CAP. 5

METODOS DE INTEGRACION

1 INTEGRACION DE FUNCIONES RACIONALES

1.1 Definición Una **función racional** de la forma $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios en la variable x con coeficientes reales.

1.2 Cálculo de Integrales de la forma

$$I = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}\, dx$$

Para encontrar la integral I se procede de la siguiente manera

(1) Se completa cuadrados en el denominador

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{b^2}{4a} + c\right).$$

(2) Se hace la sustitución $t = x + \frac{b}{2a}$, con lo cual $ax^2 + bx + c = a(t^2 + k)$, y la integral I se convierte en

$$I = \int \frac{mt + n}{a(t^2 + k)}\, dt = \frac{m}{a}\int \frac{t\, dt}{t^2 + k} + \frac{n}{a}\int \frac{dt}{t^2 + k}.$$

(3) $\int \frac{t\,dt}{t^2+k} = \frac{1}{2}\ln|t^2+k| + C$.

(4) Se halla la integral $\int \frac{dt}{t^2+k}$ aplicando una de las dos siguientes fórmulas

$$\int \frac{du}{u^2+d^2} = \frac{1}{d}\arctan\frac{u}{d} + C$$

$$\int \frac{du}{u^2-d^2} = \frac{1}{2d}\ln\left|\frac{u-d}{u+d}\right| + C,$$

donde $d \neq 0$.

Ejemplo 1 Hallar $I = \int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx$.

Solución

$$I = \int \frac{3x-2}{(x-2)^2+1}\,dx \qquad \text{(completando cuadrados)}$$

$$= \int \frac{3t+4}{t^2+1}\,dt \qquad \text{(haciendo la sustitución } t = x-2\text{)}$$

$$= \frac{3}{2}\ln|t^2+1| + 4\arctan t + C$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2-4x+5) + 4\arctan(x-2) + C.$$

Ejemplo 2 Encontrar $I = \int \frac{(1-x)\,dx}{4x^2 - 4x - 3}$.

Solución

$$I = -\int \frac{(x-1)\,dx}{4(x-\frac{1}{2})^2 - 4} = -\int \frac{(t-\frac{1}{2})\,dt}{4t^2 - 4} \quad \text{(haciendo } t = x - \tfrac{1}{2}\text{)}$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{t\,dt}{t^2-1} + \frac{1}{8}\int \frac{dt}{t^2-1} = -\frac{1}{8}\ln\left|t^2-1\right| + \frac{1}{8(2)}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{8}\ln\left|x^2 - x - \frac{3}{4}\right| + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x-\frac{3}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{8}\ln\left|4x^2 - 4x - 3\right| + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+1}\right| + C_1 .$$

1.3 Integración de una función racional general

Sea dada la función racional $R(x)$. Después de dividir el numerador entre el denominador, $R(x)$ se escribe en la forma

$$R(x) = P_1(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P_1(x)$ es un polinomio y $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional **propia**, esto es, tal que grado de $P(x)$ < grado de $Q(x)$.

Puesto que la integración del polinomio $P_1(x)$ es inmediata, el cálculo de la integral de $R(x)$ se reduce al de la integral de $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Para hallar $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ se emplean usualmente dos métodos:

(1) El método de descomposición de fracciones parciales.

(2) El método de Hermite.

1.3.1 Método de Descomposición en Fracciones Parciales

1.3.1.1 Caso 1: TODAS LAS RAICES DE $Q(x)$ SON REALES, ESTO ES $Q(x)$ CONTIENE SOLAMENTE FACTORES LINEALES

Entonces $Q(x) = c(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-k)^{\lambda}$, donde $a, b, \ldots, k$, son las distintas raíces reales de $Q(x)$, c es un número real, y $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, son números enteros ≥ 1.

Si grado de $P(x)$ < grado de $Q(x)$, la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se descompone **en una suma de fracciones parciales**:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots + \frac{K_1}{x-k} + \frac{K_2}{(x-k)^2} + \ldots + \frac{K_\lambda}{(x-k)^\lambda} \quad (1)$$

dónde los coeficientes $A_1, A_2, \ldots, K_1, K_2, \ldots, K_\lambda$ son unívocamente determinados por la función racional dada.

Cálculo de los coeficientes Para calcular los coeficientes de la descomposición indicada, se da común denominador en (1) resultando una igualdad de dos polinomios. A continuación se aplica uno de los dos métodos siguientes o una combinación de ellos:

Primer Método: Igualación de coeficientes En este caso se igualan los coeficientes de iguales potencias de x, y se resuelven las ecuaciones resultantes.

Segundo Método: Danoo valores particulares a la variable x En este caso se eligen valores apropiados de la variable x y se evalúan ambos miembros resultando ecuaciones entre los coeficientes. Por ejemplo, a menudo es conveniente tomar $x = a_i$, donde a_i es una de las raíces de $Q(x)$, o también, asignar a x valores enteros pequeños, como 0, ±1, ±2, ..., etc.

Ejemplo 1 Calcular $I = \int \frac{dx}{x(x-3)^2}$.

Solución

$$\frac{1}{x(x-3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

$$1 = A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx \qquad (1)$$

Cálculo de los Coeficientes

Primer Método: Igualando coeficientes

De $1 = (A+B)x^2 + (-6A - 3B + C)x + 9A$

resulta

$$0 = A + B$$

$$0 = -6A - 3B + C$$

$$1 = 9A$$

de donde $A = \frac{1}{9}$, $B = -\frac{1}{9}$, $C = \frac{1}{3}$.

Segundo Método: Dando valores a la variable x

Haciendo $x = 0$ en (1): $1 = A(-3)^2$, o $A = \frac{1}{9}$

$x = 3$ en (1): $1 = C(3)$, o $C = \frac{1}{3}$

$x = 1$ en (1): $1 = \frac{1}{9}(1-3)^2 + B(1-3) + \frac{1}{3}$, de donde $B = -\frac{1}{9}$

Tenemos entonces

$$I = \int \frac{\frac{1}{9}\,dx}{x} + \int \frac{-\frac{1}{9}\,dx}{x-3} + \int \frac{\frac{1}{3}\,dx}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{1}{9}\ln|x| - \frac{1}{9}\ln|x-3| - \frac{1}{3}(x-3)^{-1} + C$$

$$= \frac{1}{9}\ln\left|\frac{x}{x-3}\right| - \frac{1}{3(x-3)} + C.$$

Ejemplo 2 Calcular $I = \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

Solución

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

de donde

$$1 = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$$

Haciendo $x+1 = 0$, o $x = -1$, se obtiene $1 = 2A$, o $A = \frac{1}{2}$;

$x+2 = 0$, o $x = -2$, se obtiene $1 = -B$, o $B = -1$;

y $x+3 = 0$, o $x = -3$, se obtiene $1 = 2C$, o $C = \frac{1}{2}$.

Luego,

$$I = \int \frac{\frac{1}{2}\,dx}{x+1} + \int \frac{-dx}{x+2} + \int \frac{\frac{1}{2}\,dx}{x+3}$$

$$= \frac{1}{2} \ln |x+1| - \ln |x+2| + \frac{1}{2} \ln |x+3| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2} \right| + C .$$

1.3.1.2 Caso General Q(x) TIENE RAICES COMPLEJAS NO REALES, ESTO ES, Q(x) CONTIENE FACTORES CUADRATICOS CON DISCRIMINANTES $p^2 - 4q < 0$

Sea P(x) un polinomio de grado menor que el grado de Q(x). Entonces $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es igual a una suma de fracciones parciales que se compone de la siguiente manera:

(1) para cada factor lineal $(x-a)$ de Q(x), repetido α veces, la suma contiene la expresión

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}$$

(2) para cada factor cuadrático $x^2 + px + q$ de $Q(x)$ repetido β veces, donde $p^2 - 4q < 0$ la suma contiene la expresión

$$\frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots + \frac{M_\beta x + N_\beta}{(x^2 + px + q)^\beta}$$

Los coeficientes que aparecen en estas expresiones son unívocamente determinados por $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y se calculan aplicando los métodos indicados en el caso 1.

Observemos que las integrales de los términos de (1) son directas. Así, para hallar $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ sólo nos resta determinar

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx.$$

El cálculo de tales integrales se efectúa haciendo el cambio $t = x + \frac{p}{2}$ e integrando por partes para reducir el exponente n en una unidad (método de reducción). Ver ejemplo 2, pág. 163. También es aplicable el método de Hermite. Ver 1,3.2, pág. 164.

Ejemplo 1 Hallar $I = \int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 5)}$

Solución

$$\frac{1}{(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 5)} = \frac{1}{(x-1)(x-3)(x^2 + 4x + 5)}$$

(el factor $x^2 + 4x + 5$ tiene raíces no reales pues su discriminante es $4^2 - 4(5) = -4 < 0$)

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4x + 5}$$

de donde

$$1 = A(x-3)(x^2 + 4x + 5) + B(x-1)(x^2 + 4x + 5) + (Cx + D)(x-1)(x-3)$$

Haciendo $x = 1$: $A = -\frac{1}{20}$, $x = 3$: $B = \frac{1}{52}$

$x = 0$: $D = \frac{6}{52}$, y $x = -1$: $C = \frac{2}{65}$.

Luego $$I = -\frac{1}{20}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{1}{52}\int\frac{dx}{x-3} + \frac{1}{260}\int\frac{8x+30}{x^2+4x+5}\,dx$$

$$= -\frac{1}{20}\ln|x-1| + \frac{1}{52}\ln|x-3| + \frac{1}{260}\int\frac{8x+30}{(x+2)^2+1}dx$$

Por otra parte

$$\int\frac{8x+30}{(x+2)^2+1}\,dx = \int\frac{8t+14}{t^2+1}dt \qquad \text{(haciendo } t = x+2\text{)}$$

$$= 4\ln|t^2+1| + 14\arctan t + C$$

$$= 4\ln(x^2+4x+5) + 14\arctan(x+2) + C$$

Finalmente

$$I = -\frac{1}{20}\ln|x-1| + \frac{1}{52}\ln|x-3| + \frac{1}{65}\ln(x^2+4x+5) + \frac{7}{130}\arctan(x+2) + C.$$

Ejemplo 2 Hallar $I = \int\frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx$.

Solución El factor x^2+4x+5 tiene raíces no reales pues su discriminante $4^2 - 4(5) = -4 < 0$.

Tenemos $$I = \int\frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx = \int\frac{t-1}{(t^2+1)^2}\,dt \qquad \text{(haciendo } t = x+2\text{)}$$

$$= \int\frac{t\,dt}{(t^2+1)^2} - \int\frac{(t^2+1)-t^2}{(t^2+1)^2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2(t^2+1)} - \arctan t + \int t\left[\frac{t\,dt}{(t^2+1)^2}\right]$$

Integrando por partes

$$\int t\left[\frac{t\,dt}{(t^2+1)^2}\right] = -\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}$$

$$= -\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan t + C$$

Luego $$I = -\frac{t+1}{2(t^2+1)} - \frac{1}{2}\arctan t + C$$

$$= -\frac{x+3}{2(x^2+4x+5)} - \frac{1}{2}\arctan(x+2) + C.$$

1.3.2 Método de Hermite

1.3.2.1 Cálculo de la Integral

$$I = \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n}\, dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

TEOREMA Se cumple

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n}\, dx = \frac{X(x)}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}\, dx$$

donde $X(x)$ es un polinomio de grado $< 2(n-1)$ = grado de $(x^2 + px + q)^{n-1}$.

Nota

1 Los coeficientes de $X(x)$ así como A y B se hallan derivando ambos miembros y aplicando a continuación los métodos del caso 1 de 1.3.1.

2 La integral del segundo miembro se calcula de acuerdo a 1.2, o bien directamente.

PRUEBA DEL TEOREMA

Para $n \neq 1$, se cumple en forma obvia la fórmula indicada.

Supongamos entonces que $n \geq 2$ y procedamos por inducción sobre n.

Paso 1

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{M(2x + p) + (2N - Mp)}{(x^2 + px + q)^n}\, dx$$

$$= \frac{M}{2} \int \frac{d(x^2 + px + q)}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{c}{2} \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}$$

Paso 2

$$\int \frac{d(x^2 + px + q)}{(x^2 + px + q)^n} = \frac{-1}{(n-1)(x^2 + px + q)^{n-1}} \quad (\text{pues } n \geq 2)$$

Paso 3

Sea $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$

Entonces se cumple la **fórmula de recurrencia**

$$I_n = \frac{2x+p}{k(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{1}{k}\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right) I_{n-1} \quad , \text{ donde } k = q - \frac{p^2}{4} .$$

En efecto,

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dt}{(t^2+k)^n} \qquad \text{(haciendo } t = x + \tfrac{p}{2}\text{)}$$

$$= \frac{1}{k}\int \frac{(t^2+k)-t^2}{(t^2+k)^n}\,dt = \frac{1}{k}\int \frac{dt}{(t^2+k)^{n-1}} - \frac{1}{k}\int \frac{t^2}{(t^2+k)^n}\,dt$$

$$= \frac{1}{k} I_{n-1} - \frac{1}{k}\int t\left[\frac{t}{(t^2+k)^n}\right] dt \qquad \text{(integrando por partes)}$$

$$= \frac{1}{k} I_{n-1} - \frac{1}{k}\left[t\left(\frac{-1}{2(n-1)(t^2+k)^{n-1}}\right) - \int \frac{-dt}{2(n-1)(t^2+k)^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{k} I_{n-1} + \frac{t}{2k(n-1)(t^2+k)^{n-1}} - \frac{1}{2k(n-1)} I_{n-1}$$

$$= \frac{2x+p}{4k(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{1}{k}\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right) I_{n-1}$$

Paso 4 De los pasos (1), (2) y (3) se obtiene

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} = \frac{X_1(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}} + d.\, I_{n-1}$$

donde $X_1(x)$ es un polinomio de grado 1.

Ahora bien por inducción se tiene

$$I_{n-1} = \frac{X_2(x)}{(x^2+px+q)^{n-2}} + \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx \ ,$$

siendo X_2 un polinomio de grado $< 2(n-2)$; y sustituyendo en la expresión anterior se obtiene por lo tanto la fórmula deseada. ∎

Ejemplo Hallar

$$I = \int \frac{x + 1}{(x^2 + 4x + 5)^2}\, dx.$$

Solución Por el teorema anterior

$$I = \frac{Ax + B}{x^2 + 4x + 5} + \int \frac{Cx + D}{x^2 + 4x + 5}\, dx$$

Derivando ambos miembros respecto de x

$$\frac{x + 1}{(x^2 + 4x + 5)^2} = \frac{(x^2 + 4x + 5)A - (Ax + B)(2x + 4)}{(x^2 + 4x + 5)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4x + 5}$$

y dando común denominador

$$x + 1 = Cx^3 + (-A + D + 4C)x^2 + (-2B + 4D + 5C)x + (5A - 4B + 5D)$$

Luego $C = 0$

$$-A + D + 4C = 0$$

$$-2B + 4D + 5C = 1$$

$$5A - 4B + 5D = 1,$$

ecuaciones que resueltas dan $C = 0$, $A = -\frac{1}{2}$, $D = -\frac{1}{2}$, $B = -\frac{3}{2}$.

Luego

$$I = -\frac{x + 3}{2(x^2 + 4x + 5)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$$

$$= -\frac{x + 3}{2(x^2 + 4x + 5)} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x + 2)}{(x + 2)^2 + 1}$$

$$= -\frac{x + 3}{2(x^2 + 4x + 5)} - \frac{1}{2}\arctan(x + 2) + C.$$

1.3.2.2 Método de Hermite

Teorema

Sea $Q(x) = c(x-a_1)^{\alpha_1} \ldots (x-a_m)^{\alpha_m}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1} \ldots (x^2+p_nx+q_n)^{\beta_n}$

Si $P(x)$ es un polinomio de grado menor que el grado de $Q(x)$, entonces

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + A_1\int \frac{dx}{x-a_1} + \ldots + A_m\int \frac{dx}{x-a_m} + \int \frac{D_1x+E_1}{x^2+p_1+q_1}dx + \ldots + \int \frac{D_nx+E_n}{x+p_nx+q_n}dx$$

donde $\begin{cases} Q_1(x) = (x-a_1)^{\alpha_1-1} \ldots (x-a_m)^{\alpha_m-1}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}\ldots(x^2+p_nx+q_n)^{\beta_n-1} \\ P_1(x) \text{ es un polinomio tal que grado } P_1(x) < \text{grado de } Q_1(x) \end{cases}$

Nota

(1) Los coeficientes de $P_1(x)$ así como $A_1,\ldots,A_m, D_1, E_1,\ldots,D_n,E_n$, son determinados derivando ambos miembros respecto de x.

(2) Observemos que $Q(x)$ está formado por los mismos factores lineales y cuadráticos de $Q(x)$ con exponentes reducidos en una unidad.

Prueba

En la descomposición de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones parciales:

(1) cada factor $(x-a_i)^{\alpha i}$ contribuye con términos de la forma $\frac{A}{(x-a_i)^{\gamma}}$, $\gamma \leq q_i$, cuya integral es $A\int \frac{dx}{x-a_i}$ si $\gamma = 1$ y $\frac{-A}{(\gamma-1)(x-a_i)^{\gamma-1}}$ si $\gamma \geq 2$

y (2) cada factor $(x^2+p_ix+q_i)^{\beta i}$ contribuye con términos de la forma $\frac{Dx+E}{(x^2+p_ix+q_i)^{\gamma}}$, $\gamma \leq \beta_i$, cuya integral es

$$\frac{X(x)}{(x^2+p_ix+q_i)^{\gamma-1}} + \int \frac{Fx+G}{(x^2+p_ix+q_i)}dx,$$

de acuerdo al teorema 1.3.2.1 .

Luego sumando todos los términos

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + A_1 \int \frac{dx}{x-a_1} + \ldots + A_m \int \frac{dx}{x-a_m}$$

$$+ \int \frac{D_1 x + E_1}{x^2 + p_1 x + q_1} dx + \ldots + \int \frac{D_n x + E_n}{x^2 + p_n x + q_n} dx,$$

donde $Q_1(x)$ es el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones que no aparecen bajo el signo de la integral.

Esto concluye la prueba del teorema. ∎

Ejemplo Aplicando el método de Hermite encontrar $I = \int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$.

Solución Tenemos

$$I = \frac{Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F}{(x^2+1)^3} + \int \frac{Hx + G}{x^2 + 1} dx .$$

Derivando ambos miembros respecto de x, dando común denominador y agrupando términos

$$1 = Hx^7 + (-A+G)x^6 + (-2B+3H)x^5 + (5A-3C+3G)x^4 + (4B-4D+3H)x^3$$
$$+ (3C-5E+3G)x^2 + (2D-6F+H)x + (E+G).$$

de donde

$$H = 0 \qquad (1)$$
$$-A + G = 0 \qquad (2)$$
$$-2B + 3H = 0 \qquad (3)$$
$$5A - 3C + 3G = 0 \qquad (4)$$
$$4B - 4D + 3H = 0 \qquad (5)$$
$$3C - 5E + 3G = 0 \qquad (6)$$
$$2D - 6F + H = 0 \qquad (7)$$
$$E + G = 1 \qquad (8)$$

Resolviendo las ecuaciones tenemos

de (1): $H = 0$; de (3): $B = 0$ de (5): $D = 0$;

de (7): $F = 0$; y de (2): $A = G$. Las restantes ecuaciones son

$$8A - 3C = 0$$

$$3C - 5E + 3A = 0$$

$$E + A = 1$$

de donde $A = \frac{5}{16}$, $C = \frac{5}{6}$, $E = \frac{11}{16}$ y $G = \frac{5}{16}$.

Luego

$$I = \frac{\frac{5}{16}x^5 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{11}{16}x}{(x^2+1)^3} + \frac{5}{16}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{15x^5 + 40x^3 + 33x}{48(x^2+1)^3} + \frac{5}{16}\arctan x + C .$$

1.4 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Calcular $I = \int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6}\,dx$.

SOLUCION

Tenemos $$\frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} = 1 + \frac{3}{x^2 - 5x + 6}$$

y $$\frac{3}{x^2 - 5x + 6} = \frac{3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

$$3 = A(x-3) + B(x-2)$$

Haciendo $x = 3$, se obtiene $B = 3$,
$x = 2$, se obtiene $A = -3$.

Luego $$I = \int dx + \int \frac{-3dx}{x-2} + \int \frac{3\,dx}{x-3}$$

$$= x - 3\ln|x-2| + 3\ln|x-3| + C$$

$$= x + 3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C.$$

PROBLEMA 2 Hallar $A = \int \frac{x + 3}{6x - x^2}\, dx$.

SOLUCION

$$A = \int \frac{x + 3}{9 - (x-3)^2}\, dx = - \int \frac{t + 6}{t^2 - 9} dt \qquad \text{(haciendo } t = x-3\text{)}$$

$$= - \int \frac{t\, dt}{t^2 - 9} - 6 \int \frac{dt}{t^2 - 9}$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \left| t^2 - 9 \right| - \frac{6}{2(3)} \ln \left| \frac{t-3}{t+3} \right| + C$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \left| 6x - x^2 \right| - \ln \left| \frac{x-6}{x} \right| + C .$$

PROBLEMA 3 Encontrar $I = \int \frac{3x - 2}{1 - 6x - 9x^2}\, dx$.

SOLUCION

$$I = \int \frac{3x - 2}{2 - (3x+1)^2}\, dx = \frac{1}{3} \int \frac{t-3}{2 - t^2} dt \qquad \text{(haciendo } t = 3x+1\text{)}$$

$$= -\frac{1}{3} \int \frac{t\, dt}{t^2 - 2} + \int \frac{dt}{t^2 - 2}$$

$$= -\frac{1}{6} \ln \left| t^2 - 2 \right| + \frac{1}{2(\sqrt{2})} \ln \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| + C$$

$$= -\frac{1}{6} \ln \left| 1 - 6x - 9x^2 \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{3x + 1 - \sqrt{2}}{3x + 1 + \sqrt{2}} \right| + C .$$

PROBLEMA 4 Calcular $I = \int \frac{-3-x}{4-3x^2}\,dx$.

SOLUCION

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{x+3}{x^2-\frac{4}{3}}\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|x^2-\frac{4}{3}\right| + \frac{1}{2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}\ln\left|\frac{x-\frac{2}{\sqrt{3}}}{x+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|3x^2-4\right| + \frac{\sqrt{3}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\,x-2}{\sqrt{3}\,x+2}\right| + C_1 .$$

PROBLEMA 5 Hallar $A = \int \frac{dx}{3x^2-x+1}$

SOLUCION

$$A = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{6})^2+\frac{11}{36}}$$

$$= \frac{1}{3\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)}\arctan\left(\frac{x-\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{11}}{6}}\right)+C = \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan\left(\frac{6x-1}{\sqrt{11}}\right)+C .$$

PROBLEMA 6 Encontrar $I = \int \frac{(x-1)^2}{x^2-6x+10}\,dx$.

SOLUCION

$$\frac{(x-1)^2}{x^2-6x+10} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-6x+10} = 1 + \frac{4x-9}{(x-3)^2+1}$$

Luego $I = \int dx + \int \frac{4x-9}{(x-3)^2+1}\,dx = x + \int \frac{4t+3}{t^2+1}\,dt$ (haciendo $t = x-3$)

$$= x + 2\ln|t^2+1| + 3\arctan t + C$$

$$= x + 2\ln(x^2-6x+10) + 3\arctan(x-3) + C .$$

PROBLEMA 7 Hallar $I = \int \frac{\cos x \, dx}{\text{sen}^2 x - 6 \text{ sen } x + 12}$.

SOLUCION

$$I = \int \frac{du}{u^2 - 6u + 12} \qquad \text{(haciendo } u = \text{sen } x\text{)}$$

$$= \int \frac{du}{(u-3)^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ arc tan } \frac{u-3}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ arc tan} \left(\frac{\text{sen } x - 3}{\sqrt{3}} \right) + C .$$

PROBLEMA 8 Hallar $I = \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

SOLUCION

Caso 1: a = b Entonces $I = \int \frac{dx}{(x+a)^2} = -\frac{1}{x+a} + C$.

Caso 2: a ≠ b Entonces $\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b}$

y $1 = A(x+b) + B(x+a)$

de donde $A = \frac{1}{-a+b}$ (haciendo $x+a = 0$)

$B = \frac{1}{-b+a}$ (haciendo $x+b = 0$)

Luego $I = \frac{1}{b-a} \ln |x+a| - \frac{1}{b-a} \ln |x+b| + C$

$$= \frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right| + C .$$

PROBLEMA 9 Hallar $I = \int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x}\, dx$.

SOLUCION

$$\frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} = 5 + \frac{25x^2 - 20x + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} \qquad (1)$$

y $x^3 - 5x^2 + 4x = x(x-1)(x-4)$.

Por otra parte $$\frac{25x^2 - 20x + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-4} \qquad (2)$$

$$25x^2 - 20x + 2 = A(x-1)(x-4) + Bx(x-4) + Cx(x-1)$$

de donde $A = \frac{1}{2}$ (haciendo $x = 0$)

$B = -\frac{7}{3}$ (haciendo $x = 1$)

$C = \frac{161}{6}$ (haciendo $x = 4$)

Luego de (1) y (2)

$$I = 5x + \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{7}{3}\ln|x-1| + \frac{161}{6}\ln|x-4| + C.$$

$$= 5x + \ln\left[\frac{|x|^{1/2}|x-4|^{161/6}}{|x-1|^{7/3}}\right] + C .$$

PROBLEMA 10 Calcular $I = \int \frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}\, dx$

SOLUCION

$$R(x) = \frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = x + \frac{8x + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$$

y $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3$

Luego $R(x) = x + \frac{8(x-2) + 22}{(x-2)^3} = x + \frac{8}{(x-2)^2} + \frac{22}{(x-2)^3}$

Entonces $I = \frac{x^2}{2} - \frac{8}{x-2} - \frac{11}{(x-2)^2} + C.$

PROBLEMA 11 Hallar $I = \int \frac{dx}{x(x+1)^2}$.

SOLUCION

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$$

Luego $A = 1$ (haciendo $x = 0$)

$C = -1$ (haciendo $x+1 = 0$)

$B = -1$ (haciendo $x = 1$)

e integrando

$$I = \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + C .$$

PROBLEMA 12 Calcular $I = \int \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2(x+1)^2} dx$.

SOLUCION

$$\frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2 (x+1)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

$$5x^2 + 6x + 9 = A(x-3)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x-3)^2 (x+1) + D(x-3)^2$$

de donde $B = \frac{9}{2}$ (haciendo $x-3 = 0$)

$D = \frac{1}{2}$ (haciendo $x+1 = 0$)

y dando los valores $x = 0, 1,$ se obtienen las ecuaciones

$$9 = -3A + 9C + 9$$

$$20 = -8A + 8C + 20$$

que resueltas dan $A = 0$, $C = 0$.

Luego $I = \frac{9}{2} \int \frac{dx}{(x-3)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{9}{2(x-3)} - \frac{1}{2(x+1)} + C .$

PROBLEMA 13 Calcular $I = \int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2+1)}\, dx$.

SOLUCION

$$\frac{x^3 + x + 1}{x(x^2+1)} = 1 + \frac{1}{x(x^2+1)}$$

y $$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1}$$

$$1 = A(x^2+1) + (Bx + C)x$$

$$1 = (A + B)x^2 + Cx + A$$

de donde $A = 1$, $C = 0$ y $B = -1$.

Luego, $$I = x + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\, dx}{x^2+1}$$

$$= x + \ln\left| \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right| + C$$

PROBLEMA 14 Encontrar $I = \int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}$.

SOLUCION

$x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2+1)^2 - x^2$ (diferencia de cuadrados)

$$= (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$$

Tenemos $$\frac{1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 - x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}$$

$$1 = (Ax + B)(x^2 + x + 1) + (Cx + D)(x^2 - x + 1)$$

$$1 = (A + C)x^3 + (A + B - C + D)x^2 + (A + B + C - D)x + (B + D)$$

de donde

$$A + C = 0 \qquad (1)$$

$$A + B - C + D = 0 \qquad (2)$$

$$A + B + C - D = 0 \qquad (3)$$

$$B + D = 1 \qquad (4)$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene

de (1) $C = -A$ (5)

sumando (2) y (3) $B = -A$ (6)

de (2) y (5) $D = C = -A$ (7)

luego en (4) $-2A = 1$, $A = -\frac{1}{2}$, $B = C = D = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto,

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(x-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{(x+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|(x-\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}\right| + \frac{1}{4(\frac{\sqrt{3}}{2})}\arctan\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$+\frac{1}{4}\ln\left|(x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}\right| + \frac{1}{4(\frac{\sqrt{3}}{2})}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{1-x^2}\right) + C$$

$$\left[\text{usando } \arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)\right].$$

PROBLEMA 15 Calcular $I = \int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx$.

SOLUCION $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 = t^2 + 1$, donde $t = x-2$

$$\frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2} = \frac{t^3+6t^2+12t+9}{(t^2+1)^2} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{(t^2+1)^2}$$

$$t^3 + 6t^2 + 12t + 9 = (At+B)(t^2+1) + (Ct+D)$$

$$= At^3 + Bt^2 + (A+C)t + (B+D).$$

Luego $A = 1$, $B = 6$, $A+C = 12$ y $B+D = 9$,

de donde $A = 1$, $B = 6$, $C = 11$, $D = 3$, y

$$I = \int \frac{t+6}{(t^2+1)}\,dt + \int \frac{11t+3}{(t^2+1)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| + 6 \arctan t - \frac{11}{2(t^2+1)} + 3\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

Pero, $I_1 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \int \frac{(t^2+1)-t^2}{(t^2+1)^2}\,dt = \arctan t - \int \frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^2}$

$$= \arctan t - \left[t\left(\frac{-\frac{1}{2}}{t^2+1}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1}\right] = \frac{1}{2}\arctan t + \frac{t}{2(t^2+1)}$$

(integrando por partes)

Así, $I = \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| + \frac{15}{2}\arctan t + \frac{3t-11}{2(t^2+1)} + C$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5) + \frac{15}{2}\arctan(x-2) + \frac{3x-17}{2(x^2-4x+5)} + C.$$

PROBLEMA 16 Calcular $\int \frac{dx}{x^8+x^6}$.

SOLUCION

$$\frac{1}{x^8+x^6} = \frac{1}{x^6(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^5} + \frac{F}{x^6} + \frac{Gx+H}{x^2+1}$$

$$1 = Ax^5(x^2+1) + Bx^4(x^2+1) + Cx^3(x^2+1) + Dx^2(x^2+1) + Ex(x^2+1) + F(x^2+1) + (Gx+H)x^6$$

$$1 = (A+G)x^7 + (B+H)x^6 + (A+C)x^5 + (B+D)x^4 + (C+E)x^3 + (D+F)x^2 + Ex + F$$

de donde $A+G = 0$, $B+H = 0$, $A+C = 0$, $B+D = 0$,

$C+E = 0$, $D+F = 0$, $E = 0$, $F = 1$,

y $F = 1$, $E = 0$, $D = -1$, $C = 0$, $B = 1$, $A = 0$, $H = -1$, $G = 0$.

Luego

$$I = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^4} + \int \frac{dx}{x^6} - \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} - \arctan x + C.$$

PROBLEMA 17 Empleando el método de Hermite hallar $I = \dfrac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$.

SOLUCION Por el método 1.3.2.2

$$I = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x+1)(x^2+1)} + D\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{Ex+F}{x^2+1}\,dx$$

Derivando ambos miembros respecto de x

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{(x+1)(x^2+1)(2Ax+B) - (Ax^2+Bx+C)(3x^2+2x+1)}{(x+1)^2(x^2+1)^2} + \frac{D}{x+1} + \frac{Ex+F}{x^2+1}$$

$$1 = (Dx+E)x^5 + (-A+D+2E+F)x^4 + (-2B+2D+2E+2F)x^3 + (A-B-3C+2D+2E+2F)x^2$$
$$+ (2A-2C+D+E+2F)x + (B-C+D+F)$$

de donde

$$D+E = 0 \qquad (1)$$
$$-A+D+2E+F = 0 \qquad (2)$$
$$-B+D+E+F = 0 \qquad (3)$$
$$A-B-3C+2D+2E+2F = 0 \qquad (4)$$
$$2A-2C+D+E+2F = 0 \qquad (5)$$
$$B-C+D+F = 1 \qquad (6)$$

Resolviendo las ecuaciones se obtiene

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = 0, \quad D = \frac{1}{2}, \quad E = -\frac{1}{2}, \quad F = \frac{1}{4}.$$

Finalmente

$$I = -\frac{x^2-1}{4(x+1)(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{4}\arctan x + C.$$

PROBLEMA 18 Calcular $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x(x^7+1)}$.

SOLUCION

$$I = \int \frac{(x^7+1)-x^7}{x(x^7+1)}\,dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x^6}{x^7+1}\,dx$$
$$= \ln|x| - \frac{1}{7}\ln|x^7+1| + C = \frac{1}{7}\ln\left|\frac{x^7}{x^7+1}\right| + C.$$

PROBLEMA 19 Hallar $I = \int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^{10}}$.

SOLUCION

$$I = \int \frac{(t+1)^2\,dt}{t^{10}} \qquad \text{(haciendo } t = x-1\text{)}$$

$$= \int \frac{(t^2+2t+1)}{t^{10}}\,dt = -\frac{1}{7t^7} - \frac{1}{4t^8} - \frac{1}{9t^9} + C$$

$$= -\frac{1}{7(x-1)^7} - \frac{1}{4(x-1)^8} - \frac{1}{9(x-1)^9} + C .$$

PROBLEMA 20 Encontrar $I = \int \frac{dx}{x(x^5+1)^2}$.

SOLUCION

$$I = \int \frac{(x^5+1)-x^5}{x(x^5+1)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x(x^5+1)} - \int \frac{x^4}{(x^5+1)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{(x^5+1)-x^5}{x(x^5+1)}\,dx + \frac{1}{5(x^5+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x^4}{x^5+1}\,dx + \frac{1}{5(x^5+1)}$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{5}\ln|x^5+1| + \frac{1}{5(x^5+1)} + C .$$

PROBLEMA 21 Calcular $I = \int \frac{x\,dx}{x^4-1}$.

SOLUCION

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-1}, \qquad \text{haciendo } t = x^2$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + C.$$

PROBLEMA 22 Aplicando el método de Hermite encontrar

$$I = \int \frac{x^4 - 2x^2 + 2}{(x^2 - 2x + 2)^2}\, dx .$$

SOLUCION

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 2}{(x^2 - 2x + 2)^2} = 1 + \frac{P(x)}{(x^2 - 2x + 2)^2} ,$$

donde $P(x)$ es un polinomio de grado $\leqslant 3$.

Luego por 1.3.2.2

$$I = \int dx + \int \frac{P(x)dx}{(x^2 - 2x + 2)^2} = x + \frac{Ax + B}{x^2 - 2x + 2} + \int \frac{Cx + D}{x^2 - 2x + 2}\, dx$$

Derivando respecto de x

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 2}{(x^2 - 2x + 2)^2} = 1 + \frac{(x^2 - 2x + 2)A - (Ax + B)(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 2x + 2}$$

$$x^4 - 2x^2 + 2 = x^4 + (C-4)x^3 + (8 - A - 2C + D)x^2 + (-8-2B+2C-2D)x + (4+2A+2B+2D)$$

de donde

$$\begin{aligned} C - 4 &= 0 \\ 8 - A - 2C + D &= -2 \\ -8 - 2B + 2C - 2D &= 0 \\ 4 + 2A + 2B + 2D &= 2 \quad . \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones

$$A = -1, \qquad B = 3, \qquad C = 4, \qquad D = -3 .$$

Por lo tanto

$$I = x - \frac{-x - 3}{x^2 - 2x + 2} + \int \frac{4x - 3}{x^2 - 2x + 2}\, dx.$$

Por otra parte

$$\int \frac{4x - 3}{x^2 - 2x + 2}\, dx = \int \frac{4t + 1}{t^2 + 1}\, dt \qquad \text{(haciendo } t = x-1 \text{)}$$

$$= 2 \ln |t^2 + 1| + \arctan t + C$$

y así, $$I = x - \frac{x - 3}{x^2 - 2x + 2} + 2 \ln (x^2 - 2x + 2) + \arctan(x-1) + C.$$

PROBLEMA 23 Si $Q(x) = (x - a_1) \ldots (x - a_n)$ donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son distintos números reales, y $P(x)$ es un polinomio de grado menor que n probar que

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P(a_1)}{Q'(a_1)} \ln|x - a_1| + \ldots + \frac{P(a_n)}{Q'(a_n)} \ln|x - a_n| + C$$

SOLUCION

Tenemos $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{A_1}{x - a_1} + \ldots + \dfrac{A_n}{x - a_n}$.

Probaremos que $A_i = \dfrac{P(a_i)}{Q'(a_i)}$.

Tenemos $\dfrac{P(a_i)}{Q'(a_i)} = \lim\limits_{x \to a_i} \dfrac{P(x)}{\dfrac{Q(x) - Q(a_i)}{x - a_i}}$ (definición de derivada)

$$= \lim_{x \to a_i} (x - a_i) \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \text{(pues } Q(a_i) = 0 \text{)}$$

$$= \lim_{x \to a_i} \left[\left(\frac{x - a_i}{x - a_1}\right) A_1 + \ldots + \left(\frac{x - a_i}{x - a_i}\right) A_i + \ldots + \left(\frac{x - a_i}{x - a_n}\right) A_n \right]$$

$$= 0 + \ldots + A_i + \ldots + 0 = A_i$$

Luego

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P(a_1)}{Q'(a_1)} \ln|x - a_1| + \ldots + \frac{P(a_n)}{Q'(a_n)} \ln|x - a_n| + C.$$

2. INTEGRACION DE ALGUNAS FUNCIONES IRRACIONALES

2.1 Integrales de la forma

$$I = \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

Solución Completando cuadrados en el trinómio ax^2+bx+c, el cálculo de la integral I se reduce a encontrar una de las siguientes integrales.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C \qquad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc sen}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad (a > 0)$$

Ejemplo Hallar $I = \int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx$

Solución

$1 - x - x^2 = \frac{5}{4} - (x+\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} - t^2$, donde $t = x + \frac{1}{2}$

Luego

$$I = \int \frac{2t-9}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}dt = 2\int \frac{t\,dt}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}} - 9\int \frac{t\,dt}{\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}}$$

$$= -2\sqrt{\frac{5}{4}-t^2} - 9 \text{ arc sen}\left(\frac{t}{\frac{\sqrt{5}}{2}}\right) + C$$

$$= -2\sqrt{1-x-x^2} - 9 \text{ arc sen}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) + C\,.$$

2.2 Integrales de la forma

$$I = \int \frac{dx}{(x-d)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Solución Haciendo $t = \frac{1}{x-d}$ (**sustitución inversa**), la integral I se transforma en una integral del tipo 2.1

En efecto, tenemos $x = \frac{1}{t} + d$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, y por lo tanto

$$I = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{a(\frac{1}{t}+d)^2 + b(\frac{1}{t}+d)+C}} = -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{C}{t^2}+\frac{B}{t}+A}}$$

$$= \mp \int \frac{dt}{\sqrt{At^2+Bt+C}} ,$$

donde se debe elegir el signo $-$ ó $+$ según que sea $t > 0$ ó $t < 0$, respectivamente.

Ejemplo Hallar $I = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$, para $x > \sqrt{2}$.

Solución

Sea $t = \frac{1}{x-1}$.

Luego

$$I = -\int \frac{dt}{t\sqrt{(\frac{1}{t}+1)^2 - 2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{2-(t-1)^2}} = -\operatorname{arc\,sen}(\frac{t-1}{\sqrt{2}}) + C$$

$$= -\operatorname{arc\,sen}\left|\frac{2-x}{(x-1)\sqrt{2}}\right| + C .$$

2.3 Integrales de la forma

$$I = \int \sqrt{ax^2 + bx + c}\ dx$$

Solución Completando cuadrados en el trinomio $ax^2 + bx + c$, la integral I se transforma en una de las dos siguientes integrales (que pueden calcularse mediantes sustituciones trigonométricas)·

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + C, \qquad (a > 0)$$

$$\int \sqrt{x^2 + a}\,dx = \frac{x}{a}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$$

Ejemplo Hallar $I = \int \sqrt{10 - 4x + 4x^2}\,dx$.

Solución

$$I = \int \sqrt{(2x - 1)^2 + 9}\ dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{t^2 + 9}\ dt \quad \text{(haciendo } t = 2x-1)$$

$$= \frac{1}{4} t \sqrt{t^2 + 9} + \frac{9}{4} \ln \left| t + \sqrt{t^2 + 9} \right| + C$$

$$= \frac{(2x - 1)}{4} \sqrt{10 - 4x + 4x^2} + \frac{9}{4} \ln \left| 2x - 1 + \sqrt{10 - 4x + 4x^2} \right| + C.$$

2.4 Integrales de la forma

$$I = \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx$$

donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n.

Teorema

Se cumple $I = Q_{n-1}(x) \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c} + K \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, donde Q_{n-1} es un polinomio de grado n-1 y K es una constante.

Nota

Los coeficientes de $Q_{n-1}(x)$ y K se calculan derivando ambos miembros respecto de x.

Prueba del Teorema

Si $P_n(x) = A_n x^n + \ldots + A_0$ entonces

$$\int \frac{P_n(x)\, dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = A_n \int \frac{x^n\, dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \ldots + A_0 \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

y por tanto, es suficiente probar que cada integral $J_n = \int \frac{x^n\, dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ puede escribirse en la forma indicada.

Vamos a probar que se cumple la siguiente fórmula de recurrencia

$$J_n = \frac{x^{n-1}}{na} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b(2n-1)}{2na} J_{n-1} - \frac{c(n-1)}{na} J_{n-2} \qquad (1)$$

En efecto,

$$J_n = \int \frac{x^n\, dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{a} \int \frac{x^{n-1}\left(ax + \frac{b}{2} - \frac{b}{2}\right)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx$$

(observemos que $d\left(\sqrt{ax^2 + bx + c}\right) = \frac{ax + \frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$)

$$= \frac{1}{a}\int x^{n-1}\left(\frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\right)dx - \frac{b}{2a}J_{n-1}$$

$$= \frac{1}{a}\left[x^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c} - (n-1)\int x^{n-2}\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx\right] - \frac{b}{2a}J_{n-1}$$

(integrando por partes)

$$= \frac{x^{n-1}}{a}\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{(n-1)}{a}\int \frac{x^{n-2}(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx - \frac{b}{2a}J_{n-1}$$

$$= \frac{x^{n-1}}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} - (n-1)J_n - \frac{b(n-1)}{a}J_{n-1} - \frac{c}{a}(n-1)J_{n-2} - \frac{b}{2a}J_{n-1}$$

Luego $n J_n = \frac{x^{n-1}}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b(2n-1)}{2a}J_{n-1} - \frac{c}{a}(n-1)J_{n-2}$

de donde resulta la fórmula (1).

De (1) se sigue, por inducción sobre n, que

$$J_n = Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + K\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

donde $Q_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado $\leq n-1$. ∎

Ejemplo Encontrar $I = \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Solución Tenemos $I = (Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E)\cdot\sqrt{1-x^2} + K\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Derivando ambos miembros respecto de x

$$\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} = (4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D)\sqrt{1-x^2} + (Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E)\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + \frac{K}{\sqrt{1-x^2}},$$

y dando común denominador y agrupando términos semejantes

$$x^5 = (-5A)x^5 + (-4B)x^4 + (-3C+4A)x^3 + (3B-2D)x^2 + (2C-E)x + (D+K).$$

De donde, $A = -\frac{1}{5}$, $B = 0$, $C = -\frac{4}{15}$, $D = 0$, $E = -\frac{8}{15}$, $K = 0$.

Luego $I = -\frac{1}{15}(3x^4+4x^2+8)\sqrt{1-x^2} + C_1$.

2.5 Integrales de la forma

$$I = \int \frac{dx}{(x-d)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}} .$$

Solución

Haciendo la sustitución $t = \frac{1}{x-d}$ la integral dada se transforma en una integral del tipo 2.4 (Comparar con 2.2)

Ejemplo Hallar $I = \int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2 + 2x}}$, para $x > 0$.

Solución Hagamos $t = \frac{1}{x+1}$. Luego $x = \frac{1}{t} - 1$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$,

$$\sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{(\frac{1}{t} - 1)^2 + 2(\frac{1}{t} - 1)} = \sqrt{\frac{1 - t^2}{t^2}} = \frac{1}{t} \sqrt{1 - t^2}$$

(pues $t > 0$ si $x > 0$).

Luego

$$I = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^3} \cdot \frac{1}{t} \sqrt{1 - t^2}} = - \int \frac{t^2 \, dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

$$= (At + B) \sqrt{1 - t^2} + K \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} \qquad \text{(aplicando 2.4)}$$

Derivando ambos miembros e igualando coeficientes obtenemos

$$A = \frac{1}{2} , \qquad B = 0 \qquad y \qquad K = -\frac{1}{2} .$$

Finalmente $I = \frac{1}{2} t \sqrt{1 - t^2} - \frac{1}{2} \text{arc sen } t + C$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{(x+1)^2} - \frac{1}{2} \text{arc sen}(\frac{1}{x+1}) + C$$

(escribiendo $t \sqrt{1 - t^2} = t^2 \left[\frac{1}{t} \sqrt{1 - t^2}\right] = (\frac{1}{x+1})^2 \sqrt{x^2 + 2x}$) .

2.6 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Calcular $I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{5x^2 - 2x + 1}}$.

SOLUCION

$$I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{5(x-\frac{1}{5})^2 + \frac{4}{5}}} = \int \frac{(\frac{t+1}{5})\cdot\frac{dt}{5}}{\sqrt{\frac{t^2+4}{5}}} \qquad [\text{haciendo } t = 5(x-\tfrac{1}{5}) = 5x-1]$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{25}\int \frac{(t+1)dt}{\sqrt{t^2+4}} = \frac{\sqrt{5}}{25}\sqrt{t^2+4} + \frac{\sqrt{5}}{25}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{25}\sqrt{25x^2 - 10x + 5} + \frac{\sqrt{5}}{25}\ln\left|t + \sqrt{t^2+4}\right| + C$$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{5x^2 - 2x + 1} + \frac{\sqrt{5}}{25}\ln\left|x\sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{5x^2 - 2x + 1}\right| + C_1 .$$

PROBLEMA 2 Hallar $I = \int \sqrt{2 - 2x - x^2}\,dx$.

SOLUCION

$$I = \int \sqrt{3-(x+1)^2}\,dx = \int \sqrt{3-t^2}\,dt \qquad (\text{haciendo } t = x+1)$$

$$= \frac{t}{2}\sqrt{3-t^2} + \frac{3}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{t}{\sqrt{3}} + C \qquad (\text{ver } 2.3)$$

$$= \frac{(t+1)}{2}\sqrt{2 - 2x - x^2} + \frac{3}{2}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

PROBLEMA 3 Hallar $I = \int \sqrt{x^2 - 8x + 7}\ dx$.

SOLUCION

$$I = \int \sqrt{(x-4)^2 - 9}\ dx = \int \sqrt{t^2 - 9}\ dx \qquad (\text{haciendo } t = x-4)$$

$$= \frac{t\sqrt{t^2-9}}{2} - \frac{9}{2}\ln\left| t + \sqrt{t^2-9} \right| + C \qquad (\text{ver } 2.3)$$

$$= \frac{(x-4)}{2}\sqrt{x^2 - 8x + 7} - \frac{9}{2}\ln\left| x - 4 + \sqrt{x^2 - 8x + 7} \right| + C .$$

PROBLEMA 4 Calcular $I = \int \frac{\operatorname{sen} x\ dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1}}$

SOLUCION Hagamos $u = \cos x$. Luego

$$I = -\int \frac{du}{\sqrt{u^2+4u+1}} = -\int \frac{du}{\sqrt{(u+2)^2 - 3}} = -\ln\left|(u+2) + \sqrt{(u+2)^2 - 3}\right| +$$

(ver 2.1)

$$= -\ln\left| \cos x + 2 + \sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1} \right| + C.$$

PROBLEMA 5 Encontrar $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

SOLUCION La integral es del tipo 2.2 . Sea $t = \frac{1}{x}$.

Tenemos

$$I = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = -\ln\left| t + \sqrt{t^2 - 1} \right| + C$$

$$= -\ln\left| \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sqrt{1 - x^2} \right| + C$$

$$= \ln\left| \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \right| + C .$$

PROBLEMA 6 Calcular $I = \int \frac{\ln x \, dx}{x\sqrt{1 - 4\ln x + \ln^2 x}}$.

SOLUCION Sea $u = \ln x$. Luego $x = e^u$, $dx = e^u du$ y

$$I = \int \frac{u\, e^u\, du}{e^u \sqrt{1 - 4u + u^2}} = \int \frac{u\, du}{\sqrt{(u-2)^2 - 3}} = \int \frac{(t+2)\, dt}{\sqrt{t^2 - 3}}$$

. (haciendo $t = u-2$)

$$= \sqrt{t^2 - 3} + 2 \ln \left| t + \sqrt{t^2 - 3} \right| + C$$

$$= \sqrt{1 - 4\ln x + \ln^2 x} + 2 \ln \left| \ln x - 2 + \sqrt{1 - 4\ln x + \ln^2 x} \right| + C.$$

PROBLEMA 7 Hallar $I = \int x^2 \sqrt{x^2 + 4}\, dx$.

SOLUCION Por (2.4) tenemos

$$I = \int \frac{x^2 (x^2 + 4)}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sqrt{x^2 + 4} + K \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

Derivando ambos miembros respecto de x.

$$\frac{x^4 + 4x^2}{\sqrt{x^2 + 4}} = (3Ax^2 + 2Bx + C)\sqrt{x^2 + 4} + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{K}{\sqrt{x^2+4}}$$

Multiplicando por $\sqrt{x^2 + 4}$, igualando coeficientes y resolviendo las ecuaciones resultantes obtenemos

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = 0, \quad C = \frac{1}{2}, \quad D = 0, \quad K = -2.$$

Luego $I = \frac{x^4 + 2x^2}{4}\sqrt{x^2+4} - 2 \ln \left| x + \sqrt{x^2+4} \right| + C$.

PROBLEMA 8 Encontrar $I = \int \frac{x^2 + x + 1}{x\sqrt{x^2 - x + 1}}\, dx$.

SOLUCION

$$I = \sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{3}{2} \ln \left| x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + 1} \right| + \ln \left| \frac{x}{2 - x + 2\sqrt{x^2 - x + 1}} \right| + C.$$

PROBLEMA 9 Hallar $I = \int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 1}}$.

SOLUCION

$$I = - \int \frac{t^4 \, dt}{\sqrt{1 - t^2}} \qquad \text{(haciendo } t = \frac{1}{x} \text{)}$$

$$= (At^3 + Bt^2 + Ct + D)\sqrt{1 - t^2} + K \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

Luego

$$- \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}} = (3At^2 + 2Bt + C)\sqrt{1-t^2} + (At^3 + Bt^2 + Ct + D)\left(\frac{-t}{\sqrt{1 - t^2}}\right) + \frac{K}{\sqrt{1-t^2}}$$

Multiplicando por $\sqrt{1-t^2}$, igualando coeficientes y resolviendo las ecuaciones resultantes obtenemos

$A = \frac{1}{4}$, $B = 0$, $C = \frac{3}{8}$, $D = 0$ y $K = -\frac{3}{8}$.

Entonces $I = \frac{1}{8}(2t^3 + 3t)\sqrt{1 - t^2} - \frac{3}{8} \text{ arc sen } t + C$

$$= \frac{2 + 3x^2}{8x^4} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{3}{8} \text{arc sen } \frac{1}{x} + C.$$

2.7 Integrales de la forma

$$I = \int R\left[x, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{r_2}, \ldots\right] dx$$

donde R es una función racional y $r_1, r_2, \ldots,$ son números racionales.

Solución Mediante la sustitución $t^m = \frac{ax + b}{cx + d}$, donde **$m$ es el mínimo común múltiplo de los denominadores de los números racionales r_1, r_2, ...**, la integral dada se transforma en una integral de una función racional $R_1(t)$

$$I = \int R_1(t) \, dt \ .$$

2.8 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Hallar $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$.

SOLUCION Si $t^2 = x-1$ y $dx = 2t\,dt$, entonces

$$I = \int \frac{(t^2+1)^3}{t}\,2t\,dt = 2\int (t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 1)\,dt$$

$$= \frac{2}{7}t^7 + \frac{6}{5}t^5 + 2t^3 + 2t + C$$

$$= 2\sqrt{x-1}\left[\frac{(x-1)^3}{7} + \frac{3}{5}(x-1)^2 + x\right] + C .$$

PROBLEMA 2 Hallar $I = \int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

SOLUCION Si $t^2 = 1-x$, $dx = -2t\,dt$, entonces tenemos

$$I = -2\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)\,t} = -2\int \frac{dt}{1+t^2} = -2 \arctan t + C$$

$$= -2 \arctan \sqrt{1-x} + C .$$

PROBLEMA 3 Hallar $I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{ax+b}}$.

SOLUCION

Sea $t = \sqrt[3]{ax+b}$. Luego $x = \frac{t^3 - b}{a}$ y $dx = \frac{3t^2}{a}\,dt$.

Tenemos entonces

$$I = \frac{3}{a^2}\int \frac{(t^3 - b)t^2\,dt}{t} = \frac{3}{a^2}\int (t^4 - bt)dt = \frac{3}{a^2}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{bt^2}{2}\right)+C$$

$$= \frac{3t^2}{10a^2}(2t^3 - 5b) + C = \frac{3(ax+b)^{2/3}}{10a^2}(2ax - 3b) + C .$$

PROBLEMA 4

Hallar $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\, dx$.

SOLUCION

Hagamos $t^3 = \frac{x+1}{x-1}$. Luego $x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$ y $dx = \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}$.

Entonces

$$I = -6\int \frac{t^3\, dt}{(t^3-1)^2} = -6\int t \left| \frac{t^2}{(t^3-1)^2} \right| dt \quad \text{(integrando por partes)}$$

$$= 2\frac{t}{t^3-1} - 2\int \frac{dt}{t^3-1} .$$

Por otra parte $\frac{1}{t^3-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1}$

$$1 = A(t^2+t+1) + (Bt+C)(t-1)$$

de donde $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$ y $C = -\frac{2}{3}$

y $$\int \frac{dt}{t^3-1} = \frac{1}{3}\ln\left|t-1\right| - \frac{1}{3}\int \frac{t+2}{t^2+t+1} dt$$

$$= \frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{3}\int \frac{(t+\frac{1}{2}) + \frac{3}{2}}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dt$$

$$= \frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{6}\ln|t^2+t+1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + C .$$

Finalmente

$$I = \frac{2t}{t^3-1} + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}\right| + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

donde $t = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/3}$

PROBLEMA 5 Calcular $I = \int \frac{dx}{\sqrt{3x-2} - \sqrt[4]{3x-2}}$.

SOLUCION

Sea $t = \sqrt[4]{3x-2}$. Luego $x = \frac{t^4 - 2}{3}$ y $dx = \frac{4t^3}{3}dt$. Entonces

$$I = \frac{4}{3}\int \frac{t^3\,dt}{t^2 - t} = \frac{4}{3}\int \frac{t^2\,dt}{t-1} = \frac{4}{3}\int \frac{(t^2-1+1)}{t-1}dt = \frac{4}{3}\int (t+1)dt + \frac{4}{3}\int \frac{dt}{t-1}$$

$$= \frac{2}{3}t^2 + \frac{4}{3}t + \frac{4}{3}\ln|t-1| + C$$

donde $t = (3x-2)^{1/4}$.

PROBLEMA 6 Hallar $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

SOLUCION

Tenemos 6 = m.c.m de los denominadores de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$.

Hagamos $t^6 = x$. Luego

$$I = \int \frac{6t^5\,dt}{t^3 + t^2} = 6\int \frac{t^3 dt}{t+1} = 6\int \frac{(u-1)^3\,du}{u}$$

(haciendo $u = t+1$)

$$= 6\int (u^2 - 3u + 3 - \frac{1}{u})du$$

$$= 2u^3 - 9u^2 + 18u - 6\ln|u| + C$$

$$= 2(\sqrt[6]{x}+1)^3 - 9(\sqrt[6]{x}+1)^2 + 18(\sqrt[6]{x}+1) - 6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + C .$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + C_1 .$$

2.9 Integrales de la forma

$$I = \int x^p (a + bx^q)^r \, dx \quad ,$$

donde p, q y r son números racionales.

Solución

Caso 1 **Si r es un número entero,** la integral se calcula por 2.7

Caso 2 **Si $\frac{p+1}{q}$ es un número entero, se hace la sustitución $t^D = a + bx^q$, donde D = denominador de r.**

La integral dada queda convertida en una integral de una función racional $R_1(t)$ en t

$$I = \int R_1(t)\, dt .$$

En efecto $x = \left(\frac{t^D - a}{b}\right)^{1/q}$ y

$$I = \int \left(\frac{t^D - a}{t}\right)^{p/q} t^{Dr} \frac{1}{q}\left(\frac{t^D - a}{b}\right)^{1/q-1} Dr^{D-1} \, dt$$

$$= K \int (t^D - a)^{\frac{p+1}{q} - 1} t^{Dr+D-1} \, dt ,$$

y todos los exponentes del integrando son números enteros.

Caso 3 **Si $\frac{p+1}{q} + r$ es un número entero, se hace la sustitución $t^D = ax^{-q} + b$, donde D = denominador de r.**

La integral I es transformada en una integral de una función racional en la variable t.

En efecto, $I = \int x^p (a + bx^q)^r \, dx = \int x^p \, x^{qr} (b + ax^{-q})^r \, dx$

$$= \int x^{p+qr} \, (b + ax^{-q})^r \, dx,$$

y en esta integral se cumple la hipótesis del caso anterior, pues $\frac{p + qr + 1}{-q} = -\left(\frac{p+1}{q} + r\right)$ es un número entero.

2.10 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Hallar $I = \int x^3(1-2x^2)^{-3/2}\,dx$.

SOLUCION Tenemos $p = 3$, $q = 2$, $r = -\frac{3}{2}$.

Puesto que $\frac{p+1}{q} = 2$ (caso 2) hacemos la sustitución $t^2 = 1 - 2x^2$.

Luego $x = (\frac{1-t^2}{2})^{1/2}$ y

$$I = \int (\frac{1-t^2}{2})^{3/2}\, t^{-3}\, \frac{1}{2}\, (\frac{1-t^2}{2})^{\frac{1}{2}-1}\, (-t)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int (\frac{1-t^2}{2})\, t^{-2}\, dt = -\frac{1}{4}\int (t^{-2}-1)dt$$

$$= \frac{1}{4t} + \frac{t}{4} + C = \frac{1+t^2}{4t} + C = \frac{1-x^2}{2\sqrt{1-2x^2}} + C.$$

PROBLEMA 2 Hallar $I = \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

SOLUCION

De $I = \int x^{-4}(1+x^2)^{-1/2}\,dx$ tenemos $p = -4$, $q = 2$, $r = -\frac{1}{2}$ y

$\frac{p+1}{q} + r = -2$. Luego se trata de una integral del caso 3. Escribiendo

$$I = \int x^{-5}(x^{-2}+1)^{-1/2}\,dx,$$

hacemos la sustitución $t^2 = x^{-2}+1$, $x = (t^2-1)^{-1/2}$

$$I = \int (t^2-1)^{5/2}\, t^{-1}\, (-\frac{1}{2})\, (t^2-1)^{-3/2}\, 2t\,dt = -\int (t^2-1)dt$$

$$= -\frac{t^3}{3} + t + C = \frac{t}{3}(3-t^2) + C = \frac{\sqrt{1+x^2}}{3x^3}(2x^2-1) + C.$$

PROBLEMA 3

Hallar $I = \int x^5(a+bx^3)^{1/4}$

SOLUCION

Tenemos $p=5$, $q=3$, $r=\frac{1}{4}$ y $\frac{p+1}{q} = 2$. Luego se trata de la integral del caso 2.

Hagamos $t^4 = a+bx^3$. Entonces $x = (\frac{t^4-a}{b})^{1/3}$ y $dx = \frac{4}{3b}(\frac{t^4-a}{b})^{-2/3} t^3 dt$.

Entonces

$$I = \frac{4}{3b}\int (\frac{t^4-a}{b})\, t^4 dt = \frac{4}{3b^2}(\frac{t^9}{9} - \frac{a}{5}t^5) + C = \frac{4t^5}{135b^2}(5t^4-9a)+C$$

$$= \frac{4(a+bx^3)^{5/4}(5bx^3-4a)}{135\,b^2} + C .$$

PROBLEMA 4

Encontrar $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\ \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$.

SOLUCION

En $I = \int x^{-3/2}(1+x^{3/4})^{-1/3}\,dx$ tenemos $p=-\frac{3}{2}$, $q=\frac{3}{4}$, $r=-\frac{1}{3}$ y $\frac{p+1}{q} + r = -1$. Entonces escribimos

$$I = \int x^{-7/4}(x^{-3/4}+1)^{-1/3}\,dx$$

y hacemos la sustitución $t^3 = x^{-3/4}+1$, $x = (t^3-1)^{-4/3}$, $dx = -4(t^3-1)^{-7/3}\,t^2 dt$.

Luego

$$I = -4\int t\,dt = -2t^2 + C = -2(x^{-3/4}+1)^{2/3} + C .$$

PROBLEMA 5

Hallar $I = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x+2}}}{\sqrt{x+2}}\,dx$.

SOLUCION

Haciendo $t = x+2$ tenemos $I = \int t^{-1/2}(1+t^{1/4})^{1/3}\,dt$

$p = -\frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{4}$, $r = \frac{1}{3}$ y $\frac{p+1}{q} = 2$.

Sea $u^3 = 1+t^{1/4}$, $t = (u^3-1)^4$, $dt = 12(u^3-1)^3u^2\,du$.

Luego

$$I = 12\int (u^3-1)^{-2}\,u(u^3-1)^3\,u^2\,du = 12\int (u^3-1)u^3\,du = \frac{12}{7}u^7 - 3u^4 + C$$

$$= \frac{12}{7}\left[1+(x+2)^{1/4}\right]^{7/3} - 3\left[1+(x+2)^{1/4}\right]^{4/3} + C .$$

PROBLEMA 6 Encontrar $I = \int \frac{dx}{x^n\,(1+x^n)^{1/n}}$, $n \geq 2$.

SOLUCION

$$I = \int x^{-n}\,(1+x^n)^{-1/n}\,dx, \quad p=-n, \quad q=n, \quad r=-\frac{1}{n} \quad y \quad \frac{p+1}{q}+r=-1.$$

Luego $I = \int x^{-(n+1)}\,(x^{-n}+1)^{-1/n}\,dx$,

y haciendo $t^n = x^{-n}+1$, $x = (t^n-1)^{-1/n}$, $dx = -(t^n-1)^{-\frac{n+1}{n}}\,t^{n-1}\,dt$.

Entonces $I = -\int t^{n-2}\,dt = -\frac{t^{n-1}}{n-1}+C = -\frac{(1+x^n)^{\frac{n-1}{n}}}{(n-1)x^{n-1}}+C$.

PROBLEMA 7 Calcular $I = \int \frac{(x^5+2x^2)}{(1+x^3)^{3/2}}\,dx$.

SOLUCION

$$I = \int x^5(1+x^3)^{-3/2}\,dx + 2\int x^2(1+x^3)^{-3/2}\,dx.$$

Para la primera integral: $p=5$, $q=3$ y $\frac{p+1}{q}=2$;

y para la segunda integral: $p=2$, $q=3$ y $\frac{p+1}{q}=1$.

Hagamos entonces $t^2 = 1+x^3$, $x=(t^2-1)^{1/3}$, $dx=\frac{2}{3}(t^2-1)^{-2/3}\,t\,dt$.

Luego $I = \frac{2}{3}\int (1-\frac{1}{t^2})dt + \frac{4}{3}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{3}t - \frac{2}{3t}+C$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{(t^2-1)}{t}+C = \frac{2x^3}{3\sqrt{1+x^3}}+C.$$

PROBLEMA 8 Hallar $I = \int x^5 (a^3 - x^3)^{3/2}\, dx$.

SOLUCION Tenemos $p = 5$, $q = 3$, $r = \frac{3}{2}$ y $\frac{p+1}{q} = 2$.

Luego hacemos la sustitución $t^2 = a^3 - x^3$, $x = (a^3 - t^2)^{1/3}$,
$dx = -\frac{2}{3} t(a^3 - t^2)^{-2/3}\, dt$. Entonces

$$I = -\frac{2}{3}\int (a^3 - t^2)t^4\, dt = -\frac{2}{3}\left(\frac{a^3 t^5}{5} - \frac{t^7}{7}\right) + C$$

$$= -\frac{2t^5}{3}\left(\frac{a^3}{5} - \frac{t^2}{7}\right) + C = -\frac{2}{3}(a^3 - x^3)^{5/2}\left(\frac{x^3}{7} + \frac{2a^3}{35}\right) + C.$$

PROBLEMA 9 Calcular $I = \int \frac{2\sqrt{1+x^4}}{x^3}\, dx$.

SOLUCION

$$I = 2\int x^{-3}(1+x^4)^{1/2}\, dx, \quad p = -3, \quad q = 4, \quad r = \frac{1}{2} \quad y \quad \frac{p+1}{4} + \frac{1}{2} = 0.$$

Entonces escribimos

$$I = 2\int x^{-1}(x^{-4}+1)^{1/2}\, dx$$ y hacemos la sustitución $t^2 = x^{-4}+1$,

$x = (t^2-1)^{-1/4}$, $dx = -\frac{1}{2} t(t^2-1)^{-5/4}\, dt$. Tenemos

$$I = -\int \frac{t^2\, dt}{t^2-1} = -\int dt - \int \frac{dt}{t^2-1} = -t - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$= -\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^4}+x^2}{\sqrt{1+x^4}-x^2}\right| + C$$

$$= -\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} + \ln\left|x^2 + \sqrt{1+x^4}\right| + C.$$

3 INTEGRACION DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

3.1 Integrales de la forma

$$I_{m,n} = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx \quad ,$$

donde m y n son números enteros.

Caso 1 **Al menos uno de los exponentes m o n es un número impar positivo**

Solución Supongamos que $m = 2k+1$ es un número impar positivo. Entonces

$$I_{m,n} = -\int \operatorname{sen}^{2k} x \cos^n x \, d(\cos x) = -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x \, d(\cos x)$$

y **haciendo la sustitución t = cos x** se obtiene

$$I_{m,n} = -\int (1-t^2)^k t^n \, dt \, ,$$

que es una integral cuyo cálculo es inmediato.

Una situación similar ocurre cuando n es un número impar positivo.

Ejemplo 1 Calcular $I = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx$.

Solución

$$I = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, d(\operatorname{sen} x) = \int t^2 (1-t^2) \, dt \quad (\text{haciendo } t = \operatorname{sen} x)$$

$$= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C \, .$$

Ejemplo 2 Encontrar $I = \int \frac{\operatorname{sen}^5 x}{\cos^2 x} dx$.

Solución

$$I = -\int \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x} d(\cos x) = -\int \frac{(1-t^2)^2}{t^2} dt \quad (\text{donde } t = \cos x)$$

$$= \frac{1}{t} + 2t - \frac{t^3}{3} + C = \sec x + 2\cos x - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Caso 2 **Ambos exponentes m y n son números pares ≥ 0**

Solución Entonces la integral dada se reduce a **integrales** del caso 1 empleando las fórmulas

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$$

las cuales permiten disminuir los exponentes.

Ejemplo Calcular $I = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx$.

Solución

$$I = \int (\operatorname{sen} x \cos x)^2 \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x(1 + \cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \, dx + \frac{1}{16}\int \operatorname{sen}^2 2x \, d(\operatorname{sen} 2x)$$

$$= \frac{1}{16}\int (1 - \cos 4x)dx + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C.$$

Caso 3 **Ambos exponentes m y n son enteros ≤ 0 de igual paridad**

Solución Sean $m = -p$ y $n = -q$. Entonces las sustituciones $t = \tan x$ o $t = \cot x$ convierten $I_{m,n}$ en una integral de una función racional en la variable t.

Por ejemplo, tenemos

$$I_{m,n} = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^p x \cos^q x}$$

$$= \int \operatorname{cosec}^p x \sec^{q-2} x \, d(\tan x)$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{\tan^2 x}\right)^{p/2} (1 + \tan^2 x)^{\frac{q-2}{2}} \, d(\tan x)$$

$$I_{m,n} = \int \frac{(1+\tan^2 x)^{\frac{p+q}{2}-1}}{\tan^p x}\, d(\tan x) = \int \frac{(1+t^2)^{\frac{p+q}{2}-1}}{t^p}\, dt \ , \quad \text{donde } t=\tan x .$$

Observemos que $\frac{p+q}{2}$ es un número entero ya que m y n tienen igual paridad.

Un resultado análogo es válido cuando se toma $t = \cot x$.

Casos Particulares

Si m es impar entonces las integrales $\int \frac{dx}{\text{sen}^m x}$ y $\int \frac{dx}{\cos^m x}$ se reducen al presente caso empleando

$$\int \frac{dx}{\text{sen}^m x} = \frac{1}{2^{m-1}} \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\text{sen}^m \frac{x}{2} \cos^m \frac{x}{2}} \quad \text{y} \quad \int \frac{dx}{\cos^m x} = \int \frac{d(x+\frac{\pi}{2})}{\text{sen}^m (x+\frac{\pi}{2})}$$

Ejemplo 1 Hallar $I = \int \frac{dx}{\text{sen}^4 x}$.

Solución

$$I = \int \text{cosec}^4 x\, dx = -\int \text{cosec}^2 x\, d(\cot x)$$

$$= \int (1+\cot^2 x)\, d(\cot x) = -\cot x - \frac{\cot^3 x}{3} + C .$$

Ejemplo 2 Calcular $I = \int \frac{dx}{\text{sen}^5 x \cos^3 x}$.

Solución

$$I = \int \text{cosec}^5 x \sec x\, d(\tan x) = \int (1+\frac{1}{\tan^2 x})^{5/2} (1+\tan^2 x)^{1/2}\, d(\tan x)$$

$$= \int \frac{(1+\tan^2 x)^3}{\tan^5 x} d(\tan x) = \int \frac{(1+t^2)^3}{t^5} dt \qquad (t = \tan x)$$

$$= -\frac{\cot^4 x}{4} - \frac{3\cot^2 x}{2} + 3 \ln|\tan x| + \frac{\tan^2 x}{2} + C .$$

Ejemplo 3 Hallar $I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x}$.

Solución

Tenemos $I = \frac{1}{2^5}\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 \frac{x}{2}\cos^5 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2^4}\int \operatorname{cosec}^5\frac{x}{2}\sec^3\frac{x}{2}\, d(\tan\frac{x}{2})$

$= \frac{1}{16}\int (1+\frac{1}{t^2})^{5/2}(1+t^2)^{3/2}\, dt$ (haciendo $t = \tan\frac{x}{2}$)

$= \frac{1}{16}\int \frac{(1+t^2)^4}{t^5} dt = \frac{1}{16}(-\frac{t}{4t^4} - \frac{2}{t^2} + 6\ln|t| + 2t^2 + \frac{t^4}{4}) + C$

$= \frac{t^8-1}{64\,t^4} + \frac{t^4-1}{8t^2} + \frac{3}{8}\ln|t| + C$

y puesto que $t^2 = \tan^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ se tiene $\frac{t^4-1}{t^2} = -4\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$ y $\frac{t^8-1}{t^4} = -\frac{8\cos x(2-\operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen}^4 x}$, obtenemos finalmente

obtenemos finalmerte

$$I = -\frac{\cos x}{4\operatorname{sen}^4 x} - \frac{3\cos x}{8\operatorname{sen}^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

Caso 4 Integrales de la forma $I = \int \tan^m x\, dx$ o $I = \int \cot^m x\, dx$, donde m es un número entero ≥ 1

Solución Para m = 1 tenemos

$$\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + C, \qquad \int \cot x\, dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C,$$

y para $m \geq 2$, se dispone de **fórmulas de reducción** empleando

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1, \qquad \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1.$$

Explícitamente,

$$\int \tan^m x\, dx = \int \tan^{m-2} x(\sec^2 x - 1)dx = \frac{\tan^{m-1} x}{m-1} - \int \tan^{m-2} x\, dx$$

$$\int \cot^m x\, dx = \int \cot^{m-2} x(\operatorname{cosec}^2 x - 1)dx = -\frac{\cot^{m-1} x}{m-1} - \int \cot^{m-2} x\, dx.$$

Ejemplo Hallar $I = \int \cot^3 x \, dx$.

Solución

$$I = \int \cot x(\operatorname{cosec}^2 x - 1)\,dx = -\frac{\cot^2 x}{2} - \int \cot x \, dx = -\frac{\cot^2 x}{2} - \ln|\operatorname{sen} x| + C.$$

Caso 5 Caso General: Fórmulas de Reducción

En general la integral $I_{m,n} = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$ se calcula integrando por partes dando lugar a **fórmulas de reducción** que permiten expresar la integral dada en términos de otra integral de la misma forma con los exponentes aumentado o disminuídos.

A continuación presentamos tales fórmulas de reducción.

$$(1)\quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x \, dx$$

$$(2)\quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^n x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^n x \, dx$$

$$(3)\quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n+2} x \, dx$$

$$(4)\quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int \operatorname{sen}^{m+2} x \cos^n x \, dx$$

Por supuesto dichas ecuaciones son válidas siempre que los respectivos denominadores sean distintos de cero.

(1) y (2) se obtienen integrando por partes y usando la relación $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Ver ejemplo 1.

(3) y (4) se obtienen de (1) y (2), respectivamente, despejando la integral del segundo miembro.

Ejemplo 1 Probar la fórmula de reducción

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{m-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x \, dx,$$

donde m y n son números enteros tales que $m+n \neq 0$.

Solución

Sea $I = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$. Tenemos

$$(m+1)I = \int (m+1)\operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{m+2} x \cos^{n-2} x \, dx$$

(tomando $u = \cos^{n-1} x$, $dv = (m+1)\operatorname{sen}^m x \cos x \, dx$)

$$= \operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \operatorname{sen}^m x (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x \, dx$$

(pues $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$)

$$= \operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} dx - (n-1)I ,$$

de donde $(m+n)I = \operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} dx,$

y despejando I resulta la fórmula deseada.

3.2 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Hallar $I = \int \tan^3 \frac{x}{3} dx.$

SOLUCION Tenemos una integral del caso 4.

$$I = \int \tan \frac{x}{3} (\sec^2 \frac{x}{3} - 1) dx = 3 \int \tan \frac{x}{3} d(\tan \frac{x}{3}) - 3 \int \tan \frac{x}{3} d(\frac{x}{3})$$

$$= \frac{3}{2} \tan^2 \frac{x}{3} + 3 \ln \left| \cos \frac{x}{3} \right| + C .$$

PROBLEMA 2

Hallar $I = \int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx.$

SOLUCION

$$I = -\int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)^2\, d(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen}^3 x} \qquad \text{(CASO 1)}$$

$$= -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} - 2\ln|\operatorname{sen} x| + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C.$$

PROBLEMA 3 Calcular $I = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx.$

SOLUCION

$$I = \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 2x\, dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\, dx \qquad \text{(CASO 2)}$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + C.$$

PROBLEMA 4 Encontrar $I = \int \sec^3 x\, dx.$

SOLUCION

$$I = \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x}\, dx = \int \sec x\, dx + \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x}\, dx$$

$$= \int \sec x\, dx + \left[\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x}\right]$$

(integrando por partes: $u = \operatorname{sen} x$, $dv = \dfrac{\operatorname{sen} x\, dx}{\cos^3 x}$

$$I = \frac{1}{2}\ln|\tan x + \sec x| + \frac{1}{2}\tan x \sec x + C\ .$$

PROBLEMA 5 Hallar $I = \int \cos^6 3x\, dx$.

SOLUCION Tenemos una integral de caso 2.

$$I = \int \left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right)^3 dx \qquad \left(\text{usando } \cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 + 3\cos 6x + 3\cos^2 6x + \cos^3 6x)\, dx$$

$$= \frac{x}{8} + \frac{1}{8}\int (3 + \cos^2 6x)\cos 6x\, dx + \frac{3}{8}\int \cos^2 6x\, dx$$

$$= \frac{x}{8} + \frac{1}{48}\int (4 - \operatorname{sen}^2 6x)\, d(\operatorname{sen} 6x) + \frac{3}{16}\int (1 + \cos 12x)\, dx$$

$$= \frac{x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 6x}{12} - \frac{\operatorname{sen}^3 6x}{144} + \frac{3x}{16} + \frac{1}{64}\operatorname{sen} 12x + C$$

$$= \frac{5x}{16} + \frac{\operatorname{sen} 6x}{12} - \frac{\operatorname{sen}^3 6x}{144} + \frac{\operatorname{sen} 12x}{64} + C.$$

PROBLEMA 6 Calcular $I = \int \dfrac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^4 x}$

SOLUCION $I = \int \operatorname{cosec}^2 x \sec^4 x\, dx = \int \left(1 + \dfrac{1}{\tan^2 x}\right)(1 + \tan^2 x)\, d(\tan x)$ (CASO 3)

$$= \int \frac{(1+t^2)^2}{t^2}\, dt \qquad (\text{haciendo } t = \tan x)$$

$$= -\frac{1}{t} + 2t + \frac{t^3}{3} + C = -\cot x + 2\tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C.$$

PROBLEMA 7 Hallar $I = \int \cot^4\theta\, d\theta$

SOLUCION $I = \int \cot^2\theta(\operatorname{cosec}^2\theta - 1)\, d\theta$ (CASO 4)

$$= -\int \cot^2\theta\, d(\cot\theta) - \int \cot^2\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{\cot^3\theta}{3} - \int (\operatorname{cosec}^2\theta - 1)\, d\theta = -\frac{\cot^3\theta}{3} + \cot\theta + \theta + C.$$

PROBLEMA 8 Encontrar $I = \int \frac{dx}{\cos^6 x}$

SOLUCION

$$I = \int \sec^6 x\, dx = \int (1+\tan^2 x)^2\, d(\tan x) \qquad \text{(CASO 3)}$$

$$= \int (1 + 2t^2 + t^4)\, dt \qquad \text{(haciendo } t = \tan x\text{)}$$

$$= t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^5}{5} + C = \tan x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \frac{\tan^5 x}{5} + C.$$

PROBLEMA 9 Calcular $I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}}$

SOLUCION

$$I = \int \operatorname{cosec} \frac{x}{2} \sec^3 \frac{x}{2}\, dx \qquad \text{(CASO 3)}$$

$$= 2 \int \left[1 + \frac{1}{\tan^2 \frac{x}{2}}\right]^{1/2} \left[1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right]^{1/2} d\left(\tan \frac{x}{2}\right)$$

$$= 2 \int \frac{(1+t^2)}{t} dt\,, \qquad \text{(haciendo } t = \tan \frac{x}{2}\text{)}$$

$$= 2 \ln |t| + t^2 + C$$

$$= 2 \ln \left|\tan \frac{x}{2}\right| + \tan^2 \frac{x}{2} + C.$$

PROBLEMA 10 Calcular $I = \int x \operatorname{sen}^2 x^2\, dx.$

SOLUCION $I = \int x \left(\frac{1 - \cos 2x^2}{2}\right) dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} \int d(\operatorname{sen} 2x^2)$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2x^2}{8} + C\,.$$

PROBLEMA 11

Encontrar $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4\theta \, d\theta$

SOLUCION

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{\pi}{8} + 0 + \frac{\pi}{16} + 0 = \frac{3\pi}{16} \ .$$

PROBLEMA 12 Hallar $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$.

SOLUCION

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)^2}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{cosec}^2 x - 2 + \operatorname{sen}^2 x)\, dx$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d(\cot\theta) - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (3 + \cos 2x)\, dx \ , \quad (\text{usando } \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2})$$

$$= -\cot\theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\left(3x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{4} - \frac{3\pi}{8} \ .$$

PROBLEMA 13 Calcular $I = \int \operatorname{sen}^5 x \sqrt[3]{\cos x}\, dx$.

SOLUCION Sea $t = \cos x$, $dt = -\operatorname{sen} x\, dx$. Luego

$$I = -\int (1-t^2)^2 t^{1/3}\, dt = -\int (t^{1/3} - 2t^{7/3} + t^{13/3})\, dt$$

$$= -\frac{3}{4}t^{4/3} + \frac{3}{5}t^{10/3} - \frac{3}{16}t^{16/3} + C \ , \quad \text{donde } t = \cos x \ .$$

PROBLEMA 14

Hallar $I = \int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$.

SOLUCION Sea $t = \sqrt{\tan x}$. Entonces $x = \arctan t^2$ y $dx = \frac{2t\,dt}{1+t^4}$

Luego $I = 2\int \frac{dt}{1+t^4}$ y

$$\frac{2}{1+t^4} = \frac{At+B}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{Ct+D}{t^2-\sqrt{2}t+1}$$

ya que $t^4+1 = (t^4+2t^2+1)-(2t^2) = (t^2+1)^2 - (\sqrt{2}t)^2$

$= (t^2+\sqrt{2}t+1)(t^2-\sqrt{2}t+1)$.

Multiplicando ambos miembros por $1+t^4$ e igualando coeficientes se obtiene $A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $B = 1$, $C = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $D = 1$.

Integrando

$$I = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}dt - \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}t-1}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt$$

$$= \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(t+\frac{\sqrt{2}}{2})+\frac{1}{2}}{(t+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}dt - \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(t-\frac{\sqrt{2}}{2})-\frac{1}{2}}{(t-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right| + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}t+1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}t-1) + C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right| + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\frac{\sqrt{2}t}{1-t^2}) + C,$$

donde $t = \sqrt{\tan x}$.

PROBLEMA 15 Encontrar $I = \int \sec^5 4x\, dx$.

SOLUCION

$$I = \int \frac{dx}{\cos^5 4x} = \frac{1}{4}\int \frac{d(4x)}{\cos^5 4x} = \frac{1}{4}\int \frac{d(4x+\frac{\pi}{2})}{\operatorname{sen}^5(4x+\frac{\pi}{2})} \quad \text{(Caso 3)}$$

$$= \frac{1}{4(16)}\int \frac{d(2x+\frac{\pi}{4})}{\operatorname{sen}^5(2x+\frac{\pi}{4})\cos^5(2x+\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{64}\int \frac{du}{\operatorname{sen}^5 u \cdot \cos^5 u}$$

(haciendo $u = 2x + \frac{\pi}{4}$)

$$= \frac{1}{64}\int \left(1 + \frac{1}{\tan^2 u}\right)^{5/2} (1 + \tan^2 u)^{3/2}\, d(\tan u)$$

$$= \frac{1}{64}\left[-\frac{1}{4t^4} - \frac{2}{t^2} + 6 \ln|t| + 2t^2 + \frac{t^4}{4}\right] + C$$

Pero $t = \tan u = \tan(2x + \frac{\pi}{4})$

$$t^2 = \tan^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$$

$$\frac{t^4 - 1}{t^4} = 4\frac{\operatorname{sen} 4x}{\cos^2 4x}$$

$$\frac{t^8 - 1}{t^8} = \frac{8 \operatorname{sen} 4x(2 - \cos^2 4x)}{\cos^4 4x} ,$$

y por consiguiente

$$I = \frac{3}{32}\frac{\operatorname{sen} 4x}{\cos^2 4x} + \frac{1}{16}\frac{\operatorname{sen} 4x}{\cos^4 4x} + \frac{3}{32}\ln\left|\tan(2x + \frac{\pi}{4})\right| + C .$$

3.3 Integrales de la forma

$$\boxed{I = \int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx} \quad \text{y} \quad \boxed{I = \int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx}, \quad \boxed{I = \int \cos mx \cos nx\, dx}.$$

Solución. Empleando las identidades

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x],$$

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] \quad \text{y}$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x],$$

respectivamente, se obtienen integrales cuyo cálculo es inmediato.

3.4 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Calcular $I = \int \operatorname{sen}(3x+6)\cos(5x+10)dx.$

SOLUCION

$$I = \int \operatorname{sen} 3u \cos 5u\, du, \qquad \text{haciendo } u = x+2,$$

$$= \frac{1}{2}\int \left[\operatorname{sen} 8u + \operatorname{sen}(-2u)\right] du = -\frac{1}{16}\cos 8u + \frac{1}{4}\cos 2u + C$$

$$= -\frac{1}{16}\cos(8x+16) + \frac{1}{4}\cos(4x+4) + C.$$

PROBLEMA 2 Encontrar $I = \int \operatorname{sen}\frac{x}{3}\cos 7x\, dx.$

SOLUCION

$$I = \frac{1}{2}\int \left[\operatorname{sen} 10x + \operatorname{sen}(-4x)\right] dx = -\frac{1}{20}\cos 10x + \frac{1}{8}\cos 4x + C.$$

PROBLEMA 3 Hallar $I = \int \operatorname{sen}\frac{x}{3}\operatorname{sen}\frac{2x}{x}\, dx.$

SOLUCION

$$I = \frac{1}{2}\int \left[\cos(-\frac{x}{3}) - \cos x\right] dx = \frac{3}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + C.$$

PROBLEMA 4 Hallar $I = \int \cos(ax+b)\cos(ax-b)dx$.

SOLUCION $I = \frac{1}{2}\int \left[\cos 2b + \cos 2ax\right] dx = \frac{x \cos 2b}{2} + \frac{1}{4a}\operatorname{sen} 2ax + C.$

PROBLEMA 5 Calcular $I = \int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen}(ax+b)\, dx$.

SOLUCION

$$I = \frac{1}{2}\int [\cos(-b) - \cos(2ax+b)]\, dx$$

$$= x\frac{\cos b}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2ax+b)}{4a} + C$$

PROBLEMA 6 Hallar $I = \int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x\, dx.$

SOLUCION Tenemos

$$I = \frac{\operatorname{sen} x}{2}\left[\cos(-x) - \cos 5x\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\operatorname{sen} 0x + \operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 6x - \operatorname{sen}(-4x)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen} 4x\right]$$

Luego $I = -\frac{\cos 2x}{8} + \frac{\cos 6x}{24} - \frac{\cos 4x}{16} + C.$

PROBLEMA 7 Encontrar $I = \int \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} - x)\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} + x)\, dx$

SOLUCION $I = \frac{1}{2}\int \left[\cos(-2x) - \cos(\frac{\pi}{2})\right] dx = \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C .$

PROBLEMA 8 Calcular $I = \int \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2}\, dx$.

SOLUCION

$$I = \frac{1}{2} \int (1 - \cos x) \cos \frac{3x}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{3x}{2} - \frac{1}{4} \int \left[\cos\left(-\frac{x}{2}\right) + \cos \frac{5x}{2} \right] dx$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{3x}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{x}{2} - \frac{1}{10} \operatorname{sen} \frac{5x}{2} + C.$$

PROBLEMA 9 Hallar $I = \int \cos x \cos^2 5x\, dx$.

SOLUCION

$$I = \frac{1}{2} \int (\cos x)(1 + \cos 10x)dx =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{2} + \frac{1}{4} \int \left[\cos(-9x) + \cos 11x \right] dx$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 9x}{36} + \frac{\operatorname{sen} 11x}{44} + C .$$

3.5 Integrales de la forma

$$I = \int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$$

donde $R(u,v)$ es una función racional en las variables u y v.

Caso 1 Caso general

Solución

Efectuando la sustitución $t = \tan\frac{x}{2}$,

se tiene $\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$,

y la integral dada se reduce a una integral de una función racional en la variable t:

$$I = \int 2R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}.$$

Ejemplo

Hallar $I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}$

Solución

Haciendo $t = \tan\frac{x}{2}$ resulta

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{1+2t-t^2} = 2\int \frac{dt}{2-(t-1)^2}$$

$$= \frac{2}{2(\sqrt{2})} \ln\left|\frac{\sqrt{2}+(t-1)}{\sqrt{2}-(t-1)}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}-1+\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}+1-\tan\frac{x}{2}}\right| + C.$$

y puesto que $\tan\frac{\pi}{8} = -1+\sqrt{2}$, se tiene

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right| + C_1.$$

Caso 2 **La función R satisface**
$R(-\text{sen } x, -\cos x) = R(\text{sen } x, \cos x)$

Solución

En este caso, efectuando la sustitución $t = \tan x$, se tiene

$\text{sen } x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, y la integral se reduce a una función racional en la variable t.

Nota

Para abreviar los cálculos, en ciertos problemas particulares, es preferible recurrir a los **artificios de integración**. Ver problemas 1 y 2, pág 217

Ejemplo

Encontrar $I = \displaystyle\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$.

Solución

Haciendo $t = \tan x$ resulta

$$I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+3\left(\frac{1}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\tan x\right) + C.$$

3.6 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1 Calcular $I = \int \frac{\text{sen } x}{1 - \text{sen } x}\, dx$.

SOLUCION

$$I = \int \frac{\text{sen } x(1+\text{sen } x)}{1-\text{sen}^2 x}\, dx = \int \frac{\text{sen } x}{\cos^2 x}\, dx + \int \tan^2 x\, dx$$

$$= \frac{1}{\cos x} + \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \sec x + \tan x - x + C .$$

PROBLEMA 2 Hallar $I = \int \frac{3 \text{ sen } x + 2 \cos x}{2 \text{ sen } x + 3 \cos x}\, dx$.

SOLUCION Hagamos $\tan \theta = \frac{2}{3}$, $\text{sen } \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

Luego

$$I = \int \frac{\cos\theta .\, \text{sen } x + \text{sen}\,\theta .\, \cos x}{\text{sen}\,\theta .\, \text{sen } x + \cos\theta .\, \cos x}\, dx = \int \frac{\text{sen}(x+\theta)}{\cos(x-\theta)}\, dx$$

$$= \int \frac{\text{sen}\,(x-\theta+2\theta)}{\cos(x-\theta)}\, d\theta = \int \left[\cos 2\theta .\, \tan(x-\theta) + \text{sen } 2\theta\right] dx$$

$$= \cos 2\theta .\, \ln\left|\sec(x-\theta)\right| + x \text{ sen } 2\theta + C.$$

Pero $\text{sen } 2\theta = \frac{12}{13}$, $\cos 2\theta = \frac{5}{13}$, $\cos(x-\theta) = \frac{1}{\sqrt{13}}(3 \cos x + 2 \text{ sen } x)$

y por lo tanto $I = -\frac{5}{13} \ln\left|3 \cos x + 2 \text{ sen } x\right| + \frac{12x}{13} + C$.

PROBLEMA 3 Encontrar $I = \int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}$

SOLUCION Haciendo $t = \tan \frac{x}{2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

tenemos $I = \int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{2(2)} \ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| + C = \frac{1}{4} \ln\left|\frac{2+\tan\frac{x}{2}}{2-\tan\frac{x}{2}}\right| + C$.

PROBLEMA 4 Calcular $I = \int \frac{dx}{3\,\text{sen}^2x + 5\,\cos^2x}$

SOLUCION

Si $R(\text{sen } x, \cos x) = \frac{1}{3\,\text{sen}^2x + 5\,\cos^2x} = \frac{1}{3 + 2\,\cos^2x}$, entonces

$R(\text{sen } x, \cos x) = R(-\text{sen } x, -\cos x)$ y podemos aplicar el caso 2.

Sea pues $t = \tan x$, $dx = \frac{dt}{1 + t^2}$ y $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$. Luego

$$I = \int \frac{dt}{5 + 3t^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{5}{3}} = \frac{1}{3\sqrt{\frac{5}{3}}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{\frac{5}{3}}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{15}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\tan x\right) + C$$

PROBLEMA 5 Calcular $I = \int \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}\,dx$

SOLUCION

$$I = \int \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}\,dx = \int \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\,dx = \ln\left|\sec\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

PROBLEMA 6 Encontrar $I = \int \frac{\cos 2x\,dx}{\cos^4x + \text{sen}^4x}$

SOLUCION Tenemos

$$\cos^4x + \text{sen}^4x = (\text{sen}^2x + \cos^2x)^2 - 2\,\text{sen}^2x\,\cos^2x = 1 - \frac{1}{2}\text{sen}^2\,2x$$

Luego $I = \int \frac{d(\text{sen } 2x)}{2 - \text{sen}^2\,2x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2} + \text{sen } 2x}{\sqrt{2} - \text{sen } 2x}\right| + C.$

PROBLEMA 7 Hallar $I = \int \frac{dx}{(2 - \operatorname{sen} x)(3 - \operatorname{sen} x)}$

SOLUCION

$$I = \int \frac{(3 - \operatorname{sen} x) - (2 - \operatorname{sen} x)}{(2 - \operatorname{sen} x)(3 - \operatorname{sen} x)} dx = \int \frac{dx}{2 - \operatorname{sen} x} - \int \frac{dx}{3 - \operatorname{sen} x}$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 - t + 1} - 2 \int \frac{dt}{3t^2 - 2t + 3} \qquad \left(\text{haciendo } t = \tan \frac{x}{2} \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tan} \left(\frac{t - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{3}{\sqrt{8}} \right) \operatorname{arc\,tan} \left(\frac{t - \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{8}}{3}} \right) + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tan} \left(\frac{2 \tan \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tan} \left(\frac{3 \tan \frac{x}{2} - 1}{2\sqrt{2}} \right) + C.$$

PROBLEMA 8 Calcular $I = \int \frac{dx}{8 - 4 \operatorname{sen} x + 7 \cos x}$.

SOLUCION Sea $t = \tan \frac{x}{2}$. Entonces

$$I = \int \frac{2\,dt}{t^2 - 8t + 15} = \int \frac{2\,dt}{(t-3)(t-5)} = -\int \frac{dt}{t-3} + \int \frac{dt}{t-5}$$

$$= \ln \left| \frac{t-5}{t-3} \right| + C = \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - 5}{\tan \frac{x}{2} - 3} \right| + C.$$

PROBLEMA 9 Hallar $I = \int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{(1 - \cos x)^3}$.

SOLUCION

$$I = \int \frac{d(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)^3} = -\frac{1}{2(1 - \cos x)^2} + C.$$

PROBLEMA 10 Hallar $I = \int \frac{1 - \operatorname{sen} x + \cos x}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x}\, dx$.

SOLUCION

$$I = \int \frac{2 - (1 + \operatorname{sen} x - \cos x)}{(1 + \operatorname{sen} x - \cos x)}\, dx$$

$$= \int \frac{2\, dx}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x} - x , \qquad (1)$$

Pero $\int \frac{2\, dx}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x} = \int \frac{2\, dt}{t^2 + t}$, haciendo $t = \tan \frac{x}{2}$,

$$= 2 \int \frac{dt}{t} - 2 \int \frac{dt}{t+1} = 2 \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| + C \qquad (2)$$

Luego de (1) y (2)

$$I = 2 \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2}}{1 + \tan \frac{x}{2}} \right| - x + C .$$

PROBLEMA 11 Encontrar $I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x \cos x - \cos^2 x}$.

SOLUCION Tenemos

$$I = \int \frac{dx}{\frac{3}{2} \operatorname{sen} 2x - \cos 2x} = \int \frac{d(2x)}{3 \operatorname{sen} 2x - 2 \cos 2x}$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 3t - 1} , \qquad \text{haciendo } t = \tan x ,$$

$$= \int \frac{dt}{(t + \frac{3}{2})^2 - \frac{13}{4}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{t + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}}{t + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}} \right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{2 \tan x + 3 - \sqrt{13}}{2 \tan x + 3 + \sqrt{13}} \right| + C .$$

PROBLEMA 12 Encontrar $I = \int \frac{dx}{(1+\tan x)\,\operatorname{sen}^2 x}$.

SOLUCION Haciendo

$t = \tan x$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, se obtiene

$$I = \int \frac{dt}{(1+t)\,t^2}$$

Descomponiendo $\frac{1}{(1+t)\,t^2}$ en fracciones parciales e integrando

$$I = \int \frac{dt}{1+t} - \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t^2} = \ln\left|\frac{1+t}{t}\right| - \frac{1}{t} + C$$

$$= \ln\left|1 + \cot x\right| - \cot x + C .$$

3.7 Integrales de la forma

$$I = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\,)\,dx$$

, donde R es una función raciona

Solución Completando cuadrados en el trinomio $ax^2 + bx + c$ el integrando adquiere una de las formas siguientes

(1) $R(x, \sqrt{m^2 - x^2}\,)$,

(2) $R(x, \sqrt{m^2 + x^2}\,)$,

(3) $R(x, \sqrt{x^2 - m^2}\,)$,

y realizando las sustituciones (1) $x = m \operatorname{sen} t$,

(2) $x = m \tan t$,

(3) $x = m \sec t$,

respectivamente, la integral dada se reduce a una integral de una función racional de las funciones trigonométricas. Ver sección 3.5.

Nota Las integrales de la forma indicada también pueden ser halladas mediante sustituciones hiperbólicas (Ver sección 3.9) o directamente como en las secciones 2.3, 2.4 y 2.5.