LA MATEMATICA: Lenguaje, estética y significación

Dr. José Tola Pasquel

Publicamos un fragmento del Discurso de Incorporación a la Academia Peruana de la Lengua del actual rector de la Universidad Católica, Dr. José Tola Pasquel, pronunciado el 21 de abril de 1978.

No es tarea fácil la de explicar con precisión en qué consiste la belleza de las teorías matemáticas. Lo usual es comparar las impresiones que suscitan con las que provienen de manifestaciones artísticas que son más familiares; pero esas similitudes no alcanzan a dar sino una idea aproximada. Lo cierto del caso es que se trata de una emoción estética peculiar, cuya verdadera naturaleza únicamente puede ser percibida por la experiencia personal. El valor estético de una teoría matemática no tiene su origen ciertamente en la forma de su expresión verbal, por lo menos en el sentido en que ordinariamente se entiende la belleza del lenguaje. Se origina más bien en los objetos descritos o sugeridos, en sus sorprendentes y complejas propiedades, en las admirables relaciones que vinculan de pronto, de manera misteriosa e imprevista, casi milagrosa, a objetos, ideas y aún enteras teorías que parecen no tener parentezco alguno. Se pone así de manifiesto un ordenamiento supremo que, en ocasiones, sobrecoge de admiración, invita a la contemplación y a la búsqueda de nuevas perspectivas secretas; y aún, en algunos casos provoca reacciones de fervor casi religioso. Todo eso sin contar el hecho, no menos sorprendente, de que, en muchos aspectos, la naturaleza se comporta como si estuviera regida por leyes que sólo alcanzamos a atisbar mediante las ideas y los métodos que las matemáticas ponen a nuestro alcance. Se agrega de esta manera al sentimiento estético una impresión de armonía y coherencia que sugiere, que transparenta, la presencia de factores de fuerza y de grandeza casi sobrehumanas.

La expresión verbal puede o no ser eficaz para poner en evidencia todas esas impresiones, para destacar los más hermosos detalles y la belleza del conjunto. Para lograrlo no basta solamente el profundo conocimiento del asunto; es necesario, además, el empleo adecuado de los medios de expresión, es decir del lenguaje. Es verdad que los conceptos y las teorías matemáticas poseen una belleza intrínseca; pero no está en manos de todos descubrirla y ponerla en evidencia. La intuición de esa belleza constituye uno de los instrumentos más eficaces para encontrar nuevos y ricos hallazgos. Los más grandes matemáticos, es decir los grandes descubridores, son también, seguramente, los más sensibles a ella y los mejores dotados para describirla de la manera más elegante, que es la que

conduce a resultados de la mayor profundidad mediante los razonamientos más concisos, penetrantes y originales, haciendo uso del menor número de recursos. Weierstrass, uno de los más célebres matemáticos del siglo pasado, fundador de una poderosa corriente de pensamiento que ha influido de manera definitiva en la matemática de nuestros días, ha expresado esa idea cuando dijo que "un matemático que no tenga también algo de poeta jamás será un completo matemático".

Salvo declaraciones y comentarios más o menos retóricos y líricos o comparaciones que son siempre insuficientes, poco o nada puede decirse que explique con exactitud en qué consiste toda esa maravilla; nada que no requiera entrar previamente en el santuario, previo el pago de un cuantioso tributo de esfuerzo intelectual, de imaginación y de abstracción. El sentimiento estético que despiertan las matemáticas es, sin embargo, un hecho universalmente aceptado, que se manifiesta con apariencias semejantes a las que son bien evidentes y conocidas en las artes clásicas. De aquí, que consideren algunos que la matemática es también un arte.

Cabe mencionar, por lo menos, un intento serio de tratar a las matemáticas como el objeto de un arte -el arte matemático- y por consiguiente como el tema de una estética matemática-. François Le Lionnais (1) ha reconocido en las matemáticas dos grandes tendencias, dos corrientes estéticas: la clásica y la romántica. Lo característico de la primera es la elegante sobriedad; en la segunda, es la complacencia en los efectos cautivantes, que tratan de llegar al paroxismo. Se dice que una proposición matemática posee una belleza clásica cuando nos impresiona sea por su simplicidad, sea por su complejidad perfectamente dominada; o bien, por que une a ambas impresiones en una construcción armoniosamente lograda. Le Lionnais asocia con estos conceptos la rígida simplicidad del orden dórico y la deliciosa esbeltez del orden jónico. El clacisismo ha sido celebrado por Edgar Quinet en estos términos: "Me ha impresionado el arte con que los matemáticos alejan, rechazan, eliminan poco a poco todo lo superfluo, para expresar lo absoluto con el menor número posible de términos, conservando siempre en el arreglo de esos términos una selección, un paralelismo, una simetría que parecen ser la elegancia y la belleza visibles de una idea eterna". Las proposiciones cuya belleza puede llamarse romántica despiertan, por el contrario, impresiones violentas que se deben a su apariencia imprevista y, a veces, extravagante. Pierre Boutroux ha expresado su admiración por la actitud romántica con las siguientes frases: "Lo que nos admira ante todo, cuando comparamos la matemática de nuestro tiempo con la de épocas anteriores, es la extraordinaria diversidad y el aspecto imprevisto de las vías y de los desvíos en que esta ciencia ha incursionado; es el desorden aparente con que se ejecuta sus marchas y contramarchas; son sus continuadas maniobras y cambios de frente".

No sabría avanzar más en el pensamiento de Le Lionnais sin redundar en analogías y metáforas, o bien sin tener que referirme a ejemplos concretos para ilustrar esas dos grandes tendencias, lo cual está lejos de mi intención. Me limitaré pues con lo dicho hasta ahora acerca de ese punto.

Y para terminar con estas breves consideraciones respecto de la belleza en las matemáticas citaré a Carl Friedrich Weizäcker, el ilustre físico y filósofo, presidente del Instituto Max Planck para la investigación de las condiciones vitales en el mundo científico, quien, en un reciente artículo (2) sobre "Lo bello", resume así su pensamiento: "La belleza es una forma de la verdad". Es posible que en esta breve aseveración pueda hallarse una razón profunda de la belleza que unánimemente es reconocida en las ideas y en las teorías matemáticas.

El vocabulario que requieren las matemáticas es muy extenso. No obstante, los matemáticos rehusan, en general, emplear voces nuevas. De ordinario emplean palabras de uso en el lenguaje corriente, con la circunstancia peculiar de que, aferrados tenazmente a las palabras de su viejo léxico, se limitan a modificar convencionalmente su significación según sea necesario. Ocurre con frecuencia, por ese motivo, que una misma palabra tiene, para autores distintos, significados diferentes, lo cual demanda muchas veces un cuidado extremo en la interpretación de los textos. No se trata simplemente de capricho o de inercia, sino de una necesidad impuesta por la naturaleza de esta ciencia, en la cual la modificación del significado de una palabra puede determinar una enorme economía de esfuerzo, y en muchos casos, hace posible extender de manera sustancial la generalidad y la profundidad de los resultados. Ocurre en ciertas ocasiones que, luego de un proceso de selección entre las diversas significaciones que se ha atribuído a una palabra, se llega finalmente a un concenso y se consagra el uso de una acepción. "De vez en cuando, dicen Kasner y

Newman (3), hay limpieza en casa de las matemáticas. Algunos viejos nombres son descartados, otros son desempolvados y acicalados; nuevas teorías, nuevas adiciones al menaje reciben sitio y nombre. Con seguridad, hay tantas palabras en las matemáticas como en otros dominios científicos. En realidad hay tantas que resulta más fácil aún de lo que era antes, hablar mucho y no decir nada".

Las palabras técnicas, cuya significación puede considerarse definitivamente establecida, son, en su mayor parte, de empleo exclusivamente reservado a dominios muy especiales. Son por tanto palabras que no pueden situarse entre aquellas que han pasado "de la nomenclatura especializada al lenguaje culto general e incluso al dominio común", como las que es lícito incorporar al Diccionario de la Lengua Española. Su lugar propio es por tanto un Diccionario Matemático. Hasta donde llega mi información no existe tal diccionario en la lengua castellana. Sí los hay, en cambio, en otros idiomas (4). Las palabras con significación matemática que usamos en español son, en general, traducción o castellanización de las que se emplean en otras lenguas; y es frecuente que la versión cambie según los autores. De allí proceden otras discrepancias en el lenguaje.

Una particularidad curiosa del empleo del lenguaje en las matemáticas es el uso frecuente del llamado "abuso del lenguaje". Consiste en dar a una palabra o símbolo más de una significación simultáneamente. Desde luego este procedimiento no se emplea de manera indiscriminada. Se requieren algunas condiciones esenciales: el convenio debe ser aceptado de manera explícita; las diferentes acepciones deben guardar estrecha relación y su exacta significación debe resultar, en cada caso, del contexto, sin dar lugar a confusiones. Generalmente, la doble acepción está consagrada por un largo uso y se prefiere mantenerla por razones de simplicidad y de estética. El abuso del lenguaje reviste a veces otras formas interesantes que no me detendré ahora a describir.

En las ciencias naturales y físicas el vocabulario es considerablemente más especial que en las matemáticas. Particularmente llamativo resulta ser el caso de la química en que, para identificar racionalmente a los innumerables compuestos orgánicos, ha sido necesario idear una nomenclatura que no puede ser empleada sino en forma escrita. Nadie en su sano jucio llamaría al azúcar común, por ejemplo, con su nombre científico (5) que consta de diez silabas. Algo semejante ocurre en el caso de la biología. En matemáticas, en cambio, como ya dije, se usan palabras sencillas y de uso diario: conjunto, grupo, familia, anillo, campo, curva simple, función, forma, módulo, categoría, etc. Pero, eso sí, estas palabras reciben una significación absolutamente precisa, que no puede ser modificada en el curso de un mismo razonamiento sin conducir a resultados errados. Se ha dicho por esa razón, que la matemática es la ciencia que emplea palabras fáciles para expresar ideas difícles. Es decir justamente lo contrario de lo que podría decirse de otras ciencias, particularmente de algunas que se hallan recién en la primera fase de su formación.

El sentido preciso que el matemático atribuye a las palabras que emplea, no proviene del capricho o de la pedantería: procede de una necesidad ineludible. Sin un rigor absoluto en las definiciones sería imposible alcanzar el grado de perfección lógica exigido por el razonamiento matemático. Sin embargo, esta exigencia no debe dominar hasta el punto de convertir al lenguaje matemático en una monstruosa jerigonza. El afán lógico no debe exceder los límites del buen sentido y de un sometimiento razonable a las exigencias técnicas. La pretensión de dar al pensamiento matemático una expresión lógicamente perfecta, sin el empleo de los textos formalizados a que antes me he referido, cae prontamente en contradicción con la urgente aspiración estética que nunca abandona al matemático. De manera ciertamente exagerada, pero que ilustra bien esas ideas, John George Kemeny,(6) destacado matemático y lógico, ha mostrado con un ejemplo a qué extremo de aberración en el lenguaje podría llegar quien se empeñara en el error de sólo cuidar los aspectos técnicos y lógicos sin preocuparse de la claridad y de la estética. Da con ese fin, una definición rigurosamente exacta del concepto de función, cuyo sentido no pido a ustedes que traten de desentrañar, y que dice así: "Una función es un conjunto de conjuntos de conjuntos, tal que cada uno de sus elementos es un cojunto de dos elementos que consiste en un conjunto de un elemento y un conjunto de dos elementos, y en el que el conjunto de un elemento es un subconjunto del conjunto de dos elementos. Además, para cada objeto, el conjunto formado por él solo es, a lo más, elemento de uno de los elementos de la función". (7) Si bien este es, efectivamente, el sentido preciso que los matemáticos atribuyen a la palabra función no cabe pensar en introducir noción tan importante y tan simple mediante un lenguaje tan inapropiado, en que se ha llevado al extremo el énfasis excesivo y el innecesario rigor lógico. Por suerte, hay maneras razonables de definir la misma noción con una corrección equivalente y sin recurrir a formas tan alambicadas. Señalaré de paso que la definición que aparece en el Diccionario de la Lengua "función es una cantidad cuyo valor depende del de otra u otras cantidades variables", no coincide con la hoy aceptada en las matemáticas y podría considerarse como una descripción aproximada de lo que se llama más bien función numérica Al hacer esta observación no es mi intención, de manera alguna, sostener que esa definición debe ser modificada, porque creo que se acomoda bien a la interpretación que se da a la palabra función en el uso corriente. Volviendo a mi tema, insistiré solamente en el hecho de que, ordinariamente, el matemático prefiere sacrificar la inflexibilidad de la forma estrictamente lógica a la sencillez y a las conveniencias estéticas; esto, bien entendido, siempre que, por último, no se afecte en forma alguna a las exigencias del más severo rigor.

La mente del hombre parece ser impulsada de manera irresistible a pensar metemáticamente y es estimulada por las razones estéticas a que me he estado refiriendo. Sin embargo, ese estímulo, con ser poderoso, no explica satisfactoriamente el esfuerzo ininterrumpido realizado por el hombre para ampliar el campo del conocimiento matemático. Para hallarle justificación es necesario recurrir al análisis del papel que el pensamiento matemático ha desempeñado en la historia de la cultura, papel que no puede pasar desapercibido al observador más superficial. Baste recordar el lugar preferente que, por muchos siglos, han ocupado las matemáticas en la educación de los hombres y su creciente participación en el desarrollo de los más diversos dominios del saber. No pretendo afirmar que las ideas matemáticas hayan ejercido una acción decisiva en el desarrollo cultural de la humanidad, lo que ciertamente sería exagerado. A este respecto Whitehead (8) ha emitido un juicio que me parece justo: "No iría tan lejos -afirma Whitehead- como para decir que construir una historia del pensamiento, sin un estudio profundo de las ideas matemáticas en las sucesivas épocas, sería como omitir a Hamlet de la tragedia que lleva su nombre. Pero sería ciertamente semejante a suprimir la parte de Ofelia. Este símil es singularmente exacto porque Ofelia es esencial para la tragedia, es encantadora y un poco loca. Debemos aceptar que el empeño de las matemáticas es una divina locura del espíritu humano y un refugio contra la urgencia apremiante de los acontecimientos casuales".

Sin detenerme a examinar con más detalle por qué vías el pensamiento matemático ha impreso su huella en la evolución de la cultura y ha modificado de manera profunda nuestra concepción del universo y nuestra interpretación de los fenómenos naturales, quisiera decir unas pocas palabras acerca de los móviles que, desde remotos tiempos, han inducido al hombre a razonar matemáticamente. Fueron, al principio de la historia, intereses muy prácticos: la medida de las tierras y de las pertenencias; y luego la observación del cielo y del movimiento de los astros, en función de la medida del tiempo, de las necesidades agrícolas y de las predicciones astrológicas. Los descubrimientos matemáticos de los tiempos antiguos, y aún de épocas no tan remotas, fueron tan sorprendentes y parecieron tan maravillosos, que se les atribuyó una significación religiosa y amística que ha perdurado casi hasta nuestros días. Expresión de ese sentimiento ha sido, para no citar sino un ejemplo típico, la forma en que han sido considerados los llamados números imaginarios. Sospechada su existencia en tiempos antiguos, fueron empleados durante el Renacimiento de manera puramente formal, mucho antes de que se llegara a descubrir su verdadera significación. Fué posible reconocer desde entonces, a pesar de que los motivos permanecían desconocidos, que su empleo introdujo un orden sorprendente en donde había hasta entonces un aparente caos. Sin que se hubiera elaborado para ellos una teoría racional, sin embargo su uso permitió acumular un conjunto de resultados que llenaban de admiración por su variedad y sencillez. Muy lentamente comenzó a vislumbrarse la posibilidad de construir una teoría enteramente satisfactoria y totalmente desprovista de misterios. Por fín, sólo se alcanzó la meta deseada a principios del siglo pasado, al comienzo de la época de oro de las matemáticas; y debió ese gran triunfo a Carl Friedrich Gauss (1777-1855), uno de los más grandes genios matemáticos de todos los tiempos. Al definir de manera rigurosa a los números imaginarios y establecer en consecuencia sus propiedades, despejó todas las dudas, explicó todas las conquistas logradas hasta entonces con recursos exclusivamente algorítmicos y fundó, sobre firmes bases un nuevo gran capítulo de la matemática: la teoría de las funciones de variable compleja. A pesar de esa larga historia y de sus sensacional desenlace, existían, avanzado el presente siglo, no pocos textos matemáticos cuyos autores desconocían la naturaleza racional de los números imaginarios y sostenían aún una vaga concepción esotérica. Ocurría esto cuando desde hacía ya un siglo los matemáticos habían reconocido la naturaleza auténticamente numérica de los números imaginarios, dentro de una concepción perfectamente rigurosa de la noción de número.

El caso que he mencionado es uno, entre muchos, en que la tendencia a interpretar de una manera no racional o mediante consideraciones metafísicas, los descubrimientos matemáticos, ha obstaculizado la difusión de los conocimientos científicos, que solo han llegado a imponerse con extraordinaria lentitud y venciendo una enorme resistencia.

En forma diversa, pero no menos sorprendente, ha ocurrido algo, hasta cierto punto semejante, con otra cuestión célebre: se trata del famoso problema de la cuadratura del círculo, cuyo enunciado y los esfuerzos por resolverlo, se remontan a la antigüedad clásica. Consiste, según es bien sabido, en buscar un procedimiento mediante el cual, dado un círculo, pueda trazarse un cuadrado cuya área sea *exactamente* igual a la del círculo dado; pero empleando, para llevar a cabo la construcción, *exclusivamente,* una regla y un compás. Este problema quedó "resuelto" en forma definitiva en el año 1882, cuando Fernando Lindemann probó, en forma que no deja lugar a dudas, que el problema es irresoluble, es decir que ese procedimiento no existe y por tanto, que la construcción de un cuadrado que cumpla las condiciones del problema, es imposible mediante el uso de la regla y el compás. No obstante, ha habido desde entonces, y hay aún, quienes se empeñan todavía en lograr obtener el procedimiento de construcción y algunos que creen firmemente haberlo hallado. Se trata, ordinariamente, de personas que no han captado el verdadero enunciado del problema o a cuya noticia no ha llegado la demostración de Lindemann. El obstáculo mayor parecería residir aquí en la dificultad para entender que pueda demostrarse rigurosamente que un problema no tenga solución.

El problema de la cuadratura del círculo trae a la memoria el hecho, digno de mención, de que la matemática, más quizás que otros dominios de la ciencia, despierta ocasionalmente, en los profanos, sentimientos opuestos. En unos ejerce una irresistible atracción, que algunas veces los induce a dedicar un considerable e inútil esfuerzo por lograr metas inalcanzables; y en otros, despierta desconfianza y aún repulsión. Muy lejos de los sabios comentarios de Berkeley o de la ingeniosa sátira de Swift, se ha expresado alguna vez el oscuro temor de que las incomprensibles elucubraciones de los matemáticos puedan ocultar alguna intención nefasta o abominable; o bien se ha hecho mofa de la necesidad lógica de las proposiciones matemáticas. Un miembro del Comité de Instrucción Pública durante la Revolución Francesa, el convencional Louis Sebastien Mercier, reprochaba la insistencia incansable con que algunos destacados matemáticos de la época se empeñaban en impulsar la adopción del sistema métrico decimal en reemplazo del caótico sistema de pesas y medidas hasta entonces imperante. "Creo en mi alma y en mi conciencia, decía, que todo ello es charlatanería, y que lo rídiculo de esta enorme y costosa operación será confesado y reconocido"; y agregaba: "Temo que los matemáticos, que aún no han trastornado el mundo, lleguen por fín a trastornarlo". (9).

Pero la desconfianza en los matemáticos y el desconocimiento de la validez de los resultados matemáticos ha llegado a extremos pintorescos, casi grotescos. Cuenta Clifton Fadiman (10) que en 1899 el Cuerpo Legislativo del Estado de Indiana estuvo a punto de aprobar una ley por la cual debía enseñarse en todas las escuelas del estado que el número *pi* es igual a 4. Sin duda no había llegado a conocimiento de esos legisladores la definición de la matemática que en 1870 había dado el norteamericano

Benjamín Peirce: "La matemática es la ciencia que llega a conclusiones necesarias". Y tocamos aquí otro tema que aporta nuevos motivos de sorpresas cuando se medita sobre la significación cultural de las matemáticas. Es un hecho que no existe una definición de la matemática que sea generalmente aceptada sin reservas. Parecería, además, que no hay, de parte de los matemáticos, una seria inquietud por llegar a una definición que sea enteramente satisfactoria; y que preferirían, más bien, dejar siempre abierta la cuestión; ya que la historia demuestra que su campo de interés se amplía más y más, al parecer sin fin. En cambio, se ha dado de ella un gran número de breves descripciones que, si bien son técnicamente insostenibles, tienen, algunas de ellas, el mérito de impresionar vivamente la imaginación. Algunas son paradójicas o discretamente humorísticas. Las hay anónimas como aquella que la define como la "ciencia del sentido común". Otras se deben a matemáticos ilustres. Bertrand Russell ha dicho que "la matemática es una ciencia en que no se sabe jamás de qué se habla ni si es verdadero lo que se dice". Es claro que su intención era poner en evidencia el rol que cumplen en las matemáticas las definiciones en apariencia arbitrarias. Dentro de este mismo espíritu, Peirce, profesor de la Universidad de Harvard al que ya me he referido, después de explicar un célebre hallazgo de Moivre, terminó declarando dramáticamente a sus oyentes: "Caballeros, esto es cierto con seguridad. Es absolutamente paradógico, no podemos entenderlo, y no sabemos qué significa; pero lo hemos demostrado y por tanto sabemos que es cierto".

A la citada afirmación de Russell, Emile Borel, un matemático no menos autorizado, ha opuesto otra: "La Matemática es la ciencia en que se sabe siempre de qué se habla y en que se está siempre seguro de que lo que se dice es verdad".

Para Henri Poincaré es "el arte de dar el mismo nombre a cosas diferentes".

Podrían citarse muchos otros comentarios penetrantes que, sin constituir una definición, arrojan luz sobre la manera cómo los matemáticos entienden la matemática. Solo mencionaré un ejemplo más. Georg Cantor, el célebre creador de la teoría de los conjuntos y de la noción de número transfinito, ha expresado una idea que ha sido objeto de muchas interpretaciones y tergiversaciones: "La matemática -ha dicho- es, con preferencia, libre en su desarrollo y está sujeta únicamente a la consideración obvia de que sus conceptos deben estar libres de contradicciones en sí mismos y relacionados precisa y sistemáticamente, mediante definiciones, con nociones previamente existentes y establecidas". Esta frase ha sido simplificada, alguna vez, hasta el punto de resumirla diciendo: "La matemática, en esencia, es libertad".

Jean Kuntzmann, (11) en época reciente, la define como "la ciencia que desarrolla, a partir de nociones de base, teorías que no recurren sino al razonamiento lógico". Estamos ya aquí cerca de una verdadera definición formal. Por último, Bourbaki, al comenzar la introducción al Capítulo I de los Elementos de Matemática, obra que ha llegado a tener tanta influencia en la matemática de nuestro tiempo, sin dar una definición propiamente dicha, ha expresado con precisión, de la siguiente manera, lo que podemos considerar como esencial en las matemáticas en el sentido en que hoy las entedemos: "desde los griegos, quien dice matemáticas dice demostración; algunos llegan a dudar de que fuera de las matemáticas se puedan encontrar demostraciones en el sentido preciso y riguroso que esa palabra ha recibido de los griegos".

Sin alargar excesivamente este discurso o sin entrar en materias que me he propuesto no tratar, no podría agregar mucho más a lo que ya he dicho en mi intento de mostrar algunos aspectos del mundo intelectual que son las matemáticas de nuestros días. Ese mundo, en general, poco conocido y cuya exploración, sin embargo, es una exigencia invencible del espíritu del hombre, tan fuerte en él como todo lo que promete satisfacer nuestras insaciables ansias de verdad y de belleza, y lo que alienta la esperanza de poder sobreponernos a nuestras limitaciones para vislumbrar, siquiera sea fugazmente, las cimas anheladas donde moran los espíritus puros en eterna y perfecta felicidad.

NOTAS

(1) *François Le Lionnais*, La beauté en Mathématiques. (Les grands courants de la penssé mathématique, Cahiers du Sud (1958), pág. 438).

(2) Universitas, vol. XIII, (1976), No. 4, pág. 301.

(3) *Kasner y Newman*, Mathematics and imagination, Simon and Schuster, (1940), pág. 4.

(4) Pueden citarse los siguientes:
Naas, J.; Schmid, H.L.: Mathematisches Wörterbuch, I, II, Stuttgart, 1962.
James, G.; James R.C.: Mathematics Dictionary, New York Toronto-London, 1959.
Behnke, H.; Remmert, R.; Steiner, H.G.; Tietz, H.: Mathematik I. Das Fischer - Lexicon, Frankfurt a.M. 1964.
Karush, W.: The Crecent Dictionary of Mathematics, New York-London, 1962.
Meschkowski, H.: Mathematisches Begriffswörterbuch, Bibliographisches Institut Mannheim, 1965.

(5) La sacarina que es la sustancia que constituye al azúcar común se denomina ácido O-anhidrosulfaminobenzoico.

(6) Citado por *J. Fang*, Bourbaki, Paideia Press, 1970, pág. 129.

(7) Si los objetos se designan a,b,c, etc. los elementos de la función tienen formas tales como $\{\{a,\} a, b\}\}$,en que se encierra entre llaves a los elementos de un conjunto

(8) *Alfred North Whitehead*, Science and the Modern World, cap. II.

(9) Citado por *Joseph Fayet*, La Révolution française et la Science. Librairie Marcel Riviere et Cie (1960) pág. 466.

(10) Fantasia Mathematica, Simon and Schuster (1958) pág. XVIII.

(11) *Jean Kuntzmann,* Oú vont les mathematiques? Hermann, (1967) pág. 13.