LA NOTACION DE LEIBNIZ

Por LUIS F. DIAZ

Profesor de Cálculo Infinitesimal en la Universidad Católica del Perú

La necesidad de estudiar las funciones en el campo continuo, tal como se realizan los fenómenos de la Naturaleza, determinó la invención del Cálculo Diferencial e Integral. En el proceso finito, los elementos de una función, $y = f(x)$, cuyos incrementos son $\triangle y$, $\triangle x$, quedan expresados cuando se conoce la ley de crecimiento,

$$(1) \qquad \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = G(x),$$

el incremento de la función,

$$(2) \qquad \triangle y = G(x) \triangle x$$

y la operación inversa o sumación,

$$(3) \qquad \Sigma G(x) \triangle x = f(x) + C$$

Las dificultades filosóficas que se presentan cuando queremos estudiar las funciones en el campo continuo utilizando conceptos análogos a los incrementos finitos, están en que éstos se transforman en los vagos e imponderables entes metafísicos que sirven de *"eslabón de tránsito"* a la continuidad. Sin embargo, los primeros pasos del Cálculo se realizaron con estos entes, y ha sido necesaria la labor de muchos años para dejar a esta rama de la Ciencia totalmente depurada de elementos que no corresponden a la sana lógica.

Newton inició su teoría de fluxiones con los llamados "elementos generadores" que no son otra cosa que los entes metafísicos

del continuo. Posteriormente llegó a su noción de fluxión por un método, precursor del actual, que veremos después.

Leibniz, en cambio, trabajó siempre con "los indivisibles" de Cavallieri o con sus "elementos diferenciales" a los que consideró en un estado "infinitamente pequeño". Toda la fundamentación del Cálculo de Leibniz está basada en consideraciones metafísicas.

Vamos a seguir paso a paso el proceso que condujo a la notación actual del Cálculo que con justa razón lleva el nombre de Notación de Leibniz.

Casi simultáneamente los dos inventores llegaron a esta solución: Si $y = f(x)$,

$$(4) \qquad \lim. \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim. \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = f'(x)$$

Naturalmente ni Newton ni Leibniz establecieron la fórmula tal como lo acabamos de hacer, pues ella no sólo constituye la regla moderna de hallar la derivada sino también su fundamentación lógica.

Sin duda Newton usó la intuición para determinar los "elementos generadores". No se explican de otro modo las reglas tan desprovistas de lógica y por lo mismo tan inciertas, que estableció. Dice en su Principia, si A y B son dos segmentos cuyos elementos generadores son a y b, el elemento generador del rectángulo AB, será $Ab + Ba$. (diferencial de un producto). En seguida demuestra la proposición admitiendo que si a y b fueran finitos, la diferencia de los rectángulos incrementados en dos estados simétricos a cero, daría el elemento generador del crecimiento continuo de AB. En efecto,

$$(A + \tfrac{1}{2}a)\ (B + \tfrac{1}{2}b) - (A - \tfrac{1}{2}a)\ (B - \tfrac{1}{2}b) = Ab + Ba,$$

regla que no tiene base lógica y que como lo hizo ver Hamilton falla en el caso del cubo,

$$(A + \tfrac{1}{2}\ a)^3 - (A - \tfrac{1}{2}\ a)^3 = 3A^2a + \tfrac{1}{4}\ a^3 \ .$$

cosa que no es cierta porque la diferencial del cubo es sólo $3A^2a$.

Poco tiempo después Newton, cambiando de criterio, dió la regla para derivar fundándose, aunque oscuramente, en un método análogo al de los límites.

Sea o (la letra o) un pequeño incremento de la variable x. El incremento de la función x^n será:

$$(x + o)^n - x^n = nox^{n-1} + \frac{n(n-1)oox^{n-2}}{2} +$$
$$+ \frac{n(n-1)\ (n-2)ooox^{n-3}}{2.3} + \ldots$$

Ahora, dice Newton, el incremento o es al segundo miembro de la fórmula anterior, como la unidad es a,

$$nx^{n-1} + n(n-1)ox^{n-2} + n(n-1)\ (n-2)ocx^{n-3} + \ldots$$

pero cuando o se desvanece hasta hacerse nula, el incremento instantáneo se reduce a,

$$nx^{n-1} \text{ (derivada de } x^n)$$

No cabe duda que este es el método actual del paso al límite expresado con poca claridad.

Como ya dijimos, Newton y Leibniz, llegaron a la fórmula (4). El primero la llamó "fluxión" y la representó con un punto sobre las letras

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f'(x) \quad \text{(fluxión de } y)$$

Para Newton toda variable era una fluxión del tiempo. De modo que $f(x)$ era para él una función de función.

Leibniz simbolizó la fórmula (4) cambiando la letra griega $\triangle$ por una d, y llamó a $f'(x)$ la derivada de $f(x)$. A los elementos individuales, dy, dx, los denominó "infinitamente pequeños" o "diferenciales". La fórmula de la derivada fue, pues,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Como es sabido, Leibniz determinó las fórmulas de las derivadas buscando las relaciones entre la ordenada y la longitud de la tangente en cada punto de la curva. Fue él quien probó que la derivada era el coeficiente angular de la tangente.

Hasta acá las cosas no tuvieron mayores inconvenientes, pero cuando se quiso extender la notación al proceso inverso, surgieron las dificultades de orden filosófico.

Newton había simbolizado el proceso de integración por la abreviatura latina omnia,

$$\text{Omn. } f'(x) = f(x) + C \qquad \text{(fluente)}$$

Leibniz, alargando una *S*, la expresó así:

$$\int f'(x) = f(x) + C \qquad \text{(integral)}$$

Ninguno de los dos añadía símbolo alguno que representara a *dx*, tal como lo hacemos hoy. Para Newton la fluente era: "todas las ordenadas". Para Leibniz, "el agrupamiento infinitamente compacto de ellas".

Esta manera de considerar las cosas y las vagas reglas de Newton atrajeron las críticas de los filósofos de la época, críticas que provocaron amargas controversias que perduraron hasta después de muertos los inventores.

Cincuenta años después, el obispo irlandés Berkeley, publicaba un libro, El Análisis, criticando los procedimientos del Cálculo para llegar a la derivada. Esta obra detuvo medio siglo el progreso de esta rama de la matemática. Fue necesario que Mme de Chatelet, amiga de Voltaire, divulgara en La Enciclopedia las ideas de Newton, para que los matemáticos del Continente se ocuparan de su fundamentación lógica.

En Alemania, siguiendo a Leibniz, se definían los infinitamente pequeños (diferenciales de hoy) diciendo que eran "cantidades menores que cualquiera magnitud finita, pero no nula". Se decía también que eran "elementos intermedios entre el cero y lo finito".

Leibniz cansado de la controversia filosófica había escrito: es indiferente el significado filosófico de los infinitamente pequeños; aun más, careciendo de él, se pueden establecer entre ellos operaciones que permitan llegar al cálculo exacto de las magnitudes.

En Inglaterra, al elemento generador de la fluxión se le llamaba: "el espíritu de la magnitud que se desvanece".

Lo que más intrigaba al obispo Berkeley eran las diferenciales de orden superior, que según él eran "el desvanecimiento de cosas desvanecidas".

De esta etapa metafísica, los cultivadores de la nueva Ciencia, pasaron a la de una matemática aproximativa. Para Wolff, "era el infinitamente pequeño una partícula de polvo añadida a la al-

tura de una montaña". Bernoulli y el Marqués de l'Hospital, los consideraban como estados tan pequeños de la magnitud que escapaban a la percepción mental.

La exactitud de los resultados, los obligó a concebir la existencia de "misteriosas compensaciones de errores".

Después de estas etapas se pasó, con valor espartano, a considerarlos como "verdaderos ceros". Euler se conformó con referirlos a la indeterminación que trae el cociente de dos ceros. Carnot les concedió un carácter hereditario diciendo, "que las magnitudes que se desvanecen conservan la relación que tuvieron antes de desaparecer". El matemático peruano Garaycochea, los definía como "una cosa que es y que no es cero", definición que provocó las crítica de Villarreal que había aceptado, francamente, la fundamentación metafísica de Leibniz.

Vino en seguida una cuarta etapa: la matemática.

Antes de entrar en ella debemos explicar el por qué del esfuerzo en buscarles significado a las diferenciales.

Se trataba de buscar una notación que recordara el proceso finito. La establecida para la derivada era semejante a la fórmula (1). Había que buscar para la integración algo semejante a la fórmula (3). Pero ocurre que en el proceso finito, la sumación parte del concepto de incremento ($\triangle y$), que es lo que se suma. Era pues necesario que en el proceso continuo existiera un concepto análogo al incremento $\triangle y$. Este concepto es la buscada diferencial de la función (dy).

Leibniz la despejó directamente de la notación de la derivada porque para él los infinitamente pequeños dy, dx, tenían existencia real y efectiva como entes metafísicos, pero los matemáticos posteriores, que abandonaron esta ingenua fundamentación y definieron la derivada y la integral como límites de relaciones y de suma de rectángulos, no podían considerar las diferenciales como símbolos algébricos. Tuvieron pues necesidad de darles existencia matemática.

Leibniz había intentado justificar la existencia de dy, dx; una existencia arbitraria y por lo mismo ambigua. Actualizado el proceso que él indicó en su teoría de Máximos y Mínimos, sería este: Si PN y NT son la ordenada y la longitud de la subtagente en el punto $P(x,y)$, y si tomamos un segmento de recta arbitrario y pe-

queño b sobre el eje de las abscisas, la diferencial de la función se definirá mediante esta proporción:

$$dy : b :: PN : NT$$

Para el caso que $y = x$, la diferencial será $dx = b$, por lo tanto puede escribirse,

$$dy = \frac{PN}{NT} dx.$$

Pero PN/NT es la derivada $f'(x)$, por tanto

$$dy = f'(x)dx.$$

Los matemáticos posteriores a Leibniz continuaron definiendo las diferenciales, partiendo de que dx podía ser un segmento arbitrario. Así D'Alembert la buscó en el desarrollo por la serie de Taylor del incremento finito,

$$\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x) = \triangle x f'(x) + \frac{(\triangle x)^2 f''(x)}{2} + \ldots\ldots$$

llamando diferencial al primer término del desarrollo,

$$dy = f'(x) \triangle x$$

Cuando $y = x$ entonces $dx = \triangle x$. Podía entonces escribirse

$$dy = f'(x)dx.$$

Este modo de proceder deja en nuestro espíritu una sensación de cosa aproximada.

Por último Cauchy, quien dió la fundamentación actual, basada en el concepto de límite (de la derivada y de la integral), definió las diferenciales dentro del mismo concepto.

Debemos advertir que desde Cauchy, los infinitamente pequeños no son ya las diferenciales de Leibniz sino variables que tienden a cero. Si i es un incremento infinitamente pequeño de la variable y hacemos $i = bk$, siendo b una cantidad finita y k otro infinitamente pequeño, puede escribirse,

$$\frac{[f(x + i) - f(x)]b}{i} = \frac{f(x + bk) - f(x)}{k}$$

Cauchy llamó diferencial de la función al límite a que tiende el segundo miembro de la fórmula anterior cuando k pasa a su límite cero. Pasando al límite y teniendo en cuenta que el primer miembro, cuando se pasa al límite, es la derivada, tendremos,

$$f'(x)b = dy$$

Si $f(x) = x$ entonces $b = dx$; luego

$$dy = f'(x)dx.$$

Por ingeniosas que sean estas definicionies matemáticas carecen de finalidad lógica. Con ellas no se definen las diferenciales sino la relación entre ellas, y una relación nada dice de los elementos que la forman. El carácter de arbitrariedad que todos dan a dx vuelve ambigua la noción de diferencial de la función.

La fundamentación moderna ha cortado por lo sano estas vaguedades quitándoles a las diferenciales todo significado filosófico o matemático. Son ahora simples elementos de notación.

Establecida para la derivada la notación

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

para conformarse con las fórmulas del proceso finito se conviene utilizar un elemento de notación dx, que actúa como factor, de modo que la operación inversa,

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

recuerde que la integración es el límite de la suma de rectángulos de altura $G(x)$ y de base $\triangle x$, cuando esta última llega a su límite cero. La diferencial de la función queda ahora expresada por el sub-integral

$$dy = f'(x)dx.$$

con lo cual toda la notación del proceso continuo es semejante a la del proceso finito con la diferencia de que mientras en este los símbolos $\triangle y$, $\triangle x$ son magnitudes finitas necesarias en el proceso operatorio, en el continuo son simples elementos de notación que si se desea pueden suprimirse, tal como lo hizo Newton y, en sus primeros tiempos, Leibniz.

No sería recomendable, por supuesto, abandonar estos símbolos. No sólo facilitan al espíritu la concepción de los problemas recordando lo que ocurre en lo finito, sino que por su similitud a este, pueden considerarse como "operadores" a los que se les aplica sin inconveniente las operaciones algébricas.

Considerando el proceso continuo como límite del proceso finito cuando el incremento de la variable tiende a cero, el Cálculo establece sus fórmulas sin que intervengan unidades individuales de trascurso de variables (incrementos). En sustitución, toma por unidad de variación el modo de variar del conjunto x de números reales,

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

y relaciona la variación de los demás conjuntos de números a esta nueva unidad; de este modo:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Los elementos dy, dx, son simples notaciones que recuerdan el proceso finito y advierten que se ha entrado a un nuevo campo (infinitesimal), abstracto, al que se llega, cuando existe, por el paso al límite.

Si ahora se nos pide la función cuya derivada es, por ejemplo, x^2, no sólo formularemos la integración con la S alargada de Leibniz, sino además añadiremos el factor de notación dx,

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C:$$

Luis F. DIAZ.