Capítulo 7

Continuidad

7.1 DEFINICION. Continuidad en un punto. Sea $f(x)$ una función definida en todos los puntos x de un intervalo abierto I que contiene al punto a. Decimos que $f(x)$ *es continua en el punto a* si se cumple que

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

7.2 OBSERVACIONES.

1. Para que la función $f(x)$ sea continua en el punto a se requiere, explícitamente, que se cumplan las tres condiciones siguientes:

   i) $f(x)$ está definida en el punto a, es decir, existe el valor $f(a)$.

   ii) Existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, y

   iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

   O también en la notación de ε y δ : Que exista el valor $f(a)$ y que para todo $\varepsilon > 0$ exista un $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta$ implica $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

2. Así, $f(x)$ no será continua en el punto a si no se cumple al menos una de las tres condiciones (i), (ii), o (iii) señaladas en el parágrafo anterior, y en tal caso decimos que la *función* $f(x)$ *es discontinua en el punto* a.

7.3 DEFINICION. Continuidad en un intervalo abierto. Decimos que $f(x)$ es *continua en un intervalo abierto* I si $f(x)$ es continua en cada punto a del intervalo I.

7.4 EJEMPLO 1. Investigar la continuidad de la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

en cada punto x.

SOLUCION.

(1) Si $a \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \dfrac{\operatorname{sen} a}{a} = f(a)$

puesto que $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ cuando x se encuentra próximo al punto $a \neq 0$ y que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \dfrac{\operatorname{sen} a}{a}$ por las propiedades de límites.

Luego, $f(x)$ es continua en cada punto $a \neq 0$.

(2) Consideremos ahora el caso en que $a = 0$. Tenemos:

(i) $f(0) = 1$, por definición de la función $f(x)$ en $x = 0$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (resultado establecido en el capítulo de límites).

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 = f(0)$, por definición de $f(x)$, cuando $x \neq 0$, y por (ii) e (i)

Luego $f(x)$ también es continua en el punto 0.

En conclusión: La función dada $f(x)$ es continua en todos los puntos a sin excepción.

EJEMPLO 2. Determinar si cada una de las siguientes funciones es continua en el punto $x=2$.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

(2) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x\neq 2 \\ 5 & \text{si } x=2 \end{cases}$

(3) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x\neq 2 \\ 4 & \text{si } x=2 \end{cases}$

(4) $k(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{|x-2|} & \text{si } x\neq 2 \\ 1 & \text{si } x=2 \end{cases}$

(5) $p(x)=\dfrac{x-2}{|x-2|}$

SOLUCION.

(1) $f(x)$ no es continua en $x=2$, pues el valor $f(2)$ no existe.

(2) $g(x)$ no es continua en $x=2$, pues

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+2) = 4 \neq 5 = g(2) .$$

(3) $h(x)$ es continua en $x=2$, pues $\displaystyle\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4 = h(2)$.

(4) $k(x)$ no es continua en $x=2$, pues no existe $\displaystyle\lim_{x\to 2} k(x)$ ya que de

$$\lim_{x\to 2^+} k(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x-2} \qquad \text{(cuando } x>2\text{)}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} 1 = 1 \ .$$

y $$\lim_{x\to 2^-} k(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{-(x-2)} \qquad \text{(cuando } x<2\text{)}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} -1 = -1,$$

se sigue que $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} k(x) \neq \lim_{x\to 2^-} k(x)$, y por lo tanto, no existe $\displaystyle\lim_{x\to 2} k(x)$.

(5) $p(x)$ no es continua en $x = 2$, sea bien por que no existe $p(2)$, o sea bien porque no existe $\lim_{x \to 2} p(x)$.

7.5 PROPIEDADES DE PRESERVACION DE LA CONTINUIDAD

TEOREMA. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en el punto a. Entonces

(1) La función suma $f(x) + g(x)$ es continua en a.

(2) La función producto $f(x).g(x)$ es continua en a.

(3) La función cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es continua siempre que se cumpla que $g(a) \neq 0$.

(4) La función potencia enésima $f(x)^n$ es continua en el punto a.

(5) La función raíz enésima $\sqrt[n]{f(x)}$ es continua en el punto a.

Todas estas propiedades se siguen directamente de las propiedades correspondientes establecidas para los límites de funciones en el punto a.

FUNCIONES CONTINUAS IMPORTANTES. Son continuas:

1. **La función polinomial** $b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$, en todo punto x.

2. **La función racional** $\dfrac{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}{c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n}$, en todo punto x donde el denominador sea $\neq 0$.

3. **Las funciones trigonométricas**

   a) $\operatorname{sen} x$, en todo punto x

   b) $\cos x$, en todo punto x,

   c) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, en todo punto x tal que $\cos x \neq 0$, o sea en todo punto $x \neq 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

   d) $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, en todo punto x tal que $\operatorname{sen} x \neq 0$, o sea en todo punto $x \neq 2k\pi$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

7.6 TEOREMA. Composición de funciones continuas. Si $f(x)$ es una función continua en el punto a, y $g(x)$ es una función continua en el punto $f(a)$, entonces la función compuesta $h(x) = g[f(x)]$, es una función continua en el punto a.

EJEMPLOS.

1. La función $h(x) = \text{sen}(x^2 - 2x + 5)$ es continua en cada punto x, pues las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 5$, $g(x) = \text{sen}\, x$ son continuas, y
$$h(x) = \text{sen}(x^2 - 2x + 5) = g(x^2 - 2x + 5) = g(f(x))$$

2. La función $h(x) = \text{sen}(\cos x^2)$ es continua en cada punto x, pues las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \text{sen}\, x$, son continuas y
$$h(x) = \text{sen}(\cos x^2) = h(\cos x^2) = h\left[g(x^2)\right] = h\{g[f(x)]\}$$

7.7 CLASIFICACION DE LAS DISCONTINUIDADES

Hemos dicho que la función $f(x)$ es discontinua en el punto a si se cumple al menos una de las tres condiciones siguientes:

(1) $f(x)$ no está definida en a,

(2) no existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$,

(3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

Decimos que la función $f(x)$ tiene *discontinuidad evitable* o *removible* en el punto a si:

i) Existe el número real $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, y

ii) $f(a)$ no existe o, si $f(a)$ existe, se tiene $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

En tal caso se define
$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) & \text{si } x = a \end{cases}$$

La nueva función $f^*(x)$ resulta ser continua en a y se llama *la extensión* o *prolongación continua de* $f(x)$ *al punto* a.

Decimos que $f(x)$ tiene *una discontinuidad de primera clase en el punto a* si existen los límites *finitos* $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y no son iguales los tres valores $f(a)$, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

(Admitimos la posibilidad de que $f(a)$ no exista). En caso contrario decimos que $f(x)$ tiene una *discontinuidad de segunda clase en el punto a*.

De las definiciones, se sigue inmediatamente que toda discontinuidad removible es de primera clase.

EJEMPLO 1. Clasificar la discontinuidad de $f(x) = 2 - x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ en el punto $x = 0$. Si la discontinuidad es removible, definir la prolongación continua $f^*(x)$ de $f(x)$ en el punto $x = 0$.

SOLUCION. No obstante que $f(x)$ no está definida en el punto $x = 0$, dicha función tiene una discontinuidad removible (y por lo tanto de primera clase) en el punto $x = 0$. En efecto, existe

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(2 - x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) = 2 - \lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}\frac{1}{x} = 2 - 0 = 2 ,$$

ya que $\lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$ se sigue directamente de $0 \le \left|x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right| \le |x|$ y del teorema del Sandwich.

La prolongación continua $f^*(x)$ de $f(x)$ en $x = 0$ es dada por:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \ne 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) & \text{si } x = 0 \end{cases}, \qquad \text{o} \qquad f^*(x) = \begin{cases} 2 - x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si } x \ne 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 2. La función $f(x) = \dfrac{(1+x)^6 - 1}{2x}$ no está definida en $x = 0$. Definir $f(0)$ de manera que $f(x)$ sea continua en $x = 0$.

SOLUCION. Puesto que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^6 - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\left(1+6x+15x^2+30x^3+\dots\right)-1}{2x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[3 + \tfrac{15}{2}x + \tfrac{30}{2}x^2 + \dots\right] = 3,$$

podemos definir $f(0) = 3$, y la función $f(x)$ es ahora continua en $x = 0$.

EJEMPLO 3. Determinar la clase de discontinuidad de $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ en el punto $x = 1$.

SOLUCION. La función tiene discontinuidad de segunda clase en el punto $x = 1$, pues

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \ , \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

no son límites finitos.

EJEMPLO 4. Sea $f(x) = (-1)^{[\![1/x]\!]}$, donde $[\![\ ]\!]$ es la función mayor entero. Probar que no existe $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ y concluir que $f(x)$ tiene una discontinuidad de segunda clase en el punto $x = 0$.

SOLUCION. Por reducción al absurdo. Supongamos que existe un número real L tal que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = L$. Entonces, para $\varepsilon = 1/2$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$0 < x < \delta \quad \text{implica} \quad |f(x) - L| < 1/2 \tag{1}$$

Elijamos un número par $2n$ tal que $\dfrac{1}{2n} < \delta$.

Luego se tiene $\dfrac{1}{2n}$ y $\dfrac{1}{2n+1} < \delta$ y $f\left(\dfrac{1}{2n}\right) = (-1)^{[\![2n]\!]} = (-1)^{2n} = 1$, pues $\dfrac{1}{1/2n} = 2n$.

$$f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = (-1)^{[\![2n+1]\!]} = (-1)^{2n+1} = -1 \qquad \text{pues} \qquad \frac{1}{\dfrac{1}{2n+1}} = 2n+1,$$

y empleando (1)

$$\left|f\left(\frac{1}{2n}\right) - L\right| < \frac{1}{2} \qquad \text{o} \qquad |1 - L| < \frac{1}{2} \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{2} < L < \frac{3}{2} \tag{2}$$

$$\left| f\left(\frac{1}{2n+1}\right) - L \right| < \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad |-1-L| < \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad -\frac{3}{2} < L < -\frac{1}{2} \qquad \textbf{(3)}$$

De (2) y (3) resulta la contradicción $L > 0$ y $L < 0$.

Luego, no existe $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, y por lo tanto $f(x)$ tiene una discontinuidad de segunda clase en 0.

7.8 DEFINICION. Continuidad en un intervalo cerrado.

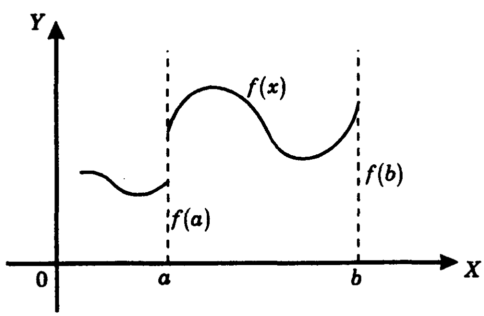
Decimos que la función $f(x)$ *es continua en un intervalo cerrado* $[a, b]$ si:

(1) $f(x)$ **está definida en cada punto x del intervalo.**

(2) $f(x)$ **es *continua en todo punto del intervalo abierto* (a, b) es decir $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ para todo c de (a, b).**

(3) $f(x)$ **es *continua por la derecha en el extremo* a, es decir $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$**

(4) $f(x)$ **es *continua por la izquierda en el extremo* b, es decir $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.**



EJEMPLO 1. **Redefinir la función**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{|x-1|} & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 4 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

para obtener su prolongación continua en el intervalo cerrado $[0, 1]$.

SOLUCION. Notemos que si $0 \le x \le 1$ entonces $\dfrac{x-1}{|x-1|} = -1$, luego

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 4 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

(1) $f(x)$ es continua en el intervalo abierto $(0, 1)$, pues si $0 < c < 1$ entonces

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} -1 = -1 = f(c)$$

(2) $f(x)$ es continua por la derecha en 0:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} -1 = -1 = f(0)$$

(3) $f(x)$ no es continua por la izquierda en 1. En efecto,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} -1 = -1 \ne 4 = f(1).$$

La prolongación continua $f^*(x)$ de $f(x)$ a todo el intervalo cerrado $[0, 1]$ es dada por

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

o, en forma más simple $f^*(x) = -1$ para todo $0 \le x \le 1$.

EJEMPLO 2. Determinar la continuidad de la función $g(x) = \sqrt{\dfrac{9-x^2}{4-x^2}}$ en el intervalo $[-2, 2]$.

SOLUCION. Para $x = \pm 2$ la función no está definida y por lo tanto es discontinua en los extremos. Estas discontinuidades son de segunda clase pues no son *finitos* los límites

$$\lim_{x \to -2^+} g(x) = \lim_{x \to -2^+} \sqrt{\frac{9-x^2}{4-x^2}} = +\infty \,, \qquad \lim_{x \to -2^-} g(x) = \lim_{x \to -2^-} \sqrt{\frac{9-x^2}{4-x^2}} = +\infty$$

Por otra parte, si $-2 < c < 2$ entonces la función es continua en c pues $c^2 < 4$ y

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} \sqrt{\frac{9-x^2}{4-x^2}} = \sqrt{\frac{9-c^2}{4-c^2}} = g(c)$$

Nota. Una función $f(x)$ es *continua en el intervalo semiabierto por la derecha* $[a, b)$ si es continua en todo punto x del intervalo abierto (a, b) y además es continua por la derecha en el punto a.
De manera similar se define la continuidad en un intervalo semiabierto por la izquierda $(a, b]$, y también, en intervalos de la forma $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a]$ y en toda recta $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

EJEMPLO 3. Determinar los intervalos en los cuales cada una de las siguientes funciones es continua

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$ **(2)** $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$

SOLUCION.

(1) La función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$ no está definida en $x = \pm 3$ y por consiguiente es discontinua en estos puntos.

Por otra parte, si $c \neq \pm 3$ entonces $c^2 \neq 9$ y $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{x^2 - 9} = \dfrac{1}{c^2 - 9} = f(c)$, y por lo tanto $f(x)$ es continua en todo punto $c \neq \pm 3$. *Concluimos* pues que $f(x)$ es continua en los intervalos $(-\infty, 3)$, $(-3, 3)$, $(3, +\infty)$.

(2) Tenemos que $x^2 - 2x - 8 \geq 0$ o $(x-1)^2 \geq 9$, que es equivalente a $x - 1 \geq 3$ o $x - 1 \leq -3$, o también a $x \geq 4$ o $x \leq -2$.

Luego $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$ está definida solamente en los intervalos $(-\infty, -2]$ y $[4, +\infty)$.

Puesto que $x^2 - 2x - 8 > 0$ si x es un punto de $(-\infty, -2)$ o de $(4, +\infty)$ tenemos $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \lim\limits_{x \to c} \sqrt{x^2 - 2x - 8} = \sqrt{c^2 - 2c - 8} = g(c)$, si c se encuentra en los intervalos abiertos, y se ve directamente que

$$\lim_{x \to -2^-} g(x) = 0 = g(-2)\,, \qquad \lim_{x \to 4^+} g(x) = 0 = g(4).$$

Concluimos pues que $g(x)$ es continua en los intervalos $(-\infty, -2]$ y $[4, +\infty)$.

7.9 PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS.

TEOREMA. Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces se cumple lo siguiente:

(1) *$f(x)$ es acotada sobre $[a,b]$*. Es decir, existe un número $C>0$ tal que $|f(x)|\leq C$ para todos los puntos del intervalo $[a,b]$.

(2) *$f(x)$ tiene un valor mínimo y un valor máximo en $[a,b]$*. Es decir, existen puntos x_0 y x_1 en $[a,b]$ tales que $f(x_0)\leq f(x)\leq f(x_1)$, para todos los puntos x del intervalo $[a,b]$.

Designamos con $m=f(x_0)=$ *el valor mínimo de* $f(x)$ en $[a,b]$

y $M=f(x_1)=$ *el valor máximo de* $f(x)$ en $[a,b]$

(3) *Teorema del valor intermedio:* $f(x)$ toma todos los valores intermedios entre m y M, es decir que

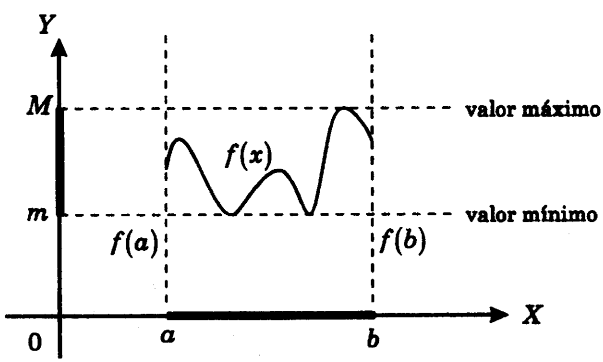
i) $m\leq f(x)\leq M$, para todo x de $[a,b]$, y

ii) dado un número y cualquiera tal que $m\leq y\leq M$, entonces existe al menos un x de $[a,b]$ tal que $y=f(x)$

Nota. En particular, para todo número y comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, existe al menos un x de $[a,b]$ tal que $y=f(x)$.

(4) *Teorema del cero:* Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe un número x en el intervalo abierto (a,b) tal que $f(x)=0$.

Nota. Cualquier x tal que $f(x)=0$ se llama un *cero de la función* o una raíz de la ecuación $f(x)=0$.



Gráfica de una funcion continua sobre un intervalo cerrado.

Si $f(x)$ es una función continua sobre el intervalo *cerrado* $[a,b]$ entonces adquiere valores máximo y mínimo, M y m, *respectivamente, y los valores* $f(x)$ *llenan* el intervalo cerrado $[m,M]$.

7.10 PROBLEMAS RESUELTOS.

PROBLEMA 1. Probar que si $f(x)$, $g(x)$ son funciones continuas en el punto a, entonces las funciones $f(x)+g(x)$, $f(x).g(x)$ y $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, cuando $g(a)\neq 0$, son continuas en a.

SOLUCION.

(1) Tenemos $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x) = f(a)+g(a)$

Luego $f(x)+g(x)$ es continua en a.

(2) Tenemos $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\,.\,\lim\limits_{x\to a} g(x)$ (producto de límites)

$= f(a).g(a)$ (continuidad de $f(x)$ y $g(x)$ en a)

Luego $f(x).g(x)$ es continua en a.

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ (cociente de límites, si $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$)

$= \dfrac{f(a)}{g(a)}$ (continuidad de $f(x)$ y $g(x)$ en a)

Luego $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es continua en a.

PROBLEMA 2. Probar que si $f(x)$ es continua en el punto a, entonces las funciones $f(x)^n$ y $\sqrt[n]{f(x)}$ son continuas en a.

SOLUCION.

(1) Tenemos $\lim\limits_{x\to a} f(x)^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n = f(a)^n$. Luego $f(x)^n$ es continua en a.

(2) Tenemos $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{f(a)}$. Luego $\sqrt[n]{f(x)}$ es continua en a.

Nota. Como ya se ha dicho en el capítulo de límites asumimos que $\sqrt[n]{f(a)}$ está definido. Es decir que si n es impar, $f(a)$ puede ser cualquier número; y que si n es par, entonces se supone que $f(x) \geq 0$ y por lo tanto $f(a) \geq 0$.

PROBLEMA 3. Probar que $P(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ es una función continua en cada punto a.

SOLUCION. Debemos probar que $\lim\limits_{x \to a} \left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m\right) = b_0 + b_1 a + \ldots + b_m a^m$, lo cual ha sido establecido en el problema 22, Sección 6.3 del capítulo de límites.
Sin embargo, procederemos a dar una demostración directa de este resultado haciendo uso de las propiedades de las funciones continuas.

Paso 1. Toda función constante $f(x) = c$ es continua en a.

En efecto $\lim\limits_{x \to a} c = c = f(a)$.

Paso 2. *La función identidad* $g(x) = x$ es continua en a.

En efecto, se cumple $\lim\limits_{x \to a} x = a = g(a)$, ya que para $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \varepsilon > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica $|g(x) - g(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon$.

Paso 3. $b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ es continua en a. En efecto, las funciones b_0, $b_1 x$, ... , $b_m x^m$ son continuas en a por ser productos de funciones constantes y $g(x) = x$.

Luego, $b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ es una función continua, por ser suma de funciones continuas.

PROBLEMA 4. Probar que la función racional $R(x) = \dfrac{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}{c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n}$ es continua en todos los puntos en los que el denominador no se anule.

SOLUCION. Las funciones polinomiales

$$P(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m \quad \text{y} \quad Q(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$$

son continuas en todo punto a , por el problema 3.

Luego, la función cociente $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es continua en todo punto a tal que $Q(a) \neq 0$, por el problema 1.

PROBLEMA 5. Probar que si $f(x)$ es continua en a entonces $|f(x)|$ es una función continua en a.

SOLUCION. Tenemos

$$\lim_{x\to a}|f(x)| = \left|\lim_{x\to a}f(x)\right| \quad \text{(por el problema 25, Sección 6.3)}$$

$$= |f(a)| \quad \text{(continuidad de } f(x) \text{ en } a\text{)}$$

Luego, $|f(x)|$ es continua en a.

PROBLEMA 6. Hallar los puntos de discontinuidad de cada una de las siguientes funciones:

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+5x+6}{x+2} & \text{si } x\neq -2\\ 3 & \text{si } x=-2\end{cases}$ (2) $g(x)=\begin{cases}|3x+7| & \text{si } x\neq -\frac{7}{3}\\ 2 & \text{si } x=-\frac{7}{3}\end{cases}$

(3) $h(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x\leq 1\\ 4-3x & \text{si } 1<x<2\\ x-4 & \text{si } 2\leq x\end{cases}$

SOLUCION.

(1) Puesto que la función racional $\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$ es continua en todo punto x tal que $x+2\neq 0$, tenemos que $f(x)$ es continua en cada $x\neq -2$.

Por otra parte,

$$\lim_{x\to -2}f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x+3)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x+3) = -2+3 = 1\,.$$

Y como $f(-2)=3$, tenemos $\lim\limits_{x\to -2}f(x)\neq f(-2)$. Concluimos que -2 es el único punto de discontinuidad de $f(x)$.

(2) La función $|3x+7|$ es continua en todo punto por ser el valor absoluto de la función continua $3x+7$. Luego, $g(x)$ es continua en todo punto $x\neq -\frac{7}{3}$.

Por otra parte, $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{7}{3}} g(x) = \lim_{x\to -\frac{7}{3}} |3x+7| = \left|3\left(-\tfrac{7}{3}\right)+7\right| = 0$

y como $g\left(-\frac{7}{3}\right) = 2$, tenemos que $\lim\limits_{x \to -\frac{7}{3}} g(x) \neq g\left(-\frac{7}{3}\right)$. Por lo tanto, $g(x)$ es discontinua en el punto $-7/3$.

(3) La función $h(x)$ es continua en todo punto $x \neq 1, 2$, por ser igual a funciones polinomiales, las que, según sabemos, son continuas en todo punto.

Continuidad en el punto $x = 1$.

Calculamos los límites laterales en $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-} (2x + 3) = 2(1) + 3 = 5,$$

$$\lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1^+} (4 - 3x) = 4 - 3(1) = 2,$$

y $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} h(x)$. Luego, $h(x)$ es discontinua en el punto $x = 1$ ya que no existe $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$.

Continuidad en el punto $x = 2$.

Calculamos los límites laterales en $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2^-} h(x) = \lim_{x \to 2^-} (4 - 3x) = 4 - 3(2) = -2$$

$$\lim_{x \to 2^+} h(x) = \lim_{x \to 2^+} (x - 4) = 2 - 4 = -2 .$$

Luego, existe $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = -2$ y como $h(2) = 2 - 4 = -2$

se tiene que $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = h(2)$,

y por lo tanto $h(x)$ es continua en el punto $x = 2$.

En resumen, el único punto de discontinuidad de $h(x)$ es $x = 1$.

RESPUESTA.

(1) $x = -2$ para la función $f(x)$.

(2) $x = -7/3$ para la función $g(x)$.

(3) $x = 1$ para la función $h(x)$.

PROBLEMA 7. Hallar todos los puntos de discontinuidad de la función mayor entero $[\![x]\!]$ (o *función parte entera de* x).

SOLUCION. Por definición se tiene $[\![x]\!] = n$ si $n \le x < n+1$, n es un número entero. Sea a tal que $n \le a < n+1$.

Caso 1. Si $n < a < n+1$ entonces

$[\![x]\!] = n =$ función constante de n en el intervalo abierto $(n, n+1)$.

Y como toda función constante es continua en cada punto, concluimos que $[\![x]\!]$ es continua en cada punto a tal que $n < a < n+1$.

Caso 2. $a = n$.

Calculamos los límites laterales

$$\lim_{x\to n^-} [\![x]\!] = \lim_{x\to n^-} (n-1) = n-1 \qquad \text{(pues si } n-1 \le x < n\text{, entonces } [\![x]\!] = n-1)$$

$$\lim_{x\to n^+} [\![x]\!] = \lim_{x\to n^+} n = n \qquad \text{(pues si } n < x < n+1\text{, entonces } [\![x]\!] = n).$$

Como $\lim\limits_{x\to n^-} [\![x]\!] \ne \lim\limits_{x\to n^+} [\![x]\!]$, no existe $\lim\limits_{x\to n} [\![x]\!]$, y la función $[\![x]\!]$ es discontinua en $a = n$.

Luego $[\![x]\!]$ es discontinua en cada entero n.

PROBLEMA 8. Definir cada una siguientes funciones en el punto indicado de manera que resulte ser continua en dicho punto.

(1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}} - 2}{x-8}$, en $a = 8$ (2) $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$, en $a = 0$

SOLUCION. Basta calcular los límites de las funciones dadas cuando $x = a$ y definir las funciones en el punto a con valor igual a tales límites.

(1) Tenemos

$$\lim_{x\to 8} f(x) = \lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}} - 2}{x-8} = \lim_{x\to 8} \frac{\left(2+\sqrt[3]{x}\right) - 2^2}{(x-8)\left(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}} + 2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\left(\sqrt[3]{x} - 2\right)\left(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4\right)\left(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}} + 2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 8} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4\right)\left(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}} + 2\right)} = \frac{1}{(4+4+4)(2+2)} = \frac{1}{48}.$$

Y así definimos $\qquad f(8) = 1/48$

para que $f(x)$ sea continua en $x = 8$.

(2) Tenemos

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)-1^3}{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)}+1} = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}\,.$$

Y así definimos $\quad f(0) = 1/3$,

para que la función $g(x)$ sea continua en $x = 0$.

PROBLEMA 9. Hallar los puntos de discontinuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} |\, x - [\![x]\!] \,| & \text{si } [\![x]\!] \text{ es par} \\ |\, x - [\![x+1]\!] \,| & \text{si } [\![x]\!] \text{ es impar.} \end{cases}$$

SOLUCION. En primer lugar, vamos a obtener una expresión más simple de la función $f(x)$.

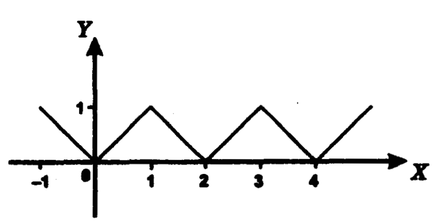
Caso 1. $[\![x]\!] = \text{par} = 2n$.

Entonces $\quad 2n \le x < 2n+1 \quad$ y $\quad f(x) = |\,x - [\![x]\!]\,| = |x - 2n| = x - 2n$.

Caso 2. $[\![x]\!] = \text{impar} = 2n-1$.

Entonces $\quad 2n - 1 \le x < 2n$, $\; 2n \le x+1 < 2n+1$ y,

$$f(x) = |\,x - [\![x+1]\!]\,| = |x - 2n| = 2n - x \quad \text{pues } x < 2n\,.$$



Gráfica de $f(x)$

En resumen $f(x) = x - 2n$ si $2n \le x < 2n+1$, y

$f(x) = 2n - x$ si $2n-1 \le x < 2n$, de donde concluimos que $f(x)$ es continua en cada punto de los intervalos abiertos $(2n, 2n+1)$ y $(2n-1, 2n)$ para todo entero n.

Continuidad en un número par $2n$.

Calculamos los límites laterales

$$\lim_{x\to 2n^-} f(x) = \lim_{x\to 2n^-} (2n - x) \qquad \text{(pues } 2n-1 < x < 2n \text{ , cuando } x \to 2n^-\text{)}$$
$$= 2n - 2n = 0$$

$$\lim_{x\to 2n^+} f(x) = \lim_{x\to 2n^+} (x - 2n) \qquad \text{(pues } 2n < x < 2n+1 \text{ , cuando } x \to 2n^+\text{)}$$
$$= 2n - 2n = 0.$$

Luego $\lim\limits_{x\to 2n} f(x) = 0 = f(2n)$, lo que *prueba que* $f(x)$ *es continua en* $2n$.

Continuidad en un número impar $2n-1$.

Tenemos $\lim\limits_{x\to(2n-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(2n-1)^-} [x - (2n-2)]$

(pues $2n-2 < x < 2n-1$, cuando $x \to (2n-1)^+$)

$$= 2n - (2n-1) = 1.$$

Luego $\lim\limits_{x\to 2n-1} f(x) = 1 = f(2n-1)$, y por lo tanto $f(x)$ *es continua en el punto* $2n-1$.

PROBLEMA 10. Hallar los intervalos en los cuales las siguientes funciones son continuas

(1) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 7x + 6}$ **(2)** $g(x) = 1 - x + [\![x]\!] - [\![1-x]\!]$

SOLUCION.

(1) Puesto que $f(x)$ es una función racional, sabemos que es una función continua en todos los puntos x tales que $x^2 - 7x + 6 \ne 0$.

De $x^2 - 7x + 6 = (x-6)(x-1) = 0$ vemos que $x = 1, 6,$ son los únicos puntos que anulan el denominador de $f(x)$. Luego la función $f(x)$ es continua en los intervalos abiertos $(-\infty, 1)$, $(1, 6)$ y $(6, +\infty)$.

(2) Simplificamos la expresión dada de $g(x)$.

Si $[\![x]\!] = n$, entonces $n \le x < n+1$, $-n-1 < -x \le -n$ y $-n < 1-x \le 1-n$.

Luego $$[\![1-x]\!] = \begin{cases} -n & \text{si } -n < 1-x < 1-n \quad \text{o} \quad n < x < n+1 \\ 1-n & \text{si } 1-x = 1-n \quad \text{o} \quad x = n\,. \end{cases}$$

Y por lo tanto, si $n < x < n+1$ tenemos

$$f(x) = 1-x+[\![x]\!]-[\![1-x]\!] = 1-x+n-(-n) = 1-x+2n;$$

y si $x = n$, tenemos

$$f(x) = 1-x+[\![x]\!]-[\![1-x]\!] = 1-n+n-(1-n) = n.$$

En resumen, $f(x) = 1-x+2n$ si $n < x < n+1$ y $f(x) = n$ si $x = n$.

Se sigue pues que $f(x)$ es continua en cada intervalo abierto $(n, n+1)$.

Continuidad en el punto n. Calculamos los límites laterales

$$\lim_{x\to n^-} f(x) = \lim_{x\to n^-} (1-x+2(n-1)) \qquad (\text{pues } n-1 < x < n \text{ cuando } x \to n^-)$$
$$= 1-n+2(n-1) = n-1,$$

$$\lim_{x\to n^+} f(x) = \lim_{x\to n^+} (1-x+2n) \qquad (\text{pues } n < x < n+1 \text{ cuando } x \to n^+)$$
$$= 1-n+2n = 1+n,$$

y puesto que $f(n) = n \ne \lim\limits_{x\to n^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to n^+} f(x)$, concluimos que $f(x)$ es *continua solamente en cada intervalo abierto* $(n, n+1)$.

PROBLEMA 11. Determinar si la función

$$f(x) = 2x-1 \quad \text{si } x \le 2 \qquad \text{y} \qquad f(x) = x^2 - 3 \quad \text{si } x > 2$$

es continua en los siguientes intervalos:

(1) $(-\infty, 2]$ (2) $(0, 4)$ (3) $[2, 5)$ (4) $(2, 5)$

SOLUCION.

(1) Sí, porque $f(x)=2x-1$ es una función continua en toda la recta.

(2) $f(x)$ es continua en cada punto a tal que $0<a<2$ o $2<a<4$, pero

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x-1) = 2(2)-1=3$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(x^2-3\right) = (2)^2-3=1$$

de donde se sigue que no existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, y por lo tanto, que $f(x)$ no es continua en $x=2$.

Luego, la función no es continua en el intervalo abierto $(0,4)$.

(3) Puesto que $$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(x^2-3\right) = 1\ ,$$

y $$f(2)=2(2)-1=3\ ,$$

se tiene que $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq f(2)$, y por lo tanto $f(x)$ no es continua en el intervalo $[2,5)$.

(4) Puesto que $f(x)=x^2-3$ para $x>2$, concluimos que $f(x)$ es continua en el intervalo abierto $[2,5)$.

PROBLEMA 12. Hallar los valores de A y B para que sea continua la función

$$f(x)=\begin{cases} x+2A & x<-2 \\ 3Ax+B & -2\le x\le 1 \\ 3x-2B & 1<x \end{cases}$$

SOLUCION.

La función $f(x)$ es evidentemente continua en todos los puntos $x\neq -2,\ 1$.

Así, solamente debemos exigir la condición de continuidad en los puntos $x=-2,\ 1$.
Para la continuidad de $f(x)$ en $x=-2$ tenemos

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2) \quad \text{o} \quad \lim_{x\to -2^-} (x+2A) = \lim_{x\to -2^+} (3Ax+B) = -6A+B\ ,$$

$$-2+2A=-6A+B\ ,\quad \text{que da la ecuación}\quad 8A-B=2 \tag{1}$$

Similarmente, para la continuidad de $f(x)$ en $x=1$ tenemos

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \quad \text{o} \quad \lim_{x\to 1^-}(3Ax+B) = \lim_{x\to 1^+}(3x-2B) = 3A+B\ ,$$

$$3A+B=3-2B\ ,\quad \text{que da la ecuación}\quad A+B=1 \tag{2}$$

Resolviendo (1) y (2) obtenemos $A=1/3$ y $B=2/3$.

PROBLEMA 13. Probar que la función

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x \text{ es un número racional}\\ 0 & \text{si } x \text{ es un número irracional,}\end{cases}$$

no es continua en ningún punto.

SOLUCION. Suponemos conocido el hecho de que entre dos números cualesquiera siempre existen números racionales e irracionales. Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que exista un punto a tal que $f(x)$ es continua en a, o sea que se cumple que $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Entonces para $\varepsilon=1/2$ existe un $\delta>0$ tal que $|x-a|<\delta$ implica $|f(x)-f(a)|<1/2$.

Elijamos un número racional r y un número irracional i tales que

$$a<r<a+\delta \quad \text{y} \quad a<i<a+\delta .$$

Luego $$|f(r)-f(a)|=|1-f(a)|<1/2 \tag{1}$$

y $$|f(i)-f(a)|=|0-f(a)|<1/2 \tag{2}$$

Entonces (1) es equivalente a $1-1/2<f(a)<1+1/2$ o $1/2<f(a)<3/2$

y (2) es equivalente a $-1/2<f(a)<1/2$. Así obtenemos la contradicción $1/2<f(a)$ y $f(a)<1/2$.

Luego $f(x)$ no es continua en ningún punto.

PROBLEMA 14. Dar ejemplos de dos funciones discontinuas tales que la suma y el producto de las mismas sean funciones continuas.

SOLUCION. Sea $f(x)$ la función discontinua dada en el problema 13.

Tomemos $g(x)=1-f(x)$. Entonces $g(x)$ también es discontinua, ya que si fuese continua, la función $1-g(x)=1-[1-f(x)]=f(x)$ sería continua.

Por otra parte, tenemos que

$$f(x)+g(x) = f(x)+[1-f(x)] = 1 = \text{función constante},$$

que es una función continua, y

$$f(x).g(x) = f(x).(1-f(x)) = 0 = \text{función constante},$$

pues si x es un número racional entonces $f(x)=1$ y $1-f(x)=0$,

y por lo tanto $f(x).g(x)=0$; y si x es un número irracional, entonces $f(x)=0$, y también obtenemos $f(x).g(x)=0$. Luego $f(x).g(x)$ es una función continua.

PROBLEMA 15. Probar que las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son continuas.

SOLUCION. Debemos probar que $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ y $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$.

Estos dos resultados fueron establecidos en el ejemplo 5 de la sección 6.3.

Luego $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son funciones continuas en todo punto a.

PROBLEMA 16. Composición de funciones continuas.

Probar que si $f(x)$ es continua en el punto a y $g(x)$ es continua en el punto $f(a)$, entonces la función $h(x)=g(f(x))$ es continua en el punto a.

SOLUCION. Debemos probar que $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g(f(a))$.

Sea $\varepsilon>0$

Paso 1. Por la continuidad de $g(y)$ en $f(a)$, existe un $\delta_1>0$ tal que

$$|y-f(a)|<\delta_1 \quad \text{implica} \quad |g(y)-g(f(a))|<\varepsilon$$

Paso 2. Por la continuidad de $f(x)$ en a, para $\delta_1>0$ existe un $\delta>0$ tal que $|x-a|<\delta$ implica $|f(x)-f(a)|<\delta_1$.

Luego, si $|x-a|<\delta$ entonces $|f(x)-f(a)|<\delta_1$, por el paso 1, y a su vez $|f(x)-f(a)|<\delta_1$ implica $|g(f(x))-g(f(a))|<\varepsilon$ por el paso 2.

Así hemos probado que $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g(f(a))$,

y por lo tanto, que $g(f(x))$ es continua en el punto a.

PROBLEMA 17. Sean las funciones

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

Hallar todos los puntos en los cuales la función compuesta $g(f(x))$ es continua.

SOLUCION.

La función $y = f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ es continua en todos los puntos $x \neq 1$.

La función $g(y) = \sqrt{y}$ es continua en todos los puntos $y \geq 0$.

Luego, por el problema 16, la función compuesta $g(f(x))$ es continua en todos los puntos $x \neq 1$ tales que $f(x) \geq 0$. Estos puntos son los que satisfacen $\dfrac{x+1}{x-1} \geq 0$, esto es, los pùntos del conjunto $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

PROBLEMA 18. Determinar la continuidad de

$$f(x) = \frac{[\![x^2]\!] - [\![x]\!]^2}{x^2 - 1}, \quad \text{en el intervalo cerrado } [-1, 1].$$

SOLUCION. La función no está definida en los extremos -1, 1 . Vamos a obtener una expresión más simple de la función $f(x)$.

Si $-1 < x < 0$ entonces $[\![x]\!] = -1$, $0 < x^2 < 1$ y $[\![x^2]\!] = 0$,

luego $f(x) = \dfrac{0-(-1)^2}{x^2-1} = -\dfrac{1}{x^2-1}$. Y si $0 \leq x < 1$, entonces $[\![x]\!] = 0$, $0 \leq x^2 < 1$ y $[\![x^2]\!] = 0$, luego $f(x) = 0$.

En resumen, $f(x) = -\dfrac{1}{x^2-1}$ si $-1 < x < 0$; y $f(x) = 0$, de otra manera.

De tal expresión, concluimos que $f(x)$ es continua en todos los puntos de los intervalos $(-1, 0)$ y $(0, 1)$.

***Continuidad en* 0.** Calculamos los límites laterales

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{x^2-1} = 1$$

y
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 0 = 0.$$

Luego, no existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y la función no es continua en el punto 0.

***Continuidad en* -1.** Tenemos $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} -\dfrac{1}{x^2-1} = +\infty$.

Así, $f(x)$ tiene una discontinuidad de segunda clase en $x=-1$.

***Continuidad en* 1.** Tenemos $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 0 = 0$ y por lo tanto en el punto $x=1$, la función $f(x)$ tiene una discontinuidad removible.

PROBLEMA 19. Teorema del cero.

Probar que si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $f(x)$ cambia de signo en los extremos, entonces existe un número x en el intervalo abierto (a,b) tal que $f(x)=0$.

SOLUCION.

$f(x)$ cambia de signo en los extremos si $f(a).f(b)<0$ o si $f(a)>0$ y $f(b)<0$, o $f(a)<0$ y $f(b)>0$.

En ambos casos, el número 0 se encuentra comprendido entre los valores $f(a)$ y $f(b)$ y por el teorema del valor intermedio, existe un número x en $[a,b]$ tal que $f(x)=0$. Puesto que $f(a)$ y $f(b)\neq 0$, el número x se encuentra en el intervalo abierto (a,b).

PROBLEMA 20. Probar que $x^3-3x+1=0$ tiene una raíz real en el intervalo $(1,2)$.

SOLUCION. Consideremos la función continua $f(x)=x^3-3x+1$ sobre el intervalo cerrado $[1,2]$.

Esta función cambia de signo en los extremos.

En efecto,
$$f(1)=(1)^3-3(1)+1=-1$$

y
$$f(2)=(2)^3-3(2)+1=3.$$

luego, por el teorema del cero, existe al menos un número tal que

$$1 < x < 2 \text{ y } f(x) = 0 \text{ , o sea } \quad x^3 - 3x + 1 = 0 .$$

Así la ecuación $$x^3 - 3x + 1 = 0$$

tiene una raíz real en el intervalo abierto $(1, 2)$.

PROBLEMA 21. Probar que todo polinomio $p(x)$ de grado impar tiene una raíz real.

SOLUCION. Sea $p(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0$ donde $b_m > 0$ y m es un número impar.

Tenemos $$\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty \qquad (1)$$

y $$\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty \qquad (2)$$

Estos resultados se siguen de $$p(x) = \frac{b_m + \dfrac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \dfrac{b_0}{x^m}}{\dfrac{1}{x^m}} ,$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_0}{x^m} \right) = b_m > 0 ,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^m} = 0 \text{ , a través de valores positivos,}$$

y $$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^m} = 0, \text{ a través de valores negativos, pues } m \text{ es impar.}$$

De (2) se sigue que existe un número $a < 0$ tal que $p(a) < 0$, y de (1), que existe un número $b > 0$ tal que $p(b) > 0$.

Luego $p(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y cambia de signo en los extremos y entonces, por el teorema del cero existe un número x en (a, b) tal que $p(x) = 0$.

PROBLEMA 22. Sea n un número entero. Probar que

(1) $$\lim_{x \to \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^+} \operatorname{tg} x = -\infty , \qquad \lim_{x \to \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^-} \operatorname{tg} x = +\infty$$

(2) Probar que existen infinitos números reales x tales que $\operatorname{tg} x = x$.

SOLUCION.

(1) Si $x > n\pi + \pi/2$ escribimos $x = n\pi + \pi/2 + h$, con $h > 0$.

$$\text{y} \quad \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen}(n\pi + \pi/2 + h)}{\cos(n\pi + \pi/2 + h)} = \frac{(-1)^n \cos h}{-(-1)^n \operatorname{sen} h} = -\frac{\cos h}{\operatorname{sen} h},$$

donde hemos empleado

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(n\pi + \pi/2 + h) &= \operatorname{sen}(n\pi + \pi/2) \cos h + \cos(n\pi + \pi/2) \operatorname{sen} h , \\ \cos(n\pi + \pi/2 + h) &= \cos(n\pi + \pi/2) \cos h - \operatorname{sen}(n\pi + \pi/2) \operatorname{sen} h , \end{aligned}$$

con $\operatorname{sen}(n\pi + \pi/2) = (-1)^n$ y $\cos(n\pi + \pi/2) = 0$.

Luego $$\lim_{x \to \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^+} \operatorname{tg} x = \lim_{h \to 0^+} \frac{-\cos h}{\operatorname{sen} h} = -\infty ,$$

pues $\lim\limits_{h \to 0^+} (-\cos h) = -1$ y $\lim\limits_{h \to 0^+} \operatorname{sen} h = 0$, $\operatorname{sen} h > 0$,

a través de valores positivos de h.

En forma análoga, si $x < n\pi + \pi/2$ hacemos $x = n\pi + \pi/2 + h$ con $h < 0$.

Luego $$\lim_{x \to \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^-} \operatorname{tg} x = \lim_{h \to 0^-} \frac{-\cos h}{\operatorname{sen} h} = +\infty ,$$

pues $\lim\limits_{h \to 0^-} (-\cos h) = -1$ y $\lim\limits_{h \to 0^-} \operatorname{sen} h = 0$, $\operatorname{sen} h < 0$

a través de valores negativos de h.

(2) Fijemos un número entero n. Probaremos que en el intervalo abierto $\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2},\ n\pi + \dfrac{3}{2}\pi\right)$ existe un número x tal que $\operatorname{tg} x = x$.

Por la parte (1) tenemos $$\lim_{x \to \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^+} [\operatorname{tg} x - x] = -\infty - \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\infty$$

y $$\lim_{x \to \left(n\pi + \frac{3}{2}\pi\right)^-} [\operatorname{tg} x - x] = +\infty - \left(n\pi + \frac{3}{2}\pi\right) = +\infty .$$

Luego, la función $\operatorname{tg} x - x$ cambia de signo en el intervalo $n\pi + \dfrac{\pi}{2} < x < n\pi + \dfrac{3\pi}{2}$.

Y como es continua, por el teorema del cero existe un x en dicho intervalo tal que $\operatorname{tg} x - x = 0$.

Así, hemos probado que existe un número x en el intervalo $\left(n\pi + \frac{\pi}{2},\ n\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$ tal que $\operatorname{tg} x = x$.

Finalmente, puesto que en cada intervalo $\left(n\pi + \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{3}{2}\pi\right)$, $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$,

hay números x tales que $\operatorname{tg} x = x$, concluimos que existen infinitos x con esta propiedad.

PROBLEMA 23. Sea $f(x)$ una función definida en todo número real y tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Si $f(x)$ es continua en el punto 0 probar que $f(x)$ es continua en todo a.

SOLUCION. Debemos probar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Haciendo el cambio de variable $x = a + h$, tenemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h) = \lim_{h \to 0} f(a) + \lim_{h \to 0} f(h) = f(a) + f(0) = f(a).$$

Luego $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, y así $f(x)$ es continua en a.

PROBLEMA 24. Si $f(x)$ es una función tal que

(1) $f(x)$ es continua en cero y

(2) $f(x+y) = f(x).f(y)$, probar que $f(x)$ es continua en todo punto a.

SOLUCION. Haciendo $x = a + h$ tenemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h) = \lim_{h \to 0} f(a).f(h) = f(a).f(0) = f(a+0) = f(a),$$

y así, $f(x)$ es continua en el punto a.

PROBLEMA 25. Probar que si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas en el punto a, entonces la función $M(x) = \text{máximo}\{f(x), g(x)\}$ es continua en el punto a.

SOLUCION. Por definición $M(x) = f(x)$ si $f(x) \geq g(x)$ y,
$M(x) = g(x)$ si $f(x) \leq g(x)$.

Debemos probar que $\lim_{x \to a} M(x) = M(a)$

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces

(1) Existe un $\delta_1 > 0$ tal que $|x - a| < \delta_1$ implica $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ o $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$, (por la continuidad de $f(x)$ en a .)

(2) Existe un $\delta_2 > 0$ tal que $|x - a| < \delta_2$ implica $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$ o $g(a) - \varepsilon < g(x) < g(a) + \varepsilon$, (por la continuidad de $g(x)$ en a .)

Tomemos $\delta = \text{minímo}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Luego, de las relaciones (1) y (2) se sigue que si $|x - a| < \delta$ entonces $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$, $g(a) - \varepsilon < g(x) < g(a) + \varepsilon$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} M(a) - \varepsilon &= \text{máx}\{f(a), g(a)\} - \varepsilon \\ &< \text{máx}\{f(x), g(x)\} = M(x) \\ &< \text{máx}\{f(a), g(a)\} + \varepsilon = M(a) + \varepsilon \end{aligned}$$

Así, $|x - a| < \delta$ implica $|M(x) - M(a)| < \varepsilon$,

y por lo tanto hemos demostrado que $\lim_{x \to a} M(x) = M(a)$. Luego $M(x)$ es continua en a.