hemos visto que una traslación de ejes simplifica muchas veces las expresiones de ciertas ecuaciones permitiendo efectuar el dibujo de la gráfica con rapidez. Sin embargo en otros casos la traslación es insuficiente o inaplicable para conseguir la simplificación deseada y necesitamos recurrir a una rotación de ejes. Esta última transformación nos permitirá también completar el estudio de la ecuación de segundo grado en las variables $x$ e $y$.

Consideremos el sistema $XY$ con origen O y el sistema $X'Y'$ con el mismo origen y de tal modo que el eje $X'$ forme un ángulo $\alpha$ con el eje $X$.

Consideraremos que el ángulo $\alpha$ puede variar entre $0 \leq \alpha < 90°$.

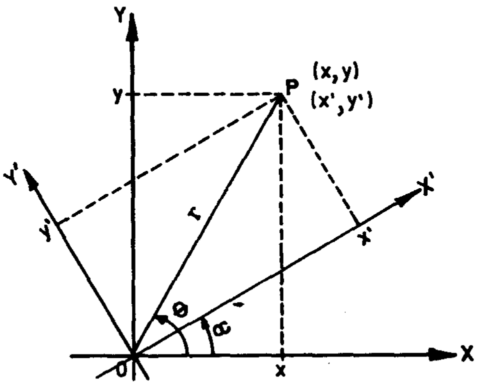



Fig. 3.24

Todo punto $P$ puede ser referido a dos pares de coordenadas, $(x, y)$ y $(x', y')$ , según usemos el sistema $XY$ o el sistema $X'Y'$.

Si denotamos con $r$ al segmento $\overline{OP}$ y llamamos $\theta$ al ángulo que forma con el eje $X$, se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \qquad (3.22)$$

$$\begin{aligned} x' &= r \cos (\theta - \alpha) = r \cos \theta \cos \alpha + r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha \\ y' &= r \operatorname{sen} (\theta - \alpha) = r \operatorname{sen} \theta \cos \alpha - r \cos \theta \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \qquad (3.23)$$

Reemplazando $x$ e $y$ de (3.22) en (3.23) se tiene

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha \\ y' &= y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \qquad (3.24)$$

Si dos sistemas $XY$ y $X'Y'$ satisfacen las ecuaciones (3.24), diremos que el sistema $XY$ ha sido rotado el ángulo $\alpha$.

Si de (3.24) despejamos los valores de $x$ e $y$ obtenemos el sistema equivalente:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha \\ y &= x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha \end{aligned} \tag{3.25}$$

**Nota.**— Es importante observar que el grado de una ecuación no se altera por efectos de una traslación o rotación. En efecto, supongamos una ecuación de grado $n$ referida a $XY$. Al aplicar las relaciones de transformación (3.21) ó (3.25), por ser estas lineales, el grado de la ecuación transformada referida a $X'Y'$ no podrá aumentar de grado, es decir, su grado es menor o igual que $n$. Supongamos que la nueva ecuación tiene grado menor que $n$. Podemos utilizar las relaciones (3.20) y (3.24) para referirla nuevamente a $XY$. Pero estas relaciones son también lineales, luego la ecuación referida a $XY$ no puede aumentar de grado y seguirá siendo éste menor que $n$. Esta contradicción prueba que el grado de la ecuación en $X'Y'$ tiene que ser $n$.

**Ejemplo 3.26.** Expresar la ecuación $xy = 1/2$ en el sistema $X'Y'$ obtenido al rotar los ejes $XY$ un ángulo de 45°.

En este caso conocemos el ángulo de rotación, $\alpha = 45°$, y bastará aplicar directamente las relaciones (3.25), reemplazando $x$ e $y$ en la ecuación $xy = 1/2$ :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) = 1/2 \quad ,$$

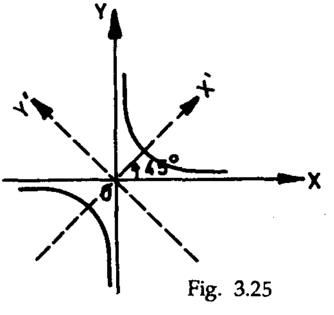



Fig. 3.25

o efectuando: $x'^2 - y'^2 = 1$.

La gráfica corresponde a la hipérbola equilátera de la fig. 3.25.

**Ejemplo 3.27.** Por medio de una rotación de los ejes coordenados, transformar la ecuación $4x + 3y = 12$ en otra que no tenga término en $y'$.

Reemplazando en la ecuación dada las expresiones $x = x' \cos \alpha -$ y' sen $\alpha$ , $y = x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha$ , se tiene:

$$4\,(x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha) + 3\,(x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha) = 12 \ ,$$

$$(4 \cos \alpha + 3 \operatorname{sen} \alpha)\, x' + (3 \cos \alpha - 4 \operatorname{sen} \alpha)\, y' = 12.$$

Si se desea eliminar el término en $y'$ entonces $\alpha$ debe ser tal que $3 \cos \alpha - 4 \operatorname{sen} \alpha = 0$, ó $tg\ \alpha = 3/4$. Con este valor de $\alpha$ la ecuación se reduce a $(4 \cos \alpha + 3 \operatorname{sen} \alpha)\, x' = 12$, y reemplazando los valores $\operatorname{sen} \alpha = 3/5$ y $\cos \alpha = 4/5$, se obtiene finalmente $x' = 12/5$.

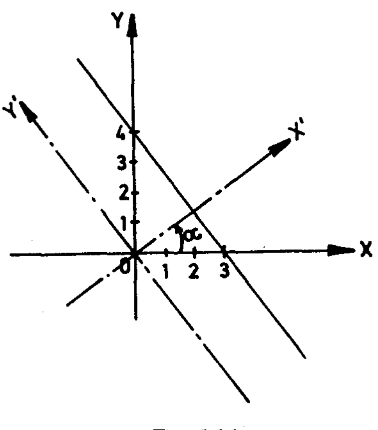



Fig. 3.26

**Ejemplo 3.28.** Hallar el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a los puntos (3, 4) y (–3, –4) es igual a $2\sqrt{26}$. Graficar la ecuación.

Por la condición dada sabemos que el lugar geométrico corresponde a una elipse de focos (3, 4) y (–3, –4) y eje mayor igual a $2\sqrt{26}$. Esta condición implica la relación:

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2} + \sqrt{(x+3)^2+(y+4)^2} = 2\sqrt{26}$$

ó

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2} = 2\sqrt{26} - \sqrt{(x+3)^2+(y+4)^2}$$

Elevando al cuadrado y simplificando:

$$3x + 4y + 26 = \sqrt{26}\sqrt{x^2+6x+y^2+8y+25} \; .$$

Elevando al cuadrado nuevamente y simplificando se tiene:

$$17x^2 + 10y^2 - 24xy = 26$$

Por los datos sabemos que la elipse respectiva tiene su centro en el origen y que por tanto si hacemos una rotación de ejes de manera que el eje $X'$ coincida con el eje focal, la ecuación referida a este nuevo sistema es de la forma

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad ,$$

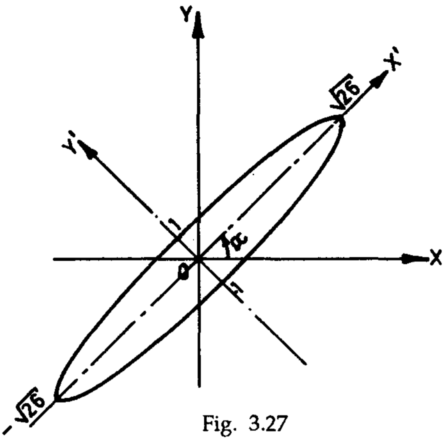



Fig. 3.27

es decir, la forma canónica o más simple de las ecuaciones de una elipse. Como uno de los focos es (3, 4), entonces el ángulo α de rotación es el correspondiente a $tg\ \alpha = 4/3$ ó $sen\ \alpha = 4/5$ y $cos\ \alpha = 3/5$. Obsérvese que no es necesario hallar el valor de α .

Las ecuaciones de transformación son:

$$x = \frac{3}{5} x' - \frac{4}{5} y'$$

$$y = \frac{4}{5} x' + \frac{3}{5} y' \quad ,$$

que reemplazadas en la ecuación obtenida nos da:

$$x'^2 + 26y'^2 = 26 \quad , \quad ó \quad \frac{x'^2}{26} + y'^2 = 1 \ ,$$

Lo que representa a una elipse con eje mayor en el eje $X'$ e igual a $2\sqrt{26}$ y eje menor en $Y'$ e igual a 2. La gráfica aparece en la figura 3.27.

## ECUACION COMPLETA DE 2° GRADO EN LAS VARIABLES X e Y

Una ecuación completa de segundo grado en las variables $x$ e $y$ es de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (3.26)$$

donde los coeficientes $A$, $B$ y $C$ no pueden ser iguales a cero a la vez. En las secciones anteriores hemos estudiado esta ecuación cuando $B = 0$ y verificamos que siempre representa una cónica (o casos especiales). Usando rotación de ejes probaremos que una ecuación de segundo grado con $B \neq 0$ puede reducirse a otra en donde $B = 0$. Esto nos permitirá utilizar los resultados de las secciones anteriores en las que no se consideraron ecuaciones con el término rectangular $xy$.

Consideremos la ecuación (3.26) con $B \neq 0$. Si rotamos los ejes $XY$ un ángulo $\alpha$ (el que tomaremos positivo y menor que 90°), las ecuaciones de transformación (3.25) son:

$$x = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha$$

$$y = x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha \ .$$

Reemplazando estos valores en la ecuación general (3.26) se tiene una ecuación de la forma:

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0 \tag{3.27}$$

donde:

$$\begin{aligned} A' &= A\ cos^2\ \alpha + B\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha + C\ sen^2\ \alpha \\ B' &= B\ (cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha) + (C - A)\ (2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha) \\ C' &= A\ \text{sen}^2\ \alpha - B\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha + C\ cos^2\ \alpha \\ D' &= D\ cos\ \alpha + E\ sen\ \alpha \\ E' &= -D\ sen\ \alpha + E\ cos\ \alpha\ . \end{aligned} \tag{3.28}$$

Si deseamos que en la nueva ecuación no aparezca el término $x'y'$ se tendrá que escoger $\alpha$ de tal modo que

$$B' = B\ (cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha) + (C - A)\ 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha$$

sea cero, esto es:

$$B\ cos\ 2\alpha + (C - A)\ sen\ 2\alpha = 0 \quad \text{ó}$$

$$ctg\ 2\alpha = \frac{A - C}{B}\ . \tag{3.29}$$

La última expresión tiene sentido pues $B \neq 0$.

Si $A = C$ entonces $ctg\ 2\alpha = 0$, y será suficiente tomar $\alpha = 45°$ para conseguir la eliminación del término $xy$.

Si utilizamos las relaciones (3.28) se puede comprobar (la dificultad es sólo algebraica) que se cumple la relación

$$B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC\ .$$

Es decir, que esta relación entre los coeficientes $A$, $B$ y $C$ es "invariante" por una rotación.

Si $\alpha$ es escogido de manera que verifique (3.29) entonces la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{3.26}$$

se transforma en

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0 \tag{3.30}$$

cumpliéndose además la relación

$$-4A'C' = B^2 - 4AC .$$

Por otro lado, hemos establecido (ver cuadro resumen pág. 170) que la ecuación (3.30) representa:

a) Una parábola (o casos excepcionales) si $A' = 0$ ó $C' = 0$, es decir si $-4A'C' = 0$;
b) Una elipse (o casos excepcionales) si $A'$ y $C'$ tienen los mismos signos, es decir si $-4A'C' < 0$;
c) Una hipérbola (o casos excepcionales) si $A'$ y $C'$ tienen signos diferentes, es decir si $-4A'C' > 0$.

Luego usando la igualdad $-4A'C' = B^2 - 4AC$, podemos conocer, dada una ecuación general completa de segundo grado, cual es el tipo de cónica que representa:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

| Relación entre los coeficientes | Tipo de Cónica | Casos excepcionales |
|---|---|---|
| $B^2 - 4AC = 0$ | Parábola | Dos rectas paralelas<br>Dos rectas coincidentes<br>Ningún lugar geométrico |
| $B^2 - 4AC < 0$ | Elipse | Un punto<br>Ningún lugar geométrico |
| $B^2 - 4AC > 0$ | Hipérbola | Dos rectas que se cortan |

**Ejemplo 3.29.** Dada la ecuación de segundo grado $8x^2 - 12xy + 13y^2 = 20$.

a) Determinar el tipo de cónica que representa
b) Simplificar la ecuación usando una rotación de los ejes.

a) $B^2 - 4AC = 144 - 416 = -272 < 0$, luego la ecuación corresponde a una elipse o a un caso especial.

b) El ángulo $\alpha$ que reduce la ecuación es tal que

$$ctg\ 2\alpha = \frac{A - C}{B} = \frac{5}{12} .$$

Escogiendo $\alpha$ entre $0°$ y $90°$ , $2\alpha$ estará entre $0°$ y $180°$; de este modo:

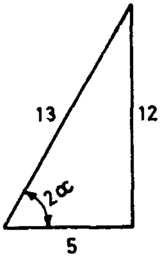


Fig. 3.28

$$cos\ 2\alpha = 5/13 \ , \ y$$

$$cos\ \alpha = \sqrt{\frac{1 + cos\ 2\ \alpha}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$sen\ \alpha = \sqrt{\frac{1 - cos\ 2\ \alpha}{2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones de rotación de ejes para luego reemplazarlas en la ecuación dada, se tiene:

$$8\left(\frac{3x' - 2y'}{\sqrt{13}}\right)^2 - 12\left(\frac{3x' - 2y'}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{2x' + 3y'}{\sqrt{13}}\right) + 13\left(\frac{2x' + 3y'}{\sqrt{13}}\right)^2$$

$$= 20$$

Simplificando:

$$10x'^2 + 17y'^2 = 20 \ , \qquad ó$$

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{17y'^2}{20} = 1$$

**Ejemplo 3.30.** Identificar el tipo de curva que representa la ecuación:

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0 .$$

Realizar una rotación y luego una traslación para eliminar el término $xy$ y los términos lineales (si es posible), respectivamente.

Siendo la ecuación de segundo grado y verificándose que $B^2 - 4AC = 16 - 16 = 0$, la curva es una cónica del tipo parabólico.

El ángulo $\alpha$ de rotación es tal que:

$$ctg\ 2\alpha = \frac{A - C}{B} = -\frac{3}{4} \ .$$

Como el ángulo $2\alpha$ es positivo y menor que 180°, entonces por tener cotangente negativa está en el segundo cuadrante y le corresponderá un coseno negativo y seno positivo:

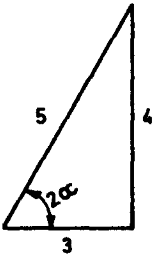



Fig. 3.29

$$\cos 2\alpha = -\frac{3}{5} \ , \quad sen\ 2\alpha = \frac{4}{5} \ , \text{ y}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$sen\ \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones de rotación de ejes y luego reemplazando estas en la ecuación dada se tiene:

$$4\left(\frac{x' - 2y'}{\sqrt{5}}\right)^2 - 4\left(\frac{x' - 2y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2x' + y'}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{2x' + y'}{\sqrt{5}}\right)^2 +$$

$$+ 8\left(\frac{x' - 2y'}{\sqrt{5}}\right) - 4\left(\frac{2x' + y'}{\sqrt{5}}\right) - 5 = 0$$

Simplificando:

$$5y'^2 - 4\sqrt{5}\,y' - 5 = 0 \ .$$

Completando cuadrados:

$$(\sqrt{5}\,y' - 2)^2 = 9 \quad \text{ó} \quad \left(y' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{9}{5}$$

Trasladando los ejes $X'Y'$ al punto

$$\left(0 \ , \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \quad ,$$

se obtiene $y''^2 = 9/5$, ecuación que representa dos rectas paralelas al eje $X''$ (caso excepcional de una parábola) :

$$y''_1 = \frac{3}{\sqrt{5}}, \qquad y''_2 = -\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

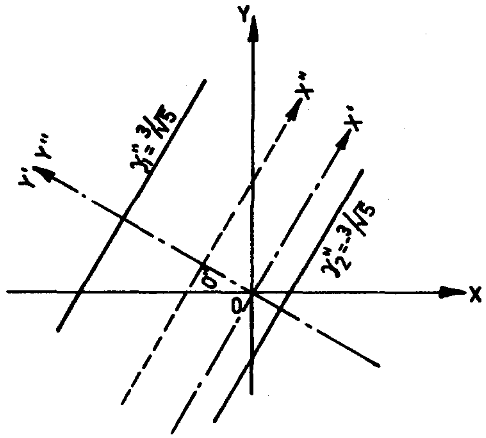



Fig. 3.30

## EJERCICIOS 3.4

En cada uno de los problemas 1 al 10 siguientes, determinar el tipo de cónica que representa la ecuación dada y por medio de rotación y traslación de ejes simplificarla.

1. $6x^2 + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$
2. $7x^2 - 48xy - 7y^2 + 70x + 10y + 100 = 0$
3. $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 3x + y + 1 = 0$
4. $x^2 + y^2 + 10xy - 6x - 6y + 2 = 0$
5. $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$
6. $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 2\sqrt{2}\,(x + y) - 6 = 0$
7. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 45x - 60y - 400 = 0$
8. $xy + x - y = 0$

9. $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 5 = 0$

10. $x^2 + 4xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$

11. El área que encierra una elipse de semiejes mayor y menor $a$ y $b$, respectivamente, está dada por la fórmula $A = \pi ab$.

    Calcular el área que encierra la elipse

$$x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 1 = 0$$

12. Dada la familia de cónicas: $(\lambda - 4)\, x^2 + \lambda\, y^2 + 2y + \lambda = 0$, analizar los valores del parámetro $\lambda$ que determinan que la ecuación represente una parábola, una elipse o una hipérbola.

## 3.7. SECCIONES PLANAS DE UN CONO CIRCULAR RECTO

La denominación de *secciones cónicas* que se acostumbra a dar a la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola, proviene de la época en que fueron descubiertas como intersecciones de un plano con un cono recto circular.

Consideremos un cono que se extiende a ambos lados de su vértice. Cada una de las partes en las que el vértice divide al cono se denominan hojas.

Sea $\beta$ el semi-ángulo del cono, es decir el ángulo que forma el eje

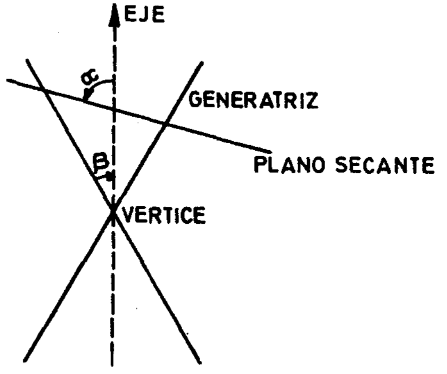



Fig. 3.31

*del cono con una generatriz. Supongamos un plano que corta al cono* formando un ángulo $\alpha$ con su eje.

Un corte longitudinal del cono y el plano secante se puede apreciar en la figura 3.31.

Los distintos tipos de secciones cónicas aparecen según sea la relación entre los ángulos $\alpha$ y $\beta$.

En esta forma se obtiene:

a) Una circunferencia, si $\alpha = 90°$ (plano perpendicular al eje).

b) Una elipse, si $\beta < \alpha < 90°$

c) Una parábola, si $\alpha = \beta$ (plano paralelo a una generatriz).

d) Una hipérbola, si $0 \leq \alpha < \beta$.

Las circunferencias y elipses son secciones que se obtienen cuando los planos cortan todas las generatrices de una de las hojas del cono. Las parábolas se obtienen cuando los planos cortan algunas de las generatrices de una hoja del cono. Las hipérbolas se obtienen cuando los planos cortan algunas de las generatrices de las dos hojas del cono (fig. 3.32).

## 3.8 HISTORIA Y APLICACIONES DE LAS SECCIONES CONICAS

El descubrimiento de las secciones cónicas se atribuye a los matemáticos griegos, aproximadamente en los años 375 – 325 A.C. Los estudios sobre las cónicas efectuados por Apolonio, quien vivió por los años 200 antes de Cristo, fueron unos de los logros más profundos de la geometría clásica griega. Se atribuye a Apolonio la definición de las secciones cónicas que hemos estudiado en este capítulo. Cerca de 2,000 años más tarde, Galileo (1564 - 1642) descubrió que un proyectil disparado horizontalmente desde lo alto de una torre, cae a la tierra siguiendo una trayectoria parabólica.

Por la misma época, Kepler (1571 - 1630), formuló la hipótesis de que los planetas se movían en órbitas elípticas con el Sol como foco.

Unos 80 años más tarde, Isaac Newton (1642 - 1724) fue capaz de descubrir que una trayectoria planetaria elíptica, implica las leyes de la gravedad universal.

Actualmente se aplican las propiedades de las secciones cónicas en la teoría de las órbitas de planetas, cometas y satélites artificiales. La teoría se aplica también, a las lentes de los telescopios, microscopios y

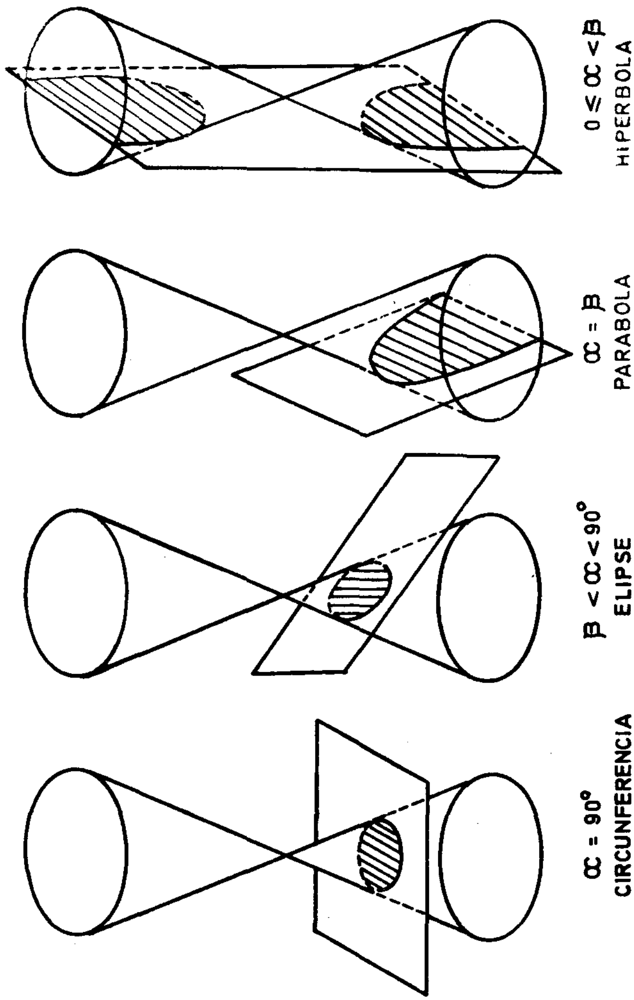



Fig. 3.32

otros instrumentos ópticos; a predicciones meteorológicas, comunicaciones por satélites, geodesia y construcciones de edificios y puentes.

Las cónicas también aparecen en el estudio de la estructura atómica y en los sistemas de mando a control remoto de barcos y aeroplanos.

Las superficies de revolución formadas por las secciones cónicas, tienen aplicaciones en las ciencias que tratan de la luz, del sonido y de las ondas de radio.

Estos ejemplos y muchos más que no se han indicado, demuestran la importancia de las secciones cónicas.