

# 2

## MÉTODO DE HARDY CROSS

---

El método de Cross (o de Distribución de Momentos) es una derivación del método general de Rigidez, donde, para el caso de estructuras cuyos giros de sus nudos sean los únicos grados de libertad (GL), se aplica el principio de superposición sobre las rotaciones, pero, esta vez en forma incremental.

En cada ciclo de este proceso iterativo se aplican incrementos de rotaciones, que generan incrementos de momentos flectores capaces de reestablecer el equilibrio estructural. El proceso culmina cuando los incrementos de momentos se tornan despreciables, según sea el grado de precisión deseado (usualmente 1/100 del mayor valor del momento de empotramiento). Los momentos flectores y las rotaciones finales se obtienen superponiendo los diversos incrementos calculados en cada ciclo.

### 2.1. Nomenclatura y Convención de Signos

**Desplazamientos:** Inicialmente se despreciarán las deformaciones axiales, por lo que cada barra  $i-j$  (Fig. 2.2) tendrá tres grados de libertad, o lo que es lo mismo, tres redundantes cinemáticas ( $RC = \theta_i, \theta_j, \delta$ ); posteriormente, en el acápite 5.3, se contemplarán los efectos de la deformación axial sobre los esfuerzos. Cabe adelantar que los efectos de la deformación axial son importantes cuando los pórticos son elevados, o cuando existe concentración de cargas verticales sobre una columna determinada, este último caso puede presentarse, por ejemplo, en una nave industrial con puente grúa (Fig. 2.1).

Las rotaciones ( $\theta_i$  y  $\theta_j$ ) se consideran positivas cuando están dirigidas en el sentido horario (Fig. 2.2), mientras que el desplazamiento relativo entre

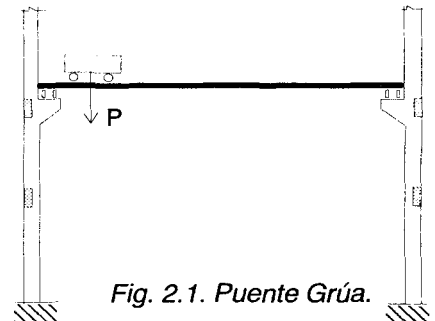


Fig. 2.1. Puente Grúa.

los extremos de una barra i-j ( $\delta_{ij} = \delta_{ji} = \delta$ ) será positivo cuando el ángulo  $R = \theta/L$  (formado por una recta que conecta los extremos de la barra deformada y la barra misma) está dirigido en el sentido horario.

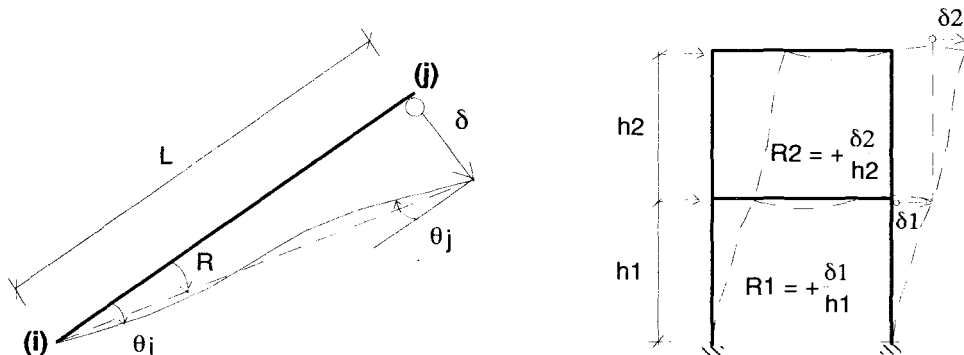


Fig. 2.2. Redundantes Cinemáticas Positivas ( $\theta_i, \theta_j, \delta$ ).

**Fuerzas de Sección:** En cada barra existen dos redundantes hiperestáticas, que son los momentos flectores  $M_{ij}$  y  $M_{ji}$ , positivos cuando están dirigidos en el sentido horario (Fig. 2.3). Estos momentos son redundantes hiperestáticas porque una vez que se les conozca (mediante el método de Cross), podrá determinarse las fuerzas cortantes ( $V_{ij}, V_{ji}$ ) y las fuerzas axiales ( $N_{ij}, N_{ji}$ ), por equilibrio de la barra y de los nudos, respectivamente.

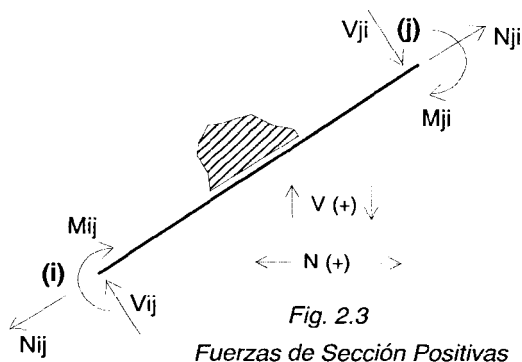


Fig. 2.3  
Fuerzas de Sección Positivas

Debe remarcarse que el hecho de despreciar en los pórticos de mediana altura, compuestos por barras esbeltas, los efectos de la deformación axial y por corte sobre los esfuerzos finales, no significa que en una barra la carga axial o la fuerza cortante sean nulas; por ejemplo, en el pórtico mostrado en la Fig. 2.4, sería absurdo decir que la fuerza cortante o la carga axial en las vigas o columnas son nulas. Es decir, siempre deberá contemplarse en todas las barras de la estructura la existencia de  $M, V$  y  $N$ .

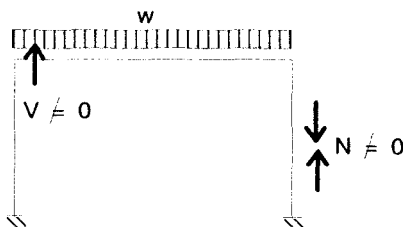


Fig. 2.4

### 2.2. Rigidez al Giro ( $K_{ij}$ ) y Factor de Transporte ( $f_{ij}$ )

Lo que se va a definir enseguida resulta válido incluso para el procedimiento matricial de cálculo, en vista que a veces se presentan casos fuera de lo común (por ejemplo, barras de sección variable), por lo que en tal situación, los programas de cómputo solicitan como información los valores de la rigidez al giro ( $K_{ij}$ ) y del factor de transporte ( $f_{ij}$ ).

Tanto la rigidez al giro (también llamada rigidez a la rotación o rigidez angular) como el factor de transporte (o factor de traslado) se definen sobre un elemento plano  $i-j$ , descargado, cuyo eje puede ser recto o curvilíneo y donde se puede o no adicionar a la deformación por flexión, la deformación por corte. Este elemento se encuentra sujeto a una rotación unitaria en un extremo mientras que el extremo opuesto está empotrado.

El momento capaz de generar esa rotación unitaria corresponde a la rigidez al giro en aquel extremo, mientras que el momento que surge en el extremo empotrado es proporcional al momento existente en el extremo que rota, en una cantidad denominada factor de transporte (ver la Fig. 2.5).

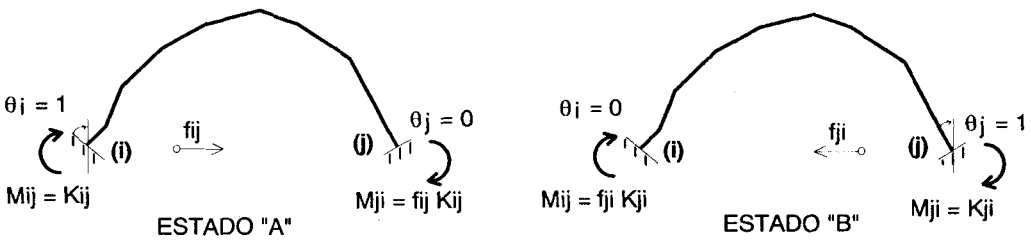


Fig. 2.5. Definición de  $K_{ij}$ ,  $f_{ij}$ ,  $K_{ji}$  y  $f_{ji}$ .

Aplicando el teorema de Betti entre los estados "A" y "B" de la Fig. 2.5, se tiene:

$$K_{ij} \times 0 + f_{ij} K_{ij} \times 1 = f_{ji} K_{ji} \times 1 + K_{ji} \times 0$$

De donde se demuestra que en toda barra que se comporte elásticamente debe cumplirse que:

$$K_{ij} f_{ij} = K_{ji} f_{ji}$$

También, aplicando la regla del espejo, puede demostrarse que en toda barra que presente simetría en forma (Fig. 2.6) se cumple que  $K_{ij} = K_{ji}$  y  $f_{ij} = f_{ji}$ .

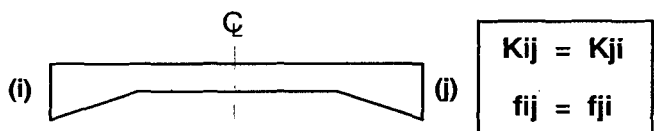


Fig. 2.6. Barra Simétrica en Forma.

**2.3. Caso Particular de Barras Prismáticas con Eje Recto, Deformables por Flexión. Reducción de Grados de Libertad por Condición de Extremo. Concepto de Barra Equivalente**

**a.- Barra Continua.** Es aquella barra que no presenta conexión articulada ni deslizante en ninguno de sus extremos. Este es el tipo de barra que se presenta en la mayoría de los pórticos, pudiendo ser su sección transversal de forma rectangular, L, T, etc. (Fig. 2.7). Como esta barra presenta simetría en forma se tendrá:  $K_{ij} = K_{ji}$  y  $f_{ij} = f_{ji}$ .

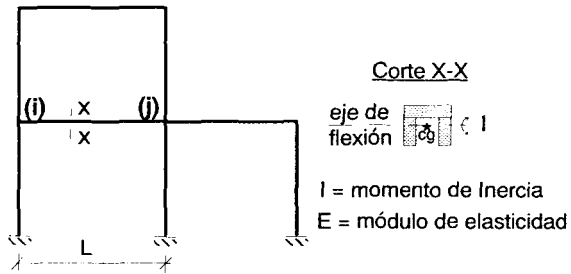


Fig. 2.7. Barra i-j Continua.

Imprimiendo una rotación unitaria en "i" y fijando al extremo "j" (Fig. 2.8), se obtiene por pendiente y deflexión:

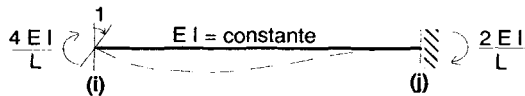


Fig. 2.8. Cálculo de  $K_{ij}$  y  $f_{ij}$ .

$$K_{ij} = 4 E I / L = K_{ji}$$

$$f_{ij} = \frac{1}{2} = f_{ji}$$

**b.- Barra Rotulada en "j".** En este caso no se puede aplicar en forma directa la definición de rigidez al giro, porque  $\theta_j$  es diferente de cero; sin embargo, aprovechando la condición de extremo:  $M_{ji} = 0$ , esta barra puede transformarse en una barra equivalente a una continua, donde  $\theta_j$  no es grado de libertad (como si  $\theta_j$  fuese cero), siempre y cuando su rigidez  $K_{ij}$  se calcule sobre la barra original (ver la Fig. 2.9).

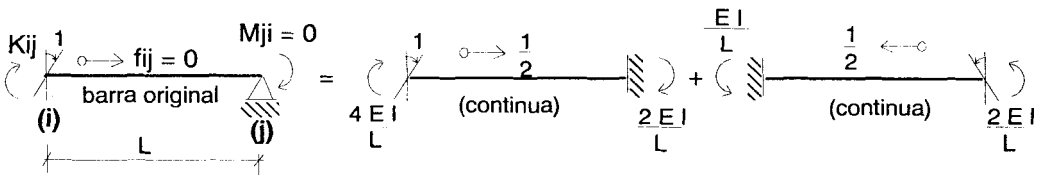


Fig. 2.9. Cálculo de  $K_{ij}$  y  $f_{ij}$  en una Barra Articulada en "j".

Por superposición de los dos estados mostrados en la Fig. 2.9, se obtiene:

$$K_{ij} = 3 E I / L = \frac{3}{4} K \text{ (barra continua)}$$

$$f_{ij} = 0 \text{ (porque } M_{ji} = 0 \text{)}$$

$$K_{ji} = 0 \text{ (porque la rótula no tiene rigidez)}$$

Nótese que la rigidez al giro de la barra articulada es  $\frac{3}{4}$  de la rigidez correspondiente a una barra continua, como si al rotularse un nudo de la barra continua se perdiese el 25% de su rigidez flectora.

Por otro lado, se afirma que  $\theta_j = 0$  en la barra equivalente (Fig. 2.10) porque de conocerse  $\theta_i$ , entonces puede calcularse  $M_{ij}$  como:  $M_{ij} = K_{ij} \theta_i$ , al resultar esta expresión independiente de  $\theta_j$  (como si  $\theta_j$  se desvaneciera), se concluye que  $\theta_j$  no es grado de libertad; esto ocurre siempre y cuando  $M_{ji} = 0$ , o cuando  $M_{ji}$  adopta un valor conocido, por ejemplo, en las vigas con volados, el voladizo se reemplaza por un momento externo de magnitud conocida ( $M_{ji} = M_o$ ) más una carga concentrada que es absorbida por el apoyo.

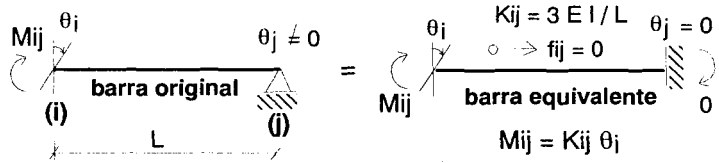


Fig. 2.10. Barra Equivalente a Otra Articulada.

Otra forma de demostrar que  $\theta_j$  no es grado de libertad es viendo si está relacionada linealmente con  $\theta_i$ . En la Fig. 2.11 se observa que  $M_{ji} = 2EI\theta_i/L + 4EI\theta_j/L = 0$ , de la cual se logra la relación lineal:  $\theta_j = -\theta_i/2$ .

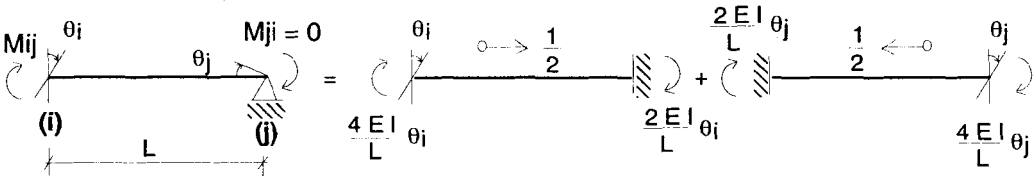
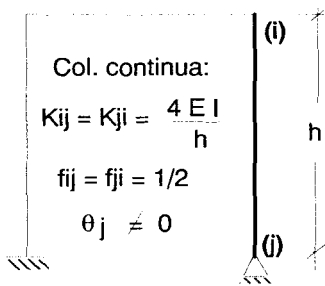


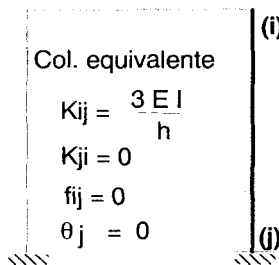
Fig. 2.11.

Debe indicarse que la reducción de grados de libertad se realiza con el objeto de facilitar el análisis manual (Fig. 2.12b); en cambio, si se usa un programa de cómputo, la que “trabaja” es la computadora y, en ese caso, la barra con apoyo rotulado se analiza como una barra continua (Fig. 2.12a), a no ser que la rótula se presente interiormente, tal como ocurre cuando una viga se articula plásticamente en uno de sus extremos (Fig. 2.12c).



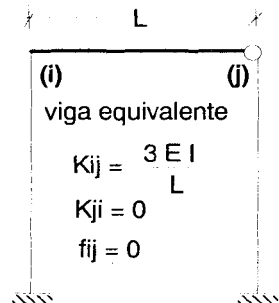
(computacional)

Fig. 2.12a



(manual)

Fig. 2.12b



(manual o computacional)

Fig. 2.12c

c.- **Barra con Conexión Deslizante en "j"**. Este caso se presenta como un producto del modelaje estructural, en barras que tengan simetría en forma y en sollicitación; es decir, a diferencia del apoyo articulado, la conexión deslizante no es una conexión real. Aquí tampoco puede aplicarse directamente la definición de rigidez al giro, porque el deslizamiento  $\delta$  es diferente de cero, pero, aprovechando la condición de extremo:  $V_{ji} = 0$ , la barra puede reducirse a una equivalente, donde  $\delta$  no sea grado de libertad ( $\delta = 0$ ), siempre y cuando su rigidez  $K_{ij}$  se calcule sobre la barra original; ver la Fig. 2.13.

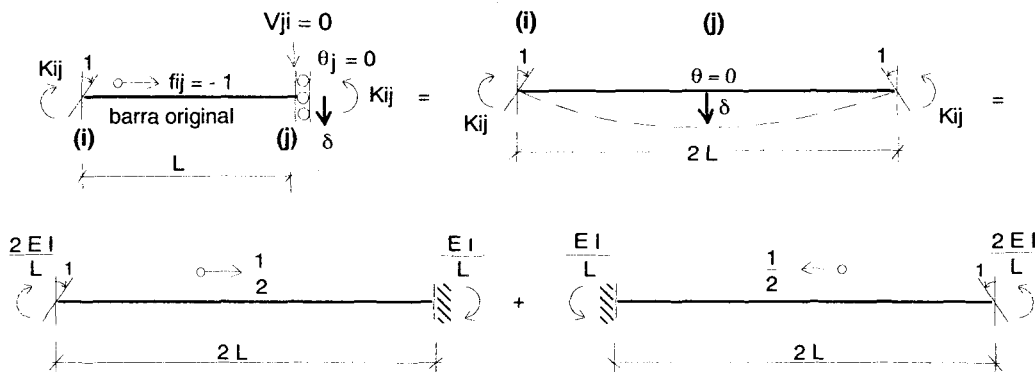


Fig. 2.13. Cálculo de  $K_{ij}$  y  $f_{ij}$  en una Barra con Conexión Deslizante en "j"

Por superposición de los dos estados mostrados en la Fig. 2.13, se obtiene:

$$K_{ij} = EI / L = \frac{1}{4} K \text{ (barra continua)}$$

$$f_{ij} = -1 \text{ (ya que por equilibrio: } M_{ji} = -K_{ij} = f_{ij} K_{ij})$$

Nótese que la rigidez de la barra con conexión deslizante es la cuarta parte de la rigidez correspondiente a una barra continua, como si la barra continua perdiese el 75% de su rigidez flectora cuando uno de sus extremos se desliza sin rotar.

Se dice que  $\delta = 0$  en la barra equivalente (Fig. 2.14) porque si se conociera  $\theta_i$ , entonces puede calcularse  $M_{ij}$  como:  $M_{ij} = K_{ij} \theta_i$ , expresión que es independiente de  $\theta_j$  y  $\delta$ ; es decir  $\delta$  y  $\theta_j$  no son grados de libertad, siempre y cuando  $V_{ji} = 0$ , lo propio ocurre cuando  $V_{ji}$  adopta un valor determinado.

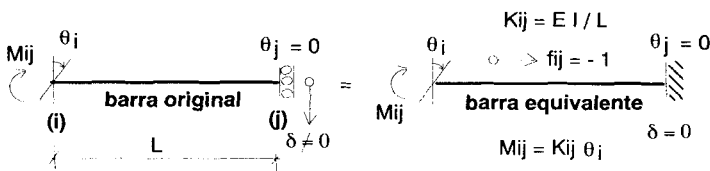


Fig. 2.14. Barra Equivalente a Otra con Apoyo Deslizante.

Otra forma de demostrar que  $\delta$  no es grado de libertad es viendo si  $\delta$  está relacionada linealmente con  $\theta_i$ . En la Fig. 2.15 se observa que  $V_{ji} = 6EI\theta_i/L^2 - 12EI\delta/L^3 = 0$ , de la cual se logra la relación lineal:  $\delta = \theta_i L/2$ .

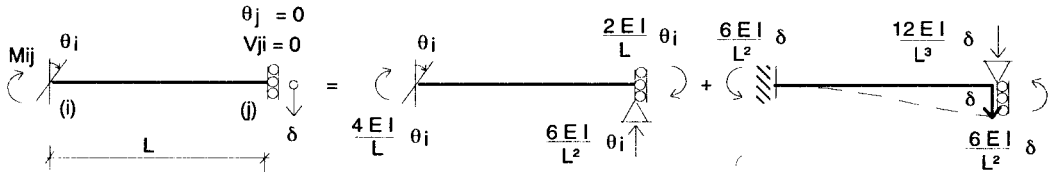


Fig. 2.15

Nuevamente se hace notar que la reducción de grados de libertad se realiza con el objeto de facilitar el análisis manual (Fig. 2.16b); en cambio, si se hace uso de un programa de cómputo, puede trabajarse con la barra continua (Fig. 2.16a).

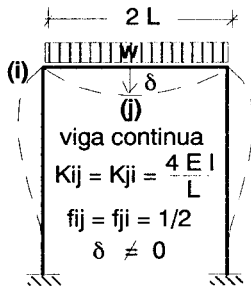


Fig. 2.16a (computacional)

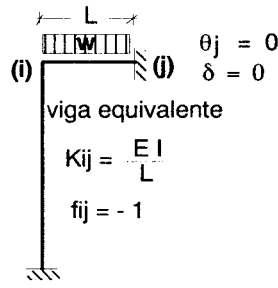


Fig. 2.16b (manual)

### 2.4. Rigidez al Giro Relativa o Coeficiente de Rigidez a Flexión ( $k_{ij}$ )

En primer lugar, se define a la rigidez estándar de la estructura ( $K_o$ ) a un valor que uno lo proporciona, por ejemplo, usualmente se adopta  $K_o = 1000 \text{ cm}^3 = 0.001 \text{ m}^3$ . Por otro lado, la rigidez al giro absoluta ( $K_{ij}$ ) depende del módulo de elasticidad ( $E$ ), el cual al ser un valor muy alto ( $E$  (concreto)  $2'000,000 \text{ ton/m}^2$ ;  $E$  (acero)  $21'000,000 \text{ ton/m}^2$ ), dificulta el análisis manual; por lo que para trabajar con valores pequeños y adimensionales, se define al coeficiente de rigidez a flexión de una barra  $i$ - $j$  como:

$$k_{ij} = \frac{K_{ij}}{4 E K_o}$$

De esta manera, para una barra prismática deformable por flexión se tendrá:

$$k_{ij} \text{ (continua)} = \frac{4 EI/L}{4 E K_o} = \frac{1}{L K_o}$$

$$k_{ij} \text{ (} \begin{array}{c} \downarrow \text{-----} \Delta \end{array} \text{)} = 3/4 k \text{ (continua)}$$

$$k_{ij} \text{ (} \begin{array}{c} \downarrow \text{-----} \text{Ø} \end{array} \text{)} = 1/4 k \text{ (continua)}$$

Nótese que el coeficiente de rigidez a la flexión “kij” es proporcional a la relación  $I / L$ . En el caso de vigas continuas, donde la sección transversal es la misma en todos los tramos (como el aligerado mostrado en la Fig. 2.17), no se necesita calcular el momento de inercia ( $I$ ) de la sección transversal, en esos casos, puede adoptarse  $K_0 = I$  (en magnitud numérica), con lo cual, las rigideces resultan proporcionales a la inversa de la longitud de los tramos ( $L_i$ ); sin embargo, si se desea calcular las rotaciones de los nudos, o si existiese desplazamiento de apoyo (donde el momento de empotramiento depende de “ $I$ ”), será indispensable calcular el valor del momento de inercia.

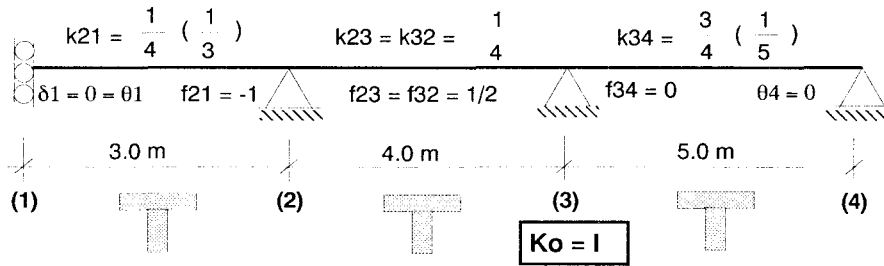


Fig. 2.17. Coeficientes  $k_{ij}$  cuando los tramos tienen igual “ $I$ ”

**2.5. Coeficiente de Distribución de Momentos ( $\alpha_{ij}$ ), Momento Distribuido ( $D_{ij}$ ), Momento Transportado ( $T_{ij}$ ) y Momentos de Empotramiento ( $u_{ij}$ )**

Para definir  $\alpha_{ij}$ ,  $D_{ij}$ ,  $T_{ij}$  y  $u_{ij}$ , se trabajará con el ejemplo algebraico mostrado en la Fig. 2.18, donde el único grado de libertad rotacional es  $\Delta\theta_i$ ; se entiende que al emplearse el concepto de barra equivalente, el deslizamiento del nudo “ $n$ ” así como la rotación del nudo “2”, se reducen a cero.

La estructura adoptada para este ejemplo es completamente general, es decir, las barras pueden ser de sección variable o constante, su eje puede ser recto o curvo, se puede o no incluir la deformación por corte, etc., por lo que se trabajará con las rigideces al giro absolutas ( $K_{ij}$ ). Asimismo, la sollicitación es completamente general, pudiendo existir cambios de temperatura ( $\Delta T$ ), desplazamiento de apoyo conocido ( $\Delta$ ), etc.

La estructura original se ha desdoblado en la superposición de dos estados, los cuales se analizan independientemente, tal como se muestra en las Figs. 2.19 y 2.20.

En el Estado 0 (conocido como Estructura Primaria o Estructura Fija, Fig. 2.19), se ha impedido la rotación del nudo “ $i$ ” y se ha aplicado todas las sollicitaciones existentes. En este estado surgen momentos de empotramiento ( $u_{ij}$ ) en los extremos de las barras, que al actuar sobre el nudo “ $i$ ” en sentido contrario, dan lugar a una reacción cuya magnitud es:  $M_i = M_{oi} - \sum u_{ij}$ , este momento no existe en la estructura original.

Para reestablecer el equilibrio, eliminando al momento  $M_i$ , debe agregarse el Estado 1 (Fig. 2.20), donde al estar descargadas las barras, se podrá aplicar directamente las definiciones de  $K_{ij}$  y  $f_{ij}$ . Como única solicitación en este estado se "libera" al nudo "i", imprimiendo una rotación  $\Delta\theta_i$  de tal magnitud que en los extremos de las barras surjan unos momentos distribuidos  $D_{ij} = K_{ij} \Delta\theta_i$  (positivos en el sentido horario), los que al actuar en sentido contrario sobre el nudo "i" equilibran a  $M_i$ .

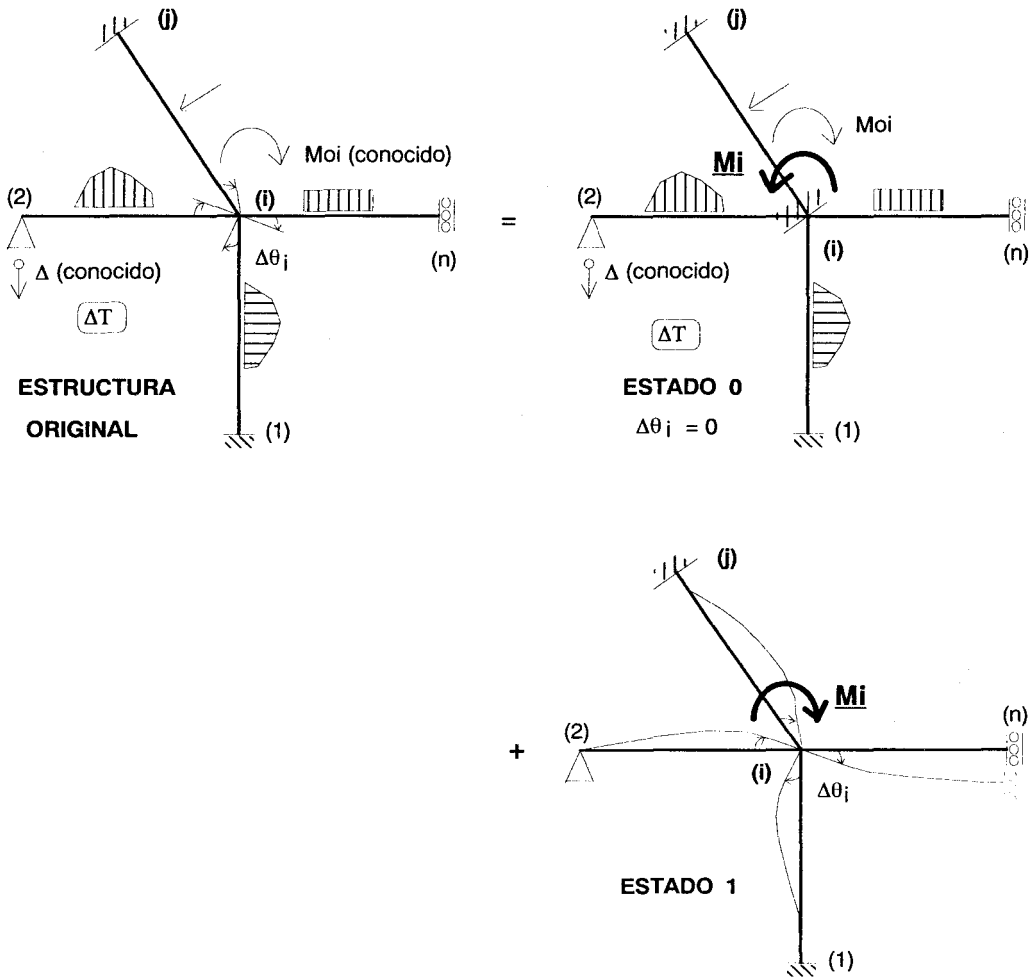


Fig. 2.18. Ejemplo Algebraico para el Cálculo de  $\alpha_{ij}$ ,  $D_{ij}$ ,  $T_{ij}$  y  $u_{ij}$ .

En el Estado 0, cabe indicar que los momentos de fijación ( $u_{ij}$ ) son positivos cuando actúan sobre la barra en sentido horario. Asimismo, para las barras con conexión deslizante o rotulada (cuyos grados de libertad han sido reducidos a cero), los momentos de empotramiento  $u_{ij}$  deben calcularse sobre la barra original, o también, tal como se muestra en la Fig. 2.19a; en cambio, de no reducirse los grados de libertad, los momentos de empotramiento  $u_{ij}$  deben calcularse considerando que la barra está biempotrada.

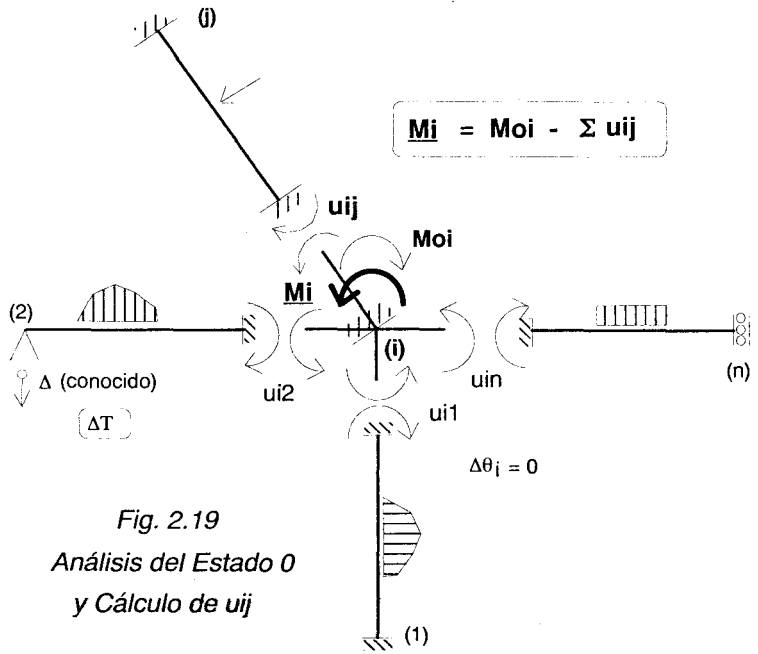


Fig. 2.19  
Análisis del Estado 0  
y Cálculo de  $u_{ij}$

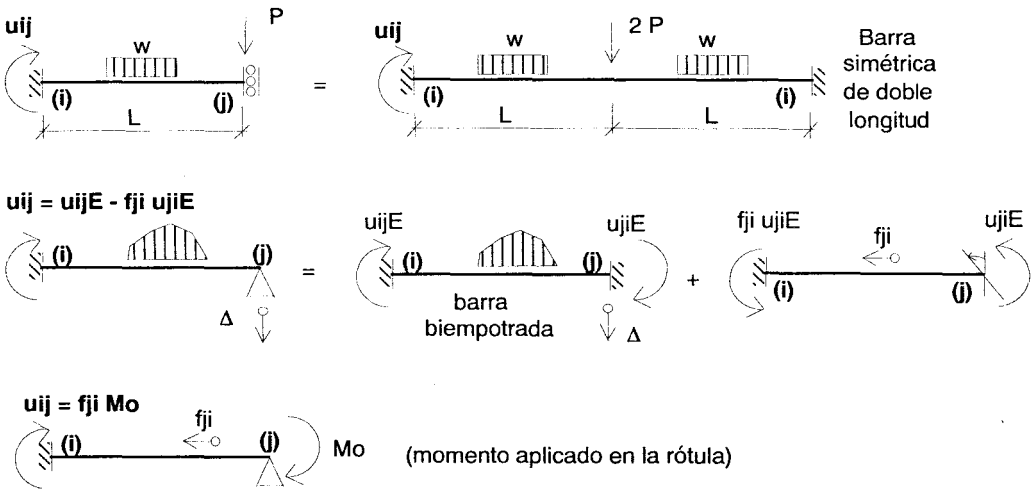


Fig. 2.19a. Cálculo de  $u_{ij}$  Contemplando la Reducción de Grados de Libertad.

En la Fig. 2.20 se aprecia:

$$D_{ij} = K_{ij} \Delta \theta_i$$

Como  $M_i = \sum D_{ij}$ , y puesto que el giro en "i" es único, se tendrá:

$$M_i = \Delta \theta_i \sum K_{ij}$$

De la cual, se puede despejar el incremento de rotación necesario de aplicar en "i" para poder reestablecer su equilibrio:

$$\Delta \theta_i = M_i / \sum K_{ij}$$

Luego podrá calcularse  $D_{ij}$  como:

$$D_{ij} = K_{ij} M_i / \sum K_{ij}$$

Se define al coeficiente de distribución de momentos  $\alpha_{ij}$  como:

$$\alpha_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sum K_{ij}}$$

Por lo que el momento distribuido puede calcularse aplicando la siguiente expresión:

$$D_{ij} = \alpha_{ij} M_i$$

Finalmente, el momento que se transporta desde el extremo que rota (i), hacia el extremo empotrado (j) será:

$$T_{ji} = f_{ij} D_{ij}$$

Por otro lado, observando la expresión que define a  $\alpha_{ij}$ , se puede mencionar lo siguiente:

- a.- Cada barra i-j absorberá un porcentaje de  $M_i$ , en términos de  $D_{ij}$ , proporcionalmente a su rigidez al giro  $K_{ij}$
- b.- Sumando los coeficientes  $\alpha_{ij}$  de todas las barras que concurran al nudo "i", debe obtenerse:  $\sum \alpha_{ij} = \sum (K_{ij} / \sum K_{ij}) = \sum K_{ij} / \sum K_{ij} = 1$ . De lo contrario, el nudo estará en desequilibrio. Esta expresión permite verificar el cálculo de  $\alpha_{ij}$ .

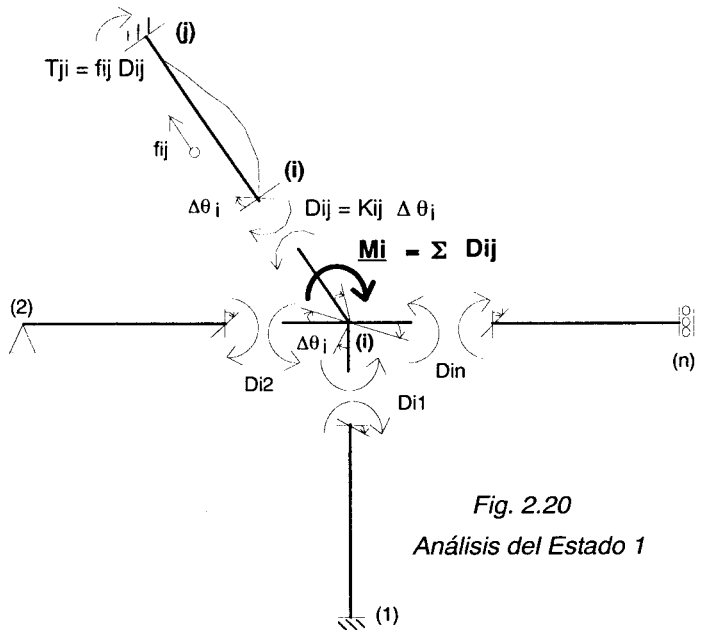


Fig. 2.20  
Análisis del Estado 1

- c.- Una barra que concurre a un nudo que no rota (inclusive en aquellos donde la rotación no sea grado de libertad), tendrá  $\alpha_{ij} = 0$ . Esto puede interpretarse como si la barra concudiese a una gran pared, cuya rigidez flectora es infinita (Fig. 2.21):

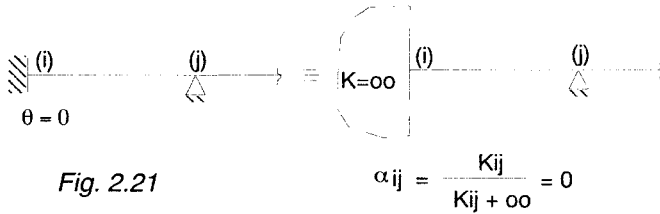
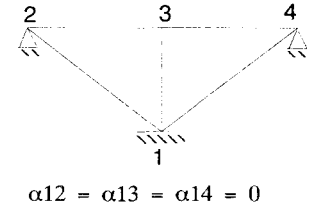


Fig. 2.21



- d.- Cálculo de  $\alpha_{ij}$  en función de los coeficientes de rigidez a la flexión ( $k_{ij}$ ). Sabiendo que  $K_{ij} = 4 E K_0 k_{ij}$ , se puede obtener:

$$\alpha_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sum K_{ij}} = \frac{4 E K_0 k_{ij}}{\sum 4 E K_0 k_{ij}} = \frac{k_{ij}}{\sum k_{ij}}$$

Sin embargo, cuando los módulos de elasticidad de las barras varían (Fig. 2.22), o cuando se presentan casos especiales (barras de sección variable, etc.), deberá trabajarse con la rigidez al giro absoluta ( $K_{ij}$ ).

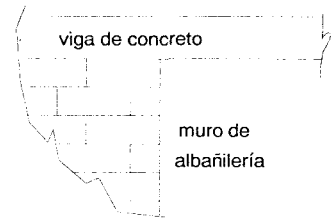
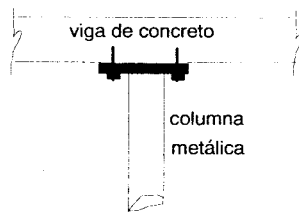


Fig. 2.22

## 2.6. Proceso de Liberación Alternativa. Ejemplo Algebraico de Ilustración

Mediante el ejemplo algebraico (completamente general) mostrado en la Fig. 2.23, se ilustra la manera de aplicar el principio de superposición en forma incremental sobre las rotaciones, en el denominado Proceso de Liberación Alternativa. Para un mejor entendimiento del proceso, debe también observarse las Figs. 2.18, 2.19 y 2.20, recordándose que la liberación de un nudo se realiza para reestablecer su equilibrio, empotrando el extremo opuesto.

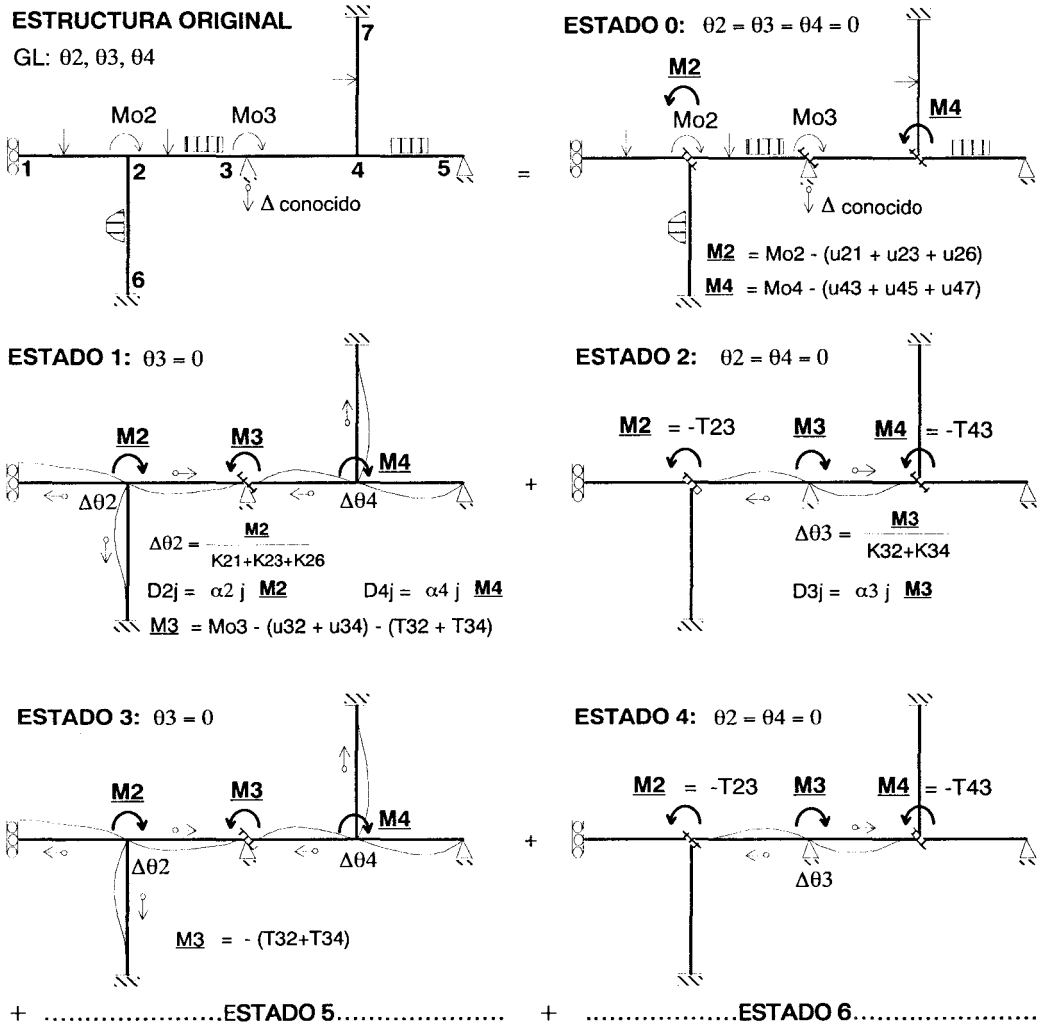


Fig. 2.23. Ejemplo Algebraico del Proceso de Liberación Alterna.

**Observaciones:**

- 1.- La liberación de los nudos alternos ( $i = 2, 4$ ) expresa el reestablecimiento del equilibrio con el consecuente desequilibrio de los nudos opuestos empotrados ( $j = 3$ ).
- 2.- Los nudos donde las rotaciones no son grados de libertad no se necesitan liberar. Nótese que en ningún estado se ha introducido restricciones al movimiento del apoyo deslizante o articulado.
- 3.- Se cumple un ciclo del proceso iterativo cuando se han liberado todos los grados de libertad. Cada ciclo está compuesto por la superposición de 2 estados:

Ciclo 1 = Estado 1 + Estado 2; Ciclo 2 = Estado 3 + Estado 4; etc.

Nótese que los estados impares son semejantes, al igual que los estados pares.

- 4.- El proceso es convergente a cero, debido a que en los ciclos altos los momentos desequilibrados ( $M_i$ ) son producidos por los momentos transportados y estos van disminuyendo en magnitud, ya que  $\alpha_{ij} < 1$  y usualmente  $f_{ij} < 1$ .

Ciclos altos:  $M_i = -\Sigma T_{ij}$        $D_{ij} = \alpha_{ij} M_i$        $T_{ji} = f_{ij} D_{ij}$

5.- Cálculo de  $\theta_i$ :

$$\theta_i = \sum_{\text{ciclos}} \Delta \theta_i = \sum_{\text{ciclos}} \frac{M_i}{\sum_j K_{ij}} = \frac{\sum_{\text{ciclos}} M_i}{\sum_j K_{ij}} = \frac{\sum_{\text{ciclos}} M_i}{4 E K_o \sum_j k_{ij}}$$

- 6.- Los momentos finales ( $M_{ij}$ ) se calculan por superposición de los momentos hallados en los diversos estados ( $E_i$ ):

$$M_{ij} = \underbrace{u_{ij}}_{E_0} + \underbrace{D_{ij}}_{E_1} + \underbrace{T_{ij}}_{E_2} + \underbrace{D_{ij}}_{E_3} + \underbrace{T_{ij}}_{E_4} + \dots + \underbrace{D_{ij}}_{E_n}$$

ciclo 1
ciclo 2

El proceso culmina distribuyendo momentos para no desequilibrar los nudos con los momentos de transporte; salvo que el nudo pueda absorber el momento desequilibrado, por ejemplo, una conexión de empotramiento.

**2.6.1. Solución de un Aligerado**

Analizar el aligerado del edificio cuya planta típica se muestra en la Fig. 2.24. Se hace notar que este ejemplo es hipotético, ya que la placa está mal dispuesta en planta, lo que puede causar problemas torsionales por efectos sísmicos.

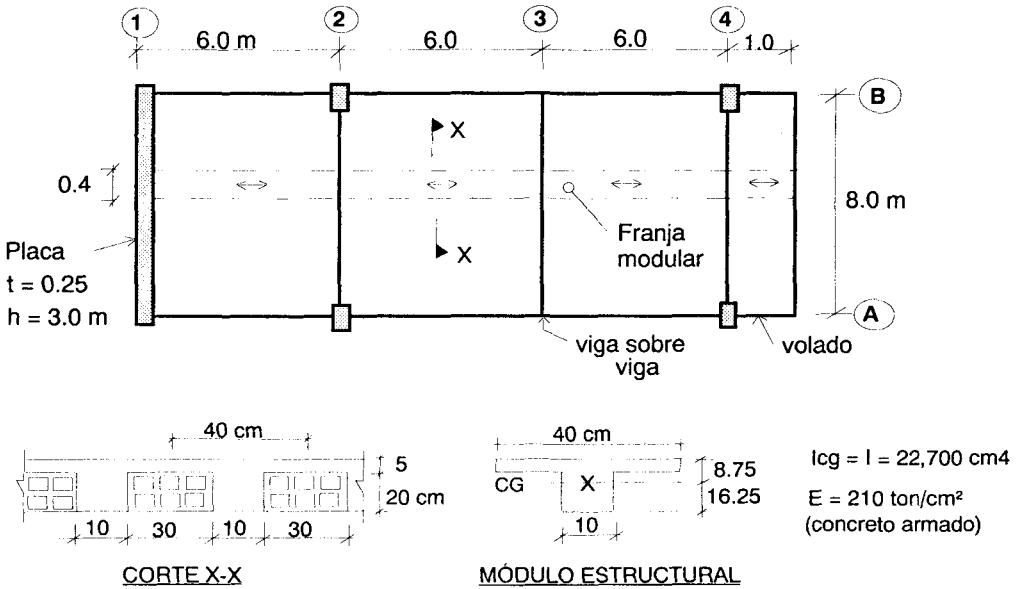


Fig. 2.24. Planta Típica de un Edificio.

Cargas: peso propio	=	0.35 ton/m <sup>2</sup>
acabados	=	0.10
tabiquería móvil	=	0.10
s/c	=	0.30
-----		
w	=	0.85 ton/m <sup>2</sup>

*Nota: en realidad el análisis por carga permanente debe desdoblarse del análisis por sobrecarga (s/c), ya que los factores de seguridad son diferentes y también porque la s/c puede actuar en forma alternada.*

El modelaje de la placa se hará empotrando sus extremos lejanos (Fig. 2.25), suponiendo que no existe repercusión de los giros de un nivel a otro; esta hipótesis es aceptada por la Norma de Concreto Armado E-060 y por el Reglamento norteamericano ACI para el análisis por carga vertical.

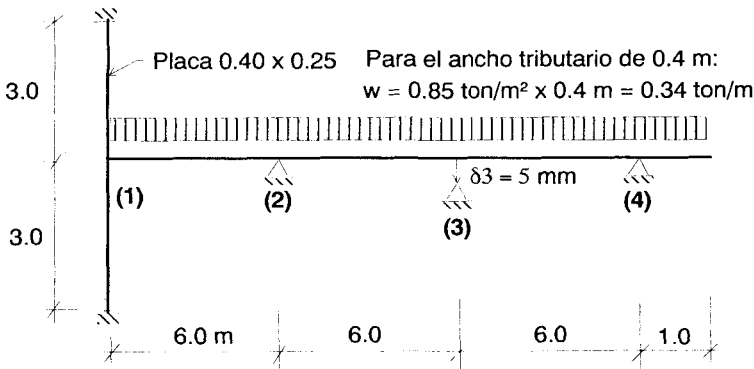


Fig. 2.25. Modelo Matemático del Aligerado (elevación).

La viga del eje 3 apoya sobre las vigas de los ejes A y B, mientras que las vigas de los ejes 2 y 4 apoyan sobre columnas; puesto que la luz  $L_{24} = 12$  m es considerable, existirá un desplazamiento vertical importante en el apoyo 3. Se supondrá que  $\delta_3$  es igual a 5 mm; este valor puede calcularse analizando uno de los pórticos A o B de la manera mostrada en la Fig. 2.26.

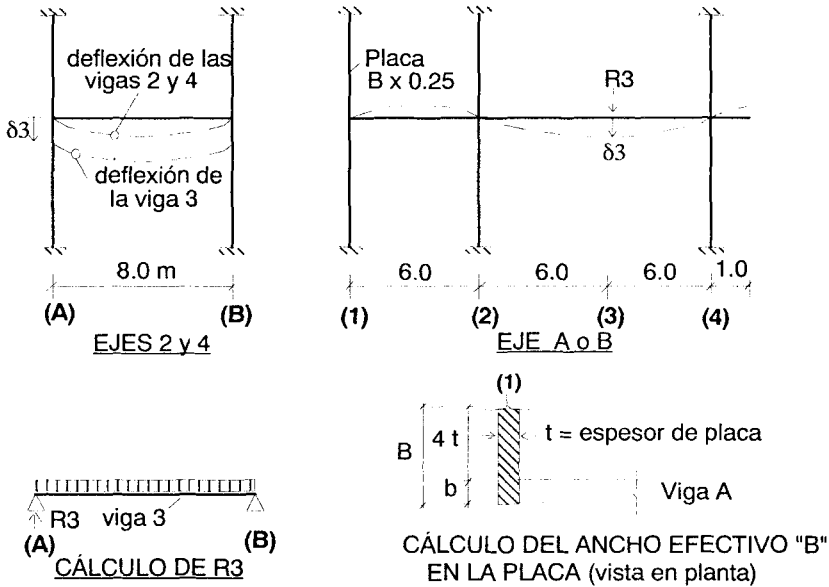


Fig. 2.26. Cálculo de "δ3".

En el análisis del eje A (o B), la placa del eje 1 debe ser modelada considerando una sección transversal con un ancho efectivo igual a "B" y un peralte igual a "t"; esto se debe a que al rotar la viga del eje A (de ancho "b") deforma sólo a una porción de la placa. Para fines prácticos puede usarse  $B = b + 4t$ , aunque algunos investigadores proponen otras expresiones en función de la longitud de la placa, de su altura, etc.

Retornando al ejemplo, en la placa se tiene:  $I / L = 40 \times 25^3 / (12 \times 300) = 174 \text{ cm}^3$ ; como concurren dos placas al nudo 1 se tendrá:  $I / L$  (dos placas) =  $348 \text{ cm}^3$ . Por otro lado, en el aligerado 1-2 se tiene:  $I / L$  (aligerado) =  $22700 / 600 = 38 \text{ cm}^3$ .

Según la Norma E-060, cuando una barra concurre a otra que es 8 veces más rígida, puede suponerse que esa barra está empotrada sobre la más rígida. Por lo tanto, se supondrá que el aligerado 1-2 está empotrado sobre la placa en el nudo 1 (en realidad  $\alpha_{12} = 38 / (38 + 348) = 0.1$ ).

Con lo cual, el modelo del aligerado se simplifica al mostrado en la Fig. 2.27, donde se observa que el momento en 4-3 es conocido ( $M_{43} = + 0.17 \text{ ton-m}$ ); por lo tanto, puede trabajarse reduciendo el grado de libertad  $\theta_4$  a cero.

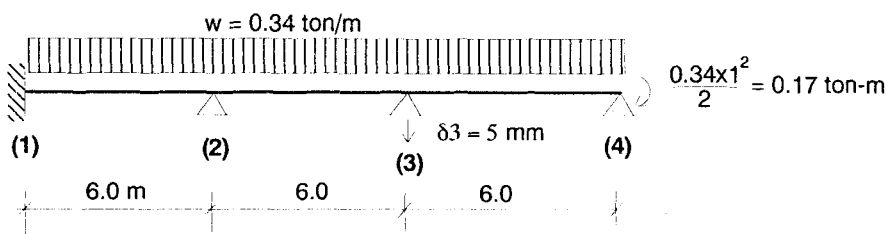


Fig. 2.27. Modelo Matemático Simplificado del Aligerado (elevación).

**CÁLCULO DE RIGIDECES  $k_{ij} = I / LK_o$  y COEFICIENTES DE DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS  $\alpha_{ij} = k_{ij} / \Sigma k_{ij}$**

Adoptando  $K_o = I / 6 m$ , se tiene:

$$k_{12} = (I / 6) / (I / 6) = 1 = k_{23}$$

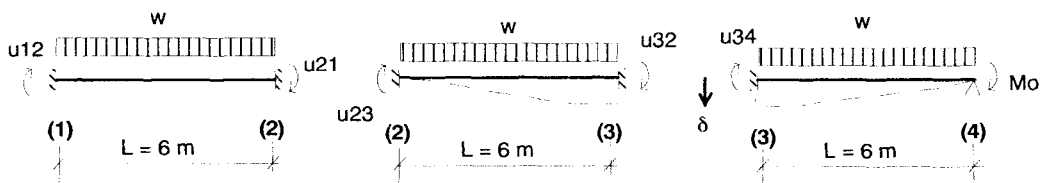
$$k_{34} = \frac{3}{4} (I / 6) / (I / 6) = 0.75$$

Nudo 2	$k_{ij}$	$\alpha_{ij}$
2-1	1	0.5
2-3	1	0.5
$\Sigma =$	2	1.0

Nudo 3	$k_{ij}$	$\alpha_{ij}$
3-2	1	0.57
3-4	0.75	0.43
$\Sigma =$	1.75	1.00

**MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO (Estado 0 o Estructura Primaria)**

En 1-2:  $u_{12} = -u_{21} = -w L^2 / 12 = -0.34 \times 6^2 / 12 = -1.02 \text{ ton-m}$



En 2-3:  $u(\delta) = -6 E I \delta / L^2 = -6 \times 210 \times 22700 \times 0.5 / 600^2 = -40 \text{ ton-cm} = -0.4 \text{ ton-m}$   
 $u_{23} = u(w) + u(\delta) = -1.02 - 0.40 = -1.42 \text{ ton-m}$   
 $u_{32} = u(w) + u(\delta) = 1.02 - 0.40 = 0.62 \text{ ton-m}$

En 3-4:  $u_{34}(w) = -w L^2 / 8 = -0.34 \times 6^2 / 8 = -1.53$   
 $u_{34}(\delta) = -3 E I \delta / L^2 = -3 \times 210 \times 22700 \times (-0.5) / 600^2 = 20 \text{ ton-cm} = 0.2 \text{ ton-m}$   
 $u_{34}(M_o) = M_o / 2 = 0.17 / 2 = 0.08$

---


$$u_{34} = u_{34}(w) + u_{34}(\delta) + u_{34}(M_o) = -1.25 \text{ ton-m}$$

Para el Cross se utilizará una aproximación de  $(1 / 100) u_{\text{máx}} = 0.01 \text{ ton-m}$ ; trabajando en forma tabulada se obtiene:

$\alpha_{ij}$	0.0	0.50	0.50	0.57	0.43	
Nudo	(1)	(2)	(3)	(3)	(3)	
$u_{ij}$	-1.02	1.02	-1.42	0.62	-1.25	$\underline{M}_i$
	0.10	0.20	0.20	0.10	0.00	$\underline{M}_2 = 0.4$
	0.00	0.00	0.15	0.30	0.23	$\underline{M}_3 = 0.53$
	-0.03	-0.07	-0.07	-0.03	0.00	$\underline{M}_2 = -0.15$
				0.02	0.01	$\underline{M}_3 = 0.03$
$M_{ij}$		-0.95	1.15	-1.14	1.01	-1.01

En este caso, se han tabulado los valores  $\underline{M}_i$  sólo porque se calcularán las rotaciones:  $\theta_i = \Sigma \underline{M}_i / \Sigma K_{ij} = \Sigma \underline{M}_i / (4 E K_o \Sigma k_{ij})$

Donde:  $4 E K_o = 4 \times 210 \times 22700 / 600 = 31780 \text{ ton-cm} = 318 \text{ ton-m}$

Luego:  $\theta_2 = (0.4 - 0.15) / (318 \times (1 + 1)) = 0.000393 \text{ rad} \dots$  (sentido horario)  
 $\theta_3 = (0.53 + 0.03) / (318 \times (1 + 0.75)) = 0.001 \text{ rad} \dots$  (sentido horario)

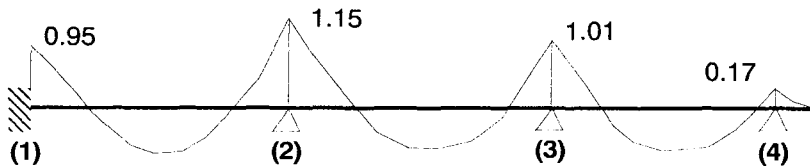


Fig. 2.28. Diagrama de Momento Flector (DMF) en ton-m

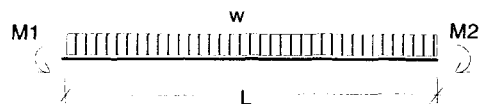
El DMF (Fig. 2.28) ha sido dibujado hacia el lado de la fibra traccionada. Los puntos de inflexión (PI) y los puntos donde se presentan los máximos momentos positivos, pueden determinarse con los métodos descritos en el acápite 2.7. La fuerza cortante  $V_{ij}$ , puede calcularse por equilibrio de cada tramo i-j, conociendo  $M_{ij}$ ,  $M_{ji}$  y la carga actuante.

**2.7. Métodos para el Trazado del Diagrama de Momento Flector**

Se explicará dos procedimientos, uno manual (PEABODY) y el otro computacional, para dibujar el diagrama de momento flector.

**2.7.1. Método de la Parábola Unidad (PEABODY)**

Este método es aplicable al caso de barras sujetas a carga uniforme, con momentos conocidos en sus extremos.



El proceso consiste de los siguientes pasos:

- Tener dibujado de antemano una parábola cuadrática a cualquier escala (por ejemplo, luz = 10 cm, flecha =  $f = 5$  cm).
- Definir las escalas: Longitud:  $L = \text{luz} \dots$  escala horizontal  
Momentos:  $w L^2 / 8 = f \dots$  escala vertical
- Sobre la parábola llevar  $M1$  y  $M2$ , empleando la escala de momentos.
- Trazar la línea de cierre (Fig. 2.29) y hallar los puntos de inflexión (PI).
- Trazar una paralela a la línea de cierre hasta que toque tangencialmente con la parábola (Fig. 2.29); en el punto de tangencia se hallará el máximo momento flector positivo ( $M(+)$ ), cuya magnitud se mide con la escala de momentos.

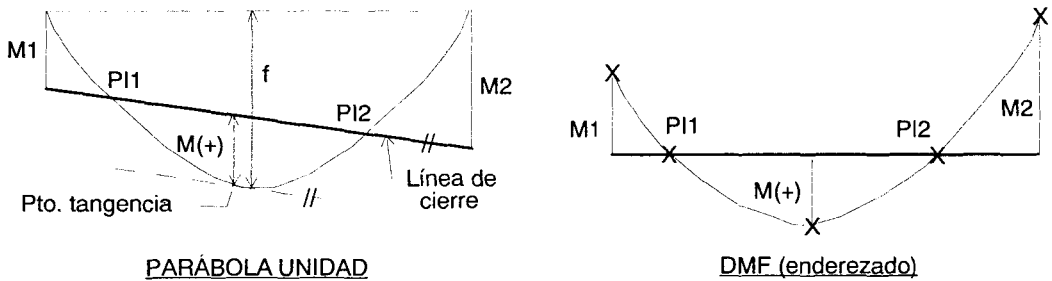


Fig. 2.29. Método de la Parábola Unidad.

- Finalmente, como se conoce 5 puntos ( $M1$ ,  $M2$ ,  $PI1$ ,  $PI2$  y  $M(+)$  máximo), empleando un pistolete se puede enderezar el Diagrama de Momento Flector.

La razón por la cual se le llama a este método "Parábola Unidad", se debe a que con una sola parábola puede definirse el DMF de una (o varias) viga con varios tramos (Fig. 2.30), ya que sólo será cuestión de modificar las escalas para el tramo en análisis.

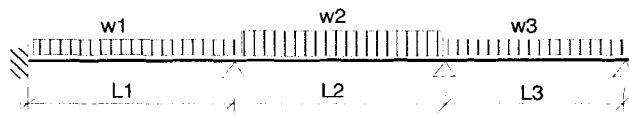


Fig. 2.30. Viga Continua de 3 Tramos.

Nótese además que si existiese una sola carga concentrada ( $P$ ) al centro de un tramo, puede seguirse el método descrito, utilizando un triángulo de altura " $f$ " en vez de la parábola cuadrática; en este caso, la escala de momentos se define igualando el momento isostático central ( $PL / 4$ ) a " $f$ ".

**2.7.2. Proceso Computacional para el Trazado del DMF**

Cuando se cuenta con una calculadora programable, o con una computadora personal, se sugiere aplicar el principio de superposición sobre las cargas, desdoblado el tramo en análisis en una serie de vigas isostáticas, donde en cada una de ellas ("i") actúa una sola carga, por lo que el algoritmo que define su DMF ("mi(x)") es conocido; finalmente, se suman los valores mi(x). Para aplicar este procedimiento es necesario desdoblar la longitud del tramo en una serie de intervalos de igual magnitud (  $\Delta L$ , Fig. 2.31) y guardar en variables dimensionadas los valores discretizados de mi(x).

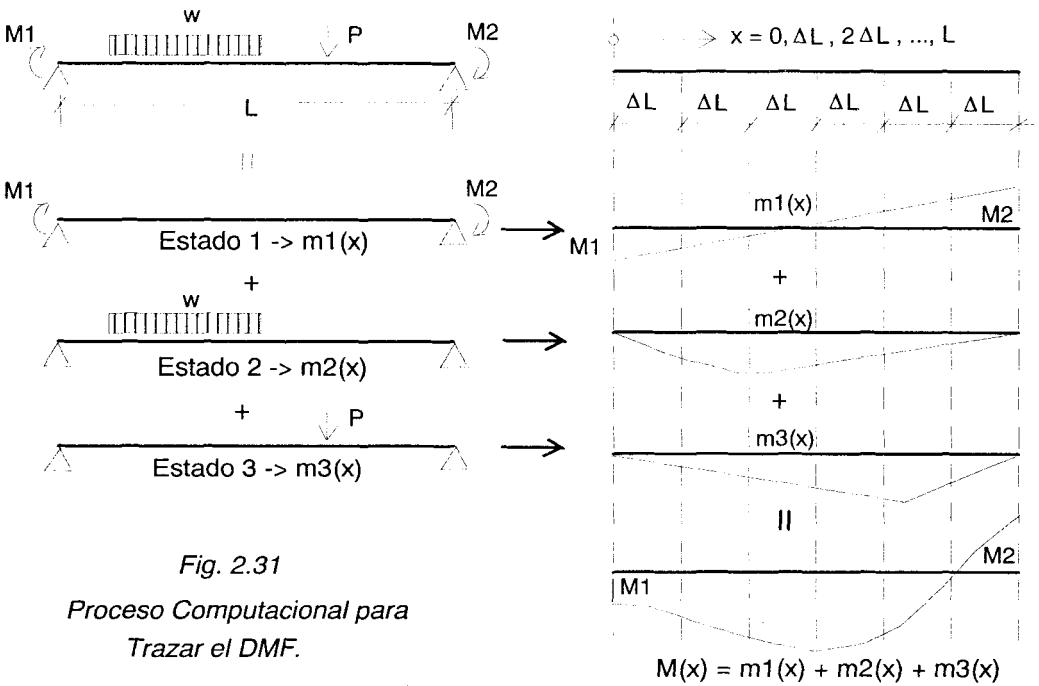


Fig. 2.31

Proceso Computacional para Trazar el DMF.

Cabe mencionar que el Programa "VIGA1" (descrito en el acápite 3.2.2) aplica el método computacional propuesto, desdoblado la longitud de cada tramo de la viga continua en 16 intervalos equidistantes. Este programa soporta hasta 20 cargas distintas en cada tramo.

**2.8. Proceso de Liberación Nudo por Nudo y de Liberación Simultánea**

El procedimiento que se ha utilizado hasta el momento para la liberación de los nudos, se conoce como "Método de los Nudos Alternos", porque en cada estado la liberación (o distribución de momentos) se realizó sobre los nudos alternos, empotrando los adyacentes. Existen otros procedimientos que se mencionan a continuación.

**a.- Liberación Nudo por Nudo**

En este caso, por cada estado, se libera un sólo nudo y se empotra al resto; con lo cual, por cada ciclo habrá que llenar tantas líneas de cálculo como grados de libertad rotacionales tenga la estructura (Fig. 2.32), lo que evidentemente retarda el proceso. En cambio, en el procedimiento de liberación alterna, cualquiera sea la cantidad de nudos, por cada ciclo se llenan sólo dos líneas de cálculo (dos estados). Por esta razón, se descartará el procedimiento de Liberación Nudo por Nudo.

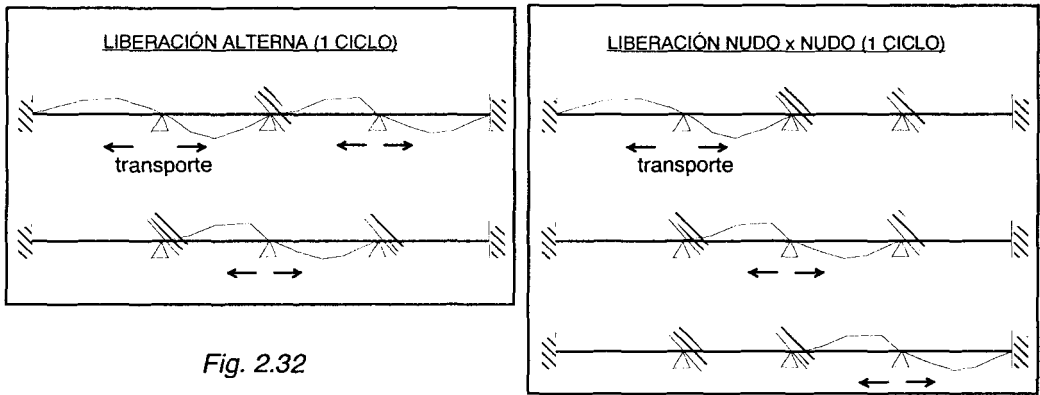
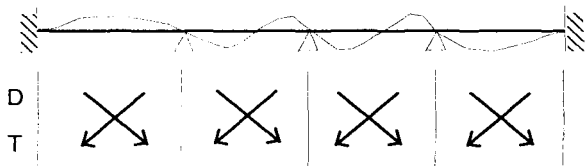


Fig. 2.32

**b.- Liberación Simultánea**

En este procedimiento se sueltan todos los nudos en forma simultánea (Fig. 2.33), lo que equivale a distribuir momentos en todos los nudos (o a equilibrarlos), para enseguida fijarlos, lo que equivale a transportar momentos rompiéndose nuevamente el equilibrio. En este procedimiento, al igual que en el de liberación alterna,

Fig. 2.33. LIBERACIÓN SIMULTÁNEA (1 CICLO)



también se llenan solamente dos líneas de cálculo, una de distribución de momentos (D) y la otra de transporte de momentos (T) en forma cruzada.

De los tres procesos de liberación, el más rápido en converger es el de Liberación Alterna; sin embargo, se recomienda usar ese procedimiento sólo para la solución de vigas, debido a que resulta muy engorroso aplicarlo en la solución de pórticos (Fig. 2.34). Para resolver pórticos mediante el método de Cross, es preferible aplicar el procedimiento de Liberación Simultánea, que es mucho más mecánico que el de Liberación Alterna, sin importar que se retarde la convergencia en uno o dos ciclos adicionales.

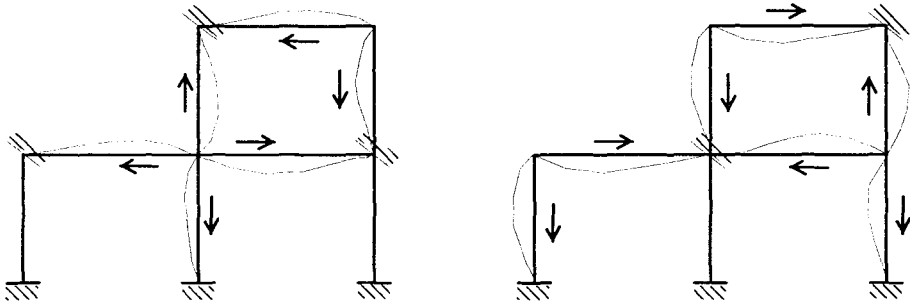
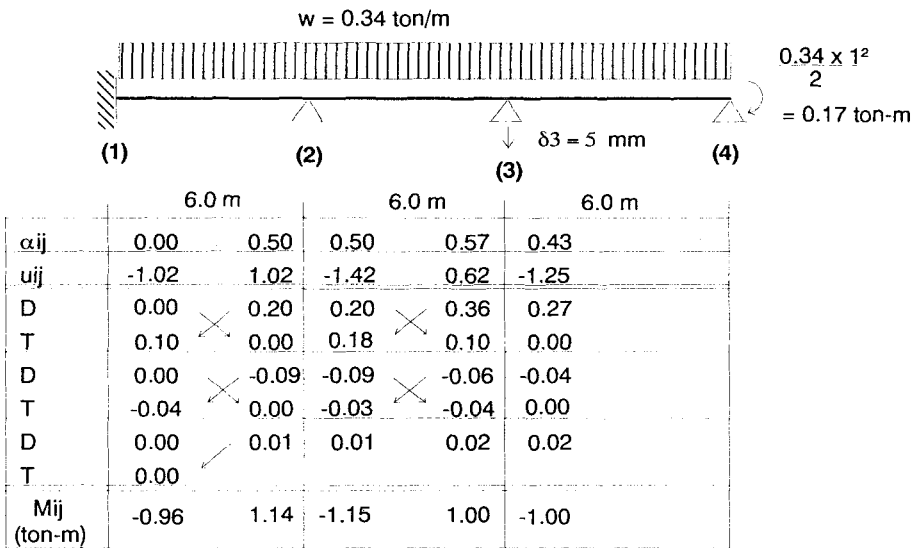


Fig. 2.34. Procedimiento de Liberación Alternada (1 Ciclo) en un Pórtico.

2.8.1. Ejemplos de Aplicación

1.- Resolver el aligerado anterior (Fig. 2.27) mediante el proceso de Liberación Simultánea. En este caso, los coeficientes de distribución de momentos y los momentos de empotramiento no varían; sin embargo, en el proceso de Liberación Simultánea se realiza un ciclo más que en el de Liberación Alternada, a pesar de que en ambos casos se trabaja con la misma precisión (0.01 ton-m).



2.- Resolver el aligerado anterior (Fig. 2.27) sin reducir el grado de libertad  $\theta_4$  (como si la barra 3-4 fuese continua); se utilizará el proceso de Liberación Alternada.

En este caso:  $k_{12} = k_{23} = k_{34} = 1 / LK_0 = (l/6) / (l/6) = 1$ . Con  $\alpha_{43} = k_{43} / k_{43} = 1$ . Adicionalmente, los momentos de fijación en 3-4 deben calcularse sobre la barra biempotrada:

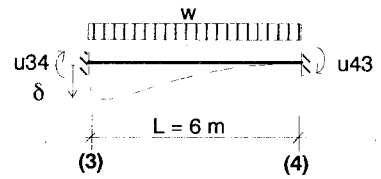
$$u(w) = w L^2 / 12 = 1.02 \text{ ton-m}$$

$$u(\delta) = 6 E I \delta / L^2 = 0.40 \text{ ton-m}$$

Con lo cual:

$$u_{34} = -1.02 + 0.40 = -0.62 \text{ ton-m}$$

$$u_{43} = 1.02 + 0.40 = 1.42 \text{ ton-m}$$



También, deberá recordarse que en el nudo 4 existe un momento aplicado cuya magnitud es:  $M_{o4} = + 0.17 \text{ ton-m}$ . Trabajando con el proceso de liberación alterna se obtiene:

$\alpha_{ij}$	0.00	0.50	0.50	0.50	0.50	1.00	
Nudo	(1)	(2)	(3)	(4)			
$u_{ij}$	-1.02	1.02	-1.42	0.62	-0.62	1.42	$\underline{M4}$ :
	0.10 →	0.20	0.20 →	0.10	-0.62 →	-1.25	$\underline{M4} = -1.25$
	0.00 ←	0.00	0.13 ←	0.26	0.26 ←	0.13	
	-0.03 →	-0.06	-0.06 →	-0.03	-0.06 →	-0.13	$\underline{M4} = -0.13$
	0.00 ←	0.00	0.02 ←	0.04	0.04 ←	0.02	
		-0.01	-0.01		-0.02		$\underline{M4} = -0.02$
$M_{ij}$	-0.95	1.15	-1.14		0.99	-1.00	0.17

$$\theta_4 = \Sigma \underline{M4} / (4 E K_o \Sigma k_{ij}) = (-1.25 - 0.13 - 0.02) / (318 \times 1) = -0.0044 \text{ rad}$$

*Nota:* En el primer ciclo  $\underline{M4} = M_{o4} - u_{43} = 0.17 - 1.42 = -1.25$ . También, como en Cross se trabaja con los momentos en los extremos de las barras, puede "pensarse" que  $M_{o4}$  actúa en sentido contrario sobre la barra 4-3, luego, para equilibrarlo, se deberá aplicar:  $\underline{M4} = -(-M_{o4}) - u_{43}$ .

## 2.9. Estructuras Simétricas en Forma

En caso no se desee aplicar el concepto de barra equivalente para reducir los grados de libertad, puede trabajarse con media estructura aplicando los siguientes conceptos.

### 2.9.1. Carga Simétrica

En la Fig. 2.35 puede observarse que  $\theta_i = -\theta_j$ , por lo que durante el proceso iterativo se tendrá:

$$\Delta\theta_i = -\Delta\theta_j$$

Por simetría en forma:  $f_{ij} = f_{ji}$  y  $K_{ij} = K_{ji}$

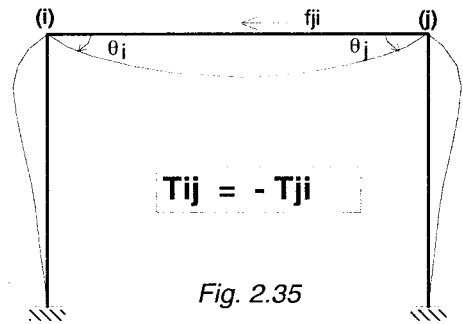
Con lo cual:  $D_{ij} = K_{ij} \Delta\theta_i = K_{ji} (-\Delta\theta_j) = -K_{ji} \Delta\theta_j = -D_{ji}$

Lo que proporciona:  $D_{ij} = -D_{ji}$

El momento que se transporta desde "j" hacia "i" es:

$$T_{ij} = f_{ji} D_{ji} = f_{ij} (-D_{ij}) = -T_{ji}$$

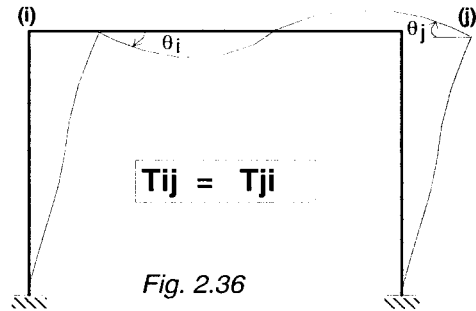
De esta manera, se llega a la conclusión que el momento transportado desde "j" hacia "i" ( $T_{ij}$ ), puede obtenerse como el mismo momento que se transporta desde "i" hacia "j" ( $T_{ji}$ ), pero cambiándole el signo. Esto permite trabajar sólo con el nudo "i", (media estructura) obviando al nudo "j".



**2.9.2. Carga Antisimétrica**

En este caso  $\theta_i = \theta_j$  (Fig. 2.36), por lo que siguiendo el procedimiento indicado en 2.9.1 se concluye que  $T_{ij} = T_{ji}$ .

Es decir, para estos casos, no existe la necesidad de cambiar el signo a  $T_{ji}$ .



Cabe mencionar que los conceptos explicados son válidos para todo tipo de estructuras simétricas en forma, incluso compuestas por barras de sección variable, placas o muros de albañilería (Fig. 2.37).

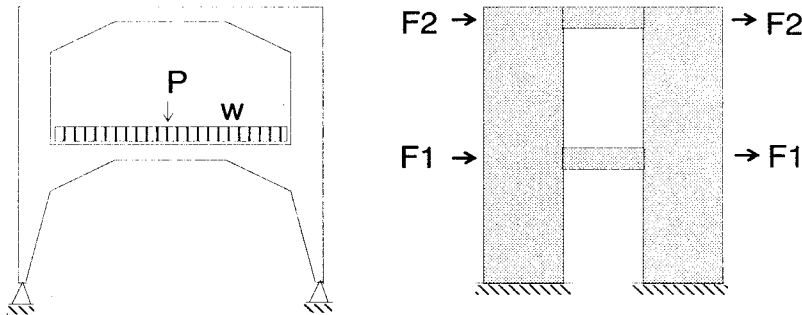


Fig. 2.37. Estructuras Simétricas en Forma con Carga Simétrica y Antisimétrica.

**2.9.3. Ejemplos de Aplicación**

1.- Resolver el pórtico simétrico mostrado en la Fig. 2.38. Las vigas se trabajarán adoptando  $T_{ij} = -T_{ji}$ , ya que en ellas se cumple que  $\theta_i = -\theta_j$ .

En la Fig. 2.38 se observa que  $M_{o3} = -1$  ton-m, y que  $u_{25} = u_{36} = -2 \times 6^2 / 12 = -6$  ton-m. Por otro lado, se trabajará con el proceso de Liberación Simultánea, con una aproximación de 0.01 ton-m, sombreándose las barras que tienen un tratamiento especial ( $T_{ij} = -T_{ji}$ ). Adicionalmente, se calculará  $\theta_3$ .

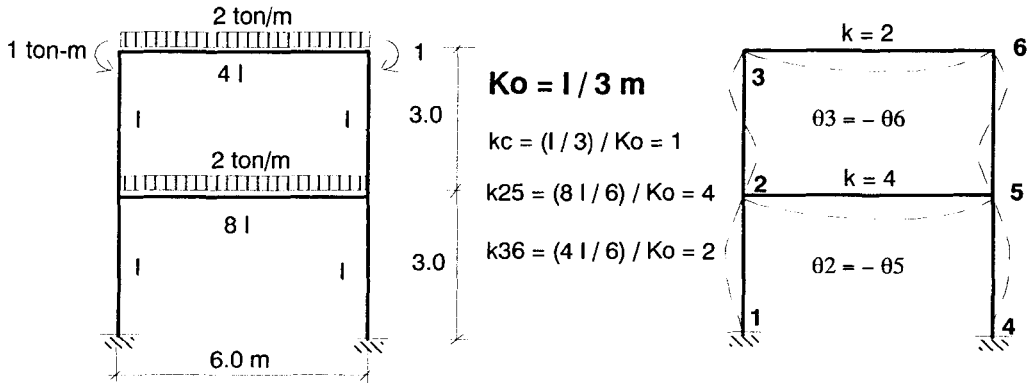


Fig. 2.38. Ejemplo de Aplicación en un Pórtico Simétrico en Forma y Carga.

Nudo	1	2			3		
Barra	1-2	2-1	2-5	2-3	3-2	3-6	
$\alpha_{ij}$	0.00	1/6	4/6	1/6	1/3	2/3	$M_3 =$
$u_{ij}$	0.00	0.00	-6.00	0.00	0.00	-6.00	
D	0.00	1.00	4.00	1.00	1.66	3.33	-1 + 6 = +5.00
T	0.50	0.00	-2.00	0.83	0.50	-1.66	
D	0.00	0.19	0.78	0.19	0.39	0.77	1.66 - 0.5 = +1.16
T	0.09	0.00	-0.39	0.19	0.09	-0.39	
D	0.00	0.03	0.13	0.03	0.10	0.20	.39 - 0.09 = +0.30
T	0.01	0.00	-0.06	0.05	0.01	-0.10	
D	0.00	0.00	0.01	0.00	0.03	0.06	0.1 - 0.01 = +0.09
T	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
Mij	0.60	1.22	-3.53	2.29	2.78	-3.79	

Cálculo de  $\theta_3 = (5 + 1.16 + 0.3 + 0.09) / (4 E K_o (1 + 2)) = 1.64 / E I$  rad

**Observación:**

En toda barra descargada cuyo extremo "i" no rota, mientras que "j" rota, y que no tenga desplazamiento relativo entre sus extremos (tal como la barra 1-2), el momento en "i" puede calcularse aplicando la definición de factor de transporte:  $T_{ij} = f_{ji} M_{ji}$ . Por ejemplo, para la barra 1-2 se tiene:  $T_{12} = f_{21} \times M_{21} = \frac{1}{2} \times 1.22 = 0.6$  ton-m (Fig. 2.39).

Por otra parte, en la columna 2-1 de la Tabla se observa que no existe momento de transporte que provenga de 1-2 (siempre  $T_{21} = 0$ ), es decir sólo existe  $D_{21}$  (momentos

equilibrantes), por lo tanto, M21 puede obtenerse al final del proceso por equilibrio del nudo 2. De esta manera, está demás tabular las columnas 1-2 y 2-1.

En conclusión, de cumplirse las 3 condiciones mencionadas:

- a)  $\theta_i = 0$ ;  $\theta_j \neq 0$
- b)  $\delta_{ij} = 0$
- c) barra i-j descargada

Entonces la barra i-j podrá reemplazarse por un resorte helicoidal que rigidiza al nudo "j" (Fig. 2.40).

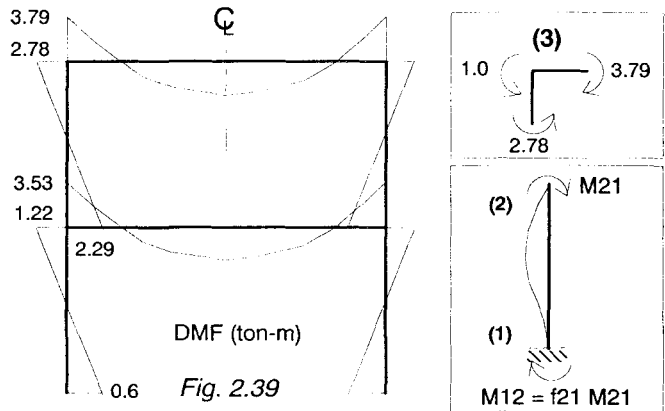


Fig. 2.39

2.- Resolver el problema anterior (Fig. 2.38) simplificándolo al máximo (Fig. 2.40).

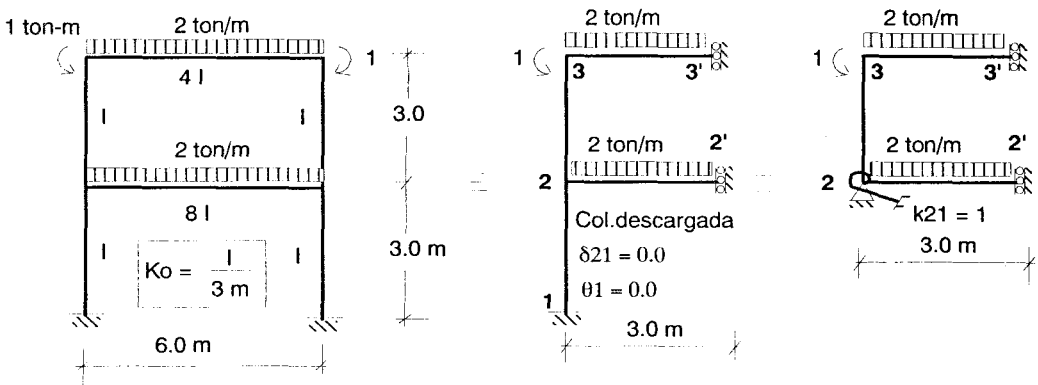


Fig. 2.40. Modelo Matemático Simplificado al Máximo.

En el último esquema de la Fig. 2.40, los desplazamientos verticales de los nudos 2' y 3' no son grados de libertad, ya que se conoce la fuerza cortante en 2' y 3' ( $V_{2'} = V_{3'} = 0$ ); lo propio ocurriría si existiese una carga concentrada en 2' o 3'. Por lo tanto, trabajando con las barras equivalentes, se tiene:

$$\begin{aligned}
 k_{22'} &= \frac{1}{4} (8 I / 3) / K_o = 2 \\
 k_{33'} &= \frac{1}{4} (4 I / 3) / K_o = 1 \\
 k_{23} &= k_{21} = (I / 3) / K_o = 1
 \end{aligned}$$

El momento de empotramiento se calcula sobre la viga con conexión deslizante, o también, empleando la barra con doble longitud (por simetría en carga):

$$u_{22'} = u_{33'} = -2 \times 6^2 / 12 = -6 \text{ ton-m}$$

Luego, aplicando el proceso de Liberación Simultánea, se tiene:

Nudo	2		3		
Barra	2-2'	2-3	3-2	3-3'	
$\alpha_{ij}$	0.50	0.25	0.50	0.50	
$a_{uij}$	-6.00	0.00	0.00	-6.00	$M_3 =$
D	3.00	1.50	2.50	2.50	-1+6=5
T	0.00	1.25	0.75	0.00	
D	-0.62	-0.32	-0.37	-0.37	-0.75
T	0.00	-0.19	-0.16	0.00	
D	0.09	0.05	0.08	0.08	+0.16
T	0.00	0.04	0.02	0.00	
D	-0.02	-0.01	-0.01	-0.01	-0.02
M <sub>ij</sub>	-3.55	2.32	2.81	-3.80	

*Nótese que los nudos 2' y 3' no se tabulan, porque M2'2 y M3'3 pueden calcularse por equilibrio al final del proceso. Asimismo, M21 se determina por equilibrio del nudo 2 y M12 se calcula aplicando la definición de factor de transporte.*

$$\text{Cálculo de } \theta_3 = (5 - 0.75 + 0.16 - 0.02) / (4 E K_0 (1 + 1)) = 1.65 / EI \text{ rad}$$

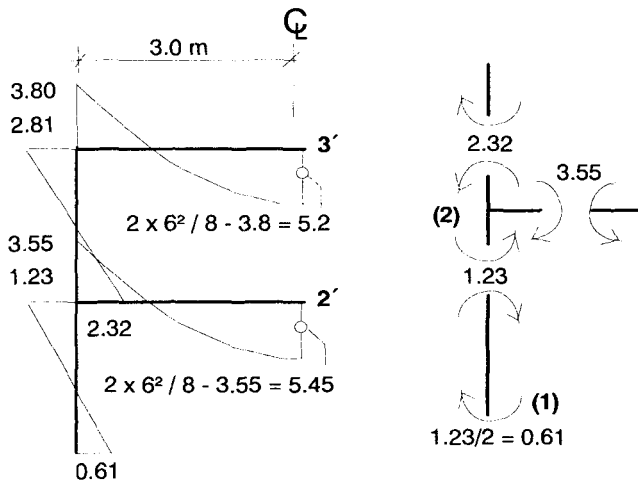


Fig. 2.41. DMF (ton-m)

### 2.9.4. Problema Propuesto

En la figura 2.42 se muestra la planta típica de un edificio de concreto armado destinado a oficinas, se pide analizar el aligerado comprendido entre los ejes B y C (zona con parapeto) mediante el método de Cross. Se utilizará los siguientes procedimientos:

1.- LIBERACIÓN ALTERNA:

- 1.a. Estructura total, sin reducir grados de libertad (GL).
- 1.b. Media estructura (simetría), reduciendo todos los GL posibles.

2.- LIBERACIÓN SIMULTÁNEA:

- 2.a. Estructura total, sin reducir grados de libertad.
- 2.b. Estructura total, reduciendo sólo los GL  $\theta_1$  y  $\theta_4$

Suponer:

$$K_o = 1 / 4 \text{ m}$$

$I$  = momento de inercia del aligerado

Peso del aligerado =  $0.3 \text{ ton / m}^2$

Acabados =  $0.1 \text{ ton / m}^2$

Tabiquería flotante =  $0.1 \text{ ton / m}^2$

Sobrecarga =  $0.25 \text{ ton / m}^2$

Parapeto de Albañilería:

$$h = 1.2 \text{ m}$$

$$t = 0.15 \text{ m}$$

$$\gamma = 1.8 \text{ ton / m}^3$$

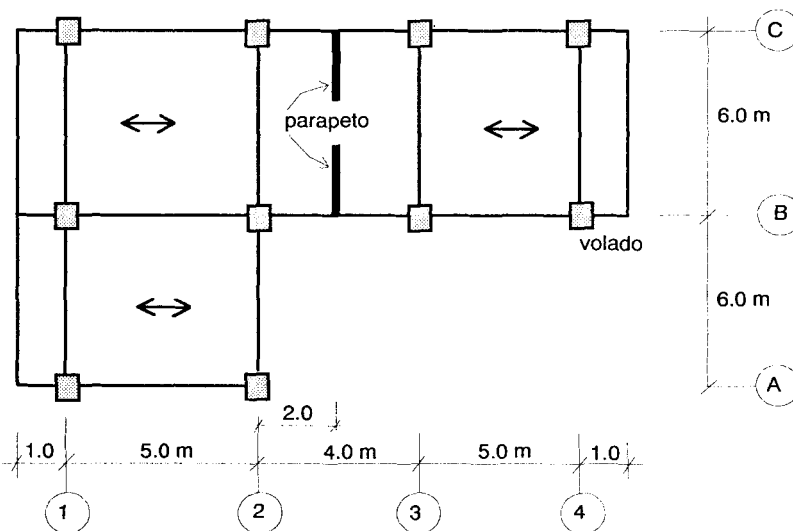


Fig. 2.42. Problema Propuesto.