SOBRE EL TEOREMA DE MEUSNIER

Por CRISTOBAL DE LOSADA Y PUGA

Profesor de la Universidad Católica del Perú.

El teorema de Meusnier, uno de los más importantes en la teoría elemental de las superficies, suele ser demostrado en los cursos por un prolijo método analítico. Pero teniendo en cuenta la importancia de la intuición geométrica para el ingeniero, en mis lecciones de Cálculo Infinitesimal de la Facultad de Ingeniería de nuestra Universidad, he tratado siempre de aducir explicaciones geométricas aclaratorias del clásico teorema.

Uno de mis discípulos, el Sr. Teodoro E. Harmsen, publicó en el número de abril de 1939 de esta misma Revista (1) una demostración puramente geométrica del teorema de Meusnier. Ahora voy a exponer otra demostración más directa y simple, inspirada en la que propone Demartres en su excelente libro (2). Casi podría afirmarse que me limito a repetir la demostración de Demartres, con mayores detalles y presentando una figura más clara que la suya.

Sea M un punto de una superficie y MN la normal, es decir la perpendicular al plano tangente P a la superficie en ese punto. Tomemos sobre el plano tangente una recta cualquiera MT: MN y MT determinarán un plano que corta a la superficie según una curva C, que llamaremos sección normal, cuyo centro de curvatura en M es O. Hagamos pasar por MT otro plano que cortará a la superficie según una curva C', que llamaremos sección oblicua, y que también será tangente a MT en M. Sean ON' la normal principal

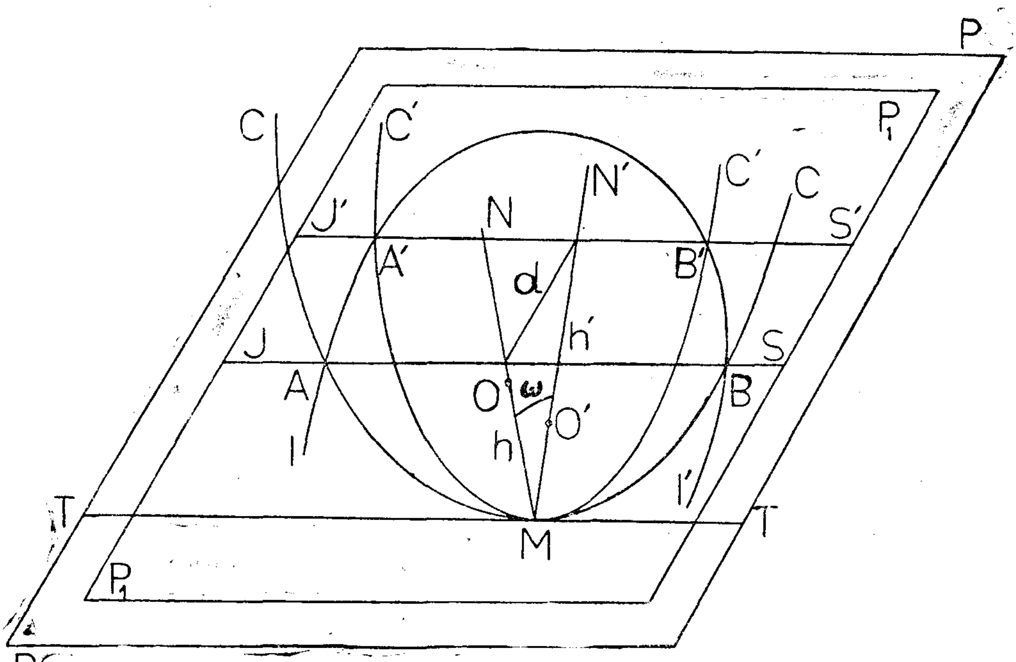
(1).—*Revista de la Universidad Católica del Perú*, t. 7, p. 42.

(2).—G. Demartres: *Cours de Géométrie Infinitésimale*, p. 127.

en M a la sección oblicua, y O' su centro de curvatura. El teorema de Meusnier establece que:

1º *La normal principal* MN' *a la sección oblicua, es la proyección de la normal* MN *sobre el plano de la sección oblicua;* y 2º *el centro de curvatura* O' *de la sección oblicua, es la proyección del centro de curvatura* O *de la sección normal sobre el plano de la sección oblicua.*

Demostración: 1º—Para demostrar el primer punto, basta demostrar que el plano NMN' es normal al plano de la sección oblicua. Para ello observemos que siendo MN y MN' perpendicula-



res a MT, el plano NMN' es perpendicular a MT, y por lo tanto a todo plano que contenga a esta recta, como los NMT y N'MT.

2º—Llamemos R y R' los radios de curvatura MO y MO' de la sección normal y de la sección oblicua en el punto M, y ω el ángulo NMN' que forman entre sí ambas secciones. Tratamos entonces de probar que

$$R' = R \cos \omega.$$

Cortemos la superficie por un plano P_1, paralelo al plano tangente y situado a una distancia h, infinitamente pequeña, de él. La figura representa la indicatriz II', intersección del plano P_1 con la superficie, así como las intersecciones JS y J'S' del plano P_1 con los planos de las secciones C y C'. Por lo tanto, AB y A'B' son a la vez las cuerdas que sobre esas rectas subtienden la indicatriz y las curvas C y C'. Sean R, R' los radios de los círculos circunscritos a los triángulos (no dibujados) AMB, A'MB', que siendo h infinitamente pequeño serán los círculos de curvatura en M de la sección normal y de la sección oblicua; $2l$ y $2l'$ las longitudes de las cuerdas AB y A'B'; h y h' las distancias de las cuerdas al punto M; d la distancia de las cuerdas entre sí. En el plano NMT, el triángulo AMB nos dá la relación

$$l^2 = h\,(2\mathrm{R} - h)$$

Y despreciando h junto a 2R,

$$l^2 = 2\mathrm{R}\,h.$$

De igual manera, en el plano N'MT, el triángulo A'MB' nos dá

$$l'^2 = 2\mathrm{R}\,h'$$

Estas ecuaciones prueban que si $2l$ y $2l'$, cuerdas de la indicatriz, se consideran como infinitamente pequeños de primer orden, h y h' lo serán de segundo, pues son proporcionales a los cuadrados de aquéllas. Por lo tanto, la distancia d de AB a A'B' será también un infinitamente pequeño de segundo orden, como lo muestra el triángulo (h, h', d), así que estas cuerdas infinitamente próximas de la indicatriz podrán considerarse como iguales, despreciando infinitamente pequeños de segundo orden. De esta manera tendremos

$$\mathrm{R}h = \mathrm{R}'\,h'$$

de donde

$$\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}} = \frac{h}{h'} = \cos\omega$$

q. e. l. q. q. d.

Si la indicatriz fuera una hipérbola, la misma demostración subsistiría, salvo el caso excepcional en que la cuerda AB se redujera a una de las asíntotas, pues entonces la intersección del plano tangente con la superficie se reduciría a dos rectas de radio de curvatura infinito: en este caso excepcicnal el teorema ya no tendría sentido, evidentemente.

Cristóbal de LOSADA y PUGA.