Capítulo 2

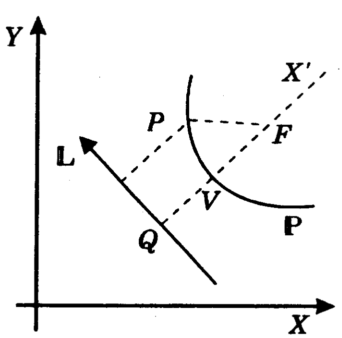
La Parábola

2.1 DEFINICION. Una parábola $\mathbb{P}$ es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de una recta fija $\mathbb{L}$ y de un punto fijo F fuera de la recta. Así,

$$\mathbb{P} = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 \ / \ \text{distancia de } P \text{ a } \mathbb{L} = \text{ distancia de } P \text{ a } F \right\}$$

Supongamos que las coordenadas de los puntos P y F referidas al sistema cartesiano XY sean $P = (x, y)$ y $F = (f_1, f_2)$, y que la ecuación de la recta $\mathbb{L}$ sea $Ax + By + C = 0$. Entonces la ecuación de la parábola será:

$$\frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sqrt{(x - f_1)^2 + (y - f_2)^2}$$



En relación a la parábola, establecemos lo siguiente:

2.2 NOTACION

(1) Se llama *directriz de la parábola* a la recta $\mathbb{L}$.

(2) Se llama *foco de la parábola* al punto F.

(3) Se llama *eje de la parábola* a la recta X' que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz.

X' y $\mathbb{L}$ se intersecan en un punto Q, y el punto medio V del segmento $[Q, F]$ pertenece a la parábola.

(4) El punto $V = \frac{1}{2}(Q + F)$ recibe el nombre de *vértice de la parábola.*

2.3 ECUACION DE LA PARABOLA CON EJE PARALELO A UN EJE DE COORDENADAS

TEOREMA.

1) La ecuación de la parábola con vértice $V = (h, k)$ y eje paralelo al eje X es

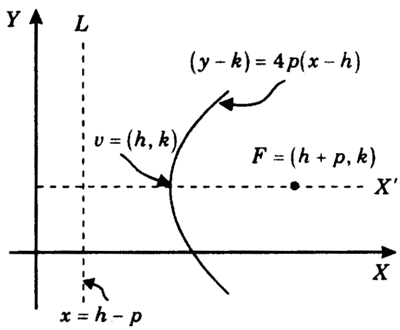
$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

donde

P = abscisa del foco − abscisa del vértice.

En este caso, el foco es $F = (h + p, k)$

y la directriz L: $x = h - p$.



Parábola con eje paralelo al eje X

2) La ecuación de la parábola con vértice $V = (h, k)$ y eje paralelo al eje Y es

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

donde, P =(ordenada del foco − ordenada del vértice).

En este caso, el foco es $F = (h, k + p)$ y la directriz es L: $y = k - p$

2.4 ECUACION VECTORIAL DE LA PARABOLA

Sea V el vértice y F el foco de una parábola $\mathbb{P}$. Consideremos un *sistema de coordenadas cartesianas* $X'Y'$ como sigue. Sean

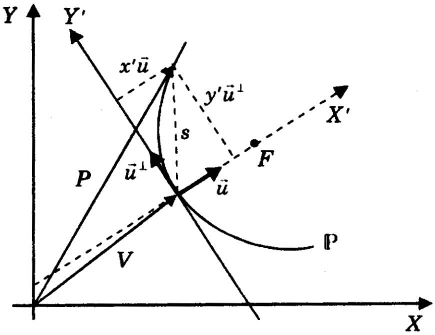
1) $\vec{u}$, un vector unitario paralelo al vector $F - V$.

Así, $\vec{u}$ puede ser $\dfrac{F - V}{|F - V|}$ o $-\dfrac{F - V}{|F - V|}$

2) $\vec{u}^{\perp}$, el vector ortogonal a $\vec{u}$.

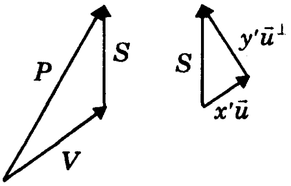
Así, si $\vec{u} = (a, b)$ entonces $\vec{u}^{\perp} = (-b, a)$.

Geométricamente, $\vec{u}^{\perp}$ se obtiene rotando el vector $\vec{u}$ un ángulo de 90° en el sentido antihorario.



3) p, el número real que cumple $F - V = p\vec{u}$.

4) $X'Y'$, el sistema de coordenadas cartesianas con origen en el vértice V, eje X' orientado en el sentido de $\vec{u}$ y eje Y', orientado en el sentido de $\vec{u}^{\perp}$



Observemos que si (x', y') son las coordenadas de un punto P del plano referidas al sistema $X'Y'$, entonces

$$P = V + x'\,\vec{u} + y'\,\vec{u}^{\perp}$$

En efecto, $P = V + S$ y $S = x'\,\vec{u} + y'\,\vec{u}^{\perp}$

Se cumple el siguiente

TEOREMA. Un punto P del plano se encuentra en la parábola $\mathbb{P}$ si y solamente si satisface la ecuación

$$P = V + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp} \qquad \text{con } y'^2 = 4px', \quad x', y' \in \mathbb{R}$$

o equivalentemente, si es de la forma

$$P = V + \frac{y'^2}{4p}\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp} \qquad \text{con } y' \in \mathbb{R} \text{ arbitrario}$$

2.5 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Hallar la ecuación de la parábola con foco $F = (1, 1)$ y directriz L: $x + y + 2 = 0$.

SOLUCION. Sea $P = (x, y)$ un punto de la parábola. Se tiene entonces por definición

distancia de P a L = distancia de P a F

$$\frac{|x + y + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \left[(x-1)^2 + (y-1)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Elevando al cuadrado $\quad \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + 4 + 2xy + 4x + 4y\right) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$

resulta $\quad x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y = 0$

RESPUESTA. $x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y = 0$.

PROBLEMA 2. Probar que la ecuación de la parábola con vértice $V = (h, k)$ y eje paralelo al eje X es $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, donde

p = absisa del foco $-$ abscisa del vértice

SOLUCION. El foco de la parábola es

$$F = (h + p, k) \qquad (1)$$

En efecto,

$$\text{abscisa del foco} = p + \text{abscisa del vértice} = p + h,$$

por definición de p,

y $$\text{ordenada del foco} = \text{ordenada del vértice} = k,$$

pues el eje de la parábola es paralelo al eje X.

Por otra parte, la ecuación de la directriz L de la parábola es

$$L\colon\ x = h - p \qquad (2)$$

En efecto, la directriz L es perpendicular al eje X y se halla a igual distancia del vértice que el foco de éste.

Sea $P = (x, y)$ un punto de la parábola.

Entonces por definición de parábola y empleando (1) y (2) se tiene

$$\text{distancia de } P \text{ a } L = \text{distancia de } P \text{ a } F$$

$$|x - h + p| = \left\{[x - (h + p)]^2 + (y - k)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Elevando al cuadrado

$$x^2 + h^2 + p^2 - 2xh + 2xp - 2hp = x^2 + h^2 + p^2 - 2xh - 2xp + 2hp + (y - k)^2$$

o también $$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

PROBLEMA 3. Sea $P = V + \dfrac{t^2}{4p}\vec{u} + t\vec{u}^{\perp}$, $t \in \mathbb{R}$, la ecuación vectorial de la parábola. Hallar las ecuaciones paramétricas si $V = (h,k)$, $\vec{u} = (a,b)$, p, son dados.

SOLUCION. Se tiene $$(x, y) = (h, k) + \frac{t^2}{4p}(a, b) + t(-b, a)$$

e igualando coordenadas

$$x = h + \frac{a}{4p}t^2 - bt \qquad\qquad y = k + \frac{b}{4p}t^2 + at$$

PROBLEMA 4. Se llama *lado recto* o *cuerda focal* de una parábola a la cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje de la parábola. Probar que la longitud del lado recto es $|4p|$.

SOLUCION. Consideremos la parábola con vértice $V=(0,0)$ y eje paralelo al eje X

$$y^2=4px$$

La recta $x=p$ corta a la parábola en los puntos $(p,2p)$ y $(p,-2p)$

En efecto, sustituyendo $x=p$

da $$y^2=4p^2 \quad \text{o} \quad y=\pm 2p$$

Luego

$$\begin{aligned} \text{longitud del lado recto} &= \text{distancia de } (p,2p) \text{ a } (p,-2p) \\ &= \sqrt{(p-p)^2+[2p-(-2p)]^2} \\ &= \sqrt{(4p)^2}=|4p| \end{aligned}$$

PROBLEMA 5. Un arco parabólico tiene 18 mts. de altura y 24 mts. de ancho en la base. Si la parte superior del arco es el vértice de la parábola, ¿a qué altura sobre la base tiene la parábola un ancho de 16 metros?

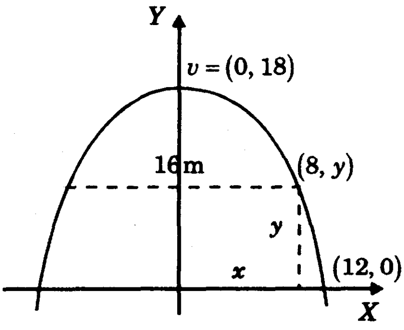
SOLUCION. Sea $V=(0,18)$ el vértice de la parábola con eje Y.

Entonces la ecuación de la parábola es

$$(x-0)^2=4p(y-18)$$

El punto $(12,0)$ se halla en la parábola y sustituyendo las coordenadas en la ecuación calculamos p

$$\begin{aligned} 12^2 &= 4p(0,18) \\ p &= -2 \end{aligned}$$



La altura buscada es la ordenada del punto $(8,y)$ de la parábola.

Se tiene $8^2=-8(y-18)$, $y=10$

RESPUESTA. A una altura de 10 metros.

PROBLEMA 6. Si $L=(-9,3)$ y $R=(-1,-5)$ son los extremos del lado recto de una parábola, hallar la ecuación de la parábola.

SOLUCION. Calcularemos el foco F y la directriz L de la parábola y aplicaremos la definición para hallar la ecuación.

Como el foco F es el punto medio del lado recto LR se tiene,

$$F = \tfrac{1}{2}(L+R) = \tfrac{1}{2}[(-9,3)+(-1,-5)] = \tfrac{1}{2}(-10,-2) = (-5,-1)$$

Por otra parte, por el problema 4, podemos calcular $|p|$ como sigue

$$|4p| = \text{longitud del lado recto} = \sqrt{(-9+1)^2+(3+5)^2} = 8\sqrt{2}$$

de donde $$|p| = 2\sqrt{2}.$$

La ecuación de la recta L' que contiene al lado recto es

$$\frac{y-(-5)}{x-(-1)} = \frac{(3)-(-5)}{(-9)-(-1)} = -1 \quad \text{o} \quad L'\colon\ x+y+6=0.$$

Los puntos (x, y) de la directriz L de la parábola son aquellos que se encuentran a una distancia $2|p| = 4\sqrt{2}$ de la recta L', de modo que (x,y) satisface

$$\frac{|x+y+6|}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \quad \text{o} \quad x+y+6 = \pm 8$$

De esta manera, vemos que hay dos posibles directrices

$$L_1\colon\ x+y-2=0 \quad \text{y} \quad L_2\colon\ x+y+14=0$$

y por consiguiente hay dos parábolas

$$\mathbb{P}_1\colon\ \frac{|x+y-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x+5)^2+(y+1)^2} \quad \text{y} \quad \mathbb{P}_2\colon\ \frac{|x+y+14|}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x+5)^2+(y+1)^2}$$

Elevando al cuadrado y efectuando las reducciones convenientes en cada caso, se obtiene

$$\mathbb{P}_1\colon\ x^2-2xy+y^2+24x+8y+48 = 0$$

y

$$\mathbb{P}_2\colon\ x^2-2xy+y^2-8x-24y-144 = 0$$

RESPUESTA. Hay dos soluciones:

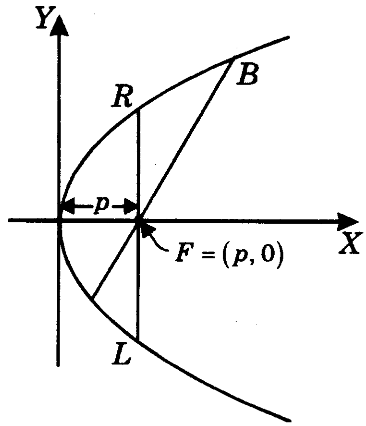
$$x^2-2xy+y^2+24x+8y+48 = 0$$
$$x^2-2xy+y^2-8x-24y-144 = 0$$

PROBLEMA 7. Hallar la pendiente del ángulo que forma la cuerda que pasa por el foco de la parábola $y^2 = 4px$ con el eje de ésta, para que la longitud de la cuerda sea 3 veces el lado recto.

SOLUCION. Sea AB la cuerda focal que tiene una longitud $3|4p| = 12|p|$. Si m es la pendiente de AB, entonces la ecuación de AB es

$$\frac{y-0}{x-p} = m \quad \text{o} \quad y = mx-mp$$

Calculando los puntos A y B en los cuales la cuerda corta a la parábola, sustituimos $y = mx - mp$ en la ecuación $y^2 = 4px$



$$(mx - mp)^2 = 4px$$

o $$m^2x^2 - 2p(m^2+2)x + m^2p^2 = 0$$

y resolviendo esta ecuación de segundo grado en x, obtenemos las abscisas de A y B

$$x = \frac{2p(m^2+2) \pm \sqrt{4p^2(m^2+2)^2 - 4m^4p^2}}{2m^2}$$

o $$x = \frac{p(m^2+2) \pm 2|p|\sqrt{m^2+1}}{m^2}$$

Supongamos que $A = (x_0, y_0)$ y $B = (x_1, y_1)$

con $$x_0 = \frac{p(m^2+2) - 2|p|\sqrt{m^2+1}}{m^2} \quad \text{y} \quad x_1 = \frac{p(m^2+2) + 2|p|\sqrt{m^2+1}}{m^2}$$

se tiene entonces $$x_1 - x_0 = \frac{4|p|\sqrt{m^2+1}}{m^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Por otra parte, $$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_0}$$

da $$y_1 - y_0 = m(x_1 - x_0) \qquad \textbf{(2)}$$

Finalmente, $$12|p| = \text{longitud de } AB = \sqrt{(y_1-y_0)^2 + (x_1-x_0)^2}$$

$$= \sqrt{m^2(x_1-x_0)^2 + (x_1-x_0)^2} \quad , \quad \text{por (2)}$$

$$= \sqrt{1+m^2} \, . \, |x_1 - x_0| = \sqrt{1+m^2} \, . \, \frac{4|p|\sqrt{1+m^2}}{m^2} \, , \qquad \text{por (1)}$$

$$= \frac{4|p| . (1+m^2)}{m^2}$$

o también $3m^2 = 1 + m^2$

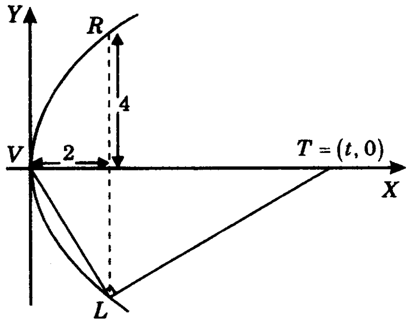
y resolviendo $m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

RESPUESTA. $m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

PROBLEMA 8. El vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo es el extremo L del lado recto LR de la parábola $y^2 = 8x$. El segundo vértice del triángulo es el vértice de la parábola. ¿Cuál es el tercer vértice del triángulo y cuánto vale la hipotenusa, si se sabe que ésta se encuentra sobre el eje X?

SOLUCION. Sea $T = (t, 0)$ el tercer vértice. Se sabe que

$$V = (0, 0) \qquad L = (2, -4)$$



La pendiente del lado VL es $\dfrac{-4-0}{2-0} = -2$, y por lo tanto la recta LT que es perpendicular a VL tiene ecuación

$$\frac{y-(-4)}{x-2} = \frac{1}{2}$$

o $$y = \tfrac{1}{2}x - 5$$

Esta recta corta al eje X en $T = (t, 0)$.

Sustituyendo las coordenadas del punto T en la ecuación, para obtener t

$$0 = \tfrac{1}{2}t - 5$$

da $\quad t = 10$, y longitud de $VT = 10$

RESPUESTA. El tercer vértice es $(10, 0)$ y la longitud de la hipotenusa 10.

PROBLEMA 9. Un proyectil describe una curva parabólica alrededor de un punto F, siendo éste el foco de la parábola. Cuando el proyectil está a 10 Kms. de F, el segmento de recta de F al proyectil hace un ángulo de 60° con el eje de la parábola.

1) Hallar la ecuación de la parábola.

2) ¿Qué tan cerca de F pasa el proyectil?

SOLUCION. Sean $\quad V = (0, 0)$ el vértice de la parábola,

$F = (p, 0)$ el foco,

y $\quad L$: $x = -p$ la directriz.

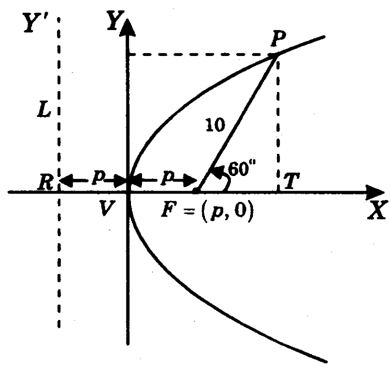
Calcularemos p. Por definición de parábola se tiene para el punto P

$$\text{distancia de } P \text{ a } F = \text{distancia de } P \text{ a } L$$
$$10 = \text{distancia de } P \text{ a } L$$

por otra parte, de la figura se tiene

distancia de P a L =

$$= |V - R| + |F - V| + |T - F|$$
$$= p + p + 10\cos 60^{\circ}$$



Luego $\qquad 10 = 2p + 10 \times \frac{1}{2}$

y $\qquad p = \frac{5}{2}$.

La ecuación buscada es entonces

$$y^2 = 10\left(x - \tfrac{5}{2}\right).$$

Finalmente,

menor distancia de P a F = menor distancia de P a L

$= p = 5/2$

RESPUESTA. 1) $y^2 = 10\left(x - \frac{5}{2}\right)$ 2) $5/2$ Km

PROBLEMA 10. El agua que fluye de un grifo horizontal que está a 25 mts. del piso describe una curva parabólica con vértice en el grifo. Si a 21 mts. del piso, el flujo del agua se ha alejado 10 mts. de la recta vertical que pasa por el grifo, ¿a qué distancia de esta recta vertical tocará el agua al suelo?

SOLUCION. Sea $V = (0, 25)$ el vértice de la parábola.

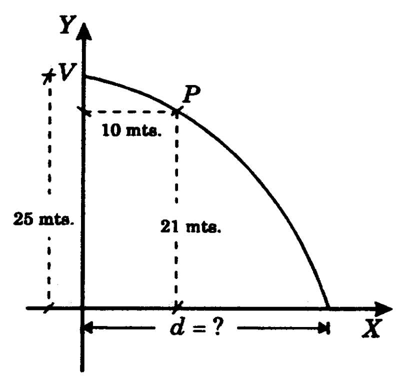
La ecuación de la parábola es $\quad (x - 0)^2 = 4p(y - 25)$

Puesto que el punto $P = (10, 21)$ se encuentra en la parábola se cumple

$$10^2 = 4p(21 - 25)$$

o

$$p = -25/4$$



Para calcular la distancia d bastará sustituir las coordenadas del punto $(d, 0)$ en la ecuación hallada

$$d^2 = -25\,(0 - 25) \quad \Rightarrow \quad d = \pm 25$$

RESPUESTA. A 25 mts. de la recta vertical.

PROBLEMA 11. Hallar todos los puntos de la parábola $y^2 = 4px$ tales que el pie de la perpendicular trazada del punto a la directriz, el foco y el punto mismo sean vértices de un triángulo equilátero.

SOLUCION. Para que P, R y F sean los vértices de un triángulo equilátero deberá cumplirse

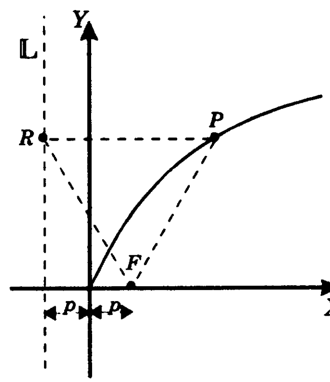
$$|R-F| = |P-R| \qquad (1)$$

puesto que $\quad |P-R| = |P-F|$, $\quad$ por definición de parábola.

Se tiene $\quad P = (x, y)$ con $y^2 = 4px$,

$R = (-p, y)$ y $F = (p, 0)$

Luego sustituyendo en (1)



$$|(-p, y) - (p,0)| = |(x, y) - (-p, y)|$$

$$\left(4p^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left\{(x+p)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$4p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

o $$x^2 - 2px - 3p^2 = 0,$$

que resuelta da $x = 3p, -p$

La solución $x = -p$ se descarta, pues $y^2 = -4p^2$ es imposible ya que $y^2 \geq 0$.

Luego $\quad x = 3p, \quad y = \pm 2\sqrt{3}p$.

RESPUESTA. $\left(3p, -2\sqrt{3}\,p\right)$ y $\left(3p, 2\sqrt{3}\,p\right)$

2.6 PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1. Hallar la mínima distancia entre los puntos de la parábola $y^2 = x - 1$ y la recta $y = \frac{1}{2}x + 3$. ¿En qué punto de la parábola, la distancia a la recta es mínima?

PROBLEMA 2. Determinar la ecuación de la parábola de foco $(0, 0)$ y directriz $y = x + 2$.

PROBLEMA 3. Sea la parábola $y^2 = 4x + 5$. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, -3)$ de la parábola y que no corta a ésta en ningún punto. (Dicha recta recibe el nombre de tangente de la parábola en el punto dado).

Sugerencia. Si $\dfrac{y+3}{x-1} = m$ es la ecuación de la recta, se sustituye x en la ecuación de la parábola, resultando entonces una ecuación de segundo grado en y. Para que la intersección de la recta con la parábola sea exactamente un punto, la ecuación resultante debe tener una sola raíz, y esto es cierto solamente si el discriminante de la ecuación es 0. Finalmente, la ecuación del discriminante permite obtener el valor de m.

PROBLEMA 4. Hallar la ecuación de una parábola que pasa por los puntos $(0,0)$ y $\left(0,\frac{80}{9}\right)$, y cuyo eje principal se encuentra sobre la recta $y = \frac{4}{3}x$.

RESPUESTAS.

1. Distancia mínima $= \frac{6\sqrt{5}}{5}$

2. $x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4y - 4 = 0$

3. $y = -\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$

4. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 60x - 80y = 0$