NOTAS y EJERCICIOS ELEMENTALES

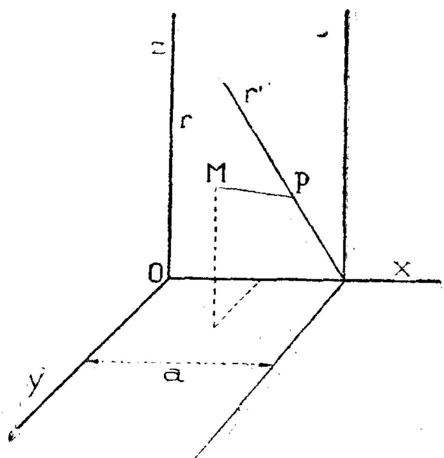
Determinación del lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos rectas cualesquiera del espacio.

Imaginemos en el espacio dos rectas, r y r', que se cruzan. Siempre podremos escoger nuestro sistema cartesiano de coordenadas ortogonales de manera que el eje z coincida con una de las rectas, r, por ejemplo, y el plano zOy sea paralelo a la otra recta, y quede así r' determinada por las ecuaciones:

$$x = a \qquad y = b\,z \qquad (1)$$

confundiéndose el eje x con la perpendicular común a las dos rectas.

Precisada en esta forma la posición de las rectas en el espacio, resolveremos el problema propuesto.



Sea M (x', y', z') un punto del lugar buscado. Un plano que pase por M y sea perpendicular a r' cortará al plano x = a según la recta de ecuaciones.

$$x = a \quad ; \quad y - y' = -\frac{1}{b}(z - z') \qquad (2)$$

Esta recta cortará a r' en un punto P (x'', y'', z'') cuyas cordenadas determinaremos resolviendo el sistema de las ecuaciones (1) y (2). Así obtendremos:

$$x'' = a \quad ; \quad y'' = \frac{bz' + b^2y'}{b^2 + 1} \quad ; \quad z'' = \frac{z' + by'}{b^2 + 1}$$

La recta MP es perpendicular a r' y por lo tanto la distancia d = MP, es la distancia de M a la recta r'. Esta distancia evidentemente será

$$d = \sqrt{(x' - a)^2 + \left(y' - \frac{bz' + b^2\,y'}{b^2 + 1}\right)^2 + \left(z' - \frac{z' + by'}{b^2 + 1}\right)^2}$$

Por otra parte, la distancia d' de M al eje z (recta r) es.

$$d' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

Y puesto que M pertenece al lugar buscado, equidistará de r y de r' y por lo tanto: d = d', y también, $d^2 = d'^2$, es decir:

$$(x' - a)^2 + \left(y' - \frac{bz' + b^2y'}{b^2 + 1}\right)^2 +$$

$$\left(z' - \frac{z' + by'}{b^2 + 1}\right)^2 = x'^2 + y'^2$$

A esta ecuación deben satisfacer las coordenadas de todos los puntos que, como M, son del lugar. Luego si reemplazamos x', y', z', por las coordenadas generales x, y, z, obtendremos después de simplificar y ordenar:

$$b^2y^2 + 2\,byz - b^2z^2 + 2\,a\,x\,(b^2 + 1) - a^2\,(b^2 + 1) = 0$$

que es la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas r y r'. Se trata, pues, de una superficie de segundo grado que vamos a identificar.

La ecuación anterior tiene la forma

$$Ay^2 + 2Byz - Az^2 + 2Dx - aD = 0$$

bajo la cual podemos estudiarla.

Si trasladamos los ejes z e y paralelamente a sí mismos de manera que las coordenadas segundas y terceras no varíen y las nuevas coordenadas primeras estén relacionadas con las primitivas por la ecuación.

$$x = x' + \frac{a}{2}$$

la ecuación tomará la forma.

$$Ay^2 + 2Byz - Az^2 + 2Dx = 0 \qquad (3)$$

en la cual vamos a hacer desaparecer el término rectangular.

Para esto imprimiremos a los ejes z e y un giro en su plano, alrededor del origen, giro que, si llamamos φ a la amplitud, vendrá dado por las ecuaciones:

$$y = y' \cos \varphi - z' \operatorname{sen} \varphi$$

$$z = y' \operatorname{sen} \varphi + z' \cos \varphi$$

Una vez efectuada la sustitución en (3), la amplitud φ la determinaremos por la condición de anulación del término rectangular expresada en la siguiente ecuación:

$$- 2 A \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + 2 B \cos^2 \varphi - 2 B \operatorname{sen}^2 \varphi -$$

$$- 2 A \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi = 0$$

a la que mediante una sencilla simplificación podemos darle la forma:

$$2B\cos 2\varphi - 2A\operatorname{sen} 2\varphi = 0$$

de donde obtendremos

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{B}{A}$$

y por lo tanto

$$\cos 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\varphi}} = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Por otra parte, la ecuación del lugar, una vez hecha la sustitución, anulado el término rectangular y realizada la reducción y ordenación, se transforma en

$$A y^2 - A z^2 + B (y^2 - z^2) \operatorname{tg} 2\varphi + \frac{2D}{\cos 2\varphi} x = 0$$

la cuál, después de reemplazar $\cos 2\varphi$ y $\operatorname{tg} 2\varphi$ por sus valores dados en (4) y (5), puede reducirse a

$$\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2D} z^2 - \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2D} y^2 = x$$

ecuación que, por pertenecer al tipo

$$Mz^2 - My^2 = x$$

corresponde a un paraboloide hiperbólico.

Lima, 1933.

José Tola Pasquel
Alumno de la Facultad de Ingeniería
de la Universidad Católica del Perú