

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA
DEL PERÚ

REVISTA ELECTRÓNICA
CIBERTEXTOS

Agosto de 1995

Año 01, no. 01

LA GEOMETRIA FRACTAL O EL MUNDO COMO CAOS

Antonio Pérez

Pontificia Universidad Católica del Perú

La tormenta y la Mariposa

Cuando se escucha la palabra caos, se piensa inmediatamente en desorden, arbitrariedad y ausencia de la ley. La teoría contemporánea del caos recoge solo el primer significado, desorden, pues se propone mostrar justamente que procesos aparentemente arbitrarios y sin ley responden a formulaciones muy sencillas.

El orden es, por supuesto, algo relativo al observador, y depende de consideraciones tanto prácticas como estéticas. Llamamos desordenadas a aquellas formas a las que no estamos acostumbrados, y que por consiguiente son difíciles de recordar y de manipular.

Pero en la teoría del caos, desorden significa específicamente que partiendo de funciones muy sencillas obtendremos un comportamiento inesperado, muy complejo, aparentemente sujeto al azar. Es lo que también se expresa hablando de "funciones con dependencia sensitiva de las condiciones iniciales" o "efecto mariposa": Un leve aleteo de una mariposa en Tokio produce una tempestad en Centroamérica.

“Cómo es esto posible? Para el sentido común, leves variaciones en las condiciones iniciales no pueden producir sino leves variaciones en el resultado. Es decir, conocidas las condiciones iniciales y la ley de un proceso podremos conocer con bastante aproximación el resultado del proceso. La teoría del caos afirma en cambio que las alas de una mariposa pueden crear un resultado impredecible en las condiciones del clima, pues sus efectos son interactivos: Los cambios se repiten a todas las escalas hasta crear un efecto monstruoso en el conjunto.

El efecto parece monstruoso o desordenado para nosotros, pues rompe nuestras expectativas y predicciones, es inesperado y no parece ajustarse a ninguna ley. La teoría del caos cree haber encontrado esa ley, lo que no quiere decir que pretenda poder predecir el resultado del proceso. La teoría del caos es estrictamente determinista, pero al mismo tiempo afirma la impredecibilidad de los procesos. El caos es la impredecibilidad de los detalles de todo el proceso.

Por consiguiente, lo bello en la teoría del caos no es una forma caótica, lo bello es la forma bella producida caóticamente, es decir producida al azar con instrumentos deterministas.

Pero el caos tampoco significa el azar. La teoría del caos sugiere que el azar es producto de dos perspectivas distintas: antes y después de un proceso, por ejemplo barajar un mazo de cartas.

Al recibir mis cartas todo puede ser explicado según ciertas causas, por ejemplo la fuerza con que las doble y la presión que ejercí sobre los bordes para que se mezclen bien. Pero una vez barajadas ya no tendría sentido hacerlo de nuevo, pues aunque cambie mi suerte nunca sabremos si fue para mejor o peor. Es decir, aunque conozcamos las variables del proceso no podremos predecir el resultado de una intervención nuestra.

Si Dios creó el Universo de acuerdo con los principios de la teoría del caos, que describiremos más adelante como sistemas de ecuaciones no lineales, entonces no le dejo nada al azar, pero no podríamos predecir de los dados eternos que lanzo, por lo menos no con una inteligencia analítica. No nos ganaría necesariamente jugando póker.

ITERACION, RUGOSIDAD, AUTOSEMEJANZA

El problema que presenta la teoría es pues cómo podemos crear formas complejas impredecibles y aparentemente desordenadas partiendo de algoritmos o fórmulas simples y perfectamente deterministas. Dice Mandelbrot uno de los principales fundadores de la teoría del caos y de la geometría fractal: "A priori uno podría esperar que la construcción de formas complejas necesitaría reglas complejas. La geometría fractal es el estudio de las formas geométricas que parecen ser caóticas, pero que son de hecho perfectamente ordenadas" (quiere decir: son ordenadas porque dependen de una ley simple).

El secreto para generar el caos es la iteración de una ley simple. Por ejemplo: Tomamos un triángulo equilátero inicial de 30cm. por lado (véase la figura 1), dividimos cada lado en tres segmentos de 10cms. cada uno; borramos el segmento intermedio de cada lado y lo reemplazamos por dos líneas de 10cms., formando un nuevo triángulo equilátero al que se le ha borrado la base ahora repetimos (iteramos) el proceso en los seis triángulos equiláteros que han quedado; así sucesivamente, hasta la rugosidad.

Este primer ejemplo nos permite también visualizar una de las propiedades fundamentales de los objetos fractales: La auto semejanza. A todas las escalas, hasta el infinito, la complejidad y rugosidad de la forma es similar. Es lo que Mandelbrot llama justamente caos, que "la rugosidad de una forma geométrica no desaparezca a medida que examinamos más de cerca".

Para la matemática hasta antes de 1975 estas formas eran monstruosas y patológicas, porque no se reducen localmente a líneas rectas. Pero no deja de ser irónico que se llame patológica a las formas más usuales que produce la naturaleza, que no son líneas rectas ni curvas perfectas sino una mezcla en apariencia caótica y siempre impredecible.

Mandelbrot llama "fractales matemáticos y naturales" a las formas cuya "rugosidad y fragmentación no tiende ni a desaparecer, ni a fluctuar regularmente, sino que tiende a permanecer esencialmente la misma, a medida que la analizamos más de cerca". Con esto él piensa haber incorporado ciertos "caracteres" que resultaban patológicos al alfabeto que Galileo

heredó de Euclides. Y no es casual citar a Galileo, pues la geometría fractal esconde la pretensión extremista de que la física es pura geometría.

LOS ATRACTORES EXTRAÑOS EN EL ESPACIO DE FASES

Para hacer comprensible esta afirmación en toda su magnitud debemos recordar que aquí Mandelbrot parte de un logro de la física-matemática anterior a él: El espacio de fases. El espacio de fases es un plano cartesiano de abscisas y ordenadas (que eventualmente puede tener más de dos dimensiones) donde cada punto representa un estado y un conjunto de puntos un proceso dinámico. El caso más simple es el del péndulo (véase figura 2): Su movimiento se grafica en un espacio de fases como una circunferencia (si tiene un motor que lo mantenga en el movimiento constante) o como una espiral que termina en el cero. Cero de velocidad y cero de desplazamiento en el espacio.

La circunferencia y el punto cero de la espiral son dos atractores, es decir dos órbitas en las que las soluciones del sistema de ecuaciones terminan en el largo o mediano plazo. Por ejemplo el péndulo de un reloj de pared: Intervengo desde fuera, si le doy un golpe, empieza por perder su regularidad pero termina por volver a ella, o sea que vuelve a ser un punto en la circunferencia del espacio de fases: La circunferencia es un atractor en ese espacio de fases, un péndulo sin mecanismo en cambio tiende al largo plazo hacia su atractor: El punto cero en el espacio de fases. Es decir, se detiene.

La teoría del caos parte también de estos atractores simples, pero impone la idea de los atractores extraños. Existe un conjunto de ecuaciones no lineales cuyas primeras soluciones graficadas como puntos en un espacio de dos dimensiones empiezan a saltar de un lado para otro, pero luego aparece poco a poco una trayectoria parecida a un plátano (ver la figura 3). A medida que aumentan las soluciones ciertas líneas se engrosan para luego precisarse como dos líneas claras que a su vez se transforman en cuatro, dos muy juntas y las otras separadas. Y así hasta el infinito; a medida que graficamos más soluciones (lo que equivale a acercarnos cada vez más o a afinar nuestra escala) la estructura se reproduce, es auto semejante.

Esa figura es un atractor, y tiene la cualidad de que, partiendo de (casi) cualquier punto termina por volver a su órbita. Además, cuando miramos aparecer los puntos 1 por 1 nos parece que se diseminan fortuitamente en el plano, no podemos predecir dónde aparecer el siguiente, excepto que estar en algún lugar del atractor. El atractor no es pues sólo una determinada trayectoria u órbita sino también aquella órbita hacia la que tienden los demás puntos.

TURBULENCIA Y FRICCIÓN

Las figuras fractales se mostraron fructíferas para graficar procesos dinámicos complejos como la turbulencia. En la física no fractal, la turbulencia se trata con sistemas de ecuaciones no lineales, que por consiguiente no tienen soluciones fijas ni predecibles.

Esto se puede entender mejor con el ejemplo de la fricción: Así, si quiero ser realista al determinar la energía que debo emplear para cambiar la velocidad de un objeto no debo despreciar la fricción. Pero entonces mi problema es que la fricción depende de la velocidad -a mayor velocidad mayor fricción, y viceversa- es decir que mis variables no son independientes: Esto se expresa con sistemas de ecuaciones no -lineales- o sea, ecuaciones cuyas variables están elevadas a la segunda potencia por lo menos, en cuyo caso sus soluciones grafican una curva (las ecuaciones lineales representan líneas. Los sistemas de ecuaciones lineales son solubles, y representan una intersección de dos líneas. Los sistemas de ecuaciones no lineales en cambio sólo son solubles en algunos casos especiales).

Cómo hallamos las soluciones de un sistema de ecuaciones no lineales. Sus soluciones son generalmente impredecibles, pues los valores son producto de una "realimentación" del sistema y producen lo que se llama feedback, lo mismo que sucede con un micrófono que se alimenta desde los sonidos de un parlante que se alimenta a su vez del micro. Es lo que antes llamamos iteración.

Los algoritmos (o fórmulas) que producen las figuras fractales -y también el comportamiento impredecible de, por ejemplo, los fluidos- envuelven "bucles" (loops) de realimentación. "Eventualmente -dice Mandelbrot- se considera algo que es cualitativamente distinto del bloque original (...) Esto expresa la esperanza de describir y explicar la naturaleza caótica como la acumulación de muchos pasos simples.

LOS FRACTALES SON ESCALARES: LO INFINITO EN LO FINITO

"Llamamos geometría fractal a un lenguaje geométrico nuevo que estudia objetos que no son lisos, sino rugosos y fragmentados en el mismo grado en todas las escalas". Esta afirmación de Mandelbrot nos lleva a otro punto de interés de la geometría fractal, su carácter escalar, que está en relación con la rugosidad y auto semejanza de las que hablamos antes y también con un carácter dimensional de las figuras fractales, como veremos.

La geometría fractal, representación de procesos iterativos no-lineales, nos permite obtener algoritmos simples que son pautas que se repiten en todas las escalas de un objeto fractal, que a su vez puede ser representación de algún proceso dinámico natural o experimental. Expresa la infinita complicación de estos procesos a todas las escalas.

Y entonces deberíamos preguntarnos, cómo podemos expresar una complicación infinita en una figura finita. Respuesta: Las figuras fractales son finitas, pues están limitadas por un máximo y un mínimo, pero son infinitas, pues siempre puedo yo afinar mi aproximación a la precisión afinando mi escala.

Cuánto mide la costa del Perú. Respuesta: La costa del Perú mide una cantidad finita pero aumenta a medida que yo disminuyo la escala, y es en ese sentido infinita. Primero puedo medirla con el contador de kilómetros de mi auto, y me sale una cantidad determinada de kilómetros. Luego me bajo del carro y voy extendiendo una huincha, tratando de seguir lo más precisamente que pueda el contorno de la costa; obtengo otra cantidad mayor que la primera.

Pero si es un caracol el que la recorre, encontrar escabrosidades que mi medida no permitía percibir, y que harán ligeramente mayor el resultado. Así sucesivamente, podré seguir aumentando cantidades pequeñas que harán el resultado un poco mayor hasta el infinito (aunque el resultado este siempre limitado por un máximo y un mínimo).

Algunas formaciones naturales -piensan los teóricos del caos- tienen estructura fractal: Los árboles, por ejemplo, sus hojas están generadas fractalmente, estructuradas para captar la mayor cantidad de luz en el mínimo espacio. El pulmón tendría también una estructura fractal en su función de comprimir la mayor cantidad de aire o posibilitar la mayor superficie en contacto con él. El pulmón tiene una rugosidad o escabrosidad característica, que se repite tal vez hasta escalas moleculares y atómicas, lo que le permite estar en contacto con la misma cantidad de tomos de aire que cubre una cancha de tenis.

...Y TIENEN DIMENSIONES FRACCIONALES

El carácter fractal parece expresar la capacidad de un objeto para ocupar espacio. Una línea no encierra ningún espacio. Un plano sí. Es entre la línea y el plano, la curva de koch (cuya generación expusimos antes a partir de un triángulo equilátero. Ver nuevamente la figura 1) ocupa el máximo espacio que puede, sin llegar a cerrarse en ningún punto.

Y esto nos lleva a otra característica de los objetos fractales: No sólo son escalares, sino también dimensionales. Los objetos fractales tienen dimensiones fraccionales, por ejemplo la curva de koch tiene dimensión fraccional entre 1 y 2: No es ya una línea, pero todavía no es un plano.

Esta nueva propiedad de objetos fractales (su dimensión fraccional) es especialmente útil, por ejemplo para un geólogo que quiere descubrir un alud. Si se coloca en un cerro al frente del alud, lo describiría como una sección desprendida de un cono, y su descripción estaría expresada en tres dimensiones. Si ahora imaginariamente, vamos acercando al geólogo, llegar un punto en que el alud perder para él sus tres dimensiones y comenzar a percibirlo sólo en dos dimensiones; por ejemplo si está suficientemente cerca de una roca de 3 mt. de diámetro y no puede por consiguiente percibirla sino como un plano. Pero comenzaría a percibir cierta rugosidad característica. La tesis de Mandelbrot, ya lo vimos, es que esa escabrosidad no desaparece sino que permanece en todas las escalas o acercamientos, por ejemplo con un microscopio.

Ahora bien, la geometría fractal le daría a este imaginario geólogo un instrumento para describir el alud en todas las escalas al mismo tiempo. Esto se expresaría en filosofía, creo yo,

como sujeto-objeto, porque la descripción del objeto incluye la posición del sujeto y depende de la escala que el sujeto emplee. La geometría fractal nos permite describir al objeto tal y como es, no en sí sino justamente en nuestra experiencia. Tenemos ante nosotros; gracias a los algoritmos que producen fractales, el objeto tal y como se comporta en todas las escalas y tal y como es a cualquier distancia de la que esté el sujeto.

EL LABERINTO Y LA LIBERTAD

El secreto de la generación del caos está en una afirmación infinita, es decir en el proceso de iterar infinitas veces los valores iniciales de una función. Si conseguimos la función adecuada, podremos iterar infinitamente los resultados de un sistema de funciones no lineales hasta conseguir algo nuevo e impredecible, un "salto cualitativo".

Cada nuevo valor a partir de ese punto nos suministraría nueva información, pero de tal manera que tendríamos que cambiar nuestros conceptos iniciales para comprenderlo. En esto la geometría fractal y se usó de los sistemas de ecuaciones no lineales se parece más bien a un laberinto cuyas paredes van cambiando a medida que avanzamos.

Pero particularmente en su negación de toda teleología la geometría fractal parece expresar la esperanza de alcanzar una ciencia sin causas finales -es decir, sin una meta por alcanzar- ocupada sólo de las causas eficientes. La teoría del caos y la geometría fractal conciben un mundo anárquico, es decir sin un principio (arje) que gobierne los movimientos desde el principio y los guíe hacia un fin predeterminado.

Se sigue entonces que no hay necesariamente contradicción entre libertad y determinismo, pues la determinación estricta de un proceso no significa la predictibilidad de sus resultados. En otras palabras, saber que estamos determinados por causas no significa saber a qué estamos determinados por esas causas, y esto no lo sabe ni Dios ni el destino. El hombre está determinado pero es libre, pues no está destinado a nada; el "destino" no es fatal, es fractal.

Pero se sigue también que el caos no es estado final de enfriamiento del Universo, sino la condición "normal" de este mundo en el que vivimos, donde las formas bellas, ordenadas y manipulables a las que estamos acostumbrados y que nos parecen expresión de una regularidad de la naturaleza son una realidad caótica: no son predecibles.

Con todo la teoría del caos y la geometría fractal son útiles para comprender procesos tan variados como los precios de las acciones en la bolsa de valores, la formación de la mancha roja de Júpiter, la dirección que tomar el petróleo derramado en el mar y las infinitas formas, todas distintas, que toman las huellas de los dedos. "Dios juega a los dados con el universo -dice el científico Joseph Ford-, pero con dados cargados. Y el principal objetivo de la física actual es averiguar según que reglas fueron cargados y cómo podremos utilizarlas para nuestros fines".