DOCUMENTO DE TRABAJO N° 349

MICROECONOMÍA: APLICACIONES DE LA TEORÍA DEL PRODUCTOR

Cecilia Garavito

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

DOCUMENTO DE TRABAJO N° 349

MICROECONOMÍA: APLICACIONES DE LA TEORÍA DEL PRODUCTOR

Cecilia Garavito

Enero, 2013

DEPARTAMENTO
DE **ECONOMÍA**

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

DOCUMENTO DE TRABAJO 349
http://www.pucp.edu.pe/departamento/economia/images/documentos/DDD349.pdf

Av. Universitaria 1801, Lima 32 – Perú.
Teléfono: (51-1) 626-2000 anexos 4950 - 4951
Fax: (51-1) 626-2874
econo@pucp.edu.pe
www.pucp.edu.pe/departamento/economia/

Encargado de la Serie: Luis García Núñez
Departamento de Economía – Pontificia Universidad Católica del Perú,
lgarcia@pucp.edu.pe

Cecilia Garavito

Microeconomía: Aplicaciones de la teoría del productor
Lima, Departamento de Economía, 2013
(Documento de Trabajo 349)

PALABRAS CLAVE: Microeoconomía, teoría, modelos de la unidad doméstica, producción intertemporal, inversión.

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú Nº 2013-02478.
ISSN 2079-8466 (Impresa)
ISSN 2079-8474 (En línea)

Impreso en Cartolán Editora y Comercializadora E.I.R.L.
Pasaje Atlántida 113, Lima 1, Perú.
Tiraje: 100 ejemplares

MICROECONOMÍA: APLICACIONES DE LA TEORÍA DEL PRODUCTOR

Cecilia Garavito

RESUMEN

Este es el cuarto capítulo de un libro sobre Microeconomía de pre grado, que además de presentar los temas estudiados a nivel intuitivo, gráfico y matemático, incorpora los elementos institucionales y de contexto de un país como el Perú, así como las relaciones de género allí donde es pertinente. En este capítulo presentamos en primer lugar un modelo de economía doméstica, donde la familia produce y consume un bien, y asigna su fuerza laboral entre el trabajo en el hogar, el trabajo en el mercado y el ocio. En segundo lugar presentamos un modelo de producción inter-temporal, donde analizamos las decisiones de producción y de inversión de una empresa competitiva.

Código JEL: D01, D13, D92

Palabras clave: Microeconomía, teoría, modelos de la unidad doméstica, producción intertemporal, inversión.

ABSTRACT

This is the fourth chapter of a book about pre graduate Microeconomics, which not only presents the themes to study at an intuitive, graphic and mathematical level, but also introduces the institutional and contextual elements of a country like Peru, as much as the gender relationships where it is pertinent. In this chapter we present in the first place a consumer and producer model, where the family produce and demand a good, and allocate its labor force between domestic work, market work and leisure. In second place we present an inter-temporal production model, where we analyze the production and investment decisions made by a competitive firm.

JEL Code: D01, D13, D92

Keywords: Microeconomics, theory, household economics, intertemporal production, investment.

MICROECONOMÍA: APLICACIONES DE LA TEORÍA DEL PRODUCTOR

Cecilia Garavito[1]

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo vamos a analizar algunas aplicaciones de la teoría de la empresa. Comenzaremos por una presentación del modelo de unidad doméstica, para lo cual nos basaremos en los trabajos de Pranab y Urdry (1999) y de Sadoulet y de Janvry (1995). Los modelos de unidad doméstica analizan el caso en que los agentes económicos son consumidores y productores al mismo tiempo, lo cual nos permite entender como funcionan tanto la economía campesina como el sector de pequeñas unidades de producción urbano. En segundo lugar presentaremos el modelo de producción inter-temporal, mediante el cual analizaremos las decisiones de producción e inversión de una empresa que funciona al menos durante dos periodos.

2. MODELOS DE LA UNIDAD DOMÉSTICA

Las decisiones de consumo y de producción en la economía capitalista son analizadas por medio de supuestos sobre el comportamiento de los agentes económicos. Así, las decisiones de consumo son llevadas a cabo por individuos, los cuales buscan maximizar una función de utilidad sujetos a su restricción de presupuesto. A partir de estas decisiones, obtenemos sus curvas de demanda individuales; extensiones del modelo básico nos permiten derivar asimismo las curvas de oferta de trabajo. En el caso de la decisión de producción, esta es llevada a cabo por empresarios que buscan maximizar sus beneficios, tomando en cuenta la tecnología, el precio del bien vendido y los costos de los factores. A partir de estas decisiones, obtenemos la curva de oferta de bienes y las curvas de demanda de los factores de producción.

---

[1] Profesora Principal del Departamento de Economía de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Sin embargo, existen individuos que son consumidores y productores al mismo tiempo, y que trabajan en un pequeño negocio familiar, usualmente con mano de obra provista por los miembros de la familia. Así, la familia produce un bien, parte del cual consume, vendiendo el resto en el mercado. Esto no solamente cambia la recta de presupuesto, tal como vimos en las extensiones de la teoría del consumidor, sino que la hace endógena, ya que depende de las decisiones de producción y consumo tomadas por la familia. Este tipo de modelos se ha analizado extensamente para el caso de unidades familiares campesinas, si bien es también útil para el análisis de unidades de autoempleo urbanas; ambos tipos de unidades económicas emplean una proporción importante de la fuerza laboral de los países en desarrollo.

Ejemplo 4.1: Decisiones de producción y consumo en economías campesinas

Siguiendo con el Ejemplo 2.1, sobre producción y consumo en el sector agrícola, Figueroa (1989) señalaba que el campesino producía bienes (agrícolas y pecuarios), parte de los cuales auto consumía, y que además compraba bienes en el mercado. La producción de los bienes agropecuarios dependía de la tierra (factor primario), de las herramientas (capital fijo), de las semillas (capital circulante) y de la fuerza laboral (factor primario). En las economías campesinas la mano de obra era predominantemente familiar, salvo en los periodos de cosecha, donde se practica el Ayni (intercambio de trabajo por trabajo), que incluye el "derecho" (comida, coca, aguardiente y cigarrillos); y la Minka (intercambio de trabajo por un salario (es especie o monetario) que también incluye el derecho. De acuerdo a Escobal y Ponce (2012) el porcentaje de campesinos que practican el Ayni depende de su cercanía al mercado y varía entre 20% y 90%, mientras que el porcentaje de mano de obra contratada varía entre un 24% y un 53%, respectivamente.

2.1 El problema del Consumidor – Productor

Partimos entonces de una familia que produce y consume un bien (y_a), compra otro bien en el mercado (y_m), y demanda parte de su dotación de tiempo como horas libres (h). Vamos a suponer que las preferencias de todos los miembros de la familia son adecuadamente representadas por una función de utilidad familiar[2]:

[2] Son conocidas las críticas de Arrow (1966) a las funciones de utilidad familiar, las cuales llevaron a que Becker desarrolle el modelo de Jefe Dictador benevolente (1993) y el Teorema del "Rotten Kid".

$$U = U(y_a, y_m, h) \qquad (i)$$

Para producir el bien (q_a) la familia necesita horas de trabajo (l_a) y un insumo de producción que compra en el mercado en el mercado (x_a). En este punto es necesario señalar que el trabajo que la familia necesita para producir el bien no necesariamente es igual a la cantidad que la familia está dispuesta a asignar al trabajo en general (l^f). La función de producción familiar será:

$$q_a = f(l_a, x_a) \qquad (ii)$$

Si asumimos que la familia busca maximizar su función de utilidad, el problema a resolver será el siguiente:

$$\begin{aligned} &Max \quad U = U(y_a, y_m, h) \\ &s.a. \quad wT + \Pi = P_a y_a + P_m y_m + wh \\ &\qquad\quad q_a = f(l_a, x_a) \\ &\qquad\quad \Pi = P_a q_a - wl_a - P_x x_a - CF \\ &\qquad\quad T = h + l_a + l_m = h + l^f \end{aligned}$$

Donde l_m puede ser mayor, igual o menor que cero. Si $l_m > 0$, entonces $l_a < l^f$ y la familia ofrece trabajo al mercado. Si $l_m < 0$, entonces $l_a > l^f$ y la familia demanda trabajo del mercado. Los costos fijos del proceso productivo son iguales a CF ; P_a es el precio del bien que la familia produce; P_m el precio del bien de consumo que compra en el mercado; P_x el precio del insumo de producción; y w la tasa de salarios. Construyendo el Lagrangiano:

$$\Lambda = U(y_a, y_m, h) + \lambda\{wT + [P_a f(l_a, x_a) - wl_a - P_x x_a - CF] - P_a y_a - P_m y_m - wh\}$$

Las condiciones de primer orden serán:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial y_a} = \frac{\partial U}{\partial y_a} - \lambda P_a = 0 \qquad (iii)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial y_m} = \frac{\partial U}{\partial y_m} - \lambda P_m = 0 \qquad (iv)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial h} = \frac{\partial U}{\partial h} - \lambda w = 0 \qquad (v)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial l_a} = \lambda\left(P_a \frac{\partial f}{\partial l_a} - w \right) = 0 \qquad (vi)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_a} = \lambda\left(P_a \frac{\partial f}{\partial x_a} - P_x \right) = 0 \qquad (vii)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = wT + [P_a f(l_a, x_a) - wl_a - P_x x_a - CF] - P_a y_a - P_m y_m - wh = 0 \qquad (viii)$$

Vemos que las ecuaciones (vi) y (vii) se pueden resolver en forma independiente del resto de ecuaciones. Entonces, trabajando con el subsistema $(vi - vii)$, y dado que λ no puede ser cero para que la restricción de presupuesto sea relevante, obtenemos:

$$P_a \frac{\partial f}{\partial l_a} = w \qquad (ix)$$

$$P_a \frac{\partial f}{\partial x_a} = P_x \qquad (x)$$

Combinando ambas ecuaciones, obtenemos las curvas de demanda de trabajo y del insumo de producción, así como la producción total del bien:

$$l_a{}^d = l_a{}^d(P_a, P_x, w) \qquad (xi)$$

$$x_a{}^d = x_a{}^d(P_a, P_x, w) \qquad (xii)$$

$$q_a = f[l_a{}^d(P_a, P_x, w), x_a{}^d(P_a, P_x, w)] = q_a(P_a, P_x, w) \qquad (xiii)$$

Como podemos ver en las expresiones (xi) y (xii), dichas demandas no dependen de las cantidades consumidas por la unidad familiar. Trabajando ahora con las ecuaciones $(iii-v)$:

$$\frac{\partial U}{\partial y_a} = \lambda P_a \qquad (xiv)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y_m} = \lambda P_m \qquad (xv)$$

$$\frac{\partial U}{\partial h} = \lambda w \qquad (xvi)$$

Combinando estas ecuaciones con las expresiones $(viii)$, (xi) y (xii), obtenemos las curvas de demanda de los dos bienes y de demanda de horas libres:

$$y_a{}^d = y_a{}^d(P_a, P_m, P_x, w) \qquad (xvii)$$

$$y_m{}^d = y_m{}^d(P_a, P_m, P_x, w) \qquad (xviii)$$

$$h^d = h^d(P_a, P_m, P_x, w) \qquad (xix)$$

Podemos ahora obtener la curva de oferta del bien producido al mercado $(y_a{}^s)$ a partir de la diferencia entre la cantidad producida y la demanda de autoconsumo del bien:

$$y_a{}^s = q_a - y_a{}^d = y_a{}^s(P_a, P_m, P_x, w) \qquad (xx)$$

Finalmente calculamos l_m a partir de la restricción de tiempo:

$$l_m = T - [l_a{}^d(P_a, P_x, w) + h^d(P_a, P_m, w)] = l_m(P_a, P_m, P_x, w) \qquad (xxi)$$

Donde una l_m positiva implica que luego de asignar mano de obra al negocio familiar y al tiempo libre, queda un excedente de tiempo que la familia ofrece al mercado; mientras que una l_m negativa implica que el trabajo asignado por la familia al negocio familiar es insuficiente y por lo tanto ésta debe demandar trabajo del mercado; finalmente, si l_m es igual a cero, la unidad familiar no participa en el mercado de trabajo.

Ejemplo 4.2: Consumo y producción en el hogar, ejemplo numérico

Supongamos que existe una familia urbana que se auto-emplea en un negocio familiar. Sea la función de utilidad familiar siguiente, donde la familia produce un bien que auto-consume y vende en el mercado, consume un bien que compra directamente y asigna parte del tiempo total de la familia al tiempo libre:

$$U = y_a^{1/2} + y_m + h^{1/2}$$

Para producir el primer bien, esta familia emplea parte de su fuerza de trabajo y una materia prima que compra en el mercado. Sea la siguiente función de producción:

$$q_a = l_a^{2/5} x_a^{1/5}$$

Entonces, primero obtenemos las curvas de demanda de trabajo para el negocio familiar y de la materia prima empleada:

$$l_a^{\ d} = \frac{4}{w^2 P_x^{1/2}} \left(\frac{P_a}{5} \right)^{5/2}$$

$$x_a^{\ d} = \frac{2}{w P_x^{3/2}} \left(\frac{P_a}{5} \right)^{5/2}$$

A partir de estas demandas podemos obtener el nivel de producción:

$$q_a = \frac{2}{w^{3/5} P_x^{4/5}} \left(\frac{P_a}{5} \right)^{3/2}$$

Si reemplazamos las ecuaciones de demanda halladas en la recta de presupuesto, y asumimos por comodidad que los costos fijos son nulos, a partir de las condiciones de primer orden restantes obtenemos las curvas de demanda de los dos bienes y de las horas libres:

$$y_a{}^d = \frac{P_m{}^2}{4P_a{}^2}$$

$$y_m{}^d = \frac{wT}{P_m} + \frac{4}{3wP_x^{0.5}P_m}\left(\frac{P_a}{5}\right)^{5/2} - \frac{P_m(w+P_a)}{4P_a w}$$

$$h^d = \frac{P_m{}^2}{4w^2}$$

Si reemplazamos las demandas de trabajo y tiempo libre en la función de producción, obtendremos el producto total:

$$q_a = \frac{2}{w^{3/5}P_x^{4/5}}\left(\frac{P_a}{5}\right)^{3/2}$$

Si restamos la demanda de autoconsumo del bien de la producción total, obtendremos la curva de oferta del bien al mercado:

$$y_a{}^s = \frac{2}{w^{3/5}P_x^{4/5}}\left(\frac{P_a}{5}\right)^{3/2} - \frac{P_m{}^2}{4P_a{}^2}$$

Finalmente, si sumamos la demanda de trabajo para el negocio familiar y la demanda de tiempo libre, y restamos la suma del tiempo total de la familia obtenemos la oferta de trabajo al mercado (si la resta es positiva), o la demanda de trabajo del mercado (si la resta es negativa):

$$l_m = wT - \frac{4}{3w^2P_x^{0-5}}\left(\frac{P_a}{5}\right)^{5/2} - \frac{P_m{}^2}{4w^2}$$

<u>Ejemplo 4.3</u>: Autoconsumo y mercado en las economías campesinas

A lo largo de los años la interacción de las economías campesinas con el mercado puede aumentar o disminuir, dependiendo tanto de condiciones internas como externas. Si bien la producción para el mercado o la migración por causas laborales son estrategias para asegurar un ingreso suficiente para la familia, las condiciones iniciales, la evolución de la economía y la intervención del Estado pueden influir en estos desarrollos. Así, entre los años 1978 y 1979 el autoconsumo variaba entre 45 y 70% en la sierra sur (Figueroa, 1989; Escobal y Ponce, 2012), mientras que en las zonas rurales más cercanas a la costa era de alrededor de 20%, habiéndose reducido al 10% para el año 2009 (Escobal y Ponce, 2012).

2.2 Modelos Separables

Existe la posibilidad de resolver el problema anterior de otra forma, si las decisiones de consumo y de producción del hogar son separables. De acuerdo a Bardhan y Urdry (1999) las decisiones de consumo y producción son independientes cuando los mercados son completos. Decimos que un mercado es completo cuando no hay incertidumbre, y cuando existen precios para todos los bienes y servicios transados entre las unidades económicas[3].

Entonces, de acuerdo a la propiedad de separabilidad de Bardhan y Urdry, el modelo se puede resolver en forma recursiva:

- En primer lugar, maximizamos los beneficios y obtenemos la función de beneficios máximos.
- En reemplazando la función de beneficios máximos en la restricción de presupuesto y maximizamos la utilidad.

Ejemplo 4.4: Modelo separable, ejemplo numérico

Con las mismas funciones del Ejemplo 4.2, maximizamos la función de beneficios, asumiendo que los costos fijos son iguales a cero:

$$Max \quad \Pi = P_a\left(l_a^{2/5} x_a^{1/5}\right) - \left(wl_a + P_x x_a\right)$$

Obtenemos las curvas de demanda de trabajo para el negocio familiar y de la materia prima empleada (Ver Ejemplo 4.2), y a partir de estas expresiones obtenemos la función de beneficios máximos:

$$\Pi^* = \frac{4}{wP_x^{0.5}}\left(\frac{P_a}{5}\right)^{5/2}$$

[3] En el caso del tiempo libre, si bien éste no se transa en el mercado, tiene un costo de oportunidad que es igual a la tasa salarial que se deja de ganar.

Si insertamos la función de beneficios máximos en la recta de presupuesto, el problema a maximizar será:

$$Max \quad U = y_a^{1/2} + y_m + h^{1/2}$$

$$s.a. \quad wT + \frac{4}{wP_x^{0.5}}\left(\frac{P_a}{5}\right)^{5/2} = P_a y_a + P_m y_m + wh$$

$$T = l_a + h + l_m$$

Resolviendo esta segunda maximización, derivamos las curvas de demanda de los dos bienes y de tiempo libre, la curva de oferta al mercado del bien producido, y la curva de oferta o demanda de trabajo al mercado.

Vamos a simplificar el modelo presentado con el fin de hacer un análisis grafico. Si asumimos que $P_a = 1$, que no se consume ningún bien de mercado, y que solamente se necesita trabajo para producir, el problema a resolver será el siguiente:

$$Max \quad U = U(y_a, h)$$

$$s.a. \quad wT + \Pi = y_a + wh$$

$$q_a = f(l_a)$$

$$\Pi = q_a - wl_a - CF$$

$$T = l_a + h + l_m$$

Dado que el modelo es separable, maximizamos primero los beneficios y obtenemos la condición de maximización de beneficios, que a la vez es la demanda de trabajo para el negocio familiar:

$$\frac{\partial f(l_a)}{\partial l_a} = w \qquad (xxii)$$

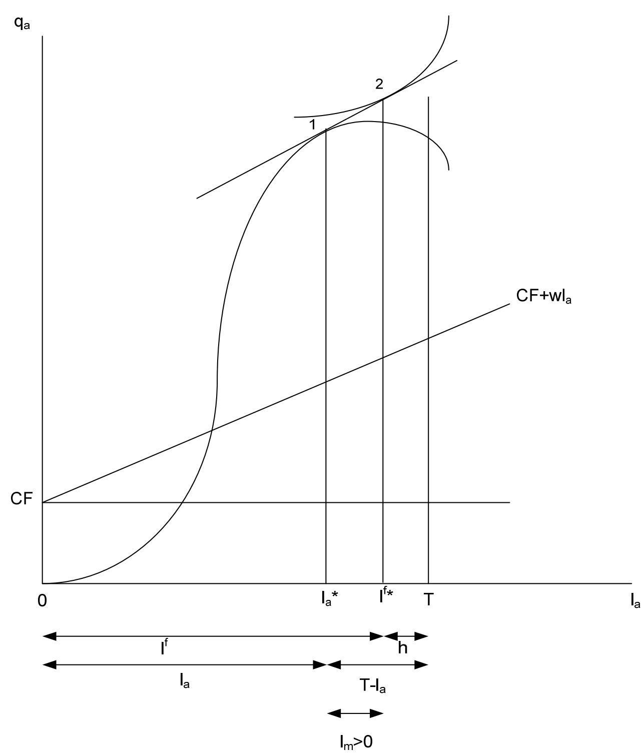
Obtenemos el beneficio máximo y lo sustituimos en la restricción de presupuesto para obtener las curvas de demanda respectivas. En este caso, para el análisis gráfico nos centramos en la condición de maximización de utilidad:

$$\frac{\partial U / \partial y_a}{\partial U / \partial h} = w \qquad (xxiii)$$

Podemos graficar ambas condiciones y ver los casos en que la oferta de trabajo de la familia l^f es menor, igual o mayor que la demanda de trabajo para producir en el hogar l_a. En la Figura 4.1 vemos el caso donde $l_a < l^f$, y por lo tanto la oferta de trabajo total de la familia es mayor que su demanda de trabajo para el negocio familiar, lo cual lleva a que parte de la fuerza laboral del hogar se ofrezca en el mercado $(l_m > 0)$:

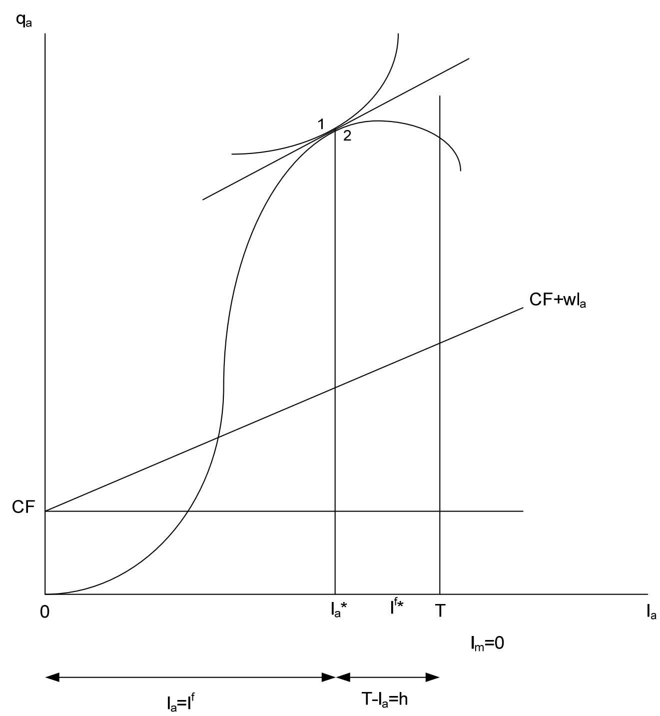
Figura 4.1: La familia ofrece su excedente de mano de obra en el mercado de trabajo

El punto 1 es el equilibrio de producción, mientras el punto 2 es el equilibrio de consumo.



En la Figura 4.2 vemos el caso donde $l_a = l^f$, y por lo tanto la oferta de trabajo total de la familia es igual a su demanda de trabajo para el negocio familiar, lo cual lleva a que la familia no participe en el mercado laboral $(l_m = 0)$:

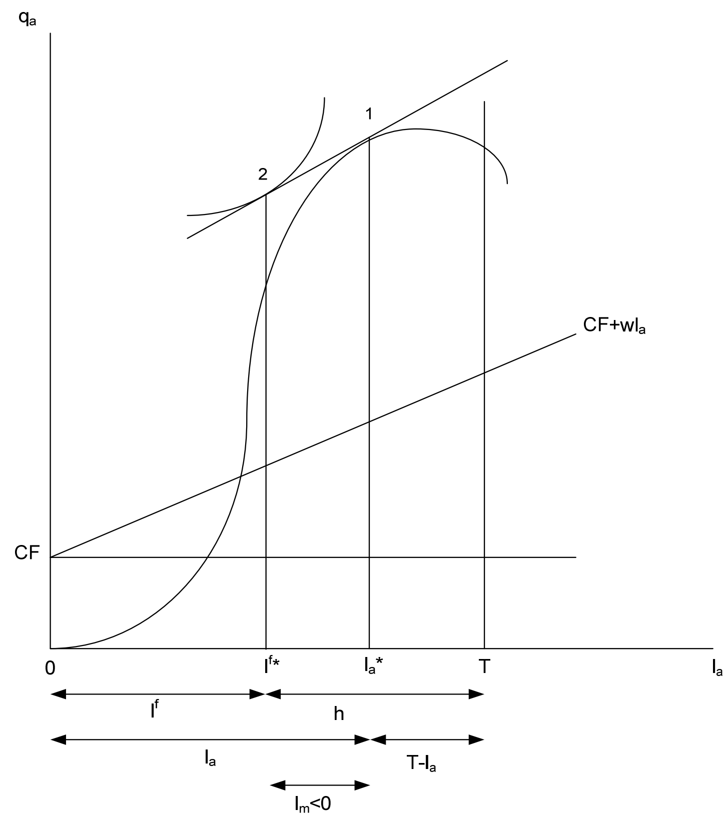
Figura 4.2: La familia no participa en el mercado de trabajo
El punto 1 es el equilibrio de producción, mientras el punto 2 es el equilibrio de consumo.



Finalmente, en la Figura 4.3 vemos el caso donde $l_a > l^f$, y por lo tanto la oferta de trabajo total de la familia es menor que su demanda de trabajo para el negocio familiar, lo cual lleva a que se demande mano de obra del mercado $(l_m < 0)$:

Figura 4.3: La familia demanda mano de obra del mercado de trabajo

El punto 1 es el equilibrio de producción, mientras el punto 2 es el equilibrio de consumo.



2.3 Modelos No Separables

Si las decisiones de producción afectan el precio del bien producido o el costo de oportunidad del trabajo, el modelo no es separable ya que las decisiones de consumo dependerán de las decisiones de producción. Por ejemplo, si no existiera el mercado de trabajo, la fuerza laboral aún tendría que asignarse entre el trabajo en el negocio familiar y el tiempo libre, lo cual determinaría un precio sombra (w_S) del tiempo de trabajo de la familia. Es decir, en este caso w_S será una variable endógena del modelo:

$$Max \qquad U = U(y_a, y_m, h)$$

$$s.a. \qquad \Pi = P_a y_a + P_m y_m + w_S h$$

$$q_a = f(l_a, x_a)$$

$$\Pi = P_a q_a - w_S l_a - P_x x_a - CF$$

$$T = l_a + h$$

Vemos así que la dotación de tiempo de la familia solamente se divide entre trabajo en el negocio familiar y tiempo libre. En este caso el Lagrangiano será:

$$\Lambda = U(y_a, y_m, h) + \lambda[P_a f(l_a, x_a) - w_S l_a - P_x x_a - CF - P_a y_a - P_m y_m - w_S h]$$

Derivando las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial y_a} = \frac{\partial U}{\partial y_a} - \lambda P_a = 0 \qquad (xxiv)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial y_m} = \frac{\partial U}{\partial y_m} - \lambda P_m = 0 \qquad (xxv)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial h} = \frac{\partial U}{\partial h} - \lambda w_S = 0 \qquad (xxvi)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial l_a} = \lambda \left(P_a \frac{\partial f}{\partial l_a} - w_S \right) = 0 \qquad (xxvii)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_a} = \lambda \left(P_a \frac{\partial f}{\partial x_a} - P_x \right) = 0 \qquad (xxviii)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = P_a f(l_a, x_a) - w_S l_a - P_x x_a - CF - P_a y_a - P_m y_m - w_S h = 0 \qquad (xxix)$$

Vemos que no es posible resolver $(xxvii)$ y $(xxviii)$ separadamente, ya que necesitamos las demás ecuaciones para determinar w_S. Resolviendo todo el sistema $(xxiv - xxix)$, obtenemos las siguientes expresiones, que no son curvas de demanda pues dependen de una variable endógena:

$$l_a = l_a(P_a, P_x, w_s) \qquad (xxx)$$

$$x_a = x_a(P_a, P_x, w_s) \qquad (xxxi)$$

$$y_a = y_a(P_a, P_m, P_x, w_s) \qquad (xxxii)$$

$$y_m = y_m(P_a, P_m, P_x, w_s) \qquad (xxxiii)$$

$$h = h(P_a, P_m, P_x, w_s) \qquad (xxxiv)$$

Reemplazando las expresiones (xxx) y $(xxxiv)$ en la restricción de tiempo:

$$T = h(P_a, P_m, P_x, w_s) + l_a(P_a, P_x, w_s)$$

Despejamos el salario sombra, el cual dependerá del precio de mercado del bien producido por la familia, así como de los costos de producción:

$$w_s = w_s(P_a, P_m, P_x) \qquad (xxxv)$$

Entonces, remplazamos el salario sombra en las expresiones anteriores obtenemos las curvas de demanda de insumos de producción y de bienes:

$$l_a^{\ d} = l_a^{\ d}(P_a, P_x, P_m) \qquad (xxxvi)$$

$$x_a^{\ d} = x_a^{\ d}(P_a, P_x, P_m) \qquad (xxxvii)$$

$$y_a^{\ d} = y_a^{\ d}(P_a, P_m, P_x) \qquad (xxxviii)$$

$$y_m^{\ d} = y_m^{\ d}(P_a, P_m, P_x) \qquad (xxxix)$$

$$h^d = h^d(P_a, P_m, P_x) \qquad (xl)$$

Finalmente, obtenemos la curva de oferta del bien producido por la familia:

$$y_a^{\ s} = q_a - y_a^{\ d} = y_a^{\ s}(P_a, P_m, P_x) \qquad (xli)$$

Si ahora simplificamos el modelo, asumiendo que no existe mercado de trabajo, que la unidad familiar no consume bienes de mercado y que solamente se emplea trabajo para producir el bien familiar, el problema de la familia será el siguiente:

$$
\begin{aligned}
&Max \qquad U = U(y_a, h) \\
&s.a. \qquad \Pi = P_a y_a + w_s h \\
&\qquad\qquad q_a = f(l_a) \\
&\qquad\qquad \Pi = P_a q_a - w_s l_a - CF \\
&\qquad\qquad T = l_a + h
\end{aligned}
$$

En este caso, las condiciones de primer orden serán:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial y_a} = \frac{\partial U}{\partial y_a} - \lambda P_a = 0 \qquad (xlii)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial h} = \frac{\partial U}{\partial h} - \lambda w_s = 0 \qquad (xliii)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial l_a} = \lambda\left(P_a \frac{\partial f}{\partial l_a} - w_s\right) = 0 \qquad (xliv)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = P_a f(l_a) - w_S l_a - CF - P_a y_a - w_s h = 0 \qquad (xlv)$$

A partir de las expresiones $(xlii - xliv)$ podemos ver que como $\lambda \neq 0$, el salario de reserva será igual tanto al producto marginal del trabajo en el negocio familiar, como a la relación marginal de sustitución entre el tiempo libre y el bien producido por la unidad familiar:

$$w_s = \frac{\partial f}{\partial l_a} = \frac{\partial U / \partial h}{\partial U / \partial l_a} \qquad (xlvi)$$

3. DECISIONES DE PRODUCCIÓN INTER-TEMPORAL

La introducción del tiempo en el análisis de producción nos permite modelar las decisiones de los empresarios no solamente con respecto al producto que ofrecen y a los factores que demandan en cada periodo, sino también con respecto a sus decisiones de inversión. De esta manera, introducimos la posibilidad de un cambio en el *stock* de capital de la empresa[4].

---

[4] H. Gravelle y R. Rees (2006).

3.1 La frontera de posibilidades de dividendos

La decisión de inversión de la empresa depende del valor presente del flujo de ingresos que espera obtener al tomar dicha decisión. En un mundo con mercados completos, estos ingresos dependen de la tecnología y de los precios de los bienes que venden y de los insumos que compran, así como de la tasa de descuento de mercado relevante.

Partimos de un modelo donde la empresa opera durante dos periodos consecutivos, en cada uno de los cuales maximiza su flujo de caja o dividendos. Dados el precio del bien que vende (P), la tasa de salarios (w), el stock de capital inicial (k_0), y el precio del capital (P_k), los dividendos (D_0) en el periodo inicial (0) se expresan por la siguiente ecuación:

$$D_0 = P.f(k_0, l_0) - wl_0 - P_k(k_1 - k_0) \qquad (xlvii)$$

Donde l_0 son las horas–hombre demandadas en el periodo inicial y k_1 el stock de capital del periodo final. Entonces, si el empresario invierte parte de sus dividendos, $k_1 > k_0$ y el monto invertido será igual a:

$$I = P_k(k_1 - k_0) \qquad (xlviii)$$

En cuanto a los dividendos (D_1) del periodo final (1), éstos se expresan por medio de la siguiente ecuación:

$$D_1 = P.f(k_1, l_1) - wl_1 \qquad (xlix)$$

Donde l_1 son las horas–hombre demandadas en dicho periodo. Debido a que las horas hombre empleadas en cada periodo solamente afectan el flujo de caja del periodo correspondiente, la empresa puede escoger el nivel óptimo de trabajo que maximice los dividendos de cada periodo. Las condiciones de primer orden serían:

$$\frac{\partial D_0}{\partial l_0} = P.\frac{\partial f}{\partial l_0} - w = 0 \qquad (l)$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial l_1} = P.\frac{\partial f}{\partial l_1} - w = 0 \qquad (li)$$

A partir de (l) y (li) obtenemos las curvas de demanda de trabajo en cada periodo:

$$l_0 {*} = l_0(w, P) \qquad (lii)$$

$$l_1 {*} = l_1(w, P) \qquad (liii)$$

Reemplazando las expresiones (lii) y $(liii)$ en las expresiones $(xlvii)$ y $(xlix)$, respectivamente, obtendremos los dividendos en función de k_1:

$$D_0 = P.f[k_0, l_0 {*}(w, P)] - wl_0 {*}(w, P) - P_k(k_1 - k_0) \qquad (liv)$$

$$D_1 = P.f[k_1, l_1 {*}(w, P) {*} - wl_1 {*}(w, P) \qquad (lv)$$

Dado que el flujo de caja de ambos periodos depende de k_1, podemos obtener una relación entre D_0 y D_1. Si despejamos k_1 en (liv) y lo reemplazamos en (lv) obtendremos la curva de posibilidades de dividendos:

$$D_1 = g(D_0, P, w, P_k) \qquad (lvi)$$

La pendiente de esta curva nos muestra a cuánto de los dividendos futuros debe renunciar la empresa para obtener mayores dividendos en el presente. Si tomamos diferenciales a (liv):

$$dD_0 = P.\left[\left(\frac{\partial f}{\partial k}\right)dk_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)dl_0 {*}\right] - w.dl_0 {*} - P_k(dk_1 - dk_0)$$

Como $dl_0 {*} = dk_0 = 0$, entonces:

$$dD_0 = -P_k dk_1 \qquad (lvii)$$

Tomando diferenciales a (lv):

$$dD_1 = P.\left[\left(\frac{\partial f}{\partial k}\right)dk_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)dl_1 *\right] - w.dl_1 *$$

Como $dl_1 * = 0$, entonces:

$$dD_1 = P.\left(\frac{\partial f}{\partial k}\right)dk_1 \qquad (lviii)$$

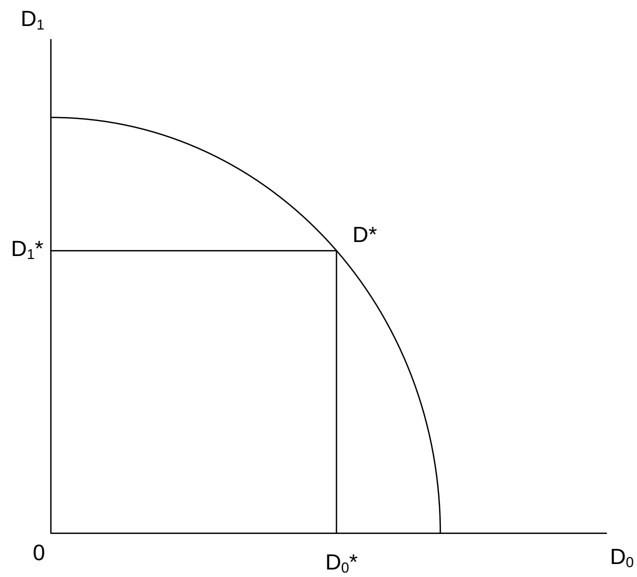
Dividiendo $(lviii)$ entre $(lvii)$:

$$\frac{dD_1}{dD_0} = -\frac{P.\left(\frac{\partial f}{\partial k}\right)}{P_k} \qquad (lix)$$

Que es la pendiente de la curva de posibilidades de dividendos, que es la relación entre el valor de la productividad marginal del capital entre su precio. En la Figura 4.4 podemos ver una curva de posibilidades de dividendos, donde $D_0 *$ y $D_1 *$ son los dividendos que la empresa obtiene cuando $k_1 = k_0$. En este caso $D_0 * = P.f(k_0, l_0) - wl_0$, y $D_1 * = P.f(k_0, l_1) - wl_1$. Es así que si el precio del bien producido y la tasa salarial no varían de un periodo a otro, entonces $D_0 * = D_1 *$.

Figura 4.4: Curva de posibilidades de dividendos

La curva de posibilidades de dividendos es el lugar geométrico de las combinaciones de dividendos máximos en los periodos inicial y final, dados la tecnología, el precio del bien, la tasa salarial, el precio del capital, y el stock de capital inicial.



Ejemplo 4.5: Curva de posibilidades de dividendos – ejercicio numérico

Sea la siguiente función de producción:

$$y = k^{0.5} l^{0.5}$$

Las demandas óptimas de trabajo en cada periodo serán:

$$l_0 * = \frac{P^2 k_0}{4w^2}$$

$$l_1 * = \frac{P^2 k_1}{4w^2}$$

Reemplazando cada expresión en la ecuación de dividendos respectiva, obtenemos:

$$D_0 * = \frac{P^2 k_0}{2w^2} - P_k (k_1 - k_0)$$

$$D_1 * = \frac{P^2 k_1}{2w^2}$$

Despejando k_1 en la primera ecuación y reemplazándola en la segunda ecuación, obtenemos la frontera de posibilidades de producción:

$$D_1 = \frac{P^2}{4wP_k}\left[\left(\frac{P^2}{4wP_k}+1\right)k_0 - D_0\right]$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial D_1}{\partial D_0} = -\frac{P^2 k_1}{4wP_k}$$

3.2 <u>La decisión de inversión óptima</u>

La empresa que opera en dos periodos buscará maximizar el valor actual descontado de su flujo de caja (V_0), sujeta a su frontera de posibilidades de dividendos:

$$Max \quad V_0 = D_0 + \frac{D_1}{1+i}$$

$$s.a. \quad D_1 = g(D_0, P, w, P_k)$$

$$D_0 \geq 0$$

Donde vemos que para que la empresa opere sus dividendos en el periodo inicial no pueden ser negativos. Construyendo el Lagrangiano:

$$\Lambda = D_0 + \frac{D_1}{1+i} + \lambda[D_1 - g(D_0, P, w, P_k)]$$

Las condiciones de primer orden serán:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial D_0} = 1 - \lambda \frac{\partial g}{\partial D_0} = 0 \qquad (lx)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial D_1} = \frac{1}{1+i} + \lambda = 0 \qquad (lxi)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = D_1 - g(D_0, P, w, P_k) = 0 \qquad (lxii)$$

Dividiendo (lx) entre (lxi) y reordenando términos, obtenemos:

$$\frac{\partial g}{\partial D_0} = -(1+i) \qquad (lxiii)$$

Tomando en cuenta la expresión (lix):

$$\frac{dD_1}{dD_0} = -\frac{P.\left(\frac{\partial f}{\partial k}\right)}{P_k} = -(1+i)$$

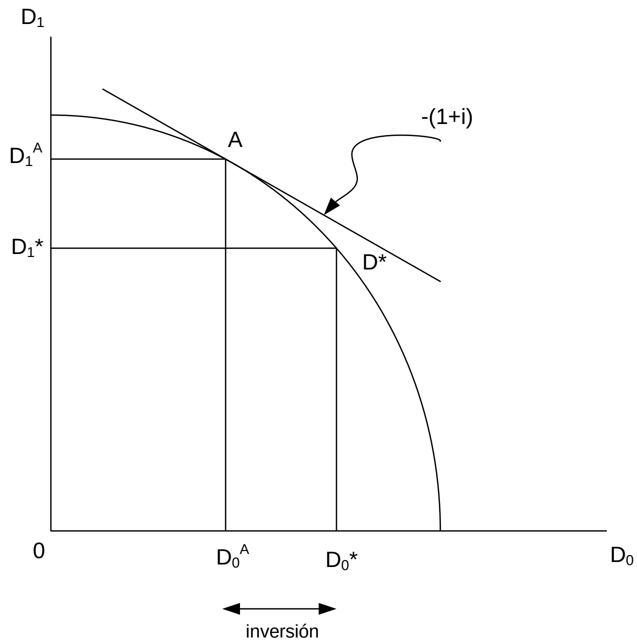
Reordenando obtenemos:

$$i = \frac{P.\left(\frac{\partial f}{\partial k}\right)}{P_k} - 1 = \frac{P\left(\frac{\partial f}{\partial k}\right) - P_k}{P_k} = \theta \qquad (lxiv)$$

Donde θ sería la tasa de rendimiento marginal de la inversión. Es decir, la empresa invertirá hasta el punto en el cual el rendimiento adicional de su inversión sea igual al costo adicional de obtener el dinero en el mercado. En la Figura 4.5 graficamos el caso en que la inversión es mayor que cero $[I = P_k(k_1 - k_0) > 0]$. Como podemos ver, la empresa reducirá sus dividendos presentes para aumentar su dotación de capital del el periodo siguiente y así aumentar sus dividendos futuros.

Figura 4.5: Equilibrio inter-temporal de la empresa competitiva

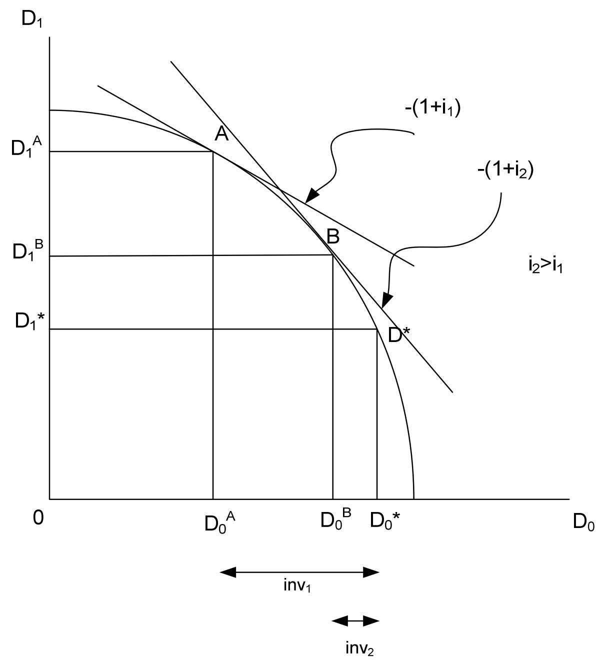
El equilibrio inter-temporal de la empresa en el punto A implica que la inversión es mayor a cero $[I = P_k(k_1 - k_0) > 0]$.



En la Figura 4.6 podemos ver el efecto de una elevación en la tasa de interés de mercado sobre los dividendos en cada periodo, así como sobre la inversión. Al elevarse la tasa de interés, el costo adicional de obtener dinero prestado se hace mayor que el rendimiento marginal de la inversión, por lo cual la empresa invertirá un monto menor. Si, en cambio, la tasa de interés de mercado se redujera, la empresa se encontraría con que el monto invertido tiene un rendimiento mayor que el costo del dinero, por lo cual aumentaría su inversión.

Figura 4.6: Efecto de una elevación en la tasa de interés sobre el monto invertido

El equilibrio inter-temporal de la empresa pasa del punto A al punto B, y la inversión se reduce pasando de $I_A = P_k(k_1^A - k_0)$ a $I_B = P_k(k_1^B - k_0)$.



3.3 Modelo del consumidor-productor

Si el empresario tiene acceso al mercado de crédito y no hay incertidumbre, entonces se cumple el Teorema de Separación de Fisher. Es decir, las decisiones de inversión no dependerán de las preferencias individuales del empresario con respecto a su consumo presente y futuro. Esto quiere decir que el modelo es separable:

- En la primera etapa maximizamos el flujo de dividendos, sujetos a la frontera de posibilidades de dividendos, y obtenemos el valor presente máximo del flujo de dividendos de la empresa.
- En la segunda, reemplazamos dicho valor presente en la restricción de presupuesto inter-temporal del empresario y maximizamos su función de utilidad.

Entonces, maximizamos el flujo de dividendos de la empresa:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad V_0 = D_0 + \frac{D_1}{1+i} \\
&s.a. \quad D_1 = g(D_0, P, w, P_k) \\
&\qquad\quad D_0 \geq 0
\end{aligned}
$$

En equilibrio, la tasa de rendimiento de la inversión será igual a la tasa de interés de mercado:

$$\theta = i \qquad (lxv)$$

A partir del resultado de la maximización anterior, obtenemos $D_0^{\ A}$ y $D_1^{\ A}$, y por lo tanto $V_0^{\ A}$. Para pasar a la segunda etapa, reemplazamos este valor en la recta de presupuesto del empresario. Asumiendo que los precios de la canasta consumida no cambian y son iguales a 1:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad U = U(C_0) + \frac{U(C_1)}{1+\rho} \\
&s.a. \quad V_0^{\ A} = D_0^{\ A} + \frac{D_1^{\ A}}{1+i} = C_0 + \frac{C_1}{1+i}
\end{aligned}
$$

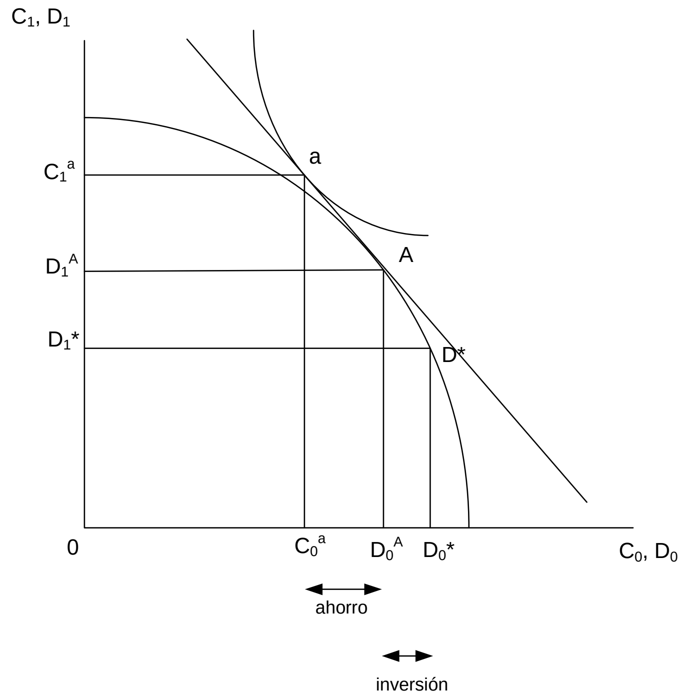
En equilibrio, la tasa de descuento subjetiva del consumidor será igual a la tasa de interés de mercado:

$$\rho = i \qquad (lxvi)$$

Por lo tanto, en el equilibrio conjunto, la tasa de descuento subjetiva del consumidor será igual a la tasa de retorno de la inversión e igual a la tasa de interés de mercado. En la Figura 4.7 podemos ver un equilibrio conjunto donde el empresario invierte parte de sus dividendos presentes para aumentar sus dividendos futuros, y a la vez consume una canasta por un valor menor al de sus dividendos disponibles, ahorrando para tener un consumo futuro mayor al que le permitirían sus dividendos futuros.

Figura 4.7: Equilibrio inter-temporal del consumidor-productor

En el equilibrio inter-temporal del productor-consumidor $\rho = i = \theta$.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arrow, Kenneth
1966 *Social Choice and Individual Values*. Tercera Edición. New York: John Wiley & Sons.

Bardhan, P. y C. Urdry
1999 *Development Microeconomics*. Oxford: Oxford University Press.

Escobal, Javier y Carmen Ponce
2012 "Una mirada de largo plazo a la economía campesina en los andes". En Grupo de Análisis para el Desarrollo, *Recursos Naturales y Desarrollo Rural*. Lima: GRADE.

Figueroa, Adolfo.
1989 *La Economía campesina de la Sierra del Perú*. Cuarta Edición. Lima: Fondo Editorial de la PUCP.

Gravelle, Hugh y Ray Rees
2006 *Microeconomía.* Tercera edición. Madrid: Pearson-Prentice Hall.

Sadoulet, E. y A. de Janvry
1995 *Quantitative Development Policy Analysis*. Baltimore: John Hopkins University Press.

ÚLTIMAS PUBLICACIONES DE LOS PROFESORES
DEL DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

Libros

Cecilia Garavito e Ismael Muñoz (Eds.)
2012 *Empleo y protección social.* Lima, Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Félix Jiménez
2012 *Elementos de teoría y política macroeconómica para una economía abierta* (Tomos I y II). Lima, Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Félix Jiménez
2012 *Crecimiento económico: enfoques y modelos.* Lima, Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Janina León Castillo y Javier M. Iguiñiz Echeverría (Eds.)
2011 *Desigualdad distributiva en el Perú: Dimensiones.* Lima, Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Alan Fairlie
2010 Biocomercio en el Perú: Experiencias y propuestas. Lima, Escuela de Posgrado, Maestría en Biocomercio y Desarrollo Sostenible, PUCP; IDEA, PUCP; y, LATN.

José Rodríguez y Albert Berry (Eds.)
2010 *Desafíos laborales en América Latina después de dos décadas de reformas estructurales. Bolivia, Paraguay, Perú (1997-2008).* Lima, Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú e Instituto de Estudios Peruanos.

José Rodríguez y Mario Tello (Eds.)
2010 *Opciones de política económica en el Perú 2011-2015.* Lima, Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Felix Jiménez
2010 *La economía peruana del último medio siglo.* Lima, Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Felix Jiménez (Ed.)
2010 *Teoría económica y Desarrollo Social: Exclusión, Desigualdad y Democracia. Homenaje a Adolfo Figueroa.* Lima, Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú.

José Rodriguez y Silvana Vargas
2009 *Trabajo infantil en el Perú. Magnitud y perfiles vulnerables. Informe Nacional 2007-2008.* Programa Internacional para la Erradicación del Trabajo Infantil (IPEC). Organización Internacional del Trabajo.

Serie: Documentos de Trabajo

No. 348 “Endogenous Altruism in the Long Run”. Alejandro Lugon. Diciembre, 2012.

No. 347 “Introducción al cálculo de Malliavin para las finanzas con aplicación a la elección dinámica de portafolio”. Guillermo Moloche. Diciembre, 2012.

No. 346 “Reglas de política monetaria y choques externos en una economía semi-dolarizada”. Oscar Dancourt. Noviembre, 2012.

No. 345 “Calidad del aire y gasto de bolsillo en salud en Lima Metropolitana: Una aproximación a los modelos de producción de salud”. Samuel D. Jaramillo De Souza. Noviembre, 2012.

No. 344 “IS-LM Stability Revisited: Samuelson was Right, Modigliani was Wrong”. Waldo Mendoza. Noviembre, 2012.

No. 343 “Integración para la inclusión con desarrollo humano en el Perú”. Efraín Gonzales de Olarte. Noviembre, 2012.

No. 342 “Crédito bancario, tasa de interés de política y tasa de encaje en el Perú”. Oscar Dancourt. Octubre, 2012.

No. 341 “Reducción de costos de transporte por medio de la innovación campesina: una ruta por recorrer”. Javier M. Iguiñiz. Octubre, 2012.

No. 340 “Explaninig the Determinants of the Frequency of Exchange Rate Interventions in Peru using Count Models”. Edgar Ventura y Gabriel Rodríguez. Octubre, 2012.

No. 339 “Inflation Expectations Formation in the Presence of Policy Shifts and Structural Breaks: An Experimental Analysis”. Luis Ricardo Maertens y Gabriel Rodríguez. Octubre, 2012.

Departamento de Economía - Pontificia Universidad Católica del Perú
Av. Universitaria 1801, Lima 32 – Perú.
Telf. 626-2000 anexos 4950 - 4951
http://www.pucp.edu.pe/economia