

DOCUMENTO DE TRABAJO N° 336

**MODELOS DE OLIGOPOLIOS DE PRODUCTOS  
HOMOGÉNEOS Y VIABILIDAD DE ACUERDOS  
HORIZONTALES**

**Raúl García Carpio y Raúl Pérez-Reyes Espejo**

DEPARTAMENTO  
DE **ECONOMÍA**



PONTIFICIA  
**UNIVERSIDAD  
CATÓLICA**  
DEL PERÚ

DOCUMENTO DE TRABAJO N° 336

**MODELOS DE OLIGOPOLIOS DE PRODUCTOS HOMOGÉNEOS  
Y VIABILIDAD DE ACUERDOS HORIZONTALES**

Raúl García Carpio y Raúl Pérez-Reyes

Setiembre, 2012

DEPARTAMENTO  
DE **ECONOMÍA**



DOCUMENTO DE TRABAJO 336

<http://www.pucp.edu.pe/departamento/economia/images/documentos/DDD336.pdf>

© Departamento de Economía – Pontificia Universidad Católica del Perú,  
© Raúl García Carpio y Raúl Pérez-Reyes Espejo

Av. Universitaria 1801, Lima 32 – Perú.  
Teléfono: (51-1) 626-2000 anexos 4950 - 4951  
Fax: (51-1) 626-2874  
[econo@pucp.edu.pe](mailto:econo@pucp.edu.pe)  
[www.pucp.edu.pe/departamento/economia/](http://www.pucp.edu.pe/departamento/economia/)

Encargado de la Serie: Luis García Núñez  
Departamento de Economía – Pontificia Universidad Católica del Perú,  
[lgarcia@pucp.edu.pe](mailto:lgarcia@pucp.edu.pe)

Raúl García Carpio y Raúl Pérez-Reyes Espejo

Modelos de oligopolios de productos homogéneos y viabilidad de acuerdos horizontales.

Lima, Departamento de Economía, 2012  
(Documento de Trabajo 336)

PALABRAS CLAVE: Oligopolio, Modelo de Cournot, Modelo de Bertrand, Acuerdos horizontales, Colusión tácita, Fusiones.

Las opiniones y recomendaciones vertidas en estos documentos son responsabilidad de sus autores y no representan necesariamente los puntos de vista del Departamento Economía.

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2012-11877  
ISSN 2079-8466 (Impresa)  
ISSN 2079-8474 (En línea)

Impreso en Cartolán Editora y Comercializadora E.I.R.L.  
Pasaje Atlántida 113, Lima 1, Perú.  
Tiraje: 100 ejemplares

# MODELOS DE OLIGOPOLIO DE PRODUCTOS HOMOGÉNEOS Y VIABILIDAD DE ACUERDOS HORIZONTALES

Raúl García Carpio  
Raúl Pérez-Reyes Espejo

## Resumen

En este documento se presentan los principales modelos de oligopolio considerando productos homogéneos. El material hace énfasis en el detalle de las derivaciones de las condiciones de maximización de beneficios, y el equilibrio en los mercados, así como en introducir el efecto de diferentes cambios en los parámetros de los modelos. Se desarrollan algunas variantes de los modelos no tratados comúnmente, como la introducción de contratos de largo plazo en el modelo de Cournot y los modelos de equilibrio en funciones de oferta. También se muestra como estos modelos pueden verse como casos particulares de la asunción de diferentes conjeturas que tienen los agentes sobre el comportamiento de sus rivales que luego en realidad tendrán que ser estimadas en cada mercado. Por último, en la cuarta sección se introduce el análisis de los acuerdos horizontales con productos homogéneos, el cual incluye los cárteles, la colusión tácita y las concentraciones horizontales.

Palabras Clave: Oligopolio, Modelo de Cournot, Modelo de Bertrand, Acuerdos Horizontales, Colusión tácita, Fusiones

## Abstract

This paper presents the main models of oligopoly considering homogeneous products. The material emphasizes the detail of the derivations of the conditions of profit maximization, and equilibrium in markets and to introduce the effect of different changes in model parameters. They develop some variants of the models do not usually discussed, including the introduction of long-term contracts in the Cournot model and equilibrium models in supply functions. It also shows how these models can be seen as special cases of the

assumption of different conjectures about the behavior of their rivals who then actually have to be estimated in each market. Finally, the fourth section introduces the analysis of horizontal agreements with homogeneous products, which includes the cartels, tacit collusion and horizontal mergers.

Keywords: Oligopoly, Cournot Model, Bertrand Model, Tacit Collusion, Horizontal Mergers

# MODELOS DE OLIGOPOLIO DE PRODUCTOS HOMOGÉNEOS Y VIABILIDAD DE ACUERDOS HORIZONTALES<sup>1</sup>

Raúl García Carpio\*  
Raúl Pérez-Reyes Espejo\*

## 1. INTRODUCCIÓN

Los modelos oligopólicos representan a mercados con un alto nivel de concentración y cuya principal característica es la existencia de interdependencia entre las conductas de las empresas participantes y que cada una de ellas lo sabe. Esta interacción se ve reflejada en la función de demanda que enfrenta cada empresa, que recibe el nombre de demanda residual. Modernamente la teoría de la organización industrial, rama de la economía que analiza estos mercados, ha tenido un importante desarrollo gracias al uso de la teoría de juegos como herramienta metodológica para modelar la interacción entre las empresas, considerando un comportamiento optimizador y diferentes nociones de equilibrio. Sin embargo, pese a estos avances un tema aún por definir en estos modelos es el relacionado con la dimensión de la rivalidad o interdependencia. Tradicionalmente ha existido una discusión sobre si la rivalidad se da en precios, en cantidades o en capacidad productiva. Esto ha generado una diversidad de modelos oligopólicos.

Como plantea Tirole 1988, una primera dimensión de la rivalidad está relacionada con el horizonte temporal de las decisiones que estamos

---

<sup>1</sup> Se agradece la asistencia de Beatriz Canchari, Víctor Chang y Cristhian Flores así como el apoyo en la edición final de Claudia Fernández - Dávila. El material presentado se ha beneficiado de los comentarios de Luis García a una primera versión y de discusiones sobre estos temas con Gonzalo Ruiz, José Gallardo y José Távara. Raúl García agradece adicionalmente a Ramón García-Cobián quien lo introdujo a la teoría de los superjuegos. La responsabilidad por el contenido es exclusiva de los autores. Comentarios adicionales son bienvenidos, escribir a [raul.garciac@puce.edu.pe](mailto:raul.garciac@puce.edu.pe) o [rperezreyes@yahoo.es](mailto:rperezreyes@yahoo.es). Versión a agosto de 2012.

\* Docentes a tiempo parcial del Departamento de Economía de la Pontificia Universidad Católica del Perú (Pregrado y Maestrías de Economía y Regulación de Servicios Públicos).

analizando. Un análisis de rivalidad en el corto plazo, requiere definir la capacidad productiva como dada y por lo tanto la rivalidad se reflejará en los precios. Un análisis de rivalidad en plazos intermedios, se reflejará en la consideración de la capacidad productiva y/o la producción asociada, como las variables que explique la rivalidad entre empresas. En el largo plazo, la innovación tecnológica será el elemento en el que rivalicen las empresas, subordinando precios y capacidades productivas a estas decisiones.

En el presente documento se discuten los modelos clásicos de oligopolio, empezando por los modelos de competencia en cantidades de Cournot y Stackelberg. Posteriormente se analiza el modelo de competencia en precios planteado por Bertrand; y el modelo de liderazgo en precios mediante una empresa dominante y una franja competitiva. También se incluyen algunas variantes más recientes como la introducción de contratos de largo plazo en el modelo de Cournot y el modelo de equilibrio en funciones de oferta. Todos estos modelos se analizan asumiendo homogeneidad en los productos y considerando un entorno estático, en el sentido que las decisiones tomadas no están asociadas al tiempo de forma explícita. Como último punto para cerrar el tema de modelos oligopólicos con productos homogéneos, se analizan los acuerdos horizontales relacionados con las condiciones de estabilidad de los cárteles y la colusión como los incentivos y efectos de las fusiones.

## **2. COMPETENCIA EN CANTIDADES**

### **2.1 Modelo de Cournot**

El modelo de Cournot es un modelo oligopólico básico, en donde la variable de decisión es el nivel de producción y las empresas toman sus decisiones simultáneamente (en el documento solo tratamos el caso de productos homogéneos)<sup>2</sup>. Es decir, las empresas participantes deben decidir cuánto de

---

<sup>2</sup> Antoine Augustin Cournot (1801–1877) fue un importante matemático francés pionero en introducir el uso del cálculo en el análisis de los problemas económicos. El desarrolló tanto un tratamiento adecuado de los problemas de maximización de beneficios del monopolio como del oligopolio. Un análisis de

producción ofrecerán al mercado, considerando la producción de las demás empresas rivales como dada. Esto implica que en la función de demanda que enfrenta cada empresa tenga que considerar lo que hacen las rivales, lo cual formalmente se refleja en una función inversa de demanda en donde el precio  $P$  depende de lo que ofrece la empresa  $i$  ( $q_i$ ) y de lo que ofrecen las demás empresas ( $Q_{-i}$ ):

$$P = P (q_i + Q_{-i})$$

### 2.1.1 El Caso del duopolio

Por simplicidad, pero sin perder generalidad, consideremos que existen dos empresas (1 y 2) con costos y capacidades iguales. El proceso para hallar el equilibrio, considerando costos marginales constantes, se puede entender de la siguiente forma: en una primera etapa, la empresa 1 maximiza sus beneficios considerando la producción de la empresa 2 como una constante. Este caso se ilustra en el Gráfico N° 1 (a), donde se dibuja la curva de demanda de mercado  $D$  y la cantidad  $q_2$  que la firma 1 asume como fija y por lo tanto una curva de demanda residual  $D_1$ , que corresponde a la curva de demanda que enfrenta la firma 1, la cual le permite establecer su cantidad óptima de producción  $q_1^*$ . En una segunda etapa, la empresa 2 maximiza sus beneficios considerando  $q_1$  como dado y establece su cantidad óptima  $q_2^*$ , ver Gráfico N° 1 (b).

Se puede probar que este juego continúa hasta que  $q_1$  y  $q_2$  no varían en la etapa siguiente, habiendo encontrado por tanto, los niveles de producción óptimos.

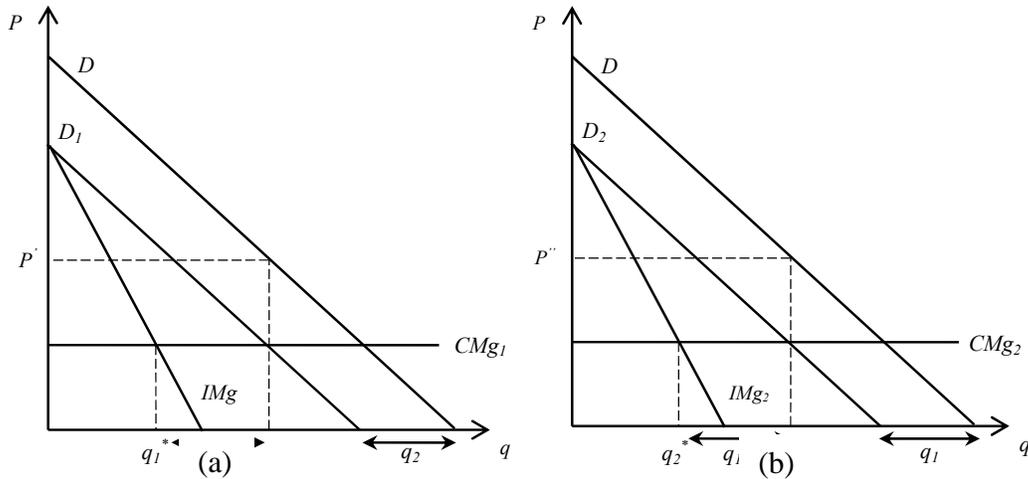
El nivel de producción que maximiza los beneficios de una empresa es una función decreciente de la cantidad que piensa producirá su rival. Esta función se denomina "función de reacción". En dicha función cada empresa maximiza

---

los principales aporte de Cournot a la economía se puede encontrar en Ekelund y Hebert (1992).

su beneficio considerando fijo el nivel de producción de su rival, es decir, teniendo en cuenta el nivel de producción de la empresa rival, la empresa sólo cubrirá la demanda residual del mercado.

Gráfico N° 1 Demanda residual para las empresas 1 y 2 en el modelo de Cournot

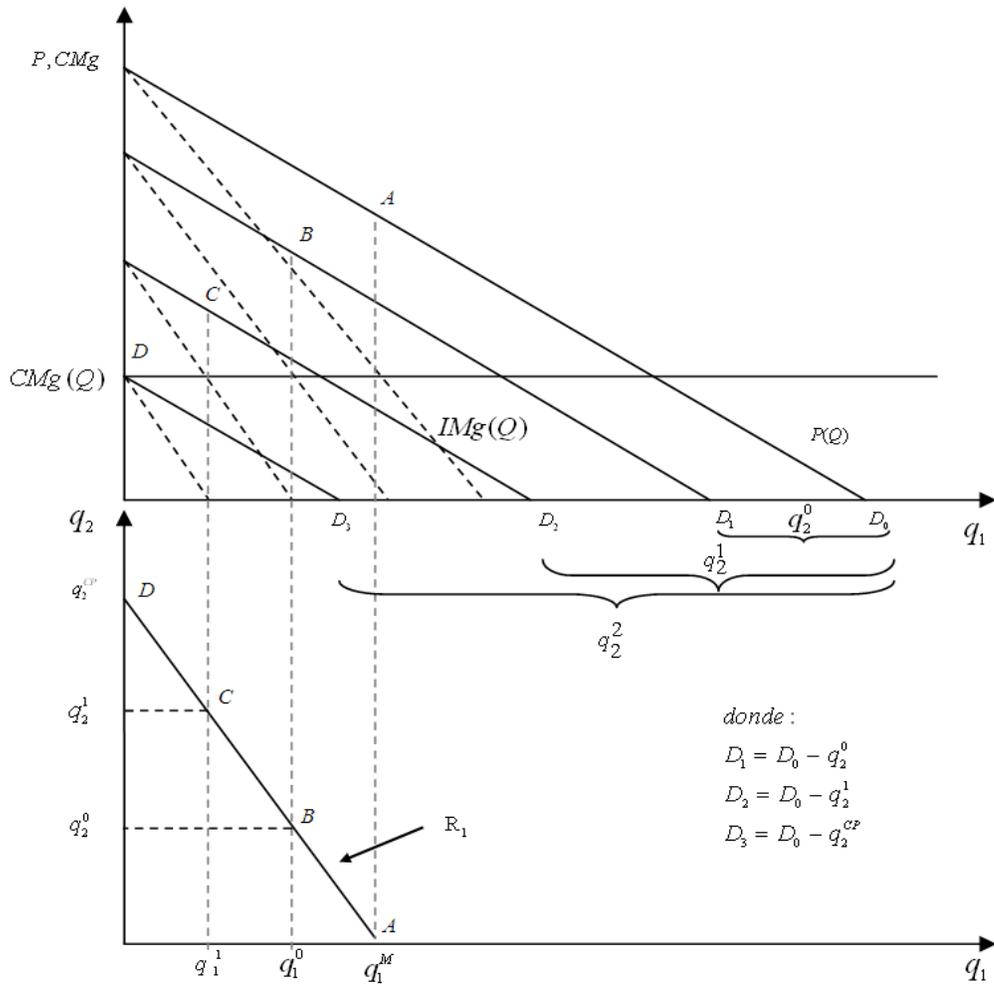


**Función de Reacción**

Gráficamente se puede obtener la función de reacción de la siguiente manera (ver Gráfico N° 2). Consideremos que la demanda de mercado  $D_0$  es abastecida por una sola empresa, en este caso, el monopolista maximizará sus beneficios en  $q_1^M$  (obtenido de igualar el ingreso marginal y el costo marginal). Ahora bien, si consideramos que ingresa un competidor a este mercado, el efecto que esto generará, es una reducción de la demanda del mercado en una cantidad igual a la producida por el entrante ( $q_2^0$ ), de forma que la nueva demanda que enfrenta la firma establecida es  $D_1$ , a partir de la cual, se determina un nivel de producción de  $q_1^0$ , pasando del punto A al B. Un razonamiento similar hace que cada decisión de aumentar la producción del entrante, reduzca el nivel de producción que maximiza los beneficios de la empresa establecida. Por ejemplo, si la empresa entrante no hubiera

producido una cantidad  $q_2^0$ , sino una cantidad  $q_2^1$ , la empresa 1 hubiera tenido un nivel de producción como  $q_1^1$  (pasando al punto C). Por lo tanto, para cada nivel de producción de la empresa 2, habrá un nivel de producción óptima para la empresa 1 (función de reacción de la empresa 1), incluso pudiendo no quedar demanda residual para la empresa 1, tal como se observa en el punto D, esto en el caso de que la empresa 2 produzca  $q_2^2$ . De la misma manera se realiza la derivación gráfica de la curva de reacción para la empresa 2.

Gráfico N° 2 Construcción de la curva de reacción

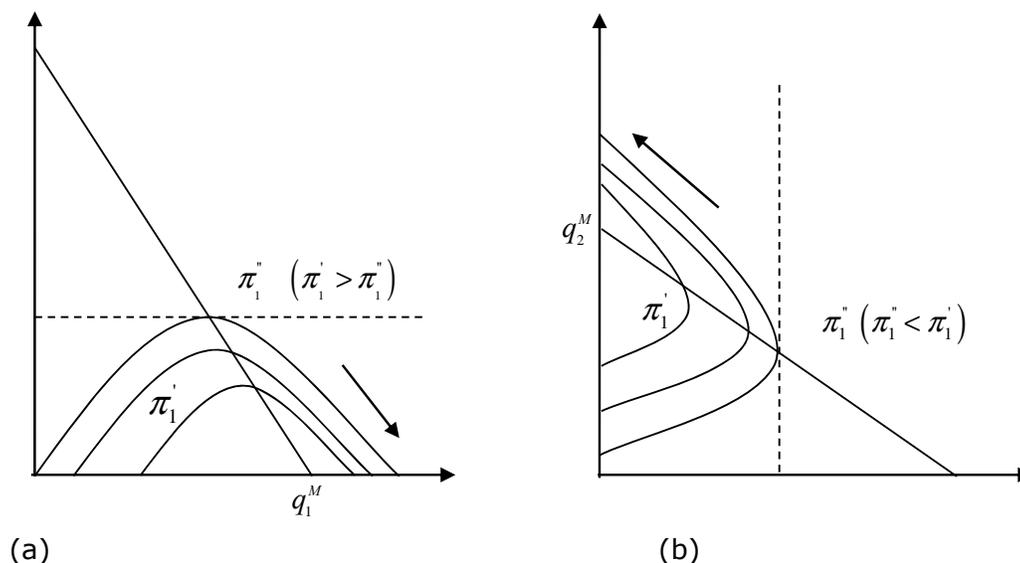


### ***Función de reacción y la curva de isobeneficio***

Asimismo, mediante un análisis gráfico se puede mostrar la relación existente entre la curva de isobeneficio y la curva de reacción para ambas empresas (ver Gráfico N° 3). La empresa 1 y la empresa 2 poseen un mapa de curvas de isobeneficio, donde para la empresa 1 —parte (a) de la figura— esta curva crece hacia el eje de las abscisas pudiendo llegar a un punto máximo como  $q_1^M$ , en el cual, la empresa 1 se convertiría en un monopolio. Gráficamente lo observamos por la dirección de la flecha continua hacia el eje de abscisas, obteniendo de esta manera, la función de reacción ( $R_1$ ) de la empresa 1.

Por otro lado, con respecto a la curva de reacción para la empresa 2, parte (b), se puede observar que ésta crece hacia el eje de las ordenadas pudiendo llegar a un punto máximo como  $q_2^M$ , en el cual, la empresa 2 se convertiría en un monopolio. De igual manera, se grafica la función de reacción ( $R_2$ ) de la empresa 2, apreciándose que mientras menor sea el nivel de producción de la empresa 1, mayor será el beneficio que obtendría la empresa 2. Gráficamente observamos esta relación por la dirección de la flecha continua hacia el eje de ordenadas. Ambas gráficas proporcionan el mismo razonamiento, es decir, mientras menor sea el nivel de producción de una empresa rival, mayor será el beneficio que obtendría la empresa.

Gráfico N° 3 Curvas de isobeneficio y función de reacción



Por último, se puede realizar una derivación alternativa de las funciones de reacción (como la presentada en el capítulo 11 de Shooter 1996), a partir del análisis gráfico. En el Gráfico N° 4, los puntos como el  $x$ , representan niveles de producción para las empresas 1 y 2. Por ejemplo, en el punto  $x$ , la empresa 1 produce  $q_1^*$  y la empresa 2 produce  $q_2^*$ , en el punto  $q_1^M$  el nivel de producción de la empresa 1 es el de monopolio y el de la empresa 2 es 0, este punto le representa a la empresa 1 el mayor nivel de beneficio que puede obtener por encima de cualquier otra combinación de producción posible.

Obsérvese la combinación de producción en el punto  $a$ . En este punto, la empresa 1 continúa con su producción de monopolio, sin embargo, la empresa 2 tiene una producción positiva. En este punto, se puede observar que la empresa 1 recibirá menores beneficios que en el punto  $q_1^M$ , porque la cantidad positiva de la empresa 2 aumentará la cantidad agregada de mercado y por tanto, disminuirá el precio de mercado.

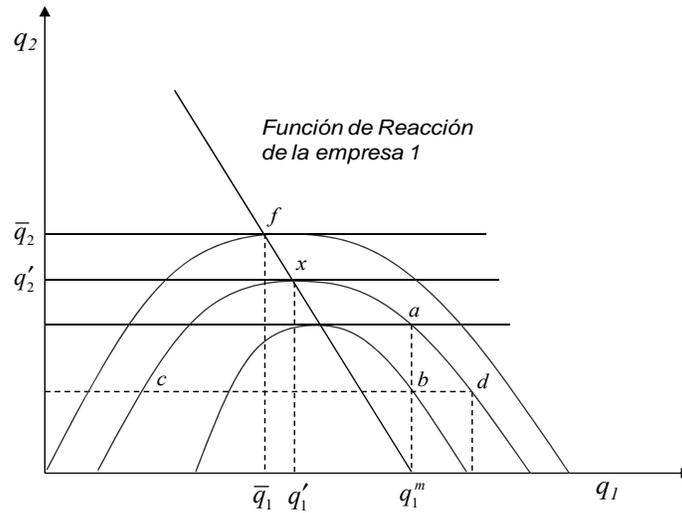
Analicemos ahora las curvas de isobeneficios, grupos de puntos que representan los mismos niveles de beneficios para la empresa 1. Examinemos

el punto  $b$ , donde de nuevo la empresa 1 produce la producción de monopolio  $q_1^M$ , pero ahora la empresa 2 produce menos que en el punto  $a$ . Es fácil apreciar que la reducción de la producción de la empresa 2 aumenta las utilidades de la empresa 1 por encima de lo que estaba en el punto  $a$ . Para regresar los beneficios de la empresa 1 donde se encontraban, es decir, en el punto  $a$ , se tienen dos opciones. Se puede desplazar al punto  $c$  o al punto  $d$ . En el punto  $c$ , la empresa 1 tiene una producción menor que en el punto  $b$ , lo que aumenta el precio del producto pero disminuye los beneficios de la empresa porque ahora vende una cantidad menor. En el punto  $d$ , la empresa 1 tiene una producción mayor que en el punto  $b$ , lo que le permite vender una cantidad mayor, pero la producción adicional disminuye el precio y también aumenta los costos de la empresa. Así, los puntos  $c$ ,  $a$  y  $d$  tienen los mismos niveles de beneficios. En general, las curvas de isobeneficio para la empresa 1 tienen la forma que aparece en el gráfico, las curvas más cercanas al eje horizontal (más cercanas al nivel de producción de monopolio) representan niveles de beneficios más altos.

En cuanto a las funciones de reacción para las empresas 1 y 2, observemos primero la empresa 1. Para cualquier nivel de producción determinado elegido por la empresa 2, la función de reacción señalará el nivel de producción que maximiza los beneficios para la empresa 1. Supongamos que la empresa 2 establece un nivel de producción  $q_2'$ . Conociendo esta elección, la empresa 1 querrá elegir el nivel de producción que la coloque en la curva de isobeneficio más baja posible. Este nivel de producción se caracteriza por la tangencia de la curva de isobeneficio y la línea trazada de forma paralela al eje horizontal, a la altura de  $q_2'$ . Esta tangencia se presenta en el punto  $x$ , donde el nivel de producción es  $q_1'$ . Cuando la empresa 2 selecciona un nivel de producción más alto, como es  $\bar{q}_2$ , la tangencia se presenta en el punto  $f$ , y el nivel óptimo de producción para la empresa 1 disminuye a  $\bar{q}_1$ . Al seleccionar de forma sucesiva diferentes niveles de producción para la empresa 2 y determinar los puntos de tangencia para la empresa 1, se puede trazar la función de reacción

de la empresa 1. Un análisis similar puede dar como resultado la función de reacción de la empresa 2.

Gráfico N° 4 Derivación alternativa de la curva de reacción



Fuente: Schooter 1996

### 2.1.2 Convergencia en el modelo de Cournot

En el Gráfico N° 5 (a) se muestran las curvas de reacción de ambas empresas y el proceso de convergencia al óptimo, considerando unas cantidades iniciales de  $q_1'$  y  $q_2'$ . Supongamos que la empresa 1 decide primero y produce  $q_1'$ , mientras que la empresa 2 no ha producido nada aún. Dado este nivel de producción de la empresa 1, la empresa 2 decidirá producir  $q_2'$ , para maximizar sus beneficios. Sin embargo, con la producción  $q_2'$  (que ha implicado un incremento en la producción total del mercado y por lo tanto una reducción de los beneficios iniciales para la empresa establecida), la empresa 1 decidirá revisar su decisión y dado ello, producirá  $q_1''$ , punto donde maximiza beneficios para ese nivel de producción de la empresa 2. Luego la empresa 2, dada la producción  $q_1''$  de la empresa 1, produce  $q_2''$ , que es su nuevo punto de maximización. Continuando con este razonamiento se llega al punto donde la

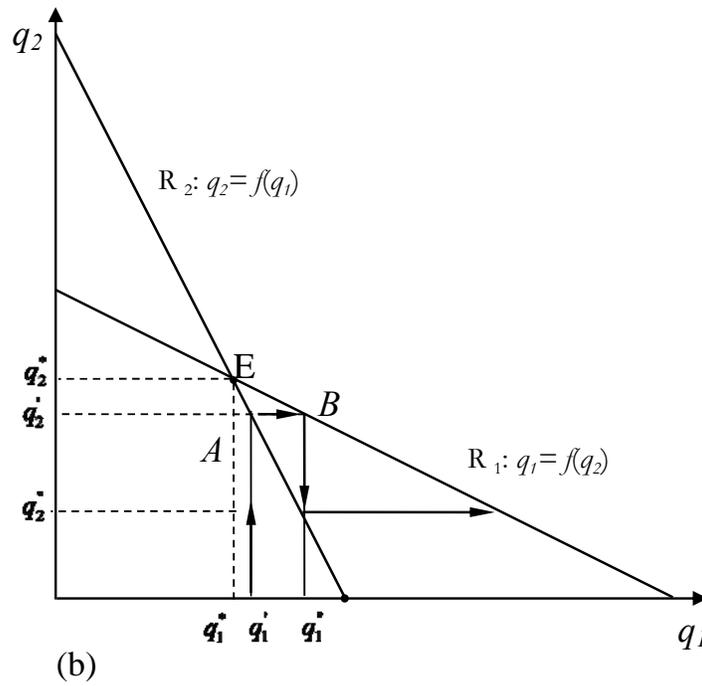
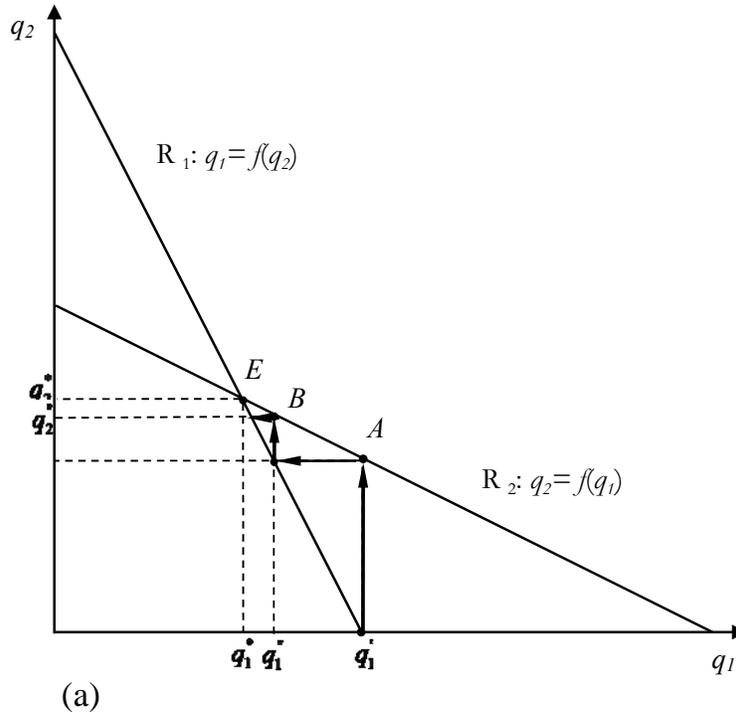
firma 1, al ver la producción  $q_2^*$  de la empresa 2, produce también  $q_1^*$ , y la empresa 2, ante la producción  $q_1^*$  de la empresa 1, produce  $q_2^*$  manteniendo su decisión. En este punto, donde ambas empresas no tienen incentivos para cambiar sus niveles de producción, se habría llegado a lo que se conoce en teoría de juegos como un «equilibrio de Nash».<sup>3</sup>

Se debe notar que para que este comportamiento se cumpla, el cambio en el ingreso marginal de las empresas debe ser menor al cambio en el costo marginal de cada firma (condición de segundo orden de la optimización), pues cuando el costo marginal no es constante un incremento de la producción puede reducir el costo marginal si las economías de escala no se han agotado. Sin embargo, la teoría desarrollada en el modelo de Cournot no afirma que los duopolistas elegirán el nivel de producción  $q_{1E}$  y  $q_{2E}$ , todo lo que dice es que si los eligen, no existirán incentivos para desviarse de este nivel de producción, y el mercado se encontrará en equilibrio.

---

<sup>3</sup> El equilibrio de Nash en teoría de juegos corresponde a un conjunto de estrategias aplicadas, una para cada jugador, donde ningún jugador obtiene mayores beneficios si cambia unilateralmente su estrategia, mientras los otros no cambien la suya (Nash 1951). Una introducción a la teoría de juegos se puede consultar en Gibbons 1997. Un texto muy útil de teoría de juegos orientada a la organización industrial se puede consultar en Fudenberg y Tirole 1989.

Gráfico N° 5 Convergencia en el modelo de Cournot y el caso de equilibrio inestable



Sin embargo, un caso a tener en cuenta en el modelo de Cournot, es la posibilidad de la no existencia de convergencia, la cual podría producirse dada una determinada posición de las funciones de reacción, específicamente, para el caso en el cual la función de reacción de la empresa 2 tenga mayor pendiente que la función de reacción de la empresa 1.

Para este caso, aún sigue siendo válido el enunciado de que si las empresas llegan a alcanzar el equilibrio no tendrán incentivos a desviarse. Sin embargo, el proceso de convergencia para obtener el equilibrio no es confiable.

Así, en el Grafico 5 (b), se muestra lo antes expuesto, es decir, el caso de un equilibrio inestable en el modelo de Cournot<sup>4</sup>. Así, si ambas empresas no se encuentran en el equilibrio, como por ejemplo en el punto A, donde la empresa 1 produce una cantidad  $q_1'$ . Dado este nivel de producción, la empresa 2 elegirá producir  $q_2'$ , según su función de reacción  $R_2$ , ubicándose debajo de su producción de equilibrio  $q_2^*$ . Seguidamente a ello, la empresa 1, de acuerdo a su función de reacción, al observar que la empresa 2 eligió  $q_2'$ , aumentará su producción desde  $q_1'$  hacia  $q_1''$  desplazándola más lejos del equilibrio. Con la producción de la empresa 1 ahora en  $q_1''$ , la función de reacción de la empresa 2 señala que disminuirá su producción desde  $q_2'$  hasta  $q_2''$ , alejándose también del equilibrio. Si continuamos con el procedimiento seguido, se observa que el proceso es divergente (es decir no se estabiliza en un punto).

### *2.1.3 Equilibrio en el modelo de Cournot*

A continuación se muestra el cálculo del equilibrio para el caso de un oligopolio compitiendo a lo Cournot con las siguientes características:

---

<sup>4</sup> Se puede revisar Seade 1980 para un análisis formal de las condiciones de estabilidad en el modelo de Cournot.

1. Función de demanda inversa lineal<sup>5</sup>:  $P(Q) = a - bQ$  donde

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i \quad y \quad n = 2.$$

2. Función de costos  $C(q_i) = F_i + c_i q_i$  para  $i = 1, 2$ .

Se explicarán dos casos, cuando los costos marginales son constantes e iguales entre las empresas, y el caso cuando los costos marginales son diferenciados.

### 2.1.3.1 Con costos marginales constantes

Considerando costos marginales constantes entonces  $c_i = c \quad \forall i$ , la función de costos cada empresa sería:

$$C(q_i) = F_i + c q_i.$$

Entonces la función de beneficios quedaría expresada de la siguiente manera:

$$\pi_i = P(Q)q_i - C(q_i)$$

Para el caso de la empresa 1, los beneficios quedarán expresados de la siguiente manera, luego de reemplazar las anteriores funciones:

$$\pi_1 = (a - b(q_1 + q_2))q_1 - F_1 - c q_1$$

La condición de primer orden es la siguiente:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = a - 2bq_1 - bq_2 - c = 0 \quad \therefore q_1 = \frac{a - c - bq_2}{2b} \quad 6$$

---

<sup>5</sup> En todo el documento se análisis se realizará usando este supuesto. Se puede consultar la sección 2.4.1 de Martin 2002 para un análisis del modelo de Cournot con dos empresas con una demanda de elasticidad constante.

<sup>6</sup> Se puede verificar que estamos alcanzando un máximo dado que la función de beneficios es cóncava y por lo tanto su segunda derivada es negativa. En este caso  $\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial q_1^2} = -2b < 0$ . Un análisis detallado de este tipo de condiciones para el modelo de Cournot se puede consultar en la sección 4.2 de Vives 2001.

Tomando la notación de Martin 2002, "S" (de *supply*) corresponde a la cantidad de competencia perfecta para estos modelos  $\left(S = \frac{a-c}{b}\right)$  tenemos:

Conociendo que la curva de reacción de la empresa 2 es simétrica tenemos que:

$$R_1 : q_1 = \frac{S}{2} - \frac{q_2}{2}$$

$$R_2 : q_2 = \frac{S}{2} - \frac{q_1}{2}$$

Si reemplazamos  $R_2$  en  $R_1$  tenemos:

$$q_1 = \frac{S}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{S}{2} - \frac{q_1}{2} \right)$$

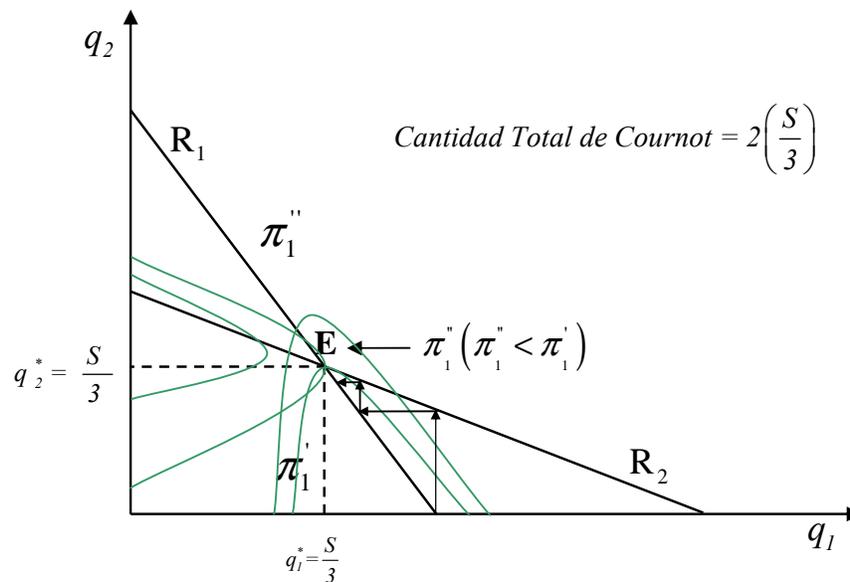
De esta forma obtenemos las cantidades óptimas que deben producir las empresas en la situación de equilibrio:

$$q_1^* = \frac{S}{3}; \quad q_2^* = \frac{S}{3}$$

De esta manera, se producirá en el mercado una cantidad total de  $2S/3$ , mayor a la de monopolio, que se puede demostrar que es  $S/2$  pero menor a la de competencia perfecta  $S$ . Los resultados obtenidos se muestran en el Gráfico N° 6.

El punto E, representa el punto de equilibrio en donde ambas curvas de reacción se cortan y donde cada empresa producirá  $S/3$ , habiendo en el mercado una cantidad total de  $2S/3$ .

Gráfico N° 6 Equilibrio en el duopolio de Cournot lineal



Asimismo, si se realiza el análisis mediante el instrumental de la teoría de juegos se puede demostrar que el punto E representa un "equilibrio de Nash", también llamado en la literatura "equilibrio de Nash-Cournot". Ello debido a que corresponde a una situación donde cada empresa no puede "mejorar" (incrementar sus beneficios), a través de un cambio unilateral de estrategia. El análisis utilizando este enfoque se presenta con mayor detalle en la sección 4.2 donde se discute el problema de la colusión "tácita".

Por otro lado, si asumimos que  $q_2 = 0$  ó en todo caso sólo existe una empresa en el mercado produciendo a lo Cournot, llegamos al caso de una estructura de mercado monopólica y si vemos la curva de reacción de la empresa 1 ( $R_1$ ), ésta queda resumida en:

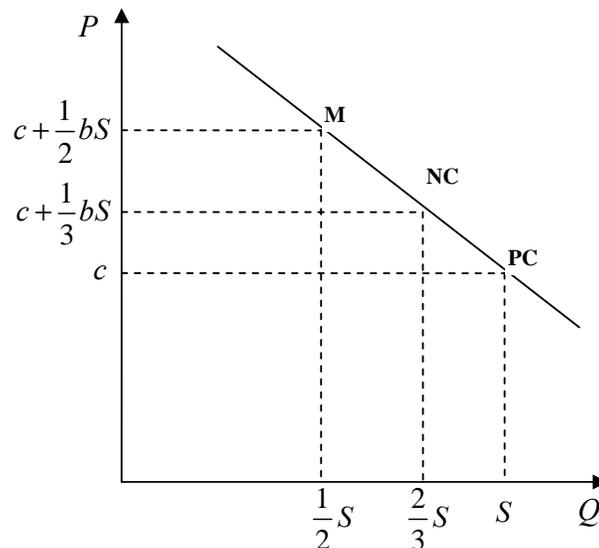
$$R_1 : q_1 = \frac{S}{2}$$

Si es que existe infinitas empresas operando a lo Cournot, llegamos a una situación de competencia perfecta en donde el  $P = c$ , produciendo en conjunto la industria un nivel de producción "S".

### ***Comparación de estructuras de mercado***

El Gráfico N° 7 nos muestra una comparación entre estructuras de mercado, asumiendo costos marginales constantes e idénticos para todas las empresas, y una función de demanda lineal. Lo cual muestra, bajo los supuestos establecidos, que se produce en conjunto un nivel  $S$  bajo competencia perfecta (punto PC),  $1/2S$  bajo una estructura de mercado monopolístico (M) y  $2/3S$  en el caso duopólico de Cournot (punto NC).

Gráfico N° 7 Modelo de competencia perfecta, monopolio y Cournot



### ***Ejemplo de convergencia al equilibrio en el duopolio a lo Cournot***

A modo de ejemplo, consideremos el modelo de Cournot con dos empresas (1 y 2), cuya función inversa de demanda de mercado ( $P$ ) viene dada por la siguiente ecuación lineal:

$$P(Q) = a - Q \quad \text{Donde: } Q = q_1 + q_2$$

Asumimos que el costo total es igual al producto del costo marginal por la cantidad, es decir, que no hay costos fijos, y que este costo marginal es el mismo e igual a cero ( $CMg = 0$ ) para ambas empresas, tal como lo planteó

Cournot en su análisis inicial de la provisión de agua<sup>7</sup>. También asumimos que  $a = 1$ .

En un primer momento, la empresa 1 se comporta como un monopolista, por lo que decidirá cuánto producir, igualando su ingreso marginal con su costo marginal ( $IMg = CMg$ ). La maximización de beneficios (sabiendo que  $q_1 = Q$ ) queda expresada de la siguiente forma:

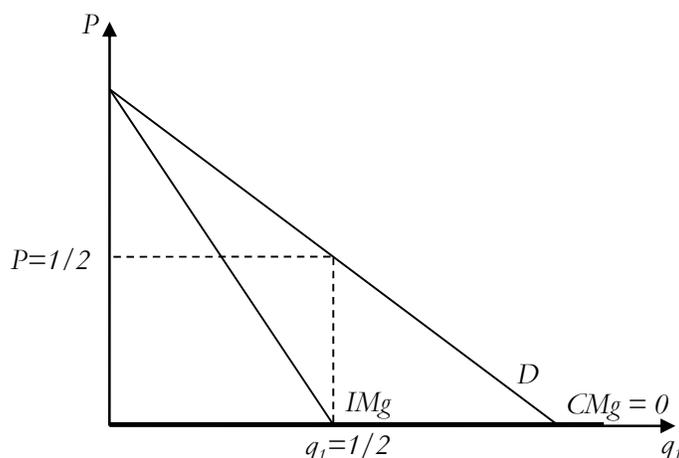
$$\pi = PQ - C(Q)Q = (1-Q)Q - C(Q)Q$$

Obteniendo a partir de la condición de primer orden:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = 1 - 2Q - C'(Q)Q - C(Q) = 0 \quad \text{como } CMg = 0 \quad \therefore q_1 = \frac{1}{2}$$

Reemplazando en la función de demanda inversa, se tiene un  $p = 1/2$ . Estos resultados se grafican en el Gráfico N° 8.

Gráfico N° 8 Modelo de Cournot – Empresa 1 como monopolista



En un segundo momento entrará una nueva empresa, que tomará como dada la producción de la primera, y maximizará sus beneficios como monopolista sobre su demanda residual.

<sup>7</sup> Cournot tomó como ejemplo la competencia de dos manantiales de agua sin costos de extracción.

Remplazando  $q_1=1/2$  en la función de demanda inversa, obtenemos la función de la demanda residual para la empresa 2.

$$P(q_2) = a - \bar{q}_1 - q_2 = 1 - \frac{1}{2} - q_2 = \frac{1}{2} - q_2$$

Maximizando el beneficio de la empresa 2:

$$\pi_2 = P(q_2)q_2 - CMg \times q_2 = \left(\frac{1}{2} - q_2\right)q_2 - CMg \times q_2$$

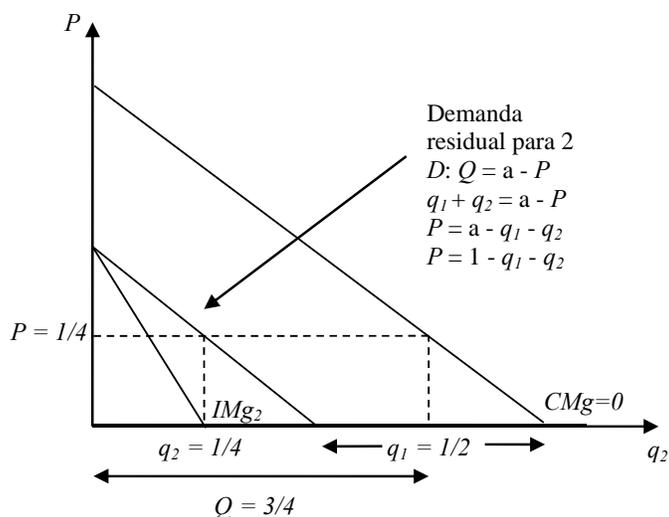
Obteniendo a partir de la condición de primer orden:

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = \frac{1}{2} - 2q_2 - 0 = 0 \therefore q_2 = \frac{1}{4}$$

Reemplazando tenemos que:  $P(q_2) = \frac{1}{4}$

Los resultados de este segundo momento se reflejan en el Gráfico N° 9.

Gráfico N° 9 Modelo de Cournot – Primer movimiento de la empresa 2



Este nuevo nivel de precios hará que la empresa 1 realice una reevaluación de su primera decisión, considerando la  $q_2=1/4$ .

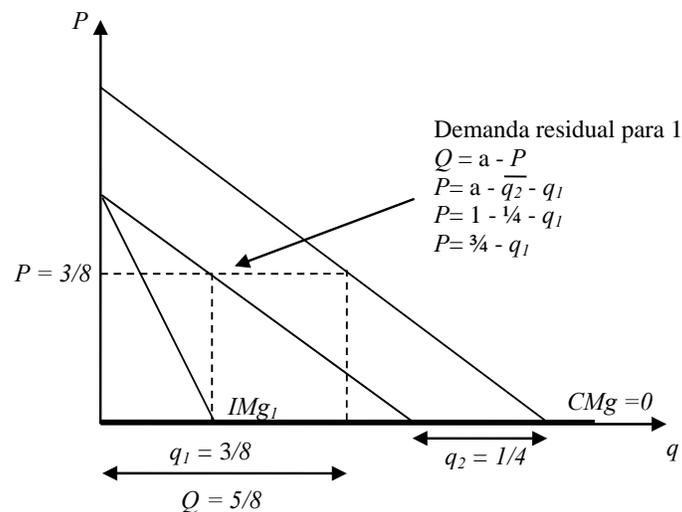
$$\pi_1 = P(q_1)q_1 - CMg \times q_1 = \left(\frac{3}{4} - q_1\right)q_1 - CMg \times q_1$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = \frac{3}{4} - 2q_1 = 0$$

$$q_1 = \frac{3}{8} \quad \text{y} \quad P(q_1) = \frac{3}{4} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

Por lo que el nuevo nivel de la producción de la empresa 1 es 3/8. Los resultados de este tercer momento se reflejan en el Gráfico N° 10.

Gráfico N° 10 Modelo de Cournot – Segundo movimiento de reacción empresa 1



La empresa 2 debe reevaluar su decisión teniendo en cuenta el nuevo nivel de producción de la empresa 1 de 3/8:

$$\pi_2 = P(q_2)q_2 - CMg \times q_2$$

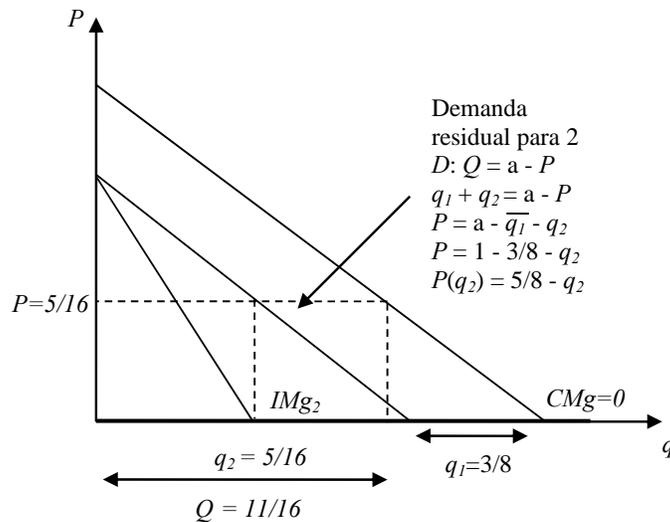
$$\pi_2 = \left(\frac{5}{8} - q_2\right)q_2 - CMg \times q_2$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = \frac{5}{8} - 2q_2 = 0 \quad \therefore \quad q_2 = \frac{5}{16}$$

$$P(q_2) = \frac{5}{8} - \frac{5}{16} = \frac{5}{16}$$

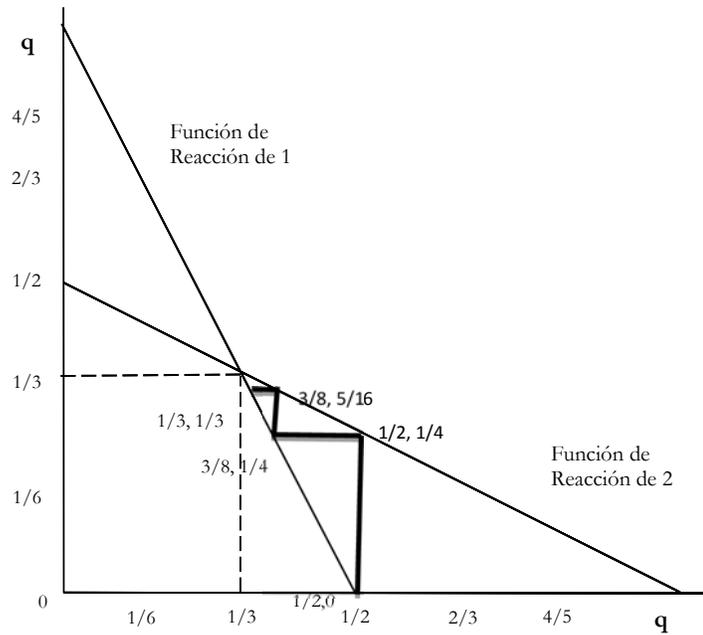
Por lo que el nuevo nivel de la producción de la empresa 2 es  $5/16$ . Los resultados de este tercer momento se reflejan en el Gráfico N° 11.

Gráfico N° 11 Modelo de Cournot - Tercer movimiento de reacción de la empresa 2



Sobre la base de estas decisiones, se puede ir construyendo una relación entre los niveles de producción óptimos de cada empresa, dados los niveles escogidos por la empresa rival. Esta relación que viene a ser justamente la función de reacción de la empresa. La convergencia se encuentra siguiendo este proceso de iteración hasta que ambas empresas maximizan sus beneficios a la vez y no tienen incentivos para modificar sus cantidades ofrecidas al mercado. En el Gráfico N° 12 se presenta este proceso de convergencia.

Gráfico N° 12 Ejemplo de convergencia al equilibrio en el duopolio a lo Cournot



Una forma alternativa y más directa al procedimiento anterior de hallar el punto de convergencia, es usando la condición de primer orden del problema de maximización:

$$\begin{aligned} \pi &= P(Q)Q - C(Q) \\ \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q_1} q_1 + P(Q) - C'(Q) &= 0 \end{aligned}$$

Donde:  $\frac{\partial Q}{\partial q_i} = 1^8$ . Reemplazando los valores para el ejemplo obtenemos,

considerando una función lineal de demanda y costos marginales nulos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial Q} q_1 + p(Q) - C'(Q) &= 0 \\ -1(q_1) + p &= 0 \quad \therefore p = q_1 \end{aligned}$$

---

<sup>8</sup>  $\frac{\partial Q}{\partial q_i} = \sum_{j \neq i} \frac{\partial q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial q_i}{\partial q_i} = 0 + 1 = 1$

Dado que las empresas son simétricas se tiene la misma igualdad para la otra empresa, es decir  $p = q_2$ . Usando este resultado y reemplazando en la función inversa de demanda tenemos:

$$p = 1 - q_1 - q_2 = 1 - p - q_2 \Rightarrow 2p = 1 - q_2$$

Usando los resultados anteriores podemos verificar que se obtiene:

$$2q_2^* = 1 - q_2 \Rightarrow q_2^* = \frac{1}{3}$$

Reemplazando este resultado en la ecuación (iv), se obtiene también el precio ( $p^* = 1/3$ ) y usando (i), la cantidad de equilibrio para la empresa 1 es  $q_1^* = 1/3$

### 2.1.3.2 Con costos marginales diferenciados

Considerando costos marginales diferenciados  $c_i \neq c \quad \forall i$ , la función de costos de cada empresa sería:

$$C_i(q_i) = F_i + c_i q_i$$

Entonces la función de beneficios quedaría expresada de la siguiente manera:

$$\pi_i = P(Q)q_i - C_i(q_i)$$

Los beneficios de cada empresa serán:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= (a - b(q_1 + q_2))q_1 - F_1 - c_1 q_1 \\ \pi_2 &= (a - b(q_1 + q_2))q_2 - F_2 - c_2 q_2\end{aligned}$$

La condición de primer orden es la siguiente:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = a - 2bq_1 - bq_2 - c_1 = 0 \quad \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = a - 2bq_2 - bq_1 - c_2 = 0$$

Siendo la función de reacción de ambas empresas:

$$q_1 = \frac{a - c_1 - bq_2}{2b} \quad \therefore R_1 : q_1 = \frac{S_1 - q_2}{2} \quad (i)$$

$$q_2 = \frac{a - c_2 - bq_1}{2b} \quad \therefore R_2 : q_2 = \frac{S_2 - q_1}{2} \quad (ii)$$

Reemplazando (i) en (ii) hallamos las cantidades de Cournot:

$$q_1^* = \frac{2S_1 - S_2}{3}; \quad q_2^* = \frac{2S_2 - S_1}{3}$$

Si asumimos que:  $c_1 > c_2$  por lo tanto  $-c_1 < -c_2$

Acomodando los términos para formar  $S$ , tenemos:

$$a - c_1 < a - c_2 \Rightarrow \frac{a - c_1}{b} < \frac{a - c_2}{b}$$

Si llamamos a estas cantidades  $S_1$  y  $S_2$ , tenemos que debe cumplirse que:

$$S_1 < S_2$$

Lo que implicaría que:

$$q_1^* = \frac{2S_1 - S_2}{3} < q_2^* = \frac{2S_2 - S_1}{3}$$

$$q_1^* = \frac{a - 2c_1 - c_2}{3b} < q_2^* = \frac{a - 2c_2 - c_1}{3b}$$

Por lo que la producción de la industria (total) para el equilibrio Nash-Cournot, con costos diferenciados resulta:

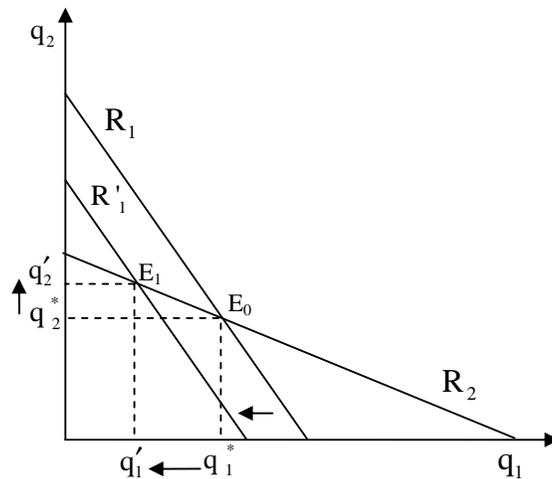
$$Q = q_1^* + q_2^* = \frac{2S_1 - S_2}{3} + \frac{2S_2 - S_1}{3} = \frac{S_1 + S_2}{3}$$

$$Q^* = \frac{S_1 + S_2}{3}$$

$$Q^* = \frac{2a - c_1 - c_2}{3b}$$

Como ya se mencionó, si los costos de ambos productores fueran iguales el equilibrio estaría definido por el punto  $E_0$  (ver Gráfico N° 13). Sin embargo si la empresa 2 tiene menores costos que la empresa 1 (caso asimétrico en costos), o la empresa 1 tiene mayores costos que la empresa 2, el resultado es un equilibrio en el que la empresa de menores costos tendrá la mayor participación de mercado. Una solución de equilibrio, si asumimos un incremento de costos de la empresa 1, es el desplazamiento de su curva de reacción hacia adentro, del punto  $E_0$  al punto  $E_1$ , lo cual genera una reducción de su participación en el mercado y por ende un aumento del de su rival.

Gráfico N° 13 Desplazamiento de la curva de reacción en el modelo de Cournot con costos diferenciados



Incluso la diferencia de costos puede hacer que una de las dos empresa no produzca y la otra lo haga en condiciones monopólicas, pudiendo ocurrir situaciones como  $E_1$  y  $E_2$  mostradas en el Gráfico N° 14, donde la diferencia de costos entre 1 y 2 es tan grande que el equilibrio duopólico no existe. E-. Si asumimos que en un principio ambas empresas producen cantidades positivas del bien y están en equilibrio (punto  $E_0$ ), una solución de esquina podría darse en el punto  $E_1$ , el cual muestra un incremento de los costos de la empresa 2 (desplazamiento de la curva de reacción de  $R_2$  a  $R'_2$ ). Esto muestra lo rentable que puede ser para una empresa en el mercado, el encarecer los costos de

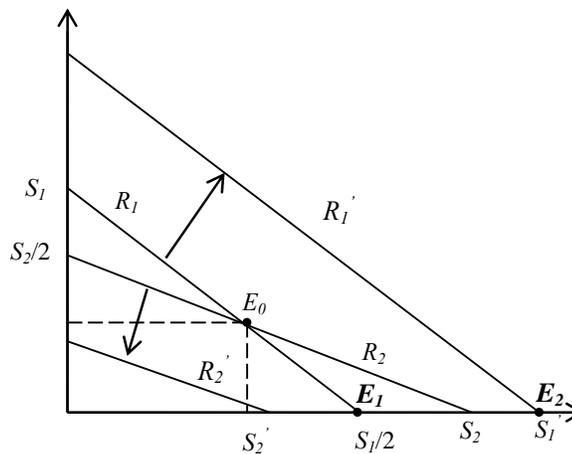
sus rivales, al extremo que los puede sacar del mercado. Asimismo otra solución de esquina se daría en el punto  $E_2$ , el cual refleja el caso de una reducción de los costos de la empresa 1, donde ésta se convierte en la abastecedora de todo el mercado. En ambos casos, no existe un equilibrio Nash-Cournot, allí las soluciones serán monopólicas, a favor de la empresa 1.

En resumen, podemos concluir que la participación de mercado (s) en el modelo de Cournot con costos diferenciados se puede expresar como:

$$s_1 = \frac{q_1}{Q} = \frac{2S_1 - S_2}{S_1 + S_2} = \frac{a - 2c_1 + c_2}{2a - c_1 - c_2}$$

Es decir, la participación de mercado es inversamente proporcional a los costos marginales de cada empresa.

Gráfico N° 14 Solución de esquina del duopolio de Cournot con costos diferentes



Además el precio de equilibrio en el modelo de Cournot se obtiene al reemplazar  $Q^*$  en la función de demanda inversa, resultando la siguiente expresión:

$$P = a - bQ^* = a - b\left(\frac{S_1 + S_2}{3}\right)$$

$$P = a - b\left(\frac{a - c_1}{3b}\right) - b\left(\frac{a - c_2}{3b}\right)$$

$$P = \frac{a}{3} + \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3}$$

Reordenando podemos obtener el precio en función de  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $b$  y  $c_1$ :

$$P = \underbrace{a - c_1}_{bS_1} - b \frac{S_1}{3} - b \frac{S_2}{3} + c_1 \Rightarrow P^* = c_1 + \frac{1}{3}b(2S_1 - S_2)$$

### **Análisis matricial**

Otra forma de obtener el equilibrio Cournot es ver el problema matricialmente, planteando ambas funciones de reacción como un sistema de ecuaciones que se resuelve simultáneamente:

$$q_1 = \frac{S_1}{2} - \frac{1}{2}q_2 \quad ; \quad q_2 = \frac{S_2}{2} - \frac{1}{2}q_1$$

Luego se agrupa las variables exógenas y endógenas como sigue:

$$q_1 + \frac{1}{2}q_2 = \frac{S_1}{2}; \quad \frac{1}{2}q_1 + q_2 = \frac{S_2}{2}$$

Entonces matricialmente nos queda la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1/2 \\ S_2/2 \end{bmatrix}$$

Y operando matricialmente la siguiente operación:

$$\begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_1/2 \\ S_2/2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo se obtienen las mismas soluciones:

$$\begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2S_1 - S_2}{3} \\ \frac{2S_2 - S_1}{3} \end{bmatrix}$$

### ***Ejemplo del modelo de Cournot con costos diferenciados***

Con el siguiente ejemplo, podremos hallar las cantidades de equilibrio para el caso del modelo de Cournot con costos diferenciados. Con una función inversa de demanda de  $P=100 - 20Q$ , y con costos marginales:  $c_1=25$  y  $c_2=50$ , reemplazando obtenemos:

$$S_1 = \frac{a - c_1}{b} = \frac{100 - 25}{20} = \frac{15}{4} = 3,75$$
$$S_2 = \frac{a - c_2}{b} = \frac{100 - 50}{20} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Obtenemos las cantidades de Cournot para ambas empresas:

$$q_1^c = \frac{2(15/4) - 5/2}{3} = 1,67,$$
$$q_2^c = \frac{2(5/2) - 15/4}{3} = 0,42$$

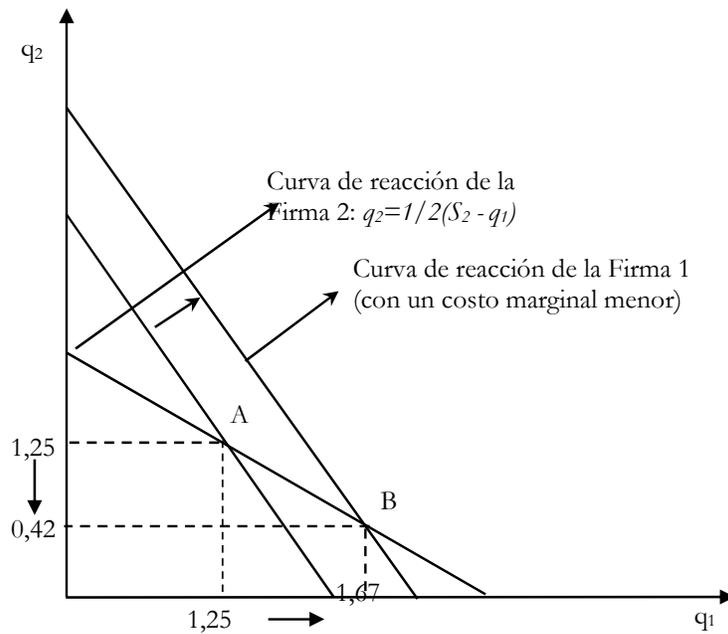
Vemos que la firma que posee una tecnología con costos menores produce una mayor cantidad de la producción a lo Cournot, alrededor del 80% del total.

Si las dos empresas enfrentaran la función de demanda ya descrita y tuvieran el mismo costo marginal, por ejemplo igual a 25, la producción de cada una sería de 1,25 (ver Gráfico N° 15).<sup>9</sup>

---

<sup>9</sup> El desarrollo de este caso se deja al lector.

Gráfico N° 15 Ejemplo de duopolio de Cournot con costos diferenciados



### 2.1.3.3 Con costos cuadráticos

En este caso, supongamos que existen dos empresas que compiten a lo Cournot, y muestran las siguientes funciones de costos:

$$C = \alpha + \beta q + \gamma q^2$$

Con lo cual el costo marginal es:

$$CMg = \beta + 2\gamma q$$

Se enfrenta una función de demanda inversa lineal:  $p = a - bQ$

El problema de maximización de beneficios a resolver por la empresa 1, sería el siguiente:

$$\pi_1 = [a - b(q_1 + \bar{q}_2)]q_1 - C(q_1) = aq_1 - bq_1^2 - b\bar{q}_2q_1 - \alpha - \beta q_1 - \gamma q_1^2$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = a - 2bq_1 - b\bar{q}_2 - \beta - 2\gamma q_1 = 0$$

$$a - \beta - b\bar{q}_2 = (2b + 2\gamma)q_1$$

$$q_1 = \frac{a - \beta - b\bar{q}_2}{2(b + \gamma)}$$

En el caso de empresas simétricas sabemos que también debe cumplirse:

$$q_2 = \frac{a - \beta - b\bar{q}_1}{2(b + \gamma)}$$

Reemplazando  $q_2$  en  $q_1$  tenemos:

$$q_1 = \frac{a - \beta - b\left(\frac{a - \beta - b\bar{q}_1}{2(b + \gamma)}\right)}{2(b + \gamma)}$$

$$\Rightarrow q_1 = \frac{(a - \beta)(b + 2\gamma)}{(3b^2 + 4(\gamma^2 + 2\gamma b))}$$

### ***Ejemplo de Cournot con costos cuadráticos***

A modo de ejemplo del caso de Cournot con costos cuadráticos, desarrollaremos el ejemplo mostrado en Villar 2002<sup>10</sup> para el caso de un modelo de oligopolio de centrales de generación eléctrica. En donde la función de demanda inversa de la central adopta la siguiente forma, expresada en kWh/Mills:

$$P = 100 - \frac{1}{10}Q_T, \text{ Donde: } Q_T = q_1 + q_2$$

---

<sup>10</sup> En este documento se presenta también el algoritmo de cálculo de equilibrio en el modelo de Cournot para tres empresas con costos cuadráticos, donde se procede de manera similar al caso de dos empresas, suponiendo que la primera produce como monopolio con las otras dos en cero y luego produce la segunda tomando esta cantidad como dada. Posteriormente produce la tercera empresa tomando ambas cantidades para reiniciar con la primera empresa.

Y los costos de las 2 centrales son las siguientes:

$$C_1 = 0.02q_1^2 + 15q_1 + 100$$

$$C_2 = 0.04q_2^2 + 10q_2 + 200$$

Reemplazando estos valores en las expresiones de las cantidades obtenidas anteriormente se obtiene el resultado que se muestra en el Cuadro N° 1:

Cuadro N° 1 Equilibrio para Duopolio de Cournot con Costos Cuadráticos

	Central 1	Central 2
Q (cantidad)	258,74	276,47
C (costo)	5.320,03	6.022,13
$\pi$ (beneficio)	6.705,95	6.827,92

En donde la cantidad producida total es de 535,21 KWh y el precio es 46,48 Mills. Bajo estas condiciones la central 2 es la que produce una mayor cantidad y el beneficio obtenido es mayor que el obtenido por la central 1.

#### 2.1.4 Índice de Lerner para el modelo oligopólico de Cournot

Para medir el poder de mercado en el caso del modelo de oligopolio de Cournot, a través del Índice de Lerner<sup>11</sup>, partiremos en primer lugar de la condición de maximización de beneficios bajo dicha estructura de mercado:

$$\text{Max } \pi_i = P(Q)q_i - C(q_i)$$

Donde  $Q$  es el producto total ( $Q = q_1 + q_2 + \dots + q_N$ ) y  $q_i$  el producto de la firma  $i$ .

<sup>11</sup> Este índice fue creado como una medida del poder de mercado por Lerner 1934 y es ampliamente utilizado pues se puede relacionar directamente con las condiciones de primer orden de la maximización de beneficios de las empresas en diferentes mercados. Sin embargo, debe distinguirse de un índice más intuitivo como es el *mark-up*, que es igual a  $\frac{P - CMg_i}{CMg_i}$ .

La condición de primer orden es:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_i} = \frac{\partial P}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q_i} q_i + P(Q) \frac{\partial q_i}{\partial q_i} - \frac{\partial C}{\partial q_i} = 0$$

Considerando que en el modelo de Cournot con dos empresas en el mercado, se asume que la empresa  $i$  toma como dadas las cantidades de las empresas  $j$ , se debe cumplir que  $\frac{\partial q_j}{\partial q_i} = 0, \forall j \neq i$ , por lo que la derivada de la cantidad total con respecto a  $q_i$  sería igual a 1<sup>12</sup>.

Entonces la condición de primer orden se convierte en:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_i} = \frac{\partial P}{\partial Q} q_i + P(q) - C'(q_i) = 0$$

Y utilizando la definición de la elasticidad-precio de la demanda  $\left[ \frac{\partial P}{\partial Q} \frac{Q}{P(q)} = \frac{1}{\varepsilon} \right]$

y realizando un poco de algebra, la condición de primer orden de maximización de beneficios queda expresada de la siguiente manera:

$$\underbrace{\frac{\partial P}{\partial q} \frac{q}{P}}_{\frac{1}{\varepsilon}} \underbrace{q_i}_{s_i} + P - C'(q_i) = 0$$

Donde  $s_i$  representa la participación de mercado de la empresa  $i$  y  $\varepsilon$  representa la elasticidad precio de demanda.

Reordenando podemos despejar el Índice de Lerner para el caso de un oligopolio:

$$L_i = \frac{P(Q) - C'(q_i)}{P(Q)} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{q_i}{Q} = -\frac{s_i}{\varepsilon}$$

<sup>12</sup> Puesto que  $\frac{\partial Q}{\partial q_i} = \sum_{j \neq i} \frac{\partial q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial q_i}{\partial q_i} = 0 + 1 = 1$

### **Relación entre el Índice de Lerner y el HHI para el modelo de Cournot**

Por otro lado, Cowling y Waterson 1976 mostraron que si las empresas compiten a lo Cournot es posible encontrar una relación directa entre el Índice de Lerner promedio ponderado de una industria y el *HHI*.<sup>13</sup> Para demostrar esta relación partimos del Índice de Lerner para un oligopolista a lo Cournot:

$$IL_i = \frac{P(q) - C'(q_i)}{P(q)} = -\frac{s_i}{\varepsilon}$$

Multiplicando a ambos lados por  $s_i$ :

$$s_i \times \frac{P(q) - C'(q_i)}{P(q)} = -s_i \times \frac{s_i}{\varepsilon}$$

Sumando para todas las empresas se puede obtener un Índice de Lerner para el mercado ( $IL_{MDO}$ ), que viene a ser la suma de los Índices de Lerner de cada empresa, ponderada por su participación de mercado.

$$IL_{MDO} = \sum_{i=1}^N \left( s_i \times \frac{P(q) - C'(q_i)}{P(q)} \right) = -\sum_{i=1}^N \left( s_i \times \frac{s_i}{\varepsilon} \right) = -\frac{\sum_{i=1}^N s_i^2}{\varepsilon} = -\frac{HHI}{\varepsilon}$$

Donde:  $\sum_{i=1}^N s_i = 1$

$$IL_{MDO} = \frac{\sum_{i=1}^N s_i P(Q) - \sum_{i=1}^N s_i C'(q_i)}{P(Q)} = \frac{P(Q) - \sum_{i=1}^N s_i C'(q_i)}{P(Q)} = -\frac{HHI}{\varepsilon}$$

$$IL_{MDO} = \frac{P(Q) - \bar{C}}{P(Q)} = -\frac{HHI}{\varepsilon}$$

Como se puede ver, existe una *relación directa entre el HHI y el Índice de Lerner del mercado*, es decir entre el grado de concentración del mercado y la diferencia entre el precio y el costo marginal promedio ponderado del

---

<sup>13</sup> Índice de medida de concentración de Herfindahl-Hirschman

mercado ( $\bar{C}$ ). Sin embargo, esta medida es relativa, pues como se aprecia se puede tener un mismo HHI asociado con diferentes Índices de Lerner dependiendo de la magnitud de la elasticidad de la demanda.

Asimismo para el caso de "N" empresas simétricas (en la cual  $s_i=1/N$ ), el HHI es igual a  $1/N$ , como se puede observar a continuación:

$$HHI = \sum_{i=1}^N s_i^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N}\right)^2 = N \left(\frac{1}{N}\right)^2 = \frac{1}{N}$$

Entonces:

$$IL_{MDO} = \sum_{i=1}^N \left( s_i \times \frac{P(q) - C'(q_i)}{P(q)} \right) = -\frac{HHI}{\varepsilon}$$

$$IL_{MDO} = N \left( \frac{1}{N} \times \frac{P(q) - C'(q_i)}{P(q)} \right) = -\frac{1/N}{\varepsilon}$$

$$IL_{MDO} = IL_i = \frac{P(q) - C'(q_i)}{P(q)} = -\frac{1}{N\varepsilon}$$

Como se puede ver en este caso coinciden el Índice de Lerner del mercado y el Índice de Lerner de cada empresa.

Si partimos de la expresión inicial del Índice de Lerner,  $IL_i = \frac{P(q) - C'(q_i)}{P(q)} = -\frac{s_i}{\varepsilon}$ ,

y considerando "N" firmas iguales en el que la participación del mercado se distribuye equitativamente a todas las empresas, la participación de la i-ésima empresa es:  $s_i = 1/N$ , por lo que:

$$\frac{P(q) - C'(q_i)}{P(q)} = -\frac{1}{N\varepsilon}$$

En este caso se obtiene un resultado igual al anterior, es decir una relación entre los precios y los costos marginales, y el número de empresas de un mercado.

Adicional a lo mostrado anteriormente, es posible encontrar una relaciona directa entre el *HHI* y la varianza de la participación de mercado ( $S_i$ ). Como se puede observar a continuación, donde se parte de la definición de varianza y usando las definiciones de *HHI* se tiene:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{N} \left[ \sum_{i=1}^N \left( S_i - \frac{1}{N} \right)^2 \right] \\ N\sigma^2 &= \left[ \sum_{i=1}^N (S_i)^2 + \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{N} \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^N (S_i) \left( \frac{1}{N} \right) \right] \quad \text{Donde: } \sum_{i=1}^N S_i = 1 \\ N\sigma^2 &= HHI + N \left( \frac{1}{N} \right)^2 - 2 \left( \frac{1}{N} \right) \\ N\sigma^2 &= HHI + \frac{1}{N} - \frac{2}{N} \Rightarrow N\sigma^2 = HHI - \frac{1}{N} \\ HHI &= N\sigma^2 + \frac{1}{N}\end{aligned}$$

Se observa de esta forma una relación directa entre la varianza y el *HHI*, es decir mientras mayor sea la dispersión o variabilidad de la participación de mercado entre las empresas, mayor será el grado de concentración del mercado.

### 2.1.5 La generalización a "N" empresas en el caso lineal

Con una demanda lineal y costos marginales constantes e iguales como se especificó anteriormente, se puede calcular la cantidad y precio de equilibrio cuando  $N$  firmas compiten a lo Cournot, para ello planteamos el problema de maximización de beneficios para la empresa  $i$ :

$$\begin{aligned}\pi_i &= P(Q)q_i - C(q_i) \quad \wedge \quad C(q_i) = F_i + cq_i \\ \pi_i &= P(Q)q_i - F_i - cq_i\end{aligned}$$

Reemplazando  $P(Q)=a-bQ$  y sabiendo que  $Q = q_i + \sum_{j \neq i}^N q_j$ , tenemos:

$$\pi_i = \left[ a - b \left[ q_i + \sum_{j \neq i}^N q_j \right] \right] q_i - F_i - cq_i$$

Aplicando la condición de primer orden  $\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = 0$ :

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = a - 2bq_i - b \sum_{j \neq i}^N q_j - c = 0$$

En equilibrio para el caso de empresas simétricas se cumplirá  $q_j = q_i$  por lo que  $\sum_{j \neq i}^N q_j = (N-1)q_i$ , que es equivalente a  $(N-1)q_j = (N-1)q_i$ .

Reemplazando y despejando  $q_i$  tenemos:

$$\begin{aligned} a - 2bq_i - b(N-1)q_i - c &= 0 \\ q_i &= \left[ \frac{a-c}{b} \right] \left[ \frac{1}{(N+1)} \right] \\ q_i &= \frac{S}{(N+1)} \end{aligned}$$

De esta manera la cantidad total que se produce en la industria, bajo el esquema del modelo de Cournot para  $N$  empresas es:

$$Q^* = \frac{N}{(N+1)} S$$

Lo cual nos quiere decir que la industria producirá un nivel correspondiente a  $\frac{N}{(N+1)}$  del nivel de producción de competencia perfecta ("S").

Luego de ello si queremos obtener el precio de equilibrio, bastará con reemplazar  $Q^*$  en la función de demanda inversa  $P(Q) = a - bQ$ , lo cual nos da el siguiente precio:

$$P = a - bQ$$

$$P = a - b \left[ \left[ \frac{N}{(N+1)} \right] \left[ \frac{a-c}{b} \right] \right]$$

$$\Rightarrow P^* = \frac{a + Nc}{(N+1)}$$

O su equivalente, si recordamos que  $S = \frac{a-c}{b}$ :

$$P^* = c + b \frac{S}{(N+1)}$$

Obteniendo unos beneficios de:

$$\pi_i = p(Q)q_i - cq_i$$

$$\pi_i = \left( c + \frac{a-c}{N+1} \right) \left( \frac{a-c}{b(N+1)} \right) - c \left( \frac{a-c}{b(N+1)} \right)$$

$$\pi_i = \left( \frac{a-c}{b(N+1)} \right) \left( \left( c + \frac{a-c}{N+1} \right) - c \right)$$

$$\pi_i = \left( \frac{a-c}{b(N+1)} \right) \left( \frac{a-c}{N+1} \right)$$

$$\pi_i = \frac{1}{b} \left( \frac{a-c}{N+1} \right)^2$$

Asimismo, reemplazando  $P^*$  en el Índice de Lerner para empresas simétricas, y reemplazando  $S$ , tenemos:

$$\frac{P(Q) - C'(Q)}{P(Q)} = \frac{c + b \left( \frac{a-c}{b} \right) - c}{c(N+1) + b \left( \frac{a-c}{b} \right)} = -\frac{1}{N\epsilon}$$

$$\frac{b \left( \frac{a-c}{b} \right)}{c(N+1) + b \left( \frac{a-c}{b} \right)} = -\frac{1}{N\epsilon} \Rightarrow \frac{a-c}{cN+a} = -\frac{1}{N\epsilon}$$

Despejando  $\varepsilon$ , obtenemos la elasticidad para el modelo de Cournot con  $N$  empresas simétricas:

$$\varepsilon = - \left[ \frac{c}{(a-c)} + \frac{a}{N(a-c)} \right]$$

De forma general, se puede demostrar que la elasticidad de la demanda para el caso de empresas homogéneas siempre será mayor o igual a  $1/N$ . Para ello partimos de la relación anteriormente encontrada:

$$II_i = \frac{P(Q) - C'(q_i)}{P(Q)} = - \frac{1}{\varepsilon} \frac{q_i}{Q} = - \frac{s_i}{\varepsilon}$$

En el caso de " $N$ " empresas idénticas tenemos:

$$\frac{P(Q) - C'(q_i)}{P(Q)} = \frac{1/n}{|\varepsilon|}$$

Reordenando para despejar la elasticidad tenemos:

$$|\varepsilon| = \frac{1}{n} \frac{P(Q)}{\underbrace{P(Q) - C'(q_i)}_{\geq 1}} \Rightarrow |\varepsilon| \geq \frac{1}{n}$$

### **Ejemplo**

Si consideramos el caso en el modelo de Cournot con 10 empresas idénticas, una función con costos marginales constantes y de demanda lineal con parámetros  $a=50$ ,  $b=1$  y  $c=10$ , la elasticidad precio de demanda es igual a  $-0,375$  y un precio igual a 1,36 veces el costo marginal<sup>14</sup>. Sin embargo se puede ver que la elasticidad irá disminuyendo conforme se incrementa el número de empresas, convergiendo a 0,25 que corresponde al caso de competencia perfecta<sup>15</sup> y que el precio se irá acercando al costo marginal.

<sup>14</sup> Queda para el lector realizar el cálculo y el procedimiento de convergencia hacia el equilibrio.

<sup>15</sup> La elasticidad de competencia perfecta para un caso lineal es:  $\varepsilon = - \frac{p}{a-p}$

### 2.1.6 El Modelo de Cournot con contratos bilaterales

En algunos mercados existen dos formas de realizar las ventas, la primera en un mercado de contados o *spot*, mediante transacciones frecuentes, donde se vende de forma centralizada el producto, y la segunda mediante contratos bilaterales a futuro con diferentes plazos<sup>16</sup>. Estos mercados son cada vez más frecuentes, especialmente para el caso de *commodities* y servicios públicos como la provisión de electricidad. Un primer análisis del funcionamiento de estos mercados fue realizado por Allaz y Vila 1993 quienes encontraron que cuanto más contratados estén los agentes que venden el producto menos incentivos tendrán para ejercer su poder de mercado en el mercado *spot*. Este tipo de modelos ha sido ampliamente utilizado para analizar el ejercicio del poder de mercado en sectores como el eléctrico (ver capítulo 4 de Stoft 2002 y Bushnell 2006).

Se considera una empresa  $i$  cuya producción ( $q_i$ ) cubre las cantidades que ha pactado en contratos de venta con sus clientes ( $Q_C$ ) a un precio ( $P_C$ ) y la diferencia entre la cantidad que produce y la contratada ( $q_i - Q_C$ ) la puede vender o comprar al mercado *spot* al precio  $P_S$ , el cual podría ser mayor o menor al precio pactado en el contrato. Este tipo de transacciones son comunes en mercados como el eléctrico y, en general, en los mercados donde exista un precio muy volátil lo cual genera la necesidad de firmar contratos a futuro, donde la entrega del producto, más que una responsabilidad física implica una responsabilidad financiera.

Bajo este contexto, los ingresos de la empresa ( $IT_i$ ) quedan expresados como:

$$IT_i = P_C Q_C + (q_i - Q_C) P_S(Q_T)$$

Donde:

- $Q_C$ : cantidad pactada en el contrato.
- $P_C$ : precio pactado en el contrato.
- $P_S$ : precio *spot* o precio de mercado.
- $q_i$ : cantidad total producida por la firma.

---

<sup>16</sup> Un ejemplo importante de este tipo de mercados es el eléctrico. En García, Nario y Flores 2010 se presenta una discusión de estos modelos para el sector eléctrico.

- $Q_T$ : cantidad total producida en el mercado ( $Q_T = \sum_{i=1}^N q_i$ ).

Y se considera que la firma se encuentra en el largo plazo y tiene la siguiente estructura de costos:

$$CT_i = cq_i$$

Donde:

- $c$ : costo marginal.
- $q_i$ : cantidad total producida por la firma.

Se asume que:

1. La cantidad contratada ( $Q_C$ ) y el precio acordado en el contrato ( $P_C$ ) son independientes del precio de mercado o precio *spot* ( $P_S$ ).
2. Que el costo marginal de la firma ( $CMg$ ) es independiente de la cantidad producida, y
3. Que la firma puede ejercer influencia negativa en el precio *spot* a través de una mayor cantidad vendida (formalmente  $P_S(Q_T)$  o demanda inversa).

Por lo que los beneficios de la firma  $i$  ( $\pi_i = IT_i - CT_i$ ) quedarían expresados de la siguiente manera:

$$\pi_i(Q) = P_C Q_C + (q_i - Q_C) \times P_S(Q_T) - cq_i$$

La empresa maximiza beneficios cuando:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = P_S + (q_i - Q_C) \frac{\partial P_S}{\partial Q_T} \frac{\partial Q_T}{\partial q_i} - c = 0$$

Con el fin de obtener el Índice del Lerner ( $L_i$ ) buscamos una expresión en términos de la elasticidad de la demanda ( $\epsilon$ ). Consideramos en primer lugar que  $\partial Q_T / \partial q_i = 1$  (competencia a lo Cournot) y multiplicamos y dividimos el segundo término de la ecuación anterior por  $Q_T / P_S$  de la siguiente manera:

$$P_S(Q_T) + (q_i - Q_C) \underbrace{\frac{\partial P_S}{\partial Q_T} \frac{Q_T}{P_S} \frac{P_S}{Q_T}}_{1/\epsilon} - c = P_S(Q_T) + \frac{(q_i - Q_C)}{Q_T} \cdot \frac{1}{\epsilon} \cdot P_S - c = 0$$

$$\underbrace{\frac{P_S(Q_T) - c}{P_S(Q_T)}}_{L_i} = - \underbrace{\frac{(q_i - Q_C)}{Q_T}}_{ss} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow L_i = - \frac{ss}{\varepsilon}$$

Donde:

- $L_i = \frac{P_S(Q_T) - CMg_i}{P_S(Q_T)}$ : Índice de Lerner de la firma  $i$  en un contexto de contratos bilaterales.
- $ss = \frac{q_i - Q_C}{Q_T}$ : Participación neta de contratos de la firma  $i$ , en el mercado *spot*.

Si  $ss = 0$  (es decir, si el porcentaje de la cantidad producida destinada al mercado *spot* es cero), el índice de Lerner  $L_i$  sería igual a cero. Esto significa que en un contexto donde las firmas sólo comercializan su producción total mediante contratos bilaterales a futuro, éstas no tienen incentivos para ejercer poder de mercado (es decir, modificar sus niveles de producción con el objetivo de influir sobre el precio *spot*).

Por ejemplo, si la demanda tiene elasticidad unitaria ( $\varepsilon = -1$ ) y  $ss$  en equilibrio es 30%, el índice de Lerner ( $L_i$ ) y el *mark-up*<sup>17</sup> ( $v_i$ ) serían:

$$L_i = - \frac{ss}{\varepsilon} = - \frac{30\%}{-1} = 30\%$$

$$v_i = \frac{L_i}{1 - L_i} = \frac{30\%}{1 - 30\%} = 42.9\%$$

En este contexto, la firma  $i$  tendría incentivos para ejercer poder de mercado reflejándose dicha influencia en un *mark-up* de 42.9%.

Si la demanda es elástica ( $\varepsilon = -1.5$ ) y  $ss$  en equilibrio es 90% el índice de Lerner ( $L_i$ ) y el *mark-up* ( $v_i$ ) serían:

---

<sup>17</sup> Definido como el margen de ganancia entre costos.

$$L_i = -\frac{SS}{\varepsilon} = -\frac{90\%}{-1.5} = 60\% \quad v_i = \frac{L_i}{1-L_i} = \frac{60\%}{1-60\%} = 150\%$$

En este contexto, aun cuando la demanda tiene alguna elasticidad, si la firma tiene un bajo nivel de contratación, ello hará que la empresa, si es competitiva, pueda ejercer su poder en el mercado *spot* reflejándose dicha influencia en un *mark-up* de 150%.

A continuación se muestra como se pueda calcular el equilibrio para el caso de un duopolio de Cournot, tomando como dadas las cantidades contratadas y suponiendo que el precio de contratos ya está fijado antes de iniciar la competencia en el mercado *spot*, con una demanda lineal y costos marginales constantes.

Se consideran 2 empresas cuyas producciones ( $q_i$ ) pueden o no cubrir las cantidades que han pactado previamente en contratos a futuro con sus clientes ( $Q_{ci}$ ) a un precio ( $P_c$ ), vendiendo la diferencia entre la cantidad producida y la contratada ( $q_i - Q_{ci}$ ) en el mercado *spot* al precio  $P_s$ . En este contexto, los beneficios serán:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= P_c Q_{c1} + P_s (Q_T) [q_1 - Q_{c1}] - c_1 q_1 \\ \pi_1 &= P_c Q_{c1} + (a - b(q_1 + q_2)) [q_1 - Q_{c1}] - c_1 q_1 \end{aligned}$$

Obteniendo a partir de la condición de primer orden, la siguiente función de reacción:

$$q_1 = \frac{a - c_1}{2b} - \frac{1}{2}(q_2 - Q_{c1}) \quad (i)$$

Y realizando lo mismo para la segunda empresa:

$$\begin{aligned} \pi_2 &= P_c Q_{c2} + P_s (Q_T) [q_2 - Q_{c2}] - c_2 q_2 \\ \pi_2 &= P_c Q_{c2} + (a - b(q_1 + q_2)) [q_2 - Q_{c2}] - c_2 q_2 \end{aligned}$$

Obteniendo a partir de la condición de primer orden, la siguiente función de reacción:

$$q_2 = \frac{a - c_2}{2b} - \frac{1}{2}(q_1 - Q_{C2}) \quad (ii)$$

Reemplazando (ii) en (i), y despejando  $q_1$ :

$$q_1 = \frac{a - c_1}{2b} - \frac{1}{2} \left( \frac{a - b(q_1 - Q_{C2}) - c_2}{2b} - Q_{C1} \right)$$

$$q_1 = \frac{a - 2(c_1 - bQ_{C1}) + (c_2 - bQ_{C2})}{3b}$$

Realizando lo mismo para  $q_2$ , es decir reemplazando (i) en (ii), y despejamos  $q_2$ :

$$q_2 = \frac{a - 2(c_2 - bQ_{C2}) + (c_1 - bQ_{C1})}{3b}$$

De estas 2 ecuaciones ( $q_1$  y  $q_2$ ) podemos hallar las cantidades de equilibrio en el mercado *spot*, y si suponemos que las empresas no venden en el mercado de contratos a futuro, es decir:  $Q_{C1} = Q_{C2} = 0$ , se encuentran las cantidades de un mercado a lo Cournot simple.

### ***Ejemplo de Cournot con contratos bilaterales***

Se tiene un mercado donde existen dos empresas (compitiendo a lo Cournot), en el mercado *spot* enfrentan una función inversa de demanda dada por  $P = 400 - Q$ . Si suponemos que las empresas 1 y 2 poseen unos costos marginales iguales a 35 y 15 respectivamente, y se han comprometido mediante contratos a futuro por 55 y 40 unidades respectivamente, y que los precios de los contratos a futuro vienen dados, y es igual a 150, entonces cada una maximizará:

Para la primera empresa:

$$\pi_1(Q) = 150(55) + (q_1 - Q_{c1})(400 - Q) - 35q_1$$

Obteniéndose a partir de la condición de primer orden, la siguiente función de reacción:

$$q_1 = \frac{420 - q_2}{2} \quad (i)$$

La segunda empresa también maximizará su función de beneficios dada por:

$$\pi_2(Q) = 150(40) + (q_2 - Q_{c2})(400 - Q) - 15q_2$$

Obteniéndose a partir de la condición de primer orden, la siguiente función de reacción:

$$q_2 = \frac{425 - q_1}{2} \quad (ii)$$

Reemplazando (ii) en (i) obtenemos:

$$q_1 = \frac{420}{2} - \frac{q_2}{2} = \frac{420}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{425 - q_1}{2} \right)$$
$$q_1 = 138.33$$
$$q_2 = 143.33$$

Si suponemos que ninguno vende en el mercado de contratos a futuro, las cantidades encontradas son las modelo simple de Cournot:  $q_1 = 115$  y  $q_2 = 135$ . Comparando ambos resultados, se puede concluir que bajo un esquema de contratos bilaterales, la producción de ambas empresas es mayor que el caso de que sólo destinasen su producción al mercado *spot*, pues pasa de 250 a 281.66.

### 2.1.7 Equilibrio en el modelo de Cournot con información asimétrica <sup>18</sup>

En las secciones anteriores hemos desarrollado diversas variantes al modelo de Cournot, en las que hemos considerado que la información que poseen las empresas es de dominio público, es decir, las empresas que compiten en el mercado conocen con total certeza factores como la demanda, los costos de

---

<sup>18</sup> Sección basada en Gibbons 1997. Consultar para desarrollos más avanzados el capítulo 8 del libro de Vives 2001.

las demás empresas rivales, entre otros. Sin embargo, es muy probable que, al menos una empresa no esté segura de la función de costos de la empresa rival. Por ello, en esta sección se desarrolla el modelo de Cournot en situaciones donde existe información asimétrica.

Este tipo de modelos son estudiados en la literatura de teoría de juegos bajo el concepto de juegos con información incompleta, también llamados juegos bayesianos.

Por simplicidad, pero sin perder generalidad, consideremos que existen dos empresas, la empresa 1 y la empresa 2. Asimismo, la función inversa de demanda es  $P(Q) = a - Q$ , donde  $Q = q_1 + q_2$  es la cantidad agregada del mercado.

Los costos de la empresa 1 son:

$$c_1(q_1) = cq_1$$

Los costos de la empresa 2 son:

$$c_2(q_2) = \begin{cases} c_a q_2 & \text{con probabilidad } \theta \\ c_b q_2 & \text{con probabilidad } 1 - \theta \end{cases}$$

Con  $c_b < c_a$

Existe información asimétrica. La empresa 2 conoce su función de costos, es decir, sabe si su costo marginal es  $c_b$  o  $c_a$  y conoce el costo marginal de la empresa 1. Por su parte, la empresa 1 conoce su función de costos y que el costo de la empresa 2 es  $c_a$  con probabilidad  $\theta$  y  $c_b$  con probabilidad  $1 - \theta$ .

Para encontrar el equilibrio en este modelo, necesitamos determinar las funciones de mejor respuesta para ambas empresas.

*La mejor respuesta de la empresa 2:*

Si el costo de la empresa 2 es  $c_a$  entonces ésta resuelve el problema:

$$\text{Max}_{q_2} (a - q_1 - q_2)q_2 - c_a q_2$$

Obteniendo a partir de la condición de primer orden, la siguiente función de mejor respuesta:

$$q_2(c_a) = \frac{a - q_1 - c_a}{2} \quad (i)$$

Si el costo de la empresa 2 es  $c_b$  entonces ésta resuelve el problema:

$$\text{Max}_{q_2} (a - q_1 - q_2)q_2 - c_b q_2$$

Obteniendo a partir de la condición de primer orden, la siguiente función de mejor respuesta:

$$q_2(c_b) = \frac{a - q_1 - c_b}{2} \quad (ii)$$

*La mejor respuesta de la empresa 1:*

La empresa 1 no conoce el costo de la empresa 2. Por tanto, maximiza su beneficio esperado:

$$\text{Max}_{q_1} \theta (a - q_1 - q_2(c_a) - c)q_1 + (1 - \theta)(a - q_1 - q_2(c_b) - c)q_1$$

Obteniendo a partir de la condición de primer orden, la siguiente función de mejor respuesta:

$$q_1 = \frac{\theta(a - q_2(c_a) - c) + (1 - \theta)(a - q_2(c_b) - c)}{2} \quad (iii)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (i), (ii) y (iii), es decir, incorporando  $q_2(c_a)$  y  $q_2(c_b)$  en (iii):

$$q_1 = \frac{\theta \left( a - \left( \frac{a - q_1 - c_a}{2} \right) - c \right) + (1 - \theta) \left( a - \left( \frac{a - q_1 - c_b}{2} \right) - c \right)}{2}$$

Obtenemos:

$$q_1^* = \frac{a - 2c + \theta c_a + (1 - \theta) c_b}{3}$$

$$q_2^*(c_a) = \frac{a - 2c_a + c}{3} + \frac{(1 - \theta)}{6} (c_a - c_b)$$

$$q_2^*(c_b) = \frac{a - 2c_b + c}{3} + \frac{\theta}{6} (c_a - c_b)$$

En base a estos resultados se puede realizar una comparación con el equilibrio de Cournot con información completa. Con información completa y costos  $c_1$  y  $c_2$ , el equilibrio de Cournot es:

$$\bar{q}_1 = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3}, \quad \bar{q}_2 = \frac{a - 2c_2 + c_1}{3}$$

Se puede observar que el caso de información completa se puede obtener a partir del modelo de Cournot con información incompleta eligiendo  $c_1 = c$ ,  $c_2 = c_a = c_b$ .

Así, la producción de la empresa 1 si conoce que el costo de la empresa 2 es  $c_a$  será:

$$\bar{q}_1(c_a) = \frac{a - 2c + c_a}{3}$$

Asimismo, la producción de la empresa 1 si conoce que el costo de la empresa 2 es  $c_b$  será:

$$\bar{q}_1(c_b) = \frac{a - 2c + c_b}{3}$$

Por lo que se puede obtener que:

$$\bar{q}_1(c_a) \geq q_1^* \geq \bar{q}_1(c_b)$$

Finalmente, se observa que:

$$q_2^*(c_a) > \frac{a - 2c_a + c}{3}; \quad q_2^*(c_b) < \frac{a - 2c_b + c}{3}$$

Esto ocurre porque la empresa 2 no sólo ajusta su cantidad tomando en cuenta sus propios costos, sino que también toma en cuenta que la empresa 1 no conoce el costo de la empresa 2 y produce una cantidad intermedia de la que produciría si conociera con total certeza el costo de la empresa 2 es  $c_a$  o  $c_b$ .

***Ejemplo del modelo de Cournot con información incompleta:***

A modo de ejemplo, consideremos un mercado donde compiten dos empresas que enfrentan una función inversa de demanda que viene dada por:  $P(Q) = 100 - Q$ . Supongamos que el costo de la empresa 1 es S/.10 y es conocido por ambas empresas, pero que el costo de la empresa 2 no es conocido con certeza por la empresa 1, sino que esta empresa estima que el costo es S/.16 con probabilidad  $\theta$ , y S/.4 con probabilidad  $1 - \theta$ .

De acuerdo a lo expuesto anteriormente, la empresa 2, tanto la del tipo de costos altos como la del tipo de costos bajos, resolverá los siguientes problemas de maximización:

$$\begin{aligned} & \text{Max}_{q_2(c_a)} (100 - q_1 - q_2)q_2 - 16q_2 \\ & \text{Max}_{q_2(c_b)} (100 - q_1 - q_2)q_2 - 4q_2 \end{aligned}$$

Obteniendo a partir de la condición de primer orden, las siguientes funciones de reacción:

$$q_2(c_a) = \frac{84 - q_1}{2} \quad (i); \quad q_2(c_b) = \frac{96 - q_1}{2} \quad (ii)$$

Asimismo, la empresa 1 maximizará su beneficio esperado que viene dado por:

$$\text{Max}_{q_1} \theta (100 - q_1 - q_2(c_a) - 10)q_1 + (1 - \theta)(100 - q_1 - q_2(c_b) - 10)q_1$$

Obteniendo a partir de la condición de primer orden, la siguiente función de mejor respuesta:

$$q_1 = \frac{90 - (1 - \theta)q_2(c_b) - \theta q_2(c_a)}{2} \quad (iii)$$

Y resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (i), (ii) y (iii), es decir, incorporando  $q_2(c_a)$  y  $q_2(c_b)$  en (iii) obtenemos las cantidades óptimas:

$$q_1^* = \frac{84 + 12\theta}{3}; \quad q_2^*(c_a) = \frac{168 - 12\theta}{6}; \quad q_2^*(c_b) = \frac{204 - 12\theta}{6}$$

Si por ejemplo suponemos que la probabilidad  $\theta$  que asigna la empresa 1 al costo de la empresa 2 es  $1/2$ , las cantidades óptimas serán:  $q_1 = 30$ ,  $q_2(c_a) = 27$  y  $q_2(c_b) = 33$ .

## 2.2 Modelo de liderazgo en cantidades: Modelo de Stackelberg

### 2.2.1 *Equilibrio en el caso de una empresa líder y una seguidora*

El economista alemán Stackelberg realizó en 1934 una crítica al modelo de Cournot, asumiendo que las empresas competían en cantidades, pero existiendo una jerarquía entre ellas, es decir el oligopolio lo constituían una empresa líder (L) y una empresa seguidora (S). La seguidora toma como dada la producción de la líder y en base a ello maximiza sus beneficios (tiene una curva de reacción similar al modelo de Cournot). La líder conoce como se va a comportar la seguidora e incorpora esta información cuando decide su nivel de producción. Este es un modelo de *oligopolio secuencial*, donde primero decide el líder y en segundo lugar deciden los seguidores, dada la decisión del líder.

La forma de obtener el equilibrio de esta estructura de mercado es resolverlo como un juego secuencial finito mediante inducción hacia atrás (*backward induction*). Esto es, primero se obtiene la condición de equilibrio en el último periodo (los seguidores) y esa condición de equilibrio es incorporada en la decisión del agente que decide en la secuencia previa (el líder). De esta forma, el líder puede determinar cuál es el nivel de producción que maximiza sus beneficios, considerando la reacción que los seguidores tendrán luego que él decida.

A modo de ilustración, veamos que sucede en el equilibrio en el caso de una demanda lineal y costos marginales constantes. En primer lugar, para tener el precio de mercado en función de  $q_L$  (producción de la empresa líder), se reemplaza  $q_S$  (producción de la empresa seguidora) por su función de reacción a lo Cournot ( $R_S$ ), en la función de demanda inversa. Donde  $Q = q_L + q_S$ :

$$P = a - bq_L - bq_S = a - bq_L - \frac{1}{2}b(S - q_L) \quad \text{Donde: } R_S : q_S = \frac{1}{2}(S - q_L) \quad ^{19}$$

$$P = a - \frac{1}{2}bq_L - \frac{1}{2}bS$$

Usando la definición de  $S$  ( $a = c + Sb$ ), tenemos:

$$P = c + \frac{1}{2}bS - \frac{1}{2}bq_L$$

Entonces, el problema de maximización de beneficios de la empresa líder ( $q_L$ ) se puede plantear como:

$$\text{Max}_{q_L} \quad \pi_L = \left( c + \frac{1}{2}bS - \frac{1}{2}bq_L \right) q_L - cq_L$$

A partir de la condición de primer orden, obtenemos:  $q_L = \frac{S}{2}$

---

<sup>19</sup> El procedimiento de obtención de esta función sigue la lógica maximizadora del modelo de Cournot descrita en el punto 2.1

En donde se observa que la cantidad producida por la empresa líder es la mitad de lo que se produce en un modelo de competencia perfecta. Por lo tanto, el precio de mercado será el siguiente:

$$P = c + \frac{1}{2}bS - \frac{1}{2}bq_L$$

$$P = c + \frac{1}{2}bS - \frac{1}{2}b\left(\frac{S}{2}\right)$$

$$P = c + \frac{bS}{4}$$

Reemplazando  $q_L$  y  $P$ , en la función de beneficio de la empresa líder:

$$\pi_L = Pq_L - cq_L$$

$$\pi_L = \left(c + \frac{bS}{4}\right)\left(\frac{S}{2}\right) - c\left(\frac{S}{2}\right) \Rightarrow \pi_L = \frac{b}{2}\left[\frac{S}{2}\right]^2$$

Sabiendo que la empresa seguidora opera a lo Cournot podemos calcular su producción de la siguiente forma:

$$q_s = \frac{1}{2}(S - q_L)$$

$$q_s = \frac{1}{2}\left(S - \frac{S}{2}\right) = \frac{S}{4}$$

Siendo el beneficio para la empresa seguidora el siguiente:

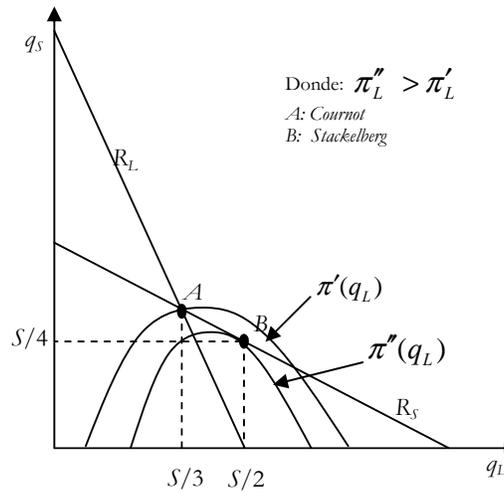
$$\pi_S = Pq_S - cq_S$$

$$\pi_S = \left(c + \frac{bS}{4}\right)\left(\frac{S}{4}\right) - c\left(\frac{S}{4}\right)$$

$$\pi_S = \left(\frac{S}{4}\right)\left[c + \frac{bS}{4} - c\right] \Rightarrow \pi_S = \frac{b}{4}\left[\frac{S}{2}\right]^2$$

En el gráfico N° 16 se puede ver como el líder en este modelo elige su cantidad en un punto de tangencia entre la curva de reacción del seguidor (empresa 2) y su curva de isobeneficio más alta, punto B.

Gráfico N° 16 Equilibrio en el modelo de Stackelberg



**El Índice de Lerner en el modelo de Stackelberg**

La empresa líder maximizará sus beneficios:

$$\pi_L = p(Q)q_L - C(q_L)$$

En donde:  $Q = q_L + q_S$

La condición de primer orden será la siguiente:

$$\frac{\partial \pi_L}{\partial q_L} = \frac{\partial p(Q)}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q_L} q_L + p(Q) - \frac{\partial C(q_L)}{\partial q_L} = 0$$

$$\frac{\partial \pi_L}{\partial q_L} = \frac{\partial p(Q)}{\partial Q} \left[ \frac{\partial q_L}{\partial q_L} + \frac{\partial q_S}{\partial q_L} \right] q_L + p(Q) = \frac{\partial C(q_L)}{\partial q_L}$$

$$\frac{\partial p(Q)}{\partial Q} \left[ 1 + \frac{\partial q_S}{\partial q_L} \right] q_L + p(Q) = \frac{\partial C(q_L)}{\partial q_L}$$

Multiplicando y dividiendo por  $Q/p$ :

$$\frac{\partial p(Q)}{\partial Q} \frac{Q}{p} \frac{p}{Q} \left[ 1 + \frac{\partial q_S}{\partial q_L} \right] q_L + p(Q) = \frac{\partial C(q_L)}{\partial q_L}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{p}{Q} q_L + \frac{p}{Q} \frac{\partial q_S}{\partial q_L} q_L \right] + p(Q) = C'(q_L)$$

Denominamos a la participación de mercado del líder como:  $s_L = \frac{q_L}{Q}$ :

$$p(Q) - C'(q_L) = -\frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{p}{Q} q_L + \frac{p}{Q} \frac{\partial q_S}{\partial q_L} q_L \right]$$

$$p(Q) - C'(q_L) = -\frac{p}{\varepsilon} \left[ \frac{q_L}{Q} + \frac{q_L}{Q} \frac{\partial q_S}{\partial q_L} \right]$$

Reordenando, despejamos el Índice de Lerner de la empresa líder ( $IL_L$ ):

$$IL_L = \frac{p(Q) - C'(q_L)}{p} = -\frac{1}{\varepsilon} \left[ s_L + s_L \frac{\partial q_S}{\partial q_L} \right]$$

$$IL_L = -\frac{s_L \left( 1 + \frac{\partial q_S}{\partial q_L} \right)}{\varepsilon} = -\frac{s_L \left( 1 + \frac{\partial R_S}{\partial q_L} \right)}{\varepsilon}$$

$$IL_L = -\frac{s_L}{\varepsilon} \left[ 1 + \frac{\partial R_S}{\partial q_L} \right]$$

### 2.2.2 La generalización para "N" empresas en el caso lineal

Con una función inversa de demanda lineal igual a: ( $P = a - bQ$ ), donde

$Q = q_L + \sum_{f=1}^N q_f = q_L + Q^f$  y costos marginales constantes, se puede calcular el

precio de equilibrio cuando existe en el mercado una empresa líder (L) y N firmas seguidoras, para ello planteamos el problema de maximización de beneficios para cada tipo de empresa:

*Líder:*

$$\pi_L = Pq_L - c_L q_L = [a - bq_L - bQ^f] q_L - c_L q_L$$

*Seguidora:*

$$\pi_i^f = Pq_i^f - c_i^f q_i^f = [a - bq_i^f - bQ_{-i}^f - bq_L] q_i^f - c_i^f q_i^f$$

Donde:  $Q^f = q_i^f + Q_{-i}^f$  en esta expresión se está separando a las empresas seguidoras, en una dos: una seguidora  $i$  y el resto de seguidoras se han agrupado en la siguiente expresión  $Q_{-i}^f$ .

Como se mencionó líneas arriba, este es un juego secuencial por lo que su resolución empieza maximizando el beneficio de cada empresa seguidora para hallar su curva de reacción:

$$\frac{\partial \pi_i^f}{\partial q_i^f} = (a - c_i^f) - bQ_{-i}^f - bq_L - 2bq_i^f = 0$$

$$R_i^f(Q_{-i}^f, q_L): q_i^f = \left( \frac{a - c_i^f}{2b} \right) - \frac{1}{2}Q_{-i}^f - \frac{1}{2}q_L$$

Sumando horizontalmente tenemos (para obtener la expresión para todas las empresas seguidoras):

$$\sum_{i=1}^N q_i^f = \sum_{i=1}^N \frac{S_i^f}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_{-i}^f - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} q_L$$

$$\sum_{i=1}^N q_i^f = \sum_{i=1}^N \frac{S_i^f}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_{-i}^f - \frac{1}{2} Nq_L$$

i) Si  $c_i^f = c^f \rightarrow S_i^f = S^f \quad \forall i \in [1, N]$

Es decir, si los costos marginales de las empresas seguidoras son constantes en iguales a  $c^f$ , tenemos que la suma de las curvas de reacción de cada empresa ( $Q^f$ ) será:

$$Q^f = \frac{NS^f}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_{-i}^f - \frac{1}{2} Nq_L$$

Sumando y restando  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i^f$  a la expresión anterior tenemos:

$$Q^f = \frac{NS^f}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_{-i}^f - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i^f + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i^f - \frac{1}{2} Nq_L$$

$$Q^f = \frac{NS^f}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (Q_{-i}^f + q_i^f) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i^f - \frac{1}{2} Nq_L$$

Donde:  $\sum_{i=1}^N q_i^f = Q^f$

$$Q^f = \frac{NS^f}{2} - \frac{N}{2}Q^f + \frac{1}{2}Q^f - \frac{1}{2}Nq_L$$

$$\left[1 + \frac{N}{2} - \frac{1}{2}\right]Q^f = \frac{NS^f}{2} - \frac{N}{2}q_L$$

Despejando  $Q^f$ , tenemos:

$$Q^f = \left(\frac{N}{N+1}\right)[S^f - q_L]$$

Por lo tanto, el beneficio de la empresa líder es:

$$\pi_L = \left[ a - bq_L - bQ^f \right] q_L - c_L q_L$$

$$\pi_L = (a - c_L)q_L - bQ^f q_L - bq_L^2$$

Reemplazando la función de reacción conjunta de todas las seguidoras ( $Q^f$ ) en la función de beneficios de la empresa líder tenemos:

$$\pi_L = (a - c_L)q_L - b\left(\frac{N}{N+1}\right)[S^f - q_L]q_L - bq_L^2$$

$$\pi_L = (a - c_L)q_L - b\left(\frac{N}{N+1}\right)S^f q_L + b\left(\frac{N}{N+1}\right)q_L^2 - bq_L^2$$

La empresa líder maximiza sus beneficios eligiendo su nivel de producción, considerando el comportamiento que tendrán las empresas seguidoras en el mercado:

$$\frac{\partial \pi_L}{\partial q_L} = (a - c_L) - b\left(\frac{N}{N+1}\right)S^f + 2b\left(\frac{N}{N+1}\right)q_L - 2bq_L = 0$$

$$(a - c_L) - b\left(\frac{N}{N+1}\right)S^f - 2b\left(\frac{1}{N+1}\right)q_L = 0$$

$$q_L^* = \left(\frac{a - c_L}{2b}\right)(N+1) - \frac{NS^f}{2} = \frac{S^L}{2}(N+1) - \frac{NS^f}{2}$$

Resultado de ello, tenemos que la empresa líder maximizará sus beneficios produciendo una cantidad  $q_L^*$ :

$$q_L^* = \frac{1}{2}[(N+1)S^L - NS^f]$$

Reemplazando  $q_L$  en la suma de las curvas de reacción de las empresas seguidoras ( $Q^f$ ), tenemos que todas las empresas seguidoras producirán una cantidad  $Q^{f*}$ :

$$Q^{f*} = \left(\frac{N}{N+1}\right)[S^f - q_L]$$

$$Q^{f*} = \left(\frac{N}{N+1}\right)\left[S^f - \frac{1}{2}\frac{(N+1)S^L}{2} + \frac{1}{2}NS^f\right]$$

$$Q^{f*} = \left(\frac{N}{N+1}\right)\left[\frac{1}{2}(N+1)(S^L - S^f) + \frac{1}{2}NS^f\right]$$

$$Q^{f*} = \frac{N}{2}(S^e - S^f) + \frac{1}{2}\left(\frac{N}{N+1}\right)S^f$$

Por lo tanto la cantidad total del bien en el mercado resultara de sumar las cantidades de la seguidora con la empresa líder ( $Q = q_L + Q^f$ )

$$Q = \frac{N+1}{2}S^L - \frac{N}{2}S^f + \frac{N}{2}(S^f - S^L) + \frac{1}{2}\left(\frac{N}{N+1}\right)S^f$$

$$Q^* = \frac{1}{2}\left[S^e + \left(\frac{N}{N+1}\right)S^f\right]$$

$$Q^* = \frac{1}{2}\left[S^L + \left(\frac{N}{N+1}\right)S^f\right]$$

ii) Si  $c_i^f = c^f = c_i = c \rightarrow S^L = S^f = S \quad \forall i \in [1, N]$

Realizando el mismo procedimiento para el cálculo de  $Q^*$  tenemos como resultado:

$$Q^* = \frac{S}{2}\left[1 + \frac{N}{N+1}\right]$$

$$Q^* = \left( \frac{2N+1}{N+1} \right) \left( \frac{S}{2} \right)$$

Sí  $N=1$ , es decir que sólo existe en el mercado una empresa líder y una seguidora tenemos:

$$Q^* = \left( \frac{3}{2} \right) \left( \frac{S}{2} \right) \Rightarrow Q^* = \frac{3}{4}S$$

Por otro lado si  $N \Rightarrow +\infty$  tenemos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q^* = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{2N+1}{N+1} \right) \left( \frac{S}{2} \right)$$

Dividiendo entre  $N$  el numerador y el denominador de la primera expresión obtenemos, que en el límite cuando  $N$  tiende a infinito la cantidad disponible en el mercado será igual al de una estructura de mercado bajo competencia perfecta.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q^* = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{2 + \frac{1}{N}}{\frac{1}{N} + 1} \right) \left( \frac{S}{2} \right) \quad \therefore Q \rightarrow \left( \frac{2}{1} \right) \left( \frac{S}{2} \right) = S$$

### 3. COMPETENCIA EN PRECIOS

#### 3.1 Modelo de Bertrand

En este modelo la variable estratégica de las empresas es el precio, y fue planteado por Bertrand en 1883 como una alternativa y crítica al modelo de Cournot de competencia en cantidades, pues en los mercados la intuición indica que las empresas compiten por quién otorga el precio más bajo. El equilibrio de Nash se obtiene cuando cada una de dichas empresas decide fijar sus precios considerando la maximización de sus propios beneficios, pero teniendo en cuenta el precio que están cobrando las otras empresas.

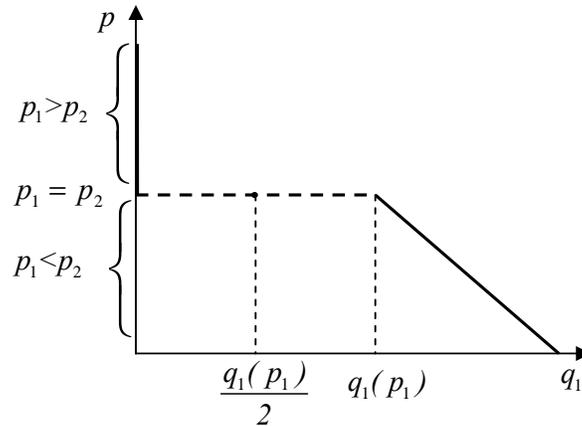
Un resultado interesante que podemos ver en este modelo sencillo, es que el precio de mercado no depende ni del número de empresas ni del tamaño relativo entre aquellas existentes, sino de las diferencias de costos entre las empresas que operan en el mercado.

Considerando por ejemplo, el caso de dos empresas que poseen la misma estructura de costos (el caso extremo de este modelo) predice que las empresas competirán hasta igualar sus precios a su costo marginal, pues basta que una de las empresas reduzca ligeramente su precio para apropiarse de todo el mercado. Esto se puede ver en el Gráfico N° 17. Si consideramos el caso de un duopolio, si la empresa 2 vende a un precio  $p_2$  y la empresa 1 decide vender a un precio mayor, su demanda será cero, definida por la línea gruesa vertical. En el caso que la empresa 1 venda al mismo precio que la empresa 2, ambas empresas se repartirán el mercado en partes iguales (esta regla de racionamiento puede ser diferente en la realidad). De otro lado si la empresa 1 vende a un precio menor a  $p_2$ , abastecerá toda la demanda de mercado a ese precio.

La forma de la función de demanda para la empresa 1 se muestra a continuación:

$$d_1(p_1, p_2) = \begin{cases} d(p_1) & \text{si } p_1 < p_2 \\ d(p_1)/2 & \text{si } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{si } p_1 > p_2 \end{cases}$$

Gráfico N° 17 Demanda residual que enfrenta la empresa 1 para distintos precios

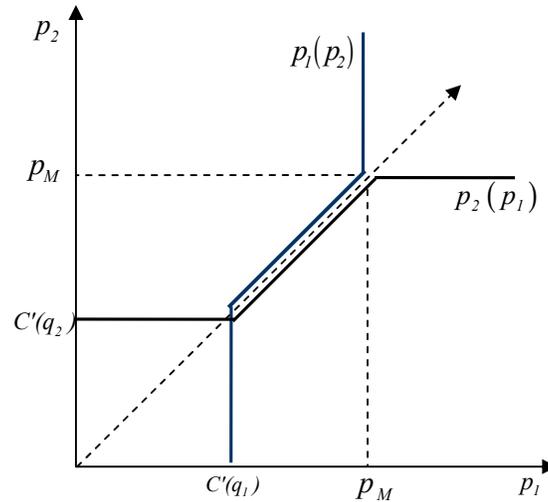


En términos de la curva de reacción de las empresas que compiten a lo Bertrand tenemos lo siguiente:

$$p_1(p_2) = \begin{cases} p^M & \text{si } p_2 > p^M \\ p_2 - \varepsilon & \text{si } c \leq p_2 \leq p^M \\ c & \text{si } p_2 < c \end{cases}$$

Esto se puede entender mejor si visualizamos el Gráfico N° 18, en este se observa que, para el caso de la empresa 1, ésta cobrará un precio monopolístico en el caso que la empresa 2 cobre un precio mayor que el monopolístico, e igual al costo marginal en el caso que la segunda empresa cobre un precio menor al costo marginal. Estos dos puntos son los extremos de las funciones de reacción. Para los puntos intermedios, cuando la oferta del competidor está entre el costo marginal y el precio de monopolio, la mejor respuesta sería ofertar un precio ligeramente menor que la otra empresa, es decir a la izquierda de la recta de 45%.

Gráfico N° 18 Curvas de Reacción de las empresas compitiendo a lo Bertrand

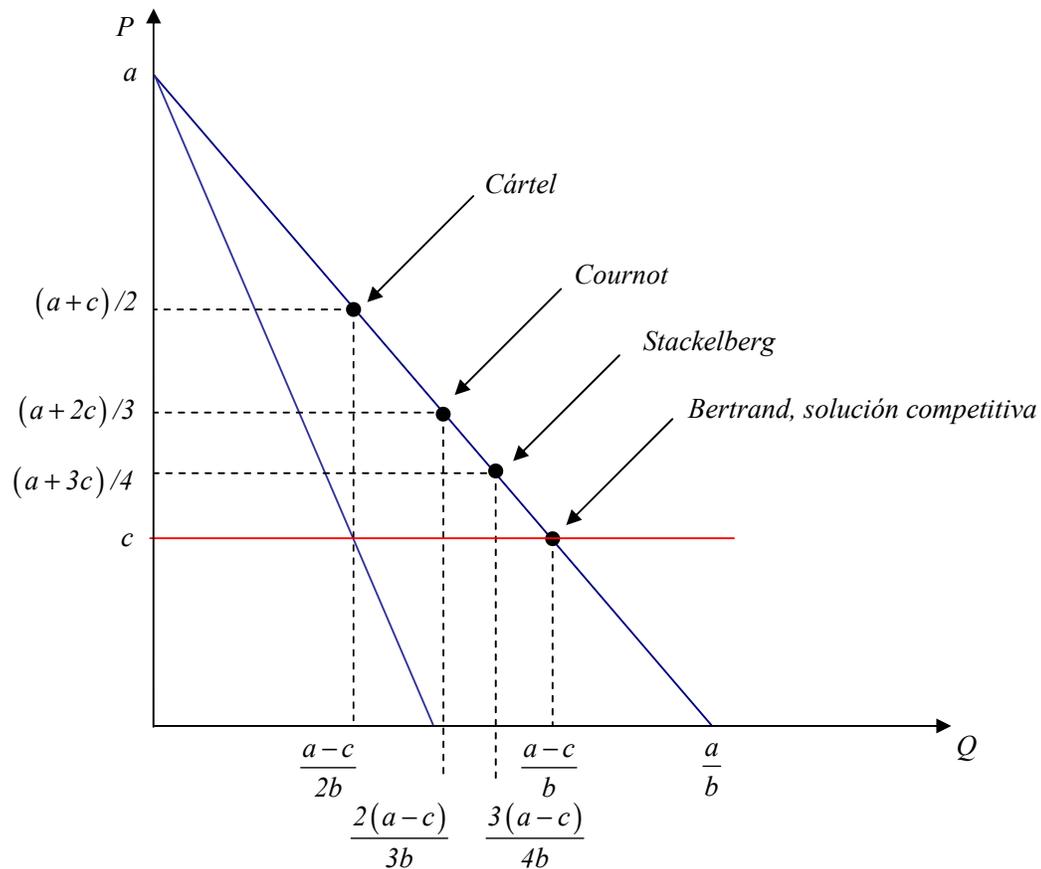


Sin embargo, este resultado se modifica si se introducen *restricciones de capacidad*, es decir, que ambas empresas no puedan cubrir todo el mercado por sí solas, se incorpora la posibilidad de diferenciar productos entre ellas, lo cual reduce la intensidad de la competencia en precios, o se incluyen aspectos dinámicos en el juego (lo cual puede dar lugar a conductas como la "colusión tácita" y el sostenimiento de beneficios extraordinarios).

***A modo de resumen***

Hasta aquí podemos llevar a cabo un resumen de los principales resultados obtenidos de los modelos mencionados, con los supuestos de demanda lineal y productos homogéneos. Como se observa en el Gráfico N° 19, las estructuras de mercado oligopólicas, se encuentran en situaciones intermedias de eficiencia, entre los dos modelos extremos (competencia perfecta o Bertrand y monopolio o cártel). La ubicación relativa entre el caso de competencia a lo Cournot y el modelo de liderazgo en cantidades dependerá en un caso más general del número de empresas involucradas en el análisis.

Gráfico N° 19 Resumen de los modelos de oligopolio con productos homogéneos



Nota: el gráfico se ha construido considerando la siguiente función de demanda inversa:  $P = a - bQ$ .

### 3.2 Modelo de Edgeworth

Una de las alternativas brindadas por Edgeworth 1935 ante la paradoja de Bertrand, es considerar que las empresas en realidad no están en la capacidad de abastecer a toda la demanda, teniendo *restricciones de capacidad*, es decir en el caso de la empresa  $i$ , ésta presenta una capacidad limitada de producción ( $\bar{q}_i$ ), lo cual genera una demanda residual (inversa) para la empresa  $j$  ( $P^R(Q)$ ), dando la posibilidad de que la empresa  $j$  ejerza su poder de mercado fijando un precio  $P(\bar{q}_i + q_j)$ . El Gráfico N° 20 muestra estos resultados. En el cual se observa la función de  $CMg$  de la empresa  $i$ , siendo

esta fija al nivel de  $\bar{q}_i$ , ya que presenta restricción de capacidad. Considerando este nivel de producción, la empresa j ( $q_j$ ) determina su nivel de producción a partir de su demanda residual (línea roja). Recordemos que la empresa j puede ejercer su poder de mercado, por lo que  $q_j$  se obtiene de igualar el ingreso marginal ( $IMg^R$ ) con el costo marginal ( $CMg$ ). Obteniendo un nivel de producción total de  $\bar{q}_i + q_j$ , menor al nivel de competencia perfecta, y con un precio  $P(\bar{q}_i + q_j)$ , mayor al nivel competitivo (representado por las líneas verdes en el gráfico).

La explicación funcional del modelo es:

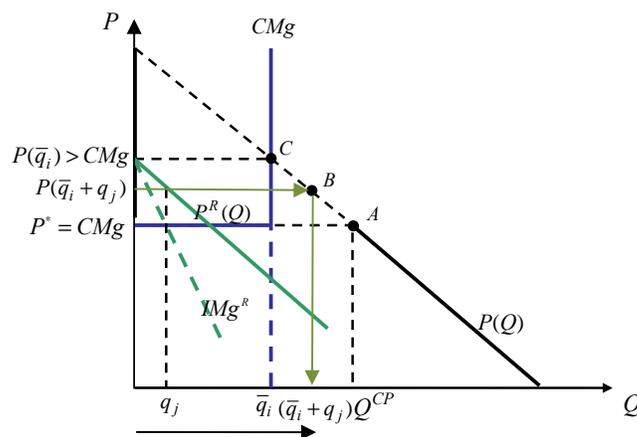
$$\text{Si } P_i < P_j, q_i^* = \text{Min} \left\{ \bar{q}_i, D(P_i) \right\} \text{ y } q_j^* = \text{Min} \left\{ \bar{q}_j, \text{Max} \left[ 0, D(P_j) - \bar{q}_i \right] \right\}$$

$$\text{Si } P_i > P_j, q_j^* = \text{Min} \left\{ \bar{q}_j, D(P_j) \right\} \text{ y } q_i^* = \text{Min} \left\{ \bar{q}_i, \text{Max} \left[ 0, D(P_i) - \bar{q}_j \right] \right\}$$

Si  $P_i = P_j$ :

$$q_i^* = q_j^* = \text{Min} \left\{ \bar{q}_i, \frac{D(P_i)}{2} + \text{Max} \left[ 0, \frac{D(P_i)}{2} - \bar{q}_j \right] \right\} = \text{Min} \left\{ \bar{q}_i, \text{Max} \left[ \frac{D(P_i)}{2}, D(P_i) - \bar{q}_j \right] \right\}$$

Gráfico N° 20 Construcción de la demanda Residual en el Modelo de Edgeworth



Sin embargo el modelo predice que los precios fluctuarán cíclicamente sin llegar a algún equilibrio. Supongamos que cada duopolistas satisface la mitad de la cantidad demandada, de tal forma que cada empresa se enfrenta a la curva de demanda  $D_i$  (empresa  $i$ ) y  $D_j$  (empresa  $j$ ), pero que ninguna empresa tenía la capacidad suficiente para satisfacer completamente la mitad del mercado que le correspondería a un precio de cero<sup>20</sup>. El Gráfico N° 21 muestra lo mencionado anteriormente, en donde  $\bar{q}_i$  y  $\bar{q}_j$  (barras sombreadas) representan las restricciones de capacidad y los ejes horizontales representan los costos marginales cero para cada empresa. Ambas empresas tienen individualmente la capacidad de satisfacer la cantidad de monopolio al igualar su  $IMg=CMg$ , sin embargo no tienen la capacidad de abastecer la cantidad socialmente óptima ( $p=CMg$ ).

Como se observa cada empresa tiene una cantidad demandada que no es abastecida. Por ejemplo, en el caso de la empresa  $i$ , ésta tiene una producción igual a  $\bar{q}_i - q_i$  que no es vendida al precio  $p'$ , sin embargo si estas unidades pudieran venderse, la empresa  $i$  incrementaría sus beneficios. Como las empresas actúan independientemente cada una de ellas tendrán incentivos de disminuir su precio y atraer los clientes de su rival, lo cual se traducirá en una "guerra de precios" en donde cada empresa ira disminuyendo progresivamente sus precios hasta que éstas fijen un precio igual  $p''$ , nivel a partir del cual es posible abastecer la cantidad demandada.

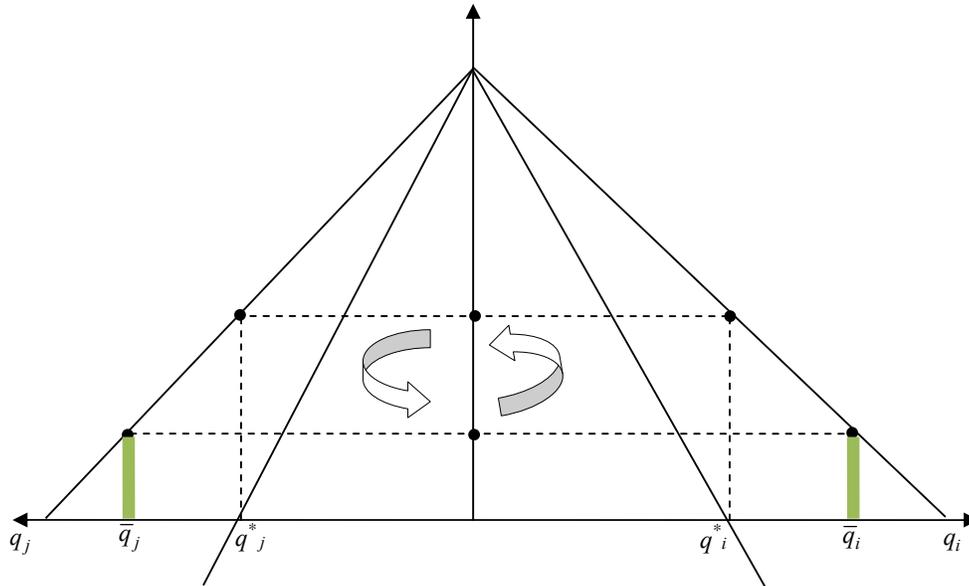
Por otro lado uno podría pensar erróneamente que  $p'$  es el precio de equilibrio, sin embargo al entrar las empresas a la guerra de precios, se ha permitido vender unidades de producción para las que el ingreso marginal es negativo, teniendo incentivos la empresa fijar un precio menor a  $p'$ , dado que asume que su rival mantendrá su precio en  $p''$ , por su parte la empresa rival asume lo mismo erróneamente, llevando a que ésta última incremente su precio progresivamente, pero por debajo de la otra y nuevamente se inicia la "guerra de precios".

---

<sup>20</sup> Edgeworth supuso que ambas empresas producían a un costo de cero.

Como se mencionó anteriormente, este comportamiento de precios es cíclico, es decir aumenta y disminuye en el tiempo, sin llegar a algún equilibrio posible.

Gráfico N° 21 El Modelo de duopolio de Edgeworth



### 3.3 Modelo de Demanda Quebrada

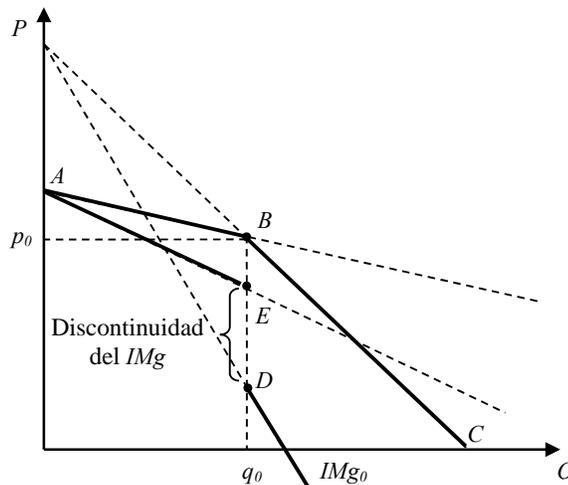
Lo mostrado por Edgeworth 1925, nos dice que debido a las restricciones de capacidad de las empresas, los precios fluctúan de forma cíclica y que la estabilidad de precios podría llevarse cabo por medio de alguna forma de colusión. Sin embargo, Paul Sweezy 1939 rechazó este argumento y presentó un modelo de demanda quebrada, con el objetivo de explicar esta estabilidad.

En este modelo los oligopolistas venden productos que son sustitutos cercanos entre sí (función de demanda con pendiente negativa). Cualquier variación unilateral de los precios, traerá consigo una reacción de las empresas rivales, teniendo cada empresa un término para una variación conjetural asimétrica respecto a cambios en los precios.

Si consideramos una empresa que vende a un precio  $p_0$ , si ésta disminuye su precio espera que sus competidores sigan la reducción de precios ( $\Delta p_i/\Delta p_j = 1$ ), sin embargo si ésta decide incrementar su precio la variación conjetural sería  $\Delta p_i/\Delta p_j = 0$ , ya que las empresas rivales esperarían que la empresa que aumentó su precio se salga sola del mercado.

Esta asimetría en el comportamiento es la que produce el quiebre en la demanda e implica que las empresas no tengan incentivos para variar el precio, pues o entraría a una guerra de precios (a la baja), o perdería cuota de mercado (con precios al alza). Esto genera que la curva de demanda presente un quiebre, percibiendo la empresa una curva de demanda relativamente elástica para precios superiores a  $p_0$  (tramo AB) y relativamente inelástica para precios inferiores a  $p_0$  (tramo BC). Es este quiebre lo que le da estabilidad a los precios, ya que dicha demanda genera una curva de ingreso marginal con un tramo discontinuo (tramo ED) tal como se observa en el Gráfico N° 22.

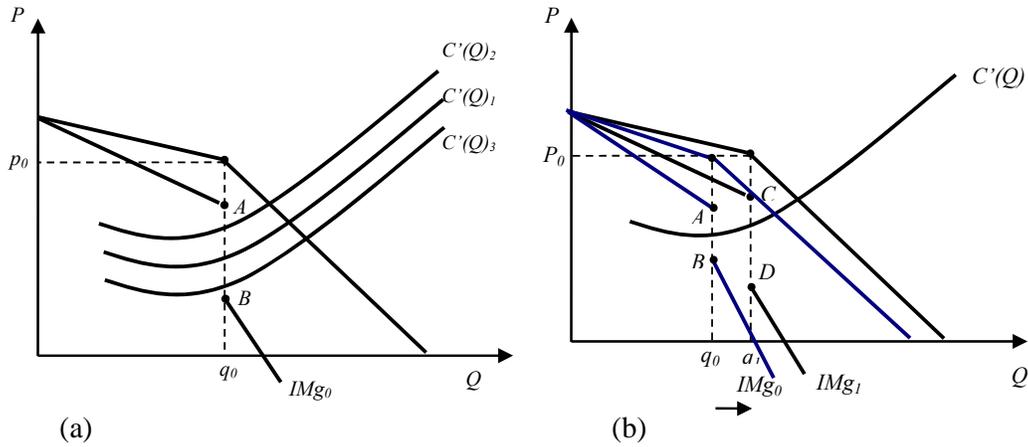
Gráfico N° 22 Construcción de la curva de Demanda Quebrada



Este modelo presenta estabilidad en los precios, tal como se muestra en el Gráfico N° 23. En la parte (a) del gráfico se aprecia que ante un incremento de los costos de  $C'(Q)_1$  a  $C'(Q)_2$  o una disminución de estos de  $C'(Q)_1$  a  $C'(Q)_3$

la mejor elección para la empresa, si se tiene como objetivo la maximización de beneficios<sup>21</sup>, es producir  $q_0$  porque niveles de producción mayores nos da un  $IMg_0 < C'(Q)_1$ , mientras que niveles de producción menores nos da  $IMg_0 > C'(Q)_1$ .

Gráfico N° 23 Estabilidad en el modelo de demanda quebrada



Asimismo, un desplazamiento de la demanda muestra estabilidad de precios. Analicemos por ejemplo qué ocurre ante un incremento en la demanda, tal como se observa en la parte (b) del mismo gráfico. Si el quiebre ocurre al mismo nivel de precio, el precio se mantiene estable aun cuando la cantidad podría incrementarse en respuesta a la mayor demanda.

### 3.4 Modelo de rivalidad en 2 etapas

Durante muchos años se ha discutido sobre la dimensión en la que rivalizan las empresas en un mercado oligopólico (en precios a la Bertrand o en cantidades a lo Cournot). Sin embargo no es hasta inicios de los ochentas en donde se elaboró un modelo considerando estos dos tipos de rivalidades. Kreps y Scheinkman 1983 desarrollaron un modelo de oligopolio en 2 periodos. En el primer periodo, las empresas rivalizan en cantidades y en la

<sup>21</sup> Cabe resaltar que la condición de maximización de beneficio  $Img_0 = C'(Q)_1$  no es factible por presentar la curva de ingreso marginal discontinuidad.

segunda etapa rivalizan en precios. El resultado de este modelo es que en la primera etapa el nivel de producción que maximiza ganancias es igual al equilibrio Nash-Cournot, luego las empresas determinan su capacidad de producción sobre la base de las cantidades que resultan de dicho equilibrio.

Dada la capacidad máxima de planta, determinada por el nivel de producción Nash Cournot, las empresas rivalizan en precios pero con las restricciones de capacidad Nash-Cournot, con lo que el resultado en términos de precios, en la segunda etapa, es el de un equilibrio Nash-Cournot, en precios y cantidades. Este modelo concluye que al margen de la dimensión de la rivalidad, los resultados de mercado son consistentes con los resultados del modelo de Nash-Cournot.

Este juego en 2 periodos se modela como un juego dinámico finito, en donde en una primera etapa las empresas determinan su capacidad productiva a la Cournot (decisión de mediano plazo bajo nivel de reversibilidad de la inversión) y en una segunda etapa las empresas rivalizan en precios (decisión de corto plazo, donde los precios se ajustan a mayor velocidad), dada la capacidad determinada en el primer periodo.

Dicho juego tiene solución mediante inducción hacia atrás, donde primero se resuelven las condiciones de optimalidad del segundo periodo y luego las condiciones de optimalidad del primer periodo. Las condiciones de optimalidad en el segundo periodo consisten en determinar cuál de los diversos subjuegos le permite a la empresa maximizar sus beneficios.

La solución de equilibrio perfecto de subjuegos muestra que los precios en el segundo periodo son consistentes con los precios que resultan de un modelo de competencia a lo Cournot. Es decir, que El resultado del juego en 2 etapas coincide con el de Cournot si las capacidades son interpretadas como cantidades.

El modelo tendría 2 períodos:

1er periodo – las dos empresas deciden sus capacidades [decisión de largo plazo]

2do periodo – las dos empresas eligen sus precios [decisión de corto plazo]

En conclusión, cuando hay restricciones de capacidad se suaviza la competencia. Los precios de equilibrio no son tan bajos, los precios superan a los costos marginales y las empresas tienen beneficios positivos (las empresas evitan acumular demasiada capacidad para suavizar la competencia en precios, es como un compromiso de que no van a bajar mucho los precios.)

Algunos ejemplos de industrias donde la elección de capacidad es relevante, dado que no se puede ajustar la capacidad en el corto plazo, son los hoteles y las líneas aéreas.

### 3.5 Modelo de Liderazgo en Precios o Empresa Dominante y Franja Competitiva

El modelo de empresa dominante y franja competitiva (conjunto de empresas que tienen un comportamiento competitivo), o conocido también como liderazgo en precios fue presentado por primera vez por Forchheimer en 1908. Sin embargo, éste empezó a tener importancia en la literatura de organización industrial a partir de los trabajos de Sweezy y Stigler en los años treinta y cuarenta<sup>22</sup>.

Este modelo considera que en un mercado existe una firma dominante y un grupo de firmas que actúan como seguidoras y compiten entre ellas. En este caso existe un "liderazgo de precios", pues la empresa dominante fija el precio que maximiza sus ganancias, teniendo en cuenta que la franja competitiva es tomadora de precios y por lo tanto producirá hasta igualar el precio fijado por la empresa dominante a su costo marginal.

---

<sup>22</sup> Una revisión de la historia de este modelo se puede encontrar en Schenzler et al. 1992.

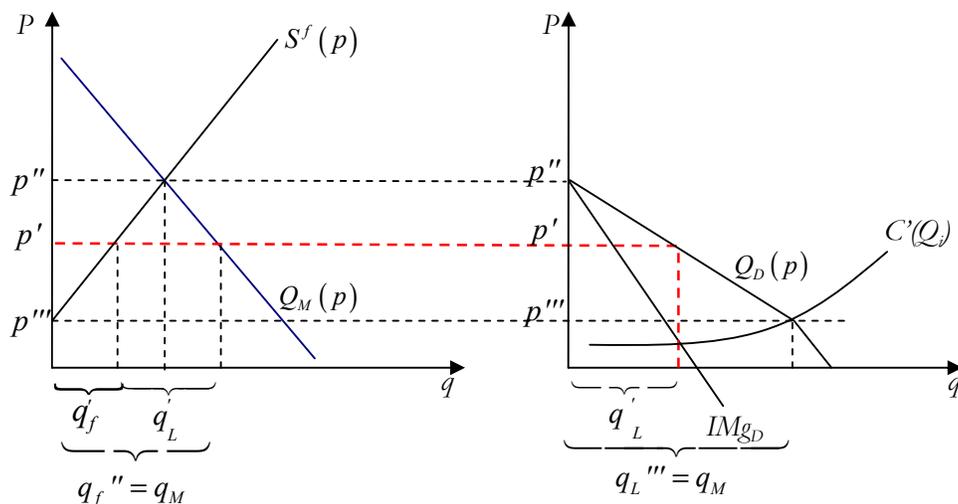
Se pueden agrupar a las diferentes empresas de la franja con una curva de costos marginales que represente sus ofertas ordenadas de menor a mayor costo marginal.

La demanda de la empresa dominante se puede representar como una demanda residual igual a la demanda de mercado menos lo que oferte la franja para cada nivel de precios:

$$\underbrace{Q_D(p)}_{\text{Demanda Dominante}} = \underbrace{Q_M(p)}_{\text{Demanda Mercado}} - \underbrace{S^f(p)}_{\text{Oferta Franja}}$$

En el Gráfico N°24 se muestra la forma como se construye la curva de demanda residual para la empresa dominante teniendo en cuenta la cantidad que ofertaría la franja competitiva para cada nivel de precios. En la parte izquierda del gráfico se muestra la proporción de la producción que a la franja le corresponde producir ( $q_f$ ) al precio dado, a partir de esto se construye la demanda residual correspondiente a la empresa dominante (parte derecha del gráfico), considerando esto último se deriva el  $IMg$ , y de la igualdad  $IMg=CMg$ , se obtiene la cantidad de producción de la empresa dominante ( $q_L$ ) y el precio  $p'$  vigente para ambos grupos.

Gráfico N° 24 Construcción de la demanda residual para la empresa dominante



La derivación matemática del modelo se detalla a continuación. El beneficio a maximizar de la empresa dominante sería:

$$\pi_D = pQ_D(p) - C(Q_D(p))$$

La condición de primer orden:

$$\frac{\partial \pi_D}{\partial p} = Q_D + p \frac{\partial Q_D}{\partial p} - \frac{\partial C_D}{\partial Q_D} \frac{\partial Q_D}{\partial p} = Q_D + \left( p - \frac{\partial C_D}{\partial Q_D} \right) \frac{\partial Q_D}{\partial p} = 0$$

Sabemos que:

$$\frac{\partial Q_D}{\partial p} = \frac{\partial Q_M(p)}{\partial p} - \frac{\partial S^f(p)}{\partial p}$$

Reemplazando tenemos:

$$\frac{\partial \pi_D}{\partial p} = Q_D + \left( p - \frac{\partial C_D}{\partial Q_D} \right) \left[ \frac{\partial Q_M(p)}{\partial p} - \frac{\partial S^f(p)}{\partial p} \right] = 0$$

Esta expresión se puede reordenar para obtener una relación entre el Índice de Lerner de la empresa dominante y las elasticidades de la demanda, de la oferta de la franja competitiva y las participaciones de mercado. Para ello partimos de lo siguiente:

$$\frac{\partial Q_D}{\partial p} = \frac{\partial Q_M(p)}{\partial p} - \frac{\partial S^f(p)}{\partial p}$$

Multiplicando por  $\frac{p}{Q_D}$  a ambos lados:

$$\frac{\partial Q_D}{\partial p} \frac{p}{Q_D} = \left( \frac{\partial Q_M}{\partial p} \frac{p}{Q_D} \right) - \left( \frac{\partial S^f}{\partial p} \frac{p}{Q_D} \right)$$

Multiplicando y dividiendo por  $\frac{Q_M}{Q_M}$  y  $\frac{Q^f}{Q^f}$

$$\varepsilon_D = \left( \underbrace{\frac{\partial Q_M}{\partial p} \frac{p}{Q_M}}_{\varepsilon_M} \frac{Q_M}{Q_D} \right) - \left( \underbrace{\frac{\partial S^f}{\partial p} \frac{p}{Q^f}}_{\varepsilon_S^f} \frac{Q^f}{Q_D} \right)$$

$$\varepsilon_D = \left( \varepsilon_M \frac{Q_M}{Q_D} \right) - \left( \varepsilon_S^f \frac{Q^f}{Q_D} \right) = \left( \frac{\varepsilon_M}{s_D} \right) - \left( \varepsilon_S^f \frac{s_f}{s_D} \right)$$

Donde  $s_D$  y  $s_f$  son las participaciones en el mercado de la empresa dominante y de la franja competitiva respectivamente.

Por lo tanto si retornamos a la condición de primer orden, y la multiplicamos por  $-p/Q_D$  tenemos la siguiente expresión:

$$Q_D + \left( p - \frac{\partial C_D}{\partial Q_D} \right) \left[ \frac{\partial Q_M(p)}{\partial p} - \frac{\partial S^f(p)}{\partial p} \right]$$

$$- Q_D \frac{p}{Q_D} + \left( p - \frac{\partial C}{\partial Q_D} \right) \left[ -\frac{\partial Q_M}{\partial p} \frac{p}{Q_D} + \frac{\partial S^f}{\partial p} \frac{p}{Q_D} \right] = 0$$

Sabiendo que la expresión entre corchetes es la elasticidad de la demanda de la empresa dominante, simplificando obtenemos:

$$-p + \left( p - \frac{\partial C}{\partial Q_D} \right) [-\varepsilon_D] = 0 \Rightarrow \frac{\left( p - \frac{\partial C}{\partial Q_D} \right)}{p} = -\frac{1}{\varepsilon_D}$$

Reemplazando el valor de la elasticidad tenemos:

$$\frac{\left( p - \frac{\partial C}{\partial Q_D} \right)}{p} = -\frac{1}{\left( \frac{\varepsilon_M}{s_D} \right) - \left( \varepsilon_S^f \frac{s_f}{s_D} \right)} = -\frac{s_D}{\varepsilon_M - \varepsilon_S^f s_f}$$

Por lo tanto de las definiciones de las participaciones de mercado obtenemos la siguiente relación:

$$IL_D = \frac{p - CMg(Q_D)}{p} = \frac{s_D}{\varepsilon_s^f s_f - \varepsilon_M}$$

La empresa dominante tendrá un mayor poder de mercado si: i) la elasticidad de mercado no es tan alta, ii) la elasticidad de la oferta de la franja es baja o en el extremo tiene un límite que le impide seguir ofertando por más que el precio sea alto (y por lo tanto su elasticidad sería cero) y iii) qué tan eficiente es en costos la empresa dominante versus la franja competitiva.

### ***Ejemplo de liderazgo de precios***

A modo de ejemplo, en un contexto estático y sin regulaciones internacionales, la OPEP constituye un cártel dominante en el mercado internacional de petróleo. Los productores no afiliados al cártel fijan sus precios en base a los movimientos de la cuota exportable de la OPEP, constituyéndose en una franja de empresas competitivas<sup>23</sup>. A manera de ilustración, se puede considerar que la OPEP tenga un costo marginal constante de US\$ 15 por barril y que la franja competitiva tenga un costo marginal igual a:  $CMg_{FRANJA} = 15 + 0,75Q_F$ .

Si se considera una función inversa de demanda en un período determinado igual a  $p(Q) = 165 - 0,75Q$ , usando las definiciones anteriores y sabiendo que la OPEP tendrá en cuenta que la franja ofertará hasta igualar su costo marginal al precio ofertado por la OPEP ( $p = CMg_{FRANJA}$ ).

Despejamos el  $Q$  y  $Q_{FRANJA}$ :

$$p = 165 - 0,75Q \Rightarrow Q = \frac{165 - p}{0,75}$$

$$p = CMg_{FRANJA} = 15 + 0,75Q_{FRANJA} \Rightarrow Q_{FRANJA} = \frac{p - 15}{0,75}$$

<sup>23</sup> Un análisis más detallado de la formación de precios en el mercado de petróleo y su modelamiento se puede consultar en Hannesson 1998. También se puede revisar Vásquez 2005 para un análisis de la evolución del mercado de GLP en el Perú utilizando este tipo de modelos para analizar el rol de las importaciones y los pequeños productores.

Se puede plantear la función de beneficios de la OPEP como sigue:

$$\pi_{OPEP} = pQ_{OPEP} - CMg_{OPEP} \times Q_{OPEP}$$

$$\pi_{OPEP} = p(Q - Q_{FRANJA}) - 15(Q - Q_{FRANJA})$$

Reemplazando:

$$\pi_{OPEP} = p \left( \frac{165 - p}{0,75} - \frac{p - 15}{0,75} \right) - 15 \left( \frac{165 - p}{0,75} - \frac{p - 15}{0,75} \right)$$

Simplificando y maximizando:

$$\pi_{OPEP} = p \left( \frac{180 - 2p}{0,75} \right) - 15 \left( \frac{180 - 2p}{0,75} \right) = \frac{180p - 2p^2 - 15 \times 180 + 30p}{0,75}$$

$$\frac{\partial \pi_{OPEP}}{\partial P} = \frac{180 - 4p + 30}{0,75} = 0$$

$$210 = 4p \Rightarrow p = 52,5$$

Reemplazando  $p$  en las demandas obtenemos:

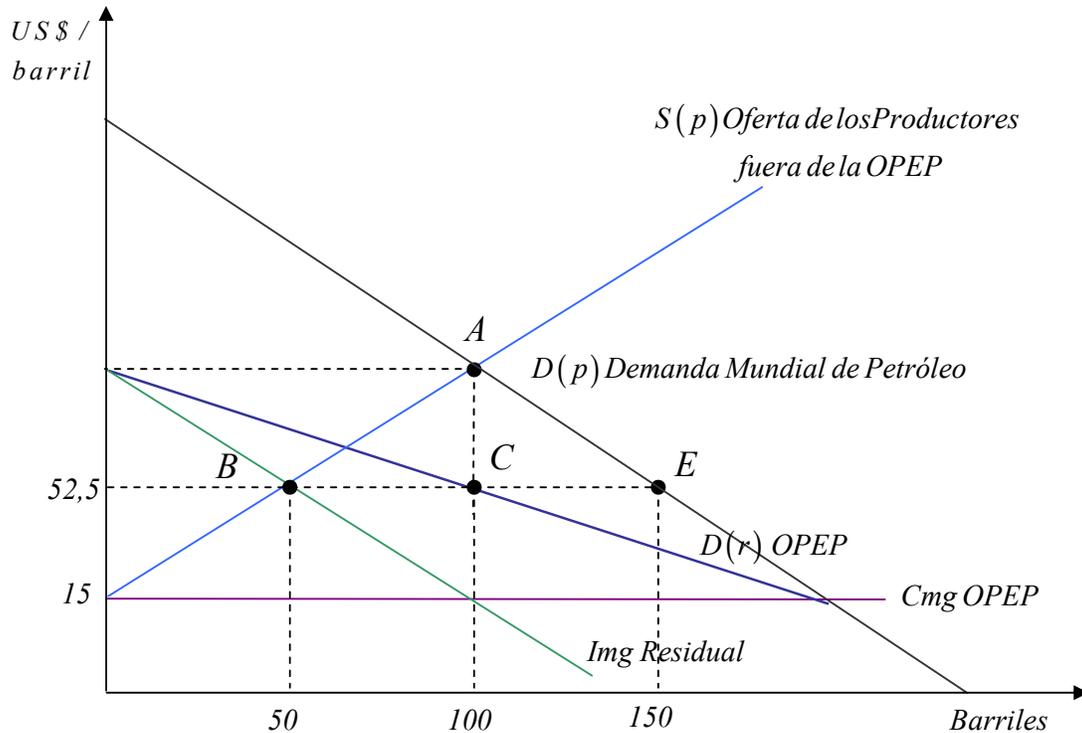
$$Q = \frac{165 - 52,5}{0,75} \Rightarrow Q = 150$$

$$Q_{FRANJA} = \frac{52,5 - 15}{0,75} = 50$$

$$Q_{OPEP} = Q - Q_{FRANJA} = 100$$

En donde la producción de la franja es de 50 barriles y de la OPEP de 100 barriles. El precio de equilibrio será 3,5 veces el costo marginal de la empresa dominante. La elasticidad de la demanda de mercado es igual a 0,47. En el Gráfico N° 25 se muestra como se construye la curva de demanda residual de la OPEP y el equilibrio.

Gráfico Nº 25 Modelo empresa líder y franja competitiva aplicado a la industria del petróleo



### 3.6 Equilibrio en Funciones de Oferta

El modelo de equilibrio en funciones de oferta, en inglés *Supply Function Equilibria* (Klemperer y Meyer 1989) describe la relación precio-cantidad que una empresa está dispuesta a ofrecer en el mercado. Este modelo surgió para describir situaciones donde las empresas buscan ofertar de manera óptima en presencia de incertidumbre. Este modelo es importante porque nos enseña que los resultados de los modelos de competencia en precios (Bertrand) o cantidades (Cournot) no alcanzan el nivel óptimo de precios y cantidades cuando existe incertidumbre en la demanda. Es decir, no son óptimas ex-post una vez conocida la demanda real; por lo que no existe un único precio-cantidad, sino un conjunto de combinaciones óptimas, siendo más realista pensar que las empresas se adaptan a los "shocks" en la demanda ajustando

simultáneamente precios y cantidades. Cuando hay incertidumbre la demanda residual es estocástica, incluso en equilibrio, y por tanto hay un conjunto de puntos óptimos, uno por cada realización de la demanda.

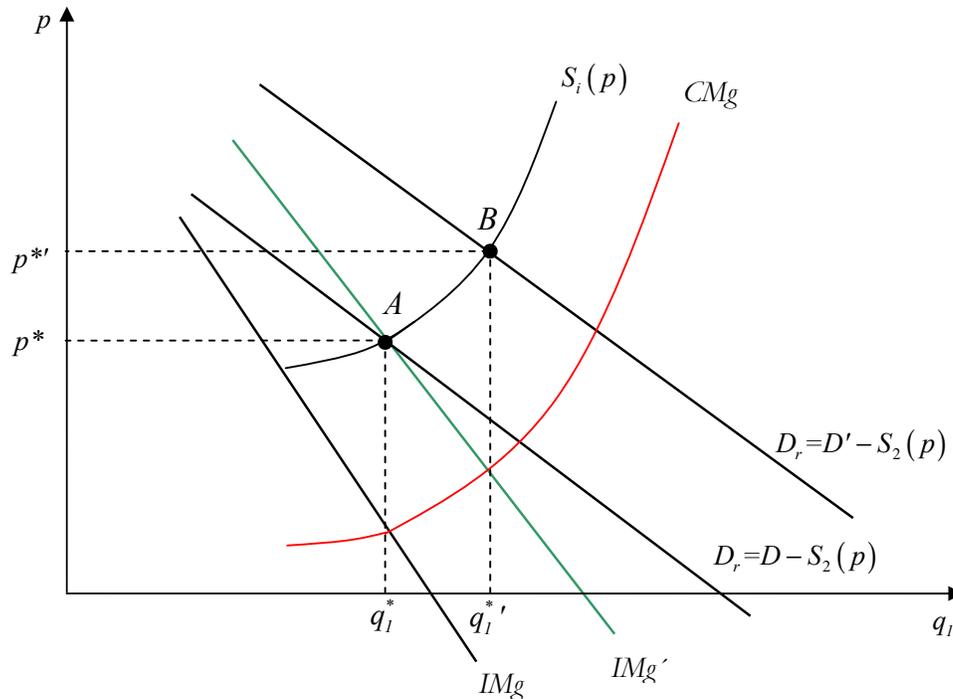
Los supuestos del modelo planteado por Klemperer y Meyer son los siguientes: i) producto homogéneo, ii) empresas son simétricas (tecnologías idénticas), iii) duopolio  $i, j$  (generalizable para más empresas), iv) la incertidumbre es unidimensional y exógena, v) las estrategias de las empresas no afectan su curva de costos marginales, vi) se analiza solamente el caso de equilibrio simétrico y el caso de estrategias puras y, v) se analiza un único periodo.

En el Gráfico N° 26, se presenta la forma como se construye la función de oferta óptima de las empresas, considerando dos curvas de demanda, las que dan origen a curvas de demanda residuales en base a las cuales las empresas eligen sus cantidades y precios óptimos como si fueran monopolistas (puntos A y B). Repitiendo este ejercicio para otros casos se puede construir la curva  $S_i(p)$ .<sup>24</sup>

---

<sup>24</sup> Se representa la demanda residual para la empresa 1, dada la estrategia de la empresa 2, en este caso la oferta de la empresa 2,  $S_2$ .

Gráfico N° 26 Equilibrio con Funciones de Oferta (incertidumbre en la demanda)



Fuente: Machado 2002

Siguiendo a Klemperer y Meyer 1989 y Vives 2001, la forma analítica de la función de oferta óptima se puede obtener para el caso del duopolio simétrico partiendo de una demanda agregada estocástica (donde  $\varepsilon$  es un escalar) de la forma:

$$Q = D(p, \varepsilon), \varepsilon \in [\underline{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}], D_p < 0, D_{pp} < 0, D_\varepsilon > 0$$

Uno de los supuestos va a ser que el *shock* desplaza la curva de demanda agregada paralelamente, es decir  $D_{p\varepsilon} = 0$ .

Asimismo, en relación a la función de costos se asume lo siguiente:

$$c(q), c'(q) \geq 0, c''(q) \geq 0, q \geq 0$$

Después de la realización de  $\varepsilon$ , se determina el precio y cantidades de equilibrio, como:

$$D(p^*(\varepsilon), \varepsilon) = S_i(p^*(\varepsilon)) + S_j(p^*(\varepsilon))$$

La diferencia con respecto a la situación de certidumbre es que ahora la curva de demanda residual es estocástica. Esto implica que la función de oferta óptima es la que maximiza los beneficios esperados (dada la función de oferta del rival) y también es óptima *ex post* (después de conocerse  $\varepsilon$ ). La demanda residual para cualquier precio  $p$  es:

$$D_i(p, \varepsilon) = D(p, \varepsilon) - S_j(p)$$

Dado el supuesto  $D_\varepsilon > 0$ , las curvas de demanda residual no se interceptan para distintos  $\varepsilon$  y la curva de oferta óptima intercepta  $D_i(p, \varepsilon)$  una sola vez. Dado que la curva de oferta tiene que ser óptima para cada una de las posibles realizaciones de  $\varepsilon$ , el problema se simplifica haciendo la maximización condicional en  $\varepsilon$ , es decir como si se observase  $\varepsilon$ . El problema de la empresa  $i$  es<sup>25</sup>:

$$\begin{aligned} & \text{Max}_{S_i(p)} E_\varepsilon [pS_i(p) - C(S_i(p))] \\ \text{s.a: } & S_j(p) \\ & D(p, \varepsilon) = S_i(p) + S_j(p) \end{aligned}$$

Se puede escribir como:

$$\text{Max}_p E_\varepsilon \left[ p \left( \underbrace{D(p, \varepsilon) - S_j(p)}_{\text{Demanda Residual dado } \varepsilon} \right) - C \left( \underbrace{D(p, \varepsilon) - S_j(p)}_{\text{Demanda Residual dado } \varepsilon} \right) \right]$$

La condición de primer orden para  $i$  es:

$$\frac{\partial E_\varepsilon}{\partial p} = D(p, \varepsilon) - S_j(p) + [p - C'(D(p, \varepsilon) - S_j(p))] [D_p(p, \varepsilon) - S_j'(p)] = 0$$

<sup>25</sup> En este caso se está maximizando el valor esperado del beneficio, denotado por  $E[\cdot]$

$$S_j'(p) = \frac{S_i(p)}{p - C'(S_i(p))} + D_p(p, e(2S(p), p))$$

El equilibrio simétrico satisface:

$$S'(p) = \frac{S(p)}{p - C'(S(p))} + D_p(p) = f(p, S)$$

Miremos primero las funciones que solucionan los dos casos extremos:

$$f(p, S) = 0 \Leftrightarrow S^0(p) = 0$$

$$f(p, S) = \infty \Leftrightarrow S^{\infty}(p) = \infty$$

La solución a la primera ecuación (primer caso extremo) corresponde al modelo de Cournot (se asume que la cantidad del rival es fija):

$$S'(p) = \frac{S^0(p)}{p - C'(S^0(p))} + D_p(p) = 0 \Leftrightarrow IM = CMg \Leftrightarrow p + \frac{S^0(p)}{D_p} = C'(S^0(p))$$

La solución a la segunda ecuación (segundo caso extremo) corresponde al resultado de competencia perfecta o Bertrand:

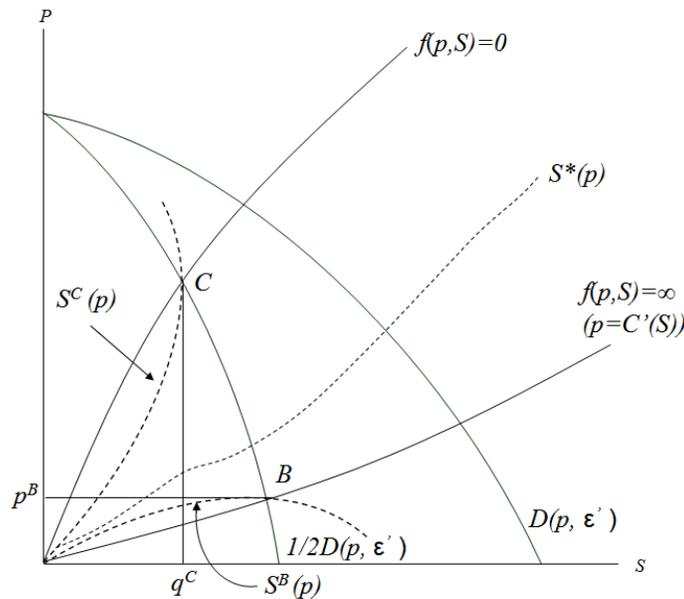
$$S'(p) = \frac{S^{\infty}(p)}{p - C'(S^{\infty}(p))} + D_p(p) = \infty \Leftrightarrow p = C'(S^{\infty}(p))$$

En el Gráfico N° 27 se puede observar que el resultado correspondiente a cualquier valor de  $\varepsilon$  es intermedio entre el resultado que se podría obtener si las firmas compiten a lo Cournot y el resultado que se obtiene si las firmas compiten a lo Bertrand. Para un valor dado de  $\varepsilon$  igual a  $\varepsilon'$ , se grafica la función de demanda. El punto  $C$ , en la intersección de  $f = 0$  con  $1/2D(p, \varepsilon')$  representa la cantidad y precio para cada firma en el equilibrio de Cournot. Por otro lado, el punto  $B$  en la intersección de  $f = \infty$  con  $1/2D(p, \varepsilon')$  representa el equilibrio de Bertrand.

Dado que cualquier función de Oferta de Equilibrio se interseca con  $1/2D(p, \varepsilon')$  entre los puntos  $C$  y  $B$ , el precio y la cantidad en cualquier función

de oferta de equilibrio están entre los niveles de Cournot y Bertrand, para cualquier valor realizado de  $\varepsilon$ .

Gráfico N° 27 Equilibrio con Funciones de Oferta (incertidumbre en la demanda)



Fuente: Klemperer y Meyer 1989

### 3.7 Modelos de Conjeturas y el Parámetro de Conducta

Como se ha podido ver con la revisión de los modelos anteriores, la relación entre el margen precio-costo y concentración del mercado no es directa en los restantes modelos de oligopolio y competencia. En el oligopolio de Bertrand, donde las empresas compiten en precios, en el caso de un bien homogéneo y tomando el caso sencillo de un juego en una sola etapa, esta relación es inexistente pues bastan dos empresas para que se obtenga el resultado de competencia perfecta (conocido en la literatura como «paradoja de Bertrand»), pues ofreciendo un precio ligeramente menor que las otras, una empresa se quedaría con todo el mercado (en ausencia de restricciones de capacidad).

Adicionalmente, la capacidad de ejercer poder de mercado no depende solamente de la existencia de más o menos competidores, sino del nivel y de la forma de las funciones de costos de las empresas involucradas o la posibilidad de adoptar otras estrategias, como la diferenciación de producto que reduce la competencia en precios disminuyendo la elasticidad de sustitución entre los productos. Que haya o no relación entre tasas de beneficio, márgenes y niveles de concentración resulta por lo tanto un tema empírico. Por ello, en el análisis del comportamiento real de los mercados se suele usar una noción de «competencia efectiva» en lugar de «competencia perfecta», la cual alude principalmente a la existencia de un nivel suficiente de rivalidad entre las empresas del mercado que haga que no se puedan sostener fácilmente ganancias excesivas. En algunos casos, también se ha destacado la existencia de competencia potencial que incluso puede disciplinar a una empresa que tenga prácticamente todo el mercado. Este enfoque es conocido como el de «mercados desafiables» (*contestable markets*), y fue planteado originalmente por Baumol 1982. Surgió como un cuestionamiento al paradigma vigente en la teoría de la organización industrial denominado «estructura-conducta-desempeño», que relacionaba la estructura (por ejemplo, el grado de concentración) con las conductas (estrategias) y el desempeño de la industria (eficiencias asignativas y productivas).

Ello ha dado lugar a enfoques donde se busca calcular algún indicador del ejercicio de poder de mercado; uno de ellos es el basado en la estimación empírica del parámetro  $\theta$ , que mide el grado de competencia en un determinado mercado o la forma como las empresas establecen sus «conjeturas» sobre las reacciones de las demás empresas.<sup>26</sup> Este parámetro se puede derivar de la condición de maximización de beneficios de una empresa  $i$ :

$$\text{Max } \Pi_i = P(q)q_i - C(q_i)$$

---

<sup>26</sup> La referencia original en este tema es Bowley 1924.

De la condición de primer orden se obtiene:

$$\frac{\partial P}{\partial q} \underbrace{\left(1 + \sum_{j \neq i} \frac{\partial q_j}{\partial q_i}\right)}_{\theta_i} q_i + P(q) = C'(q_i)$$

Despejando se obtiene la siguiente relación entre precios y costos marginales:

$$P(q) = C'(q_i) - \theta_i q_i \frac{\partial P}{\partial q}$$

Utilizando la definición de la elasticidad-precio de la demanda se puede despejar una expresión del índice de Lerner más general, la cual se muestra en la ecuación anterior. Para este fin, multiplicamos y dividimos el tercer término por  $q/P(q)$  y agrupamos con el fin de expresar la ecuación en términos de la elasticidad-precio:

$$P(q) = C'(q_i) - \theta_i q_i \underbrace{\frac{\partial p}{\partial q} \cdot \frac{q}{p}}_{1/\varepsilon} \cdot \frac{P(q)}{q} = C'(q_i) - P(q) \theta_i \underbrace{\frac{q_i}{q} \frac{1}{\varepsilon}}_{\frac{s_i}{\varepsilon}} = C'(q_i) - P(q) \frac{s_i}{\varepsilon} \theta_i$$

$$\frac{P(q) - C'(q_i)}{P(q)} = -\frac{s_i}{\varepsilon} \theta_i$$

Donde  $\theta_i$  es 1 si las empresas actúan a lo Cournot<sup>27</sup> (lo cual también se puede aplicar al caso del monopolista cuando  $s_i = 1$ ) y 0 si las empresas actúan a lo Bertrand (que en un modelo estático implica que las empresas actúen competitivamente). En el caso de  $N$  empresas simétricas que se hayan coludido, el valor de  $\theta_i$  será igual a  $N$ , puesto que todas variarían su producción en el mismo sentido y las empresas obtendrían un *mark-up* igual al del monopolista. Un análisis detallado de este enfoque y de las técnicas econométricas utilizadas para identificar el ejercicio del poder de mercado se puede encontrar en Bresnahan 1989, donde se realiza una revisión de los estudios de este tipo. Una revisión de estudios más recientes se puede

<sup>27</sup> Asumimos que  $\partial q_j / \partial q_i = 0 \forall j \neq i$ , es decir, que la conjetura de la  $i$ -ésima empresa respecto al cambio en los niveles de producción del resto de firmas es que el resto no ajusta su nivel de producción cuando ella cambia su cantidad producida.

encontrar en el capítulo 7 de Martin 2002. Una aplicación relativamente reciente al mercado eléctrico inglés se puede encontrar en Wolfram 1999.

#### **4. ACUERDOS HORIZONTALES**

Las empresas que operan dentro de mercados oligopólicos pueden analizar e intentar diferentes tipos de acuerdos horizontales como formar un cártel dominante, coludirse o fusionarse entre ellas. En las siguientes secciones se procederá a explicar cada uno de ellos y analizar sus determinantes y viabilidad<sup>28</sup>.

##### 4.1 La formación y estabilidad de los Cárteles

El liderazgo en cantidades puede ser extendido de una sola empresa líder a un conjunto de empresas que decide formar un cartel restringiendo la producción e incrementando el precio. Si los acuerdos para restringir la producción no pueden imponerse mediante algún mecanismo de sanción, el conjunto de la producción restringida es internamente estable solo si cada empresa del grupo restringido obtiene un mayor beneficio restringiendo la producción que operando en el grupo de la franja que actúa siguiendo estrategias a lo Cournot, teniendo en cuenta la forma en que las otras empresas ajustarán su comportamiento después de su traslado.

A su vez, si existen empresas fuera del cartel, entonces la restricción es externamente estable solo si cada empresa de la franja obtiene una mayor ganancia por permanecer en la franja que por unirse al primer grupo, teniendo en cuenta la forma en que las otras empresas ajustarán su comportamiento después de su traslado. A continuación, realizaremos el análisis de las condiciones de estabilidad del cártel siguiendo este razonamiento de acuerdo al modelo planteado por Selten 1973.

---

<sup>28</sup> Un análisis bastante completo de este tipo de acuerdos, aunque a un nivel más avanzado y orientando a las políticas de competencia se puede encontrar en Jacquemin y Slade 1989.

Cada empresa de la franja selecciona su producción de acuerdo a la curva de reacción:

$$q_j = \frac{1}{2}(S - Q_K - Q_{F-j}),$$

Donde:

$Q_K$  es la producción total del grupo restringido.

$Q_{F-j}$  : es la producción conjunta de toda la franja excepto la empresa  $j$  .

La producción de una empresa de la franja se puede obtener de la siguiente maximización:

$$\begin{aligned} \pi_f &= p(Q)q_f - cq_f, & \text{donde : } Q &= Q_K + Q_F \\ \pi_f &= \left[ a - b \left( Q_K + \sum_{j \neq f}^F q_{j_r} + q_f \right) \right] q_f - cq_f \\ \frac{\partial \pi_f}{\partial q_f} &= a - bQ_K - \sum_{j \neq f}^F q_{j_r} - 2bq_f - c = 0 \end{aligned}$$

En equilibrio, para el caso de empresas simétricas, se cumplirá:

$$\begin{aligned} (F-1)q_{j_r} &= (F-1)q_f \\ a - bQ_K - \sum_{j \neq f}^F q_{j_r} - 2bq_f - c &= 0 \\ a - c - bQ_K - b(F-1)q_f - 2bq_f &= 0 \\ a - c - bQ_K &= b(F-1+2)q_f \rightarrow q_f = \frac{a-c-bQ_K}{b(F+1)} \rightarrow q_f = \frac{S-Q_K}{(F+1)} \quad (i) \end{aligned}$$

La producción total de la franja será:

$$\begin{aligned} p &= a - bQ \Rightarrow p = a - b(Q_K + Q_F) \\ p &= a - b \left( Q_K + F \frac{S-Q_K}{(F+1)} \right) \\ p &= a - b \left( \frac{Q_K + FS}{(F+1)} \right) \Rightarrow p = \frac{a - bQ_K + cF}{(F+1)} \end{aligned}$$

Dado que  $a = Sb + c$  podemos despejar el precio en relación al costo marginal:

$$p = \frac{Sb + c - bQ_k + cF}{(F+1)} \Rightarrow p = c + \frac{b}{(F+1)}(S - Q_k) \quad (ii)$$

Dada esta función de demanda residual, la maximización del beneficio por empresa y la producción total del cartel será:

$$q_k = \frac{1}{K} \left( \frac{1}{2} S \right) \quad y \quad Q_k = \frac{1}{2} S \quad (iii)$$

Si se enfrenta a una franja de empresas a lo Cournot, un grupo de empresas que han formado un cartel maximiza su rentabilidad produciendo una cantidad como si fuera un líder a lo Stackelberg.

Sustituyendo (iii) en (i) y en (ii) obtenemos la producción de una firma de la franja y el precio de equilibrio:

$$q_f = \frac{1}{(F+1)} \left( \frac{1}{2} S \right), \quad p = c + \frac{1}{(F+1)} \left( \frac{1}{2} bS \right).$$

Los beneficios por empresa, de las empresas dentro y fuera del cartel son los siguientes:

$$\pi_k(F, K) = \frac{b}{K(F+1)} \left( \frac{1}{2} S \right)^2 \quad y \quad \pi_f(F) = \frac{b}{(F+1)^2} \left( \frac{1}{2} bS \right) \quad (iv)$$

Si analizamos el caso donde todas las empresas restringen la producción ( $K=N$ ), sólo tenemos que considerar la condición para la estabilidad interna. La producción restringida por todas las firmas es estable solo si cada firma gana por lo menos lo mismo restringiendo la producción como si se desviara actuando a lo Cournot y formando una franja.

$$\pi_k(0, N) \geq \pi_f(1)$$

Utilizando (iv) al reemplazar y simplificar se obtiene que esta condición se cumple sólo si  $N$  es menor que 4. Si cinco o más firmas abastecen el mercado y producen restringidamente, cada firma compartirá los beneficios de

monopolio que son tan pequeños que es más rentable para la empresa desviarse y actuar como una empresa independiente a lo Cournot dentro de la franja.

$$\pi_k(F, K) = \frac{b}{K(F+1)} \left(\frac{1}{2}S\right)^2 \geq \pi_f(F) = \frac{b}{(F+1)^2} \left(\frac{1}{2}S\right)^2$$

$$\pi_k(0, N) = \frac{b}{N(1)} \left(\frac{1}{2}S\right)^2 \geq \pi_f(1) = \frac{b}{(1+1)^2} \left(\frac{1}{2}S\right)^2$$

$$\frac{b}{N(1)} \geq \frac{b}{(1+1)^2}$$

$$\frac{1}{N} \geq \frac{1}{4}$$

$$4 \geq N$$

Con la misma lógica se puede analizar la sostenibilidad de otros posibles cárteles con un número menor que  $N$ .

#### 4.2 Colusión Tácita<sup>29</sup>

Por lo general, las empresas tienen que tomar decisiones sobre sus estrategias repetidamente y sólo en algunos casos muy particulares tienen que decidir por una sola vez. En este contexto, las empresas pueden reconocer su interdependencia y evaluar coludirse para incrementar sus beneficios. Este tipo de acuerdos puede ser "explícito", mediante un acta u otro tipo de documentación, o "tácito", en el sentido que puede surgir solo por la interacción continua entre los agentes y expresarse en las estrategias que las empresas aplican en el mercado.

##### 4.2.1 *Colusión tácita bajo competencia en cantidades*

La colusión entre empresas es un resultado no sostenible del modelo de Cournot cuando se analiza el caso estático. Si en el caso del duopolio, las

<sup>29</sup> El tratamiento de los temas en esta sección es más bien teórico, se mencionan algunas de las referencias principales en diferentes secciones. Para un análisis más aplicado del problema de la colusión se puede consultar el capítulo 15 de Pepall et al. Una discusión sobre los problemas para sancionar la colusión tácita en países como Perú se puede encontrar en Quintana 2012.

empresas deciden comportarse como un monopolista multiplanta (las dos empresas) y repartirse la producción según sus costos marginales, el problema de maximización sería el siguiente:

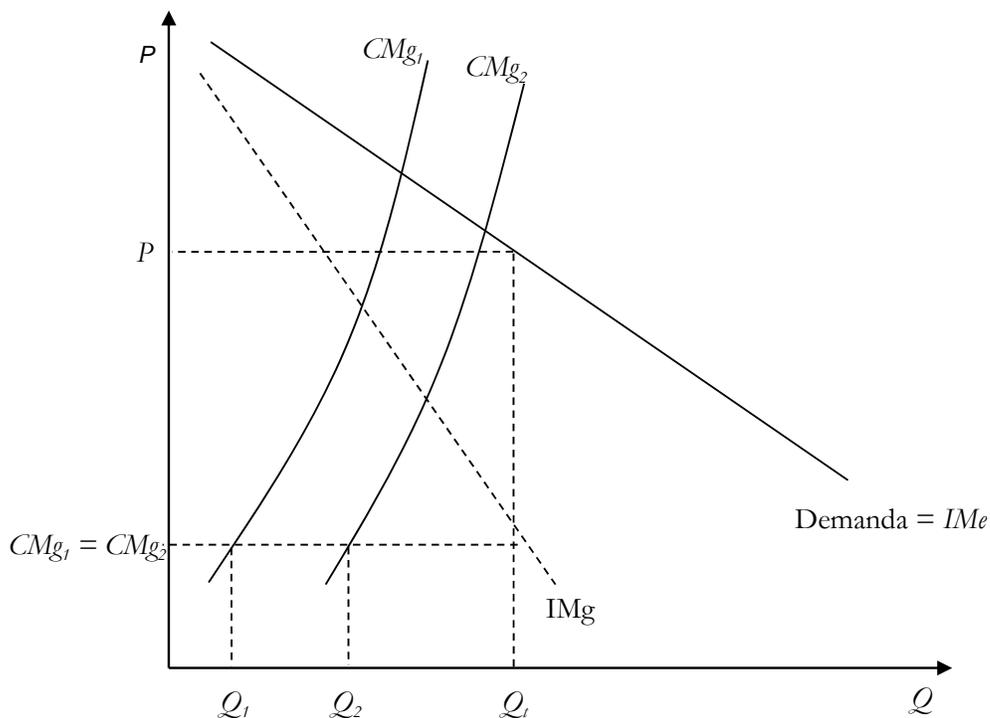
$$\pi = PQ - C_1(q_1) - C_2(q_2)$$

Resolviendo este problema respecto a la producción en cada planta, se obtiene la condición bajo la cual se debe repartir la producción, que es aquella donde los costos marginales de producción entre ambas plantas se igualan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial q_1} = \frac{\partial PQ}{\partial q_1} - \frac{\partial C_1(q_1)}{\partial q_1} = 0 &\Rightarrow IMg = CMg_1 \\ \frac{\partial \pi}{\partial q_2} = \frac{\partial PQ}{\partial q_2} - \frac{\partial C_2(q_2)}{\partial q_2} = 0 &\Rightarrow IMg = CMg_2 \\ \Rightarrow IMg = CMg_1 = CMg_2 \end{aligned}$$

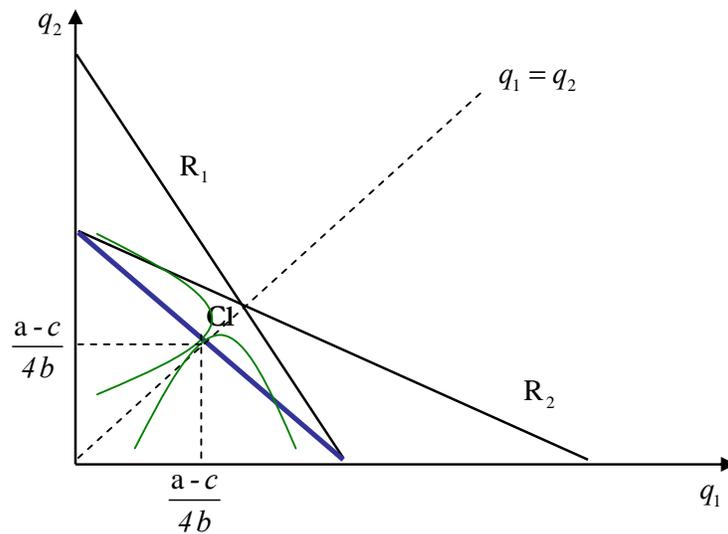
En el Gráfico N° 28 se muestra esta condición para el caso de costos marginales diferentes, donde la planta 1 tiene menores costos.

Gráfico N° 28 Posible Reparto de la producción en colusión



En un caso simétrico, ello implicaría que ambas empresas produzcan la mitad de la cantidad de producción del monopolio como se puede apreciar en el Gráfico N° 29. Este punto (CI) correspondería a aquel donde sus curvas de isobeneficio son tangentes y al mismo tiempo están en la recta de combinaciones donde entre ambos producen la cantidad de monopolio.

Gráfico N° 29 Reparto de la producción en colusión con empresas simétricas



Sin embargo, tal como se analizó cuando se obtuvo el equilibrio en el modelo de Cournot, Los incentivos para coludirse o no se pueden analizar como un juego donde los participantes decidirán producir alguna cantidad de acuerdo con la perspectiva que tengan de cómo actuará su competidora. De acuerdo al Gráfico N° 30, donde se presentan los pagos para este juego, vemos que el mayor beneficio se obtendría si ambas decidieran producir en el primer cuadrante (coludirse, coludirse), sin embargo en un caso estático (juego de una sola etapa) el equilibrio de Nash se encuentra en el cuarto cuadrante, donde no se coluden y ambas producen a lo Cournot.

Gráfico N° 30 Matriz de pagos para la colusión en un duopolio simétrico

		<u>Empresa 2</u>	
		<i>coludirse</i>	<i>-coludirse</i>
<u>Empresa 1</u>	<i>coludirse</i>	$\left( \pi_1^{colus} \left( \frac{q_M}{2}, \frac{q_M}{2} \right), \pi_2^{colus} \left( \frac{q_M}{2}, \frac{q_M}{2} \right) \right)$	$\left( \pi_1 \left( \frac{q_M}{2}, q_2^d \right), \pi_2 \left( \frac{q_M}{2}, q_2^d \right) \right)$
	<i>-coludirse</i>	$\left( \pi_1 \left( q_1^d, \frac{q_M}{2} \right), \pi_2 \left( q_1^d, \frac{q_M}{2} \right) \right)$	$\left( \pi_1^C (q_1^c, q_2^c), \pi_2^C (q_1^c, q_2^c) \right)$

A modo de ilustración se muestra la matriz de pagos del juego cuando se supone una función de demanda inversa:  $P = 1 - Q$ , con un costo marginal igual a cero y donde dos empresas están considerando coludirse produciendo cada una la mitad de monopolio. Es decir:

$$q_m = \frac{a - c}{2b} = \frac{1}{2}$$

Con un beneficio igual a:

$$\pi_m = \frac{(a - c)^2}{4b} = \frac{1}{4}$$

Entonces el beneficio de cada empresa será igual:

$$\pi_m = \frac{(a - c)^2}{4b} / 2 = \frac{1}{8} = 0,13$$

Realizando lo mismo para la cantidad y beneficios a lo Cournot tenemos:

$$q_i^{Cournot} = \left( \frac{a - c}{3b} \right) = \frac{1}{3}$$

$$\pi_i^{Cournot} = b \left( \frac{a - c}{3b} \right)^2 = \frac{1}{9} = 0,11$$

Se observa que cada empresa obtiene un mayor beneficio con la situación de colusión que con uno equilibrio oligopólico a lo Cournot.

Se puede hallar la cantidad de desvío de la empresa 1 (la que maximiza sus beneficios sabiendo que la otra producirá la cantidad de colusión) y los beneficios asociados:

$$\text{Max}_{q_i} \Pi_1^d = P(Q)q_i - cq_i$$

En este caso específico, el beneficio de desvío para la empresa 1 se obtiene de maximizar la siguiente función, en el cual se asume que la empresa 1 sabe que la empresa 2 producirá la mitad de la producción de monopolio (1/4):

$$\begin{aligned} \text{Max}_{q_1} \pi_1^d &= (1 - (q_1 + q_2)q_1) \\ \text{Max}_{q_1} \pi_1^d &= \left(1 - \left(q_1 + \frac{1}{4}\right)q_1\right) \\ \frac{\partial \pi_1^d}{\partial q_1} &= \frac{3}{4} - 2q_1 = 0 \Rightarrow q_1^d = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el beneficio del desvío será:

$$\pi_1^d = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{8}\right) - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = 0,14$$

Claramente se puede ver que si las dos empresas interactuaran una sola vez en el mercado, este posible acuerdo no podría llevarse a cabo, siendo su decisión de equilibrio jugar a lo Cournot. Los pagos para este juego se presentan en el Gráfico N° 31.

Gráfico N° 31 Ejemplo de matriz de pagos de la colusión en un duopolio simétrico

		<u>Empresa 2</u>	
		<i>coludirse</i>	$\neg$ <i>coludirse</i>
<u>Empresa 1</u>	<i>coludirse</i>	(0,13 , 0,13)	(0,09 , 0,14)
	$\neg$ <i>coludirse</i>	(0,14 , 0,09)	(0,11 , 0,11)

Sin embargo, Friedman 1971 fue el primero en demostrar que en un juego repetido con un período final desconocido o repetido infinitamente, los agentes pueden decidir cooperar para maximizar sus beneficios y que este resultado puede ser sostenible a diferencia del caso estático.

En el caso de un juego a lo Cournot, la sostenibilidad de la decisión de cooperar, cuando deciden coludirse (por ejemplo para producir la cantidad de monopolio) y repartirse los beneficios, dependerá de evaluar el valor presente de los beneficios que surjan de la cooperación con el valor de violar el acuerdo y atenerse a las consecuencias en los siguientes períodos.

Un caso bastante discutido en la literatura es aquel en el cual los agentes aplican la "estrategia gatillo" (*trigger strategy*) que consiste en cooperar si es que las otras empresas siguen cooperando y jugar a lo Cournot todos los siguientes períodos si es que alguien viola el acuerdo. En este caso el oligopolista tendría que comparar el valor presente de los beneficios de la colusión con el beneficio obtenido por desviarse un período más el valor presente de los beneficios a lo Cournot en todos los períodos siguientes.

En el caso de dos empresas que deciden coludirse para producir la cantidad de monopolio ( $q_m$ ), el beneficio por desviarse ( $\pi_d$ ) sería el beneficio máximo que podría obtener sabiendo que la otra empresa respetando el acuerdo

produciría  $q_m/2$ . Por lo tanto, si denominamos  $\pi_c$  al beneficio de Cournot y  $\delta$  al factor de descuento ( $1/(1+r)$ ), para que la colusión sea sostenible deberá cumplirse la siguiente condición:

$$\frac{1}{2}\pi_m + \frac{1}{2}\delta\pi_m + \frac{1}{2}\delta^2\pi_m + \frac{1}{2}\delta^3\pi_m + \dots + \frac{1}{2}\delta^n\pi_m \geq \pi_d + \delta(\pi_c + \delta\pi_c + \delta^2\pi_c + \delta^3\pi_c + \dots + \delta^n\pi_c)$$

$$\frac{1}{2}\pi_m \underbrace{\left[1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots + \delta^n\right]}_V \geq \pi_d + \delta\pi_c \underbrace{\left[1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots + \delta^n\right]}_V$$

Se puede ver que  $V$  es una progresión geométrica que tiene un límite puesto que  $\delta$  es menor que 1 por definición:

$$V = 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots + \delta^n$$

Multiplicando por  $\delta$ :

$$\delta V = \delta + \delta^2 + \delta^3 + \delta^4 + \dots + \delta^{n+1}$$

Restando  $V - \delta V$ :

$$V(1 - \delta) = 1 - \delta^{n+1}$$

Despejando  $V$ :

$$V = \frac{1 - \delta^{n+1}}{1 - \delta}$$

Cuando  $n$  tiende a infinito  $\delta^{n+1}$  se acerca a cero, por lo que tenemos:

$$V = \frac{1}{1 - \delta}$$

Usando este resultado la condición de sostenibilidad queda de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2}\pi_m \frac{1}{1 - \delta} \geq \pi_d + \pi_c \frac{\delta}{1 - \delta}$$

La condición que tiene que cumplir el factor de descuento se puede simplificar, para expresarla en una relación más directa con las diferencias de

beneficios. Así si llamamos  $\pi_{col}$  al beneficio de coludirse ( $\pi_m / 2 = \pi_{col}$ ), entonces debe cumplirse:

$$\begin{aligned}\pi_{col} \frac{1}{1-\delta} &\geq \pi_d + \pi_c \frac{\delta}{1-\delta} \\ \pi_{col} &\geq (1-\delta)\pi_d + \delta\pi_c \\ \delta &\geq \frac{\pi_d - \pi_{col}}{\pi_d - \pi_c}\end{aligned}$$

Esta última expresión nos permite llegar a una condición más general sobre la tasa de descuento teniendo en cuenta que las empresas no necesariamente pueden acordar producir la cantidad de monopolio (si no una cantidad entre la de Cournot y la de monopolio) y que el castigo ante el desvío no necesariamente será que vuelvan a jugar siempre a lo Cournot. Si llamamos  $\pi_p$  al beneficio obtenido cuando si es penalizado (dado que pueden existir otras estrategias como la de "zanahoria y garrote" o "toma y daca"), la condición general que debe cumplirse es la siguiente:

$$\delta \geq \frac{\pi_d - \pi_{col}}{\pi_d - \pi_p}$$

A modo de ejemplo<sup>30</sup>, considerando la "estrategia gatillo", para el caso de una demanda lineal y costos marginales constantes donde existen  $N$  empresas, el beneficio de desvío para la empresa  $i$  se obtiene de maximizar los beneficios sabiendo que las  $(N-1)$  otras empresas producirán la cantidad de colusión. En este caso, consideramos que la colusión se genera con la cantidad monopólica por lo que la producción de las empresas que cumplen el acuerdo será:

$$q_{col} = \frac{q_m}{N} = \frac{(a-c)}{2bN}$$

Si consideramos que las otras  $j$  empresas producirán la cantidad de colusión tenemos:

---

<sup>30</sup> El resultado presentado a continuación se basa en Shapiro 1989.

$$\sum_{i \neq j}^N q_j = (N-1) \frac{q_m}{N}$$

Reemplazando estos resultados en el problema de maximización de beneficios del desvío obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{Max}_{q_i} \pi_d^i &= \left( a - b \left( q_i + \sum_{i \neq j}^N q_j \right) \right) q_i - c q_i \\ \text{Max}_{q_i} \pi_d^i &= \left( a - b \left( q_i + \frac{(a-c)(N-1)}{2bN} \right) \right) q_i - c q_i \end{aligned}$$

Obteniendo a partir de la condición de primer orden, la siguiente función de reacción:

$$q_d^i = \frac{(a-c)(N+1)}{4bN}$$

Reemplazando esta cantidad en la función inversa de demanda podemos calcular el precio de desvío:

$$\begin{aligned} p^d &= a - bQ \Rightarrow p^d = a - b \left( q_i + \sum_{i \neq j}^N q_j \right) \\ p^d &= a - b \left( \frac{(a-c)(N+1)}{4bN} + \frac{(a-c)(N-1)}{2bN} \right) \\ p^d &= \frac{a(N+1) + c(3N-1)}{4N} \end{aligned}$$

Con ello podemos calcular el beneficio que obtendrá la empresa por desviarse:

$$\begin{aligned} \pi_d^i &= \left( \frac{a(N+1) + c(3N-1)}{4N} \right) \left( \frac{(a-c)(N+1)}{4bN} \right) - c \left( \frac{(a-c)(N+1)}{4bN} \right) \\ \rightarrow \pi_d^i &= \frac{[(a-c)(N+1)]^2}{16bN^2} \end{aligned}$$

Una vez obtenido el beneficio de desvío y ya conocidos los beneficios de colusión y de Cournot, para la sostenibilidad de la colusión debe cumplirse que:

$$\delta \geq \frac{\pi_d - \pi_{col}}{\pi_d - \pi_p} = \frac{\pi_d - \frac{\pi_m}{N}}{\pi_d - \pi_c}$$

Reemplazando obtenemos una relación entre el factor de descuento y el número de empresas que indica que ésta debe ser mayor cuanto mayor es el número de empresas para poder sostener la colusión, tal como se verá en el Gráfico N° 32:

$$\delta \geq \frac{\frac{[(a-c)(N+1)]^2}{16bN^2} - \frac{(a-c)^2}{4bN}}{\frac{[(a-c)(N+1)]^2}{16bN^2} - \frac{(a-c)^2}{b(N+1)^2}} = \frac{\frac{(a-c)^2}{b} \left[ \frac{(N+1)^2}{16N^2} - \frac{1}{4N} \right]}{\frac{(a-c)^2}{b} \left[ \frac{(N+1)^2}{16N^2} - \frac{1}{(N+1)^2} \right]}$$

Multiplicando el numerador y denominador por  $16N^2$  y simplificando tenemos:

$$\delta \geq \frac{(N+1)^2 - 4N}{(N+1)^2 - \frac{16N^2}{(N+1)^2}}$$

Como ejemplo podemos analizar el caso de dos empresas que deciden coludirse suponiendo una función de demanda inversa como la usada anteriormente:  $P=1-Q$ , una función de costos  $C(Q)=cq$ , donde  $c = 0$  y recordando los resultados antes obtenidos, se puede encontrar el factor de descuento que hace factible la colusión reemplazando estos valores en la condición de sostenibilidad de la colusión:

$$\frac{1}{2} \pi_m \frac{1}{1-\delta} \geq \pi_d + \pi_c \frac{\delta}{1-\delta}$$

Reemplazando:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} \right) \frac{1}{1-\delta} \geq \frac{9}{64} + \left( \frac{1}{9} \right) \frac{\delta}{1-\delta}$$
$$\Rightarrow \delta = 0,53$$

***Ejemplo numérico de análisis de sostenibilidad de colusión***

En el mismo sentido, consideremos el siguiente ejemplo donde dos empresas compiten en cantidades. Por simplicidad supongamos que ambas empresas poseen un costo marginal constante e igual a 20. Asimismo, supongamos que ambas enfrentan una función inversa de demanda que viene dada por:

$$P(Q) = 140 - 2Q$$

Por lo general, se creería que si dos empresas se coluden, lo harían en la cantidad monopólica. Sin embargo, considerando que esta cantidad no sería siempre la acordada (pero si la mejor, si deciden coludirse) y a manera de ejemplo práctico, supongamos que deciden coludirse produciendo su cantidad de Cournot menos 20% cada una (considerando estrategias gatillo).

Primero tenemos que analizar la producción que se obtendría del modelo de Cournot y los incentivos a desviarse, es decir, de no cumplir con el acuerdo colusorio, para lo cual, las empresa 1 y 2 resuelven los siguientes problemas de maximización:

$$\text{Max}_{q_1} (140 - 2(q_1 + q_2))q_1 - 20q_1$$
$$\text{Max}_{q_2} (140 - 2(q_1 + q_2))q_2 - 20q_2$$

Obteniendo a partir de la condición de primer orden, las siguientes funciones de mejor respuesta:

$$q_1(q_2) = \frac{120 - 2q_2}{4} \quad (i) \quad q_2(q_1) = \frac{120 - 2q_1}{4} \quad (ii)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (i) y (ii) obtenemos que la producción óptima de la empresa 1 y 2 es 20 (dado que tienen igual costo marginal), con lo cual, ambas empresas obtienen un beneficio igual a 800.

Ahora bien, si deciden coludirse produciendo la cantidad de Cournot menos 20% cada una, la cantidad agregada de mercado sería 32, con lo cual, ambas empresas obtienen un beneficio igual a 896. Sin embargo, la empresa 1 teniendo en cuenta que la empresa 2 va cumplir con el acuerdo colusorio, maximiza sus beneficios del desvío, es decir:

$$Max_{q_1} (140 - 2(q_1 + 16))q_1 - 20q_1$$

A partir de la condición de primer orden se obtiene que la empresa 1 si se desvía, decidirá producir 22, con lo cual el precio y cantidad de mercado sería 64 y 38, respectivamente. Dado esto, se puede observar que la empresa 1 obtiene un beneficio igual a 968, por lo que tendría incentivos a desviarse y no cumplir con el acuerdo colusorio a pesar que este le reporta mayores beneficios que el competir a lo Cournot. Se puede verificar que para que sea sostenible el acuerdo colusorio en el tiempo, el factor de descuento tendría que ser igual o mayor a 0,43.

#### 4.2.2 Colusión tácita bajo competencia en precios

El resultado paradójico en el modelo de competencia en precios, conocido como "Paradoja de Bertrand", que indica que bastan dos empresas para conseguir precios iguales a costos marginales que se analizó en la sección 3.1, puede ser modificado si se relajan algunos supuestos como la posibilidad de diferenciar productos, que no se tratará en el presente documento, y la existencia de restricciones de capacidad como las analizadas en la sección 3.2.

En esta sección analizaremos cómo la posibilidad de que el juego se repita de forma indefinida puede llevar a que la colusión sea sostenible bajo ciertas circunstancias. Ello debido a que, por lo general, las empresas tienen que tomar decisiones sobre sus estrategias de precios repetidamente y sólo en algunos casos muy particulares tienen que decidir por una sola vez, como puede ser el caso de una subasta. En particular cuando existen fuertes inversiones en activos durables, un *know how* tecnológico y barreras a la entrada, lo normal es que en algunos mercados un número limitado y estable

de empresas interactúe repetidamente dentro del mercado. En este contexto, las empresas pueden reconocer su interdependencia y evaluar coludirse para incrementar sus beneficios, lo cual puede convertirse en una estrategia sostenible bajo determinadas condiciones.

En un juego repetido infinitamente o sin un período final conocido,<sup>31</sup> cada empresa tendrá que evaluar el valor presente de sus beneficios sosteniendo la colusión versus los beneficios monopólicos de romperla en un período (abasteciendo a todo el mercado) y beneficios nulos en el futuro (precio igual a costo marginal). Ello implica que para que se sostenga la colusión, si llamamos "  $\delta$  " al factor de descuento, deba cumplirse la siguiente desigualdad en el caso de dos empresas que deciden fijar el precio monopólico:

$$\frac{1}{2}\pi_m + \frac{1}{2}\delta\pi_m + \frac{1}{2}\delta^2\pi_m + \frac{1}{2}\delta^3\pi_m + \dots \geq \pi_m$$

$$\frac{1}{2}\pi_m \underbrace{\left[1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots\right]}_V \geq \pi_m$$

Se puede ver que  $V$  es una progresión geométrica que tiene un límite puesto que  $\delta$  es menor que 1 por definición:

$$V = 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots + \delta^n$$

Multiplicando por  $\delta$  :

$$\delta V = \delta + \delta^2 + \delta^3 + \delta^4 \dots + \delta^{n+1}$$

Restando  $V - \delta V$ :

$$V(1 - \delta) = 1 - \delta^{n+1}$$

---

<sup>31</sup> Se puede demostrar que si el juego tiene un número finito de repeticiones no podrá sostenerse la colusión pues las empresas tendrán incentivos a romper el acuerdo en el último período. Por inducción hacia atrás (*backward induction*) resulta que cada empresa al tener en cuenta este incentivo decidirá romper el acuerdo desde la primera etapa.

Despejando  $V$ :

$$V = \frac{1 - \delta^{n+1}}{1 - \delta}$$

Cuando  $n$  tiende a infinito  $\delta^{n+1}$  se acerca a cero, por lo que tenemos:

$$V = \frac{1}{1 - \delta}$$

Usando este resultado nos queda la siguiente condición:

$$\frac{1}{2} \pi_m \frac{1}{1 - \delta} \geq \pi_m \Rightarrow \frac{1}{1 - \delta} \geq 2 \Rightarrow \delta \geq \frac{1}{2}$$

Cuando se incrementa el número de empresas que compiten a lo Bertrand, las ganancias de quedarse con todo el mercado por un período se vuelven relativamente mayores a las obtenidas de mantener la colusión, pues el beneficio monopólico se tiene que repartir entre un mayor número de empresas, por lo que el factor de descuento necesario para sostener la colusión se va haciendo mayor conforme se incrementa el número de empresas.

$$\frac{1}{N} \pi_m \underbrace{\left[1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots\right]}_{\frac{1}{1 - \delta}} \geq \pi_m$$
$$\frac{1}{N} \pi_m \frac{1}{1 - \delta} \geq \pi_m \Rightarrow \delta \geq 1 - \frac{1}{N}$$

Por ejemplo, si son tres empresas se requerirá un factor de descuento mayor o igual 0,66; el cual es superior al 0,5 requerido en el caso de dos empresas.

En base a estos resultados, se puede decir que para factores de descuento suficientemente altos, es decir cercanos a 1 (lo que implica una tasa de descuento cercana a cero y que por lo tanto se tiene una valoración similar de los beneficios actuales y futuros), es posible sostener la colusión pues se valora relativamente más los beneficios futuros que se perderían de desviarse en el período actual, por más que en éste se logre ganar el beneficio monopólico. La generalización de este resultado se conoce como el "teorema

de la tradición oral" (*folk theorem*) y es válido tanto para el modelo de Bertrand como para el caso de Cournot bajo un esquema de estrategias *trigger* o de reversión al equilibrio de Nash e incluso para otros tipos de estrategias<sup>32</sup>.

#### 4.2.3 Comparación de los Factores de Descuento entre Cournot y Bertrand

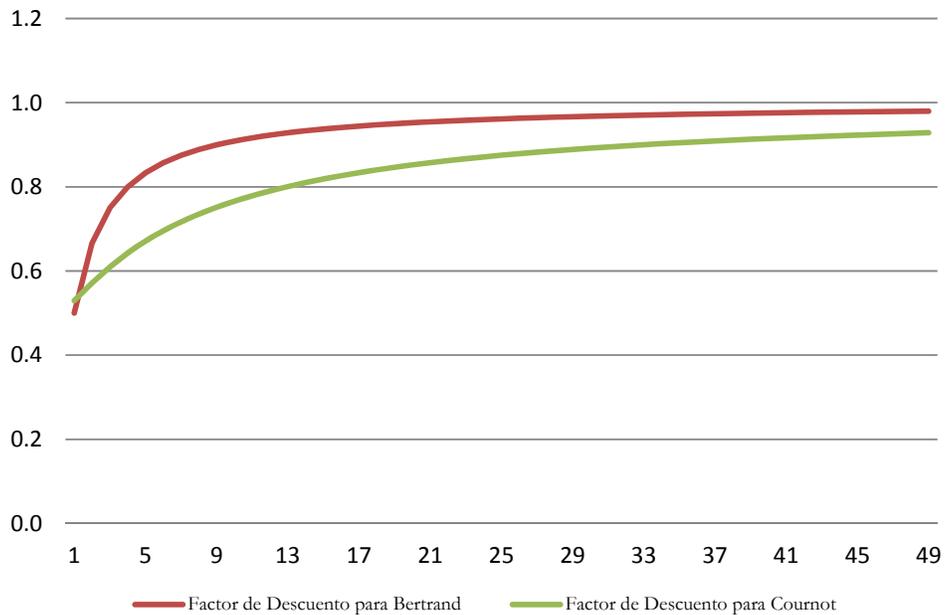
Si se analiza la evolución del factor de descuento necesario para sostener la colusión conforme aumenta el número de empresas (ver Gráfico Nº 32) se aprecia que, a excepción del primer término cuando compiten sólo dos empresas, el factor de descuento en el modelo de Bertrand siempre es mayor que el factor de descuento en el modelo de Cournot. Esto puede ser explicado por el hecho que, los incentivos a romper el acuerdo colusorio son mayores en el caso de una competencia a lo Bertrand que en una competencia a lo Cournot. En efecto, si una empresa compite en precios y decide incumplir con el acuerdo colusorio, se quedará con todo el mercado. Dado esto, el factor de descuento tendría que ser mayor para sostener el acuerdo colusorio en el caso de una competencia a lo Bertrand que en una competencia a lo Cournot.

Asimismo, se aprecia que, conforme aumenta el número de empresas que compiten en ambas estructuras de mercado, el factor de descuento necesario para sostener la colusión se incrementa aunque el efecto marginal es mayor al inicio. Así también, cabe precisar que, conforme se incrementa el número de empresas en el modelo de Bertrand, éste se vuelve menos realista, dado que, difícilmente la empresa que se desvía podrá abastecer todo el mercado restante.

---

<sup>32</sup> En el Apéndice se presenta una discusión más formal del "Teorema Folk".

Gráfico N° 32 Comparación del factor de descuento en el modelo de Cournot y Bertrand



#### 4.2.4 Factores que afectan la Colusión <sup>33</sup>

A continuación se analizarán los factores que afectan la colusión teniendo como marco la competencia en precios.

##### a) La concentración del mercado

En el modelo de Bertrand con bienes homogéneos, cuando existen  $n$  empresas con costo marginal constante y se analiza una situación colusiva en la que se cobra un precio monopolístico, las empresas se reparten el mercado y los beneficios de manera equitativa, el beneficio de romper la colusión se hace más atractivo conforme se incrementa el número de empresas con respecto a repartirse el beneficio monopolístico entre un número creciente de empresas ( $\pi^m / n$ ). Ello debido a que las ganancias a corto plazo por rebajar ligeramente el precio monopolístico (en una magnitud igual a  $\varepsilon$ ) serán:  $\pi^m(1-1/n)-\varepsilon$  se

<sup>33</sup> Esta sección toma algunos elementos del capítulo 6 de Tirole 1988 así como de la revisión de Valquez 2006. .

incrementan al aumentar  $n$  por lo que el factor descuento debe ser mayor que  $1-1/n$  para poder sostener la colusión. En este sentido la concentración del mercado facilita la colusión. El mismo resultado se obtiene con el modelo de Cournot con  $n$  empresas.

*b) Grandes retrasos en la información e interacción infrecuente*

La amenaza de una penalización sólo tiene efecto si ésta sigue casi inmediatamente a una rebaja en el precio. Sin embargo, la penalización puede aplazarse debido a si: (i) la reducción del precio efectuada por cierta empresa puede ser conocida con retraso por la empresa rival (el carácter secreto de los contratos debería ser cierto obstáculo para la colusión); (ii) la interacción infrecuente (debido a la irregularidad de los pedidos, por ejemplo) aplaza la penalización y hace más atractivo rebajar precios.

Supongamos que una empresa observa su beneficio y la demanda al menos dos periodos más tarde, por tanto dicha empresa no puede inferir nada de la observación de sus anteriores beneficios y demandas acerca de la política de precios seguida por su rival, por lo que en esta situación una empresa puede desviarse y reducir sus precios durante dos periodos. En este caso, se puede mantener el precio monopolístico en equilibrio si y solo si:

$$\frac{\pi^m}{2}(1+\delta+\delta^2\dots)\geq\pi^m(1+\delta)$$

$$\Rightarrow \delta\geq\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por consiguiente, esta condición es más restrictiva que la encontrada anteriormente  $\delta\geq\frac{1}{2}$  para sostener la colusión pues  $\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{2}$ . En este sentido los retrasos en la información son también una causa que dificulta el éxito de la colusión.

c) *Demanda variable*

Cuando la demanda es variable, una primera teoría indica que se pueden originar guerras de precios durante los booms. En estos casos, cuando la demanda es baja, las empresas cobrarán un precio monopolístico, y cuando la demanda es alta las empresas cobrarán por debajo de este precio para intentar ganarse todo el mercado. Esta situación puede entenderse como una guerra de precios durante los periodos de prosperidad, es decir representa una situación en la que las empresas se ven obligadas a reducir la colusión en los buenos tiempos.

Veamos una versión del modelo de Rotemberg y Saloner 1986. Supongamos que la demanda es estocástica. Esta puede ser: (i) baja:  $q = D_1(p)$  con probabilidad  $1/2$ ; o (ii) alta:  $q = D_2(p)$  con igual probabilidad. Donde:  $D_2(p) > D_1(p)$ .

El beneficio esperado de cada empresa en equilibrio será:

$$V = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \left( \frac{1}{2} \frac{D_1(p_1)}{2} (p_1 - c) + \frac{1}{2} \frac{D_2(p_2)}{2} (p_2 - c) \right)$$

$$V = \left( \frac{1}{2} \frac{D_1(p_1)}{2} (p_1 - c) + \frac{1}{2} \frac{D_2(p_2)}{2} (p_2 - c) \right) / (1 - \delta)$$

Examinaremos si se mantiene el resultado colusivo, es decir si se mantiene el precio monopolístico  $p_s^m$  en cualquier estado de la demanda.

Sea  $\pi_s^m = (p_s^m - c) D_s(p_s^m)$  el beneficio monopólico en el estado  $s$ . Si se puede mantener siempre este beneficio su valor presente sería el siguiente:

$$V = \frac{(\pi_1^m + \pi_2^m) / 4}{1 - \delta}$$

Una disminución del precio de  $p_s^m$  proporciona para la empresa que se desvía una ganancia extra de:

$$\pi_s^m - \frac{\pi_s^m}{2} = \frac{\pi_s^m}{2}$$

Por lo que para que  $p_s^m$  sea sostenible debe cumplirse la siguiente condición:

$$\frac{\pi_2^m}{2} \leq \delta V$$

Es decir que la ganancia extra obtenida en el período bajo análisis sea menor o igual al valor descontado de la pérdida de los beneficios colusivos en los siguientes períodos.

Sustituyendo  $V$  tenemos:

$$\delta \geq \delta_0 \equiv \frac{2\pi_2^m}{3\pi_2^m + \pi_1^m}$$

Si suponemos más específicamente un shock de  $(1 \pm \varepsilon)$  que ocasiona una demanda baja de:  $(1 - \varepsilon)D(p)$ , y una demanda alta de:  $(1 + \varepsilon)D(p)$ , siendo la demanda promedio igual a  $D(p)$ . Podemos ver que en caso de sostenerse los precios colusivos, los beneficios esperados descontados serán:

$$\delta V = \delta \left[ \frac{1}{2} \frac{\pi^m}{2} (1 - \varepsilon) + \frac{1}{2} \frac{\pi^m}{2} (1 + \varepsilon) \right] / (1 - \delta)$$

$$\delta V = \frac{\delta}{2} \left[ \frac{2\pi^m}{2} - \frac{\pi^m \varepsilon}{2} + \frac{\pi^m \varepsilon}{2} \right] / (1 - \delta)$$

$$V = \frac{1}{(1 - \delta)} \frac{\pi^m}{2}$$

Como habíamos encontrado antes, la colusión será sostenible cuando los beneficios de desviarse sean menores que los costos de una guerra de precios (perder  $V$  a partir del siguiente período, lo que equivale a  $\delta V$ ). Las ganancias

de la desviación dependerán del estado de la demanda, siendo el caso crítico cuando esta es alta:  $(1+\varepsilon)\pi^m/2$ . La colusión es sostenible en los períodos de demanda alta si:

$$\frac{\pi^m}{2}(1+\varepsilon) \leq \frac{\delta}{2} \frac{\pi^m}{(1-\delta)}$$

$$\delta \geq \frac{(1+\varepsilon)}{(2+\varepsilon)}$$

Es decir, el valor de  $\delta$  que permite mantener la colusión aumenta con los aumentos de las fluctuaciones de la demanda. Debido a que la colusión es más difícil de sostener cuando la demanda es alta, las empresas están obligadas a coludirse con precios menores a los monopolícos, dado que de otra manera iniciarían una guerra de precios.

Supongamos que  $\varepsilon=0,1$ , entonces el factor descuento sería:

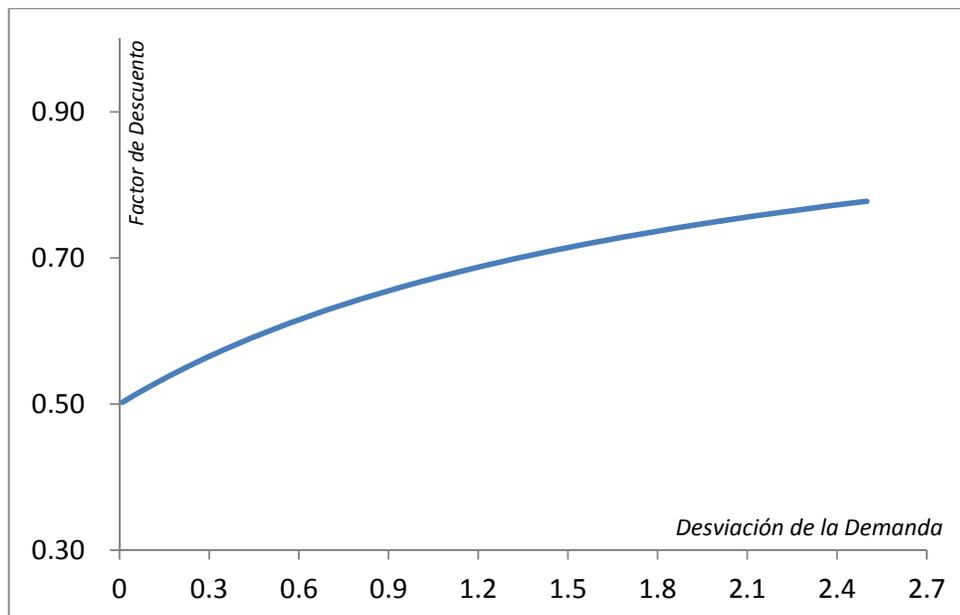
$\delta \geq \frac{1,1}{2,1} \rightarrow \delta \geq 0,524$ , el cual es mayor al 0,5 encontrado anteriormente para el

juego de Bertrand repetido infinitamente. Si ahora asumimos que  $\varepsilon=0,2$ ,

tendríamos que:  $\delta \geq \frac{1,2}{2,2} \rightarrow \delta \geq 0,545$ , lo cual nos indicaría que cuanto mayores

sean los shocks de demanda mayor es el valor del factor de descuento necesario para mantener la colusión. Este resultado se presenta en el Gráfico N° 33.

Gráfico N° 33: Relación entre Shocks de Demanda y Factor de Descuento para Sustener la Colusión



Elaboración Propia

Se puede mostrar que el número de empresas sigue teniendo el mismo efecto sobre el factor de descuento necesario para sostener la colusión. Suponiendo que las probabilidades de una alta o baja demanda siguen siendo  $\frac{1}{2}$ , tenemos que el beneficio de desviarse la colusión en los precios será:

$$\pi^m - \frac{\pi^m}{N} = (N-1) \frac{\pi^m}{N},$$

La condición de sostenibilidad queda de la siguiente forma:

$$(N-1) \frac{\pi^m}{N} \leq \delta \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi^{(dem. alta)}}{N} + \frac{\pi^{(dem. baja)}}{N} \right] / (1-\delta)$$

$$Si : \pi^{(dem. alta)} = \pi^m (1+\varepsilon)$$

$$\pi^{(dem. baja)} = \pi^m (1-\varepsilon)$$

Por lo que la condición para que se cumpla la colusión en periodos de alta demanda será:

$$(N-1) \frac{\pi^m}{N} (1+\varepsilon) \leq \delta \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi^m (1+\varepsilon)}{N} + \frac{\pi^m (1-\varepsilon)}{N} \right] / (1-\delta)$$

Simplificando:

$$(N-1)(1+\varepsilon) \frac{\pi^m}{N} \leq \frac{\delta}{2} \left[ 2 \frac{\pi^m}{N} \right] / (1-\delta) \rightarrow (N-1)(1+\varepsilon) \leq \frac{\delta}{(1-\delta)}$$

$$(N-1)(1+\varepsilon)(1-\delta) \leq \delta \rightarrow (N-1)(1+\varepsilon) \leq \delta + \delta(N-1)(1+\varepsilon)$$

$$\delta \geq \frac{(N-1)(1+\varepsilon)}{(1+(N-1)(1+\varepsilon))}$$

Analizando el cambio del factor de descuento con respecto a un cambio en el shock de la demanda tenemos:

$$\frac{\partial \delta}{\partial \varepsilon} = \frac{(N-1)(1+(N-1)(1+\varepsilon)) - (N-1)(1+\varepsilon)(N-1)}{(1+(N-1)(1+\varepsilon))^2}$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial \varepsilon} = \frac{(N-1) + (N-1)^2(1+\varepsilon) - (1+\varepsilon)(N-1)^2}{(1+(N-1)(1+\varepsilon))^2} \rightarrow \frac{\partial \delta}{\partial \varepsilon} = \frac{(N-1)}{(1+(N-1)(1+\varepsilon))^2} > 0$$

Analizando el cambio de la tasa de descuento respecto al cambio en el número de empresas en el mercado tenemos:

$$\frac{\partial \delta}{\partial N} = \frac{(1+\varepsilon)(1+(N-1)(1+\varepsilon)) - (N-1)(1+\varepsilon)(1+\varepsilon)}{(1+(N-1)(1+\varepsilon))^2}$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial N} = \frac{(1+\varepsilon)}{(1+(N-1)(1+\varepsilon))^2} > 0$$

Es decir cuánto más importantes sean los shocks de demanda, la tasa de descuento necesaria para sostener la colusión se incrementa. Lo mismo sucede cuando se incrementa el número de empresas pues la ganancia por romper la colusión es relativamente menos importante.

Mientras que para el caso de dos empresas con diferentes probabilidades tenemos:

$$\frac{\pi_2^m}{2}(1+\varepsilon) \leq \frac{\delta}{(1-\delta)} \left[ \theta \frac{\pi^m}{2}(1+\varepsilon) + (1-\theta) \frac{\pi^m}{2}(1-\varepsilon) \right]$$

$$\frac{\pi_2^m}{2}(1+\varepsilon) \leq \frac{\delta}{(1-\delta)} \left[ \frac{\pi^m}{2} - \varepsilon \frac{\pi^m}{2} + \theta \varepsilon \pi^m \right] \rightarrow \frac{\pi_2^m}{2}(1+\varepsilon) \leq \frac{\delta}{(1-\delta)} \left[ \frac{\pi^m}{2}(1-\varepsilon(1-2\theta)) \right]$$

Despejando la condición para el factor de descuento:

$$1+\varepsilon \leq \delta(2-\varepsilon+2\theta\varepsilon+\varepsilon) \rightarrow \delta \geq \frac{(1+\varepsilon)}{(2(1+\theta\varepsilon))}$$

Este último resultado nos indica que conforme aumenta la probabilidad de tener una demanda alta, la tasa de descuento necesaria para sostener la colusión va ser menor pues los beneficios esperados futuros perdidos por romper la colusión serán mayores al ser tenerse una alta probabilidad que se vuelvan a repetir períodos de alta demanda. Rotemberg y Saloner presentan evidencia empírica de la industria del cemento para su teoría, mostrando como tasas de crecimiento del producto están negativamente relacionadas con tasas de crecimiento de los precios. Un estudio que podría considerarse como evidencia a su favor es el realizado por Bresnahan para el mercado de

automóviles en Estados Unidos durante los años cincuenta, donde se muestra como en un período de crecimiento económico una industria que había tenido relativo éxito en mantener un esquema de colusión tácita la rompe.

*d) Asimetrías en los costos*

Por lo general las empresas no tienen por qué tener necesariamente la misma estructura de costos, no es difícil demostrar que dos empresas que muestran una estructura de costos como  $c_1 < c_2$  pueden mostrar preferencias opuestas sobre el precio a cobrarse. Los acuerdos eficientes sobre cómo debe repartirse el mercado pueden, por ejemplo llevar a la empresa 1 a cobrar por encima de su precio monopolístico y a la empresa 2 por ejemplo a proveer una cantidad menor que la demanda que recibe, o bien pueden establecerse turnos para que ambas empresas abastezcan alternativamente el mercado.

*e) Contactos multimercados*

Los contactos en varios mercados pueden favorecer la colusión. Recordemos que la restricción de incentivos para la sostenibilidad de un precio en un mercado con dos empresas es:

$$\frac{1}{2} \pi_m \frac{1}{1-\delta} \geq \pi_m \Rightarrow \frac{1}{1-\delta} \geq 2 \Rightarrow \delta \geq \frac{1}{2}$$

Es decir, que basta que  $\delta \geq \frac{1}{2}$  para que la colusión sea sostenible.

Supongamos ahora que existen dos empresas que participan en dos mercados idénticos e independientes pero que en el primer mercado las transacciones son más frecuentes que en el segundo, digamos que el mercado 1 se reúne cada periodo pero que el mercado 2 lo hace cada dos periodos. Si el factor de descuento es  $\delta$ , el factor de descuento implícito para el mercado 2 es  $\delta^2$ .

Suponemos que  $\delta^2 < \frac{1}{2} < \delta$ . Se puede ver que en la ausencia de contactos multimercados, la colusión es sostenible en el primer mercado más no en el segundo. Pero si existe este contacto en ambos mercados, la colusión se da en ambos si:

$$2 \frac{\pi^m}{2} \leq \frac{\pi^m}{2} (\delta + \delta^2 + \delta^3 \dots) + \frac{\pi^m}{2} (\delta^2 + \delta^4 + \delta^6 \dots)$$

La parte izquierda representa el beneficio de rebajar el precio monopólico en ambos mercados mientras que la parte derecha muestra las futuras pérdidas de los beneficios colusivos en ambos mercados, asociados a dejar el comportamiento a lo Bertrand.

$$\begin{aligned} \pi^m &\leq \frac{\pi^m}{2} \left( \frac{\delta}{1-\delta} \right) + \frac{\pi^m}{2} \left( \frac{\delta^2}{1-\delta^2} \right) \\ 1 &\leq \frac{1}{2} \left( \frac{\delta}{1-\delta} + \frac{\delta^2}{1-\delta^2} \right) \\ \rightarrow 2 &\leq \frac{2\delta^2 + \delta}{1-\delta^2} \rightarrow 0 \leq 4\delta^2 + \delta - 2 \rightarrow \delta \geq 0.59 \end{aligned}$$

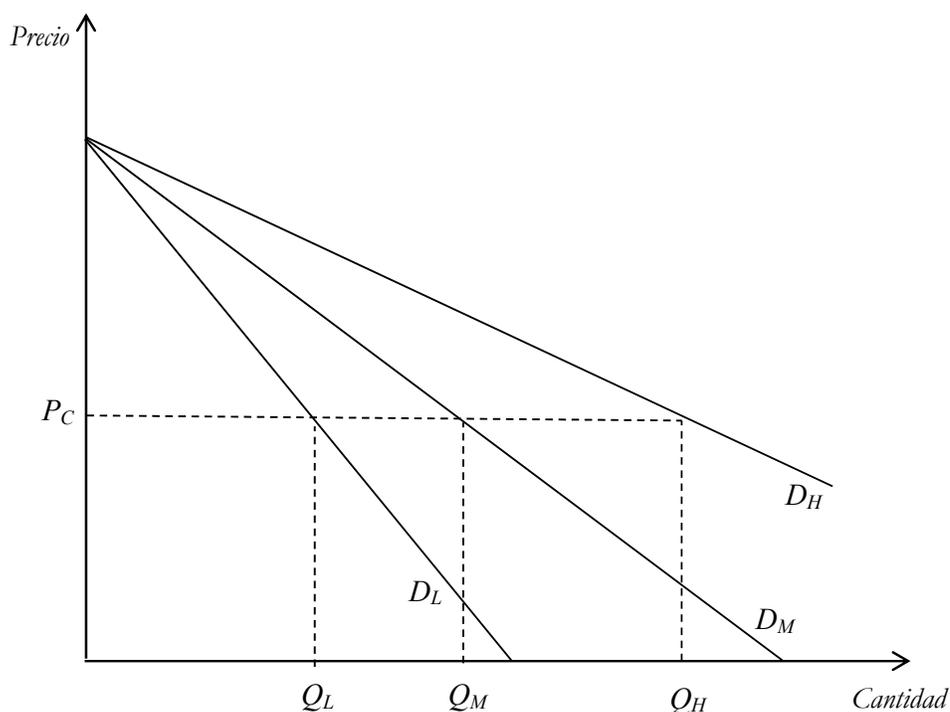
Existiendo contactos multimercados podemos afirmar que con un factor de descuento mayor a 0,59 se puede sostener la colusión total en ambos mercados.

#### f) *Control Imperfecto*

Para que una estrategia sea sostenible, una condición es que pueda observarse si se producen recortes de precios. En el caso de imperfecta observabilidad de las decisiones de precios de los rivales, no es posible distinguir si una disminución en la cuota de mercado es consecuencia de una reducción de la demanda o de recortes secretos de precios, en consecuencia, el incentivo a desviarse tiende a aumentar, por lo que es probable que se observen guerras de precios cuando la demanda es decreciente tal como indican Green y Porter 1984.

A diferencia del modelo de Rotemberg y Saloner, Green y Porter consideraron un modelo que incluye no solo la existencia de shocks de demanda sino la existencia de un control imperfecto sobre los desvíos de las otras empresas. En este contexto, tal como se muestra en el Gráfico N° 34, puede ocurrir que por una empresa vea reducida su demanda de un nivel medio ( $Q_M$ ) con el cual se han coludido las empresas a un nivel  $Q_L$ , por más que el precio colusivo siga vigente ( $P_C$ ). Este es un argumento más que estrategias de alta penalización como la "gatillo" no sean adecuadas pues luego puede comprobarse que la reducción de la demanda no se debió a los rivales. Ante ello una alternativa consistente en aplicar la penalización solo cuando las reducciones de la demanda son muy grandes, lo que estaría asociado con gran certeza a un desvío de las empresas rivales. Otra alternativa, como la planteada en el modelo de Green y Porter es aplicar el castigo durante un período limitado de tiempo y luego intentar de nuevo el acuerdo.

Gráfico N° 34: Incertidumbre en la Demanda y Mantenimiento del Cártel



Basado en Pepall et al. 2006

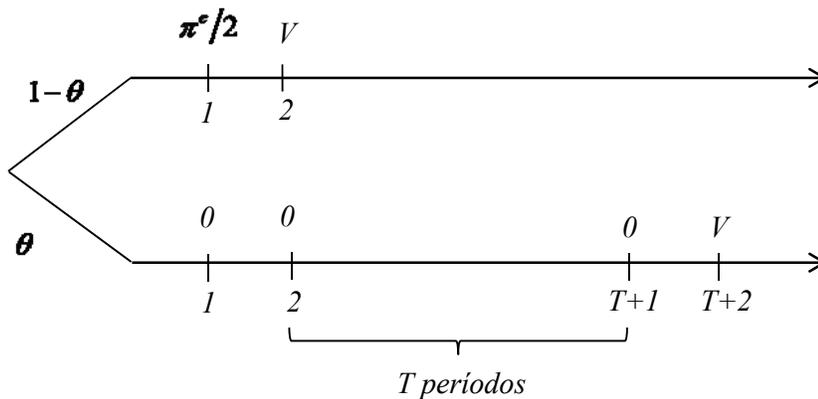
Supongamos que con alguna probabilidad  $\theta$  la demanda puede hacerse cero. Puede demostrarse que el mejor esquema colusivo consiste en mantener el precio de monopolio mientras cada empresa mantenga su cuota de mercado y en caso de que una empresa no pueda vender, lanzar una guerra de precios durante un número limitado de periodos  $T$ , para luego volver al precio de monopolio, entonces, los beneficios esperados descontados  $V$  serían:

$$V = (1 - \theta) \left( \frac{\pi^C}{2} + \delta V \right) + \theta \delta^{T+1} V,$$

Donde los dos términos se corresponden con la situación sin y con shock de demanda respectivamente. En el primer caso, cada empresa obtiene la mitad de los resultados colusivos y espera mantener el precio colusivo en el siguiente periodo.

En el caso de un shock de demanda, la empresa es incapaz de vender y el precio se fija en consecuencia en el nivel del costo marginal durante los siguientes  $T$  periodos, regresando al precio monopólico en el periodo  $T+2$ . El Gráfico N° 35 presenta estos dos casos.

Gráfico N° 35: Representación del Modelo de Green y Porter



Elaboración Propia

Despejamos  $V$  de la ecuación anterior:

$$V = \frac{(1-\theta) \pi^C}{1-\delta(1-\theta+\theta\delta^T)} \frac{1}{2}$$

La colusión será sostenible si:

$$V = (1-\theta) \left( \frac{\pi^C}{2} + \delta V \right) + \theta \delta^{T+1} V \geq (1-\theta) \pi^C + \delta^{T+1} V$$

Lo que equivale a:

$$\delta(1-\delta^T)V \geq \frac{\pi^C}{2}$$

Por lo tanto debe ajustarse la duración de la guerra de precios para que no haya incentivos a la desviación y estas ocurren cuando sucede un shock de demanda.

Se puede ver que en el modelo de Green y Porter una caída imprevista de la demanda puede desencadenar una guerra de precios dado el problema de la observabilidad, mientras que en el modelo de Rotemberg y Saloner las guerras de precios son más probables cuando la demanda es alta, y tal como indica Vives 2001, se le anticipa que va a caer. Respecto a la evidencia empírica, esta no es concluyente. Destaca el estudio econométrico de Ellison 1994, enfocado en el cálculo de la probabilidad de que se inicie una guerra de precios, sobre el cártel ferroviario en Estados Unidos en la década de 1880. Sus resultados respaldarían el modelo de Green y Porter respecto al de Rotemberg y Saloner. Este último tendría el problema de ser muy restrictivo por lo que modificaciones dan lugar a otros resultados. En particular, si los costos marginales son decrecientes o hay restricciones de capacidad para atender las demandas altas se puede encontrar que la colusión tiende a reducirse cuando la demanda baja.

*g) Grado de utilización de la capacidad*

Cuando el grado de utilización de la capacidad en la industria es bajo, el costo marginal de aumentar la producción normalmente también lo es, aumentando los incentivos para tener una mayor participación de mercado y desviarse de los eventuales acuerdos. Como ejemplo, en la industria aérea muchas guerras de precios son causadas por los excesos de asientos libres que poseen los aviones, sobre todo en determinadas épocas del año. Teniendo en cuenta los bajos costos marginales de cada pasajero adicional, los incentivos a bajar precios serán más altos en periodos de menor demanda por sus asientos.

Adicionalmente, tal como comenta Valquez 2006, también se ha encontrado que cuando existen asimetrías de capacidades la colusión se dificulta en el caso de que la capacidad agregada de la industria sea baja. En particular, se sugiere que si aumenta la capacidad de la empresa más grande mientras que la capacidad agregada de las restantes (y simétricas) es baja, los incentivos a desviarse por parte de la más grande aumentan.

*4.2.5 La generalización de las estrategias sostenibles*

Si llamamos  $\pi_{col}$  al beneficio obtenido de mantener la colusión y  $\pi_p$  al beneficio obtenido cuando se es penalizado, la condición general que debe cumplirse es la siguiente:

$$\delta \geq \frac{\pi_d - \pi_{col}}{\pi_d - \pi_p}$$

La colusión no necesariamente se tiene que realizar con precios o cantidades monopólicas, sino que cualquier combinación de precios o cantidades con los cuales se obtengan beneficios mayores a los obtenidos sin coludirse pero menores a los del monopolio, puede ser escogida por los oligopolistas siempre y cuando el factor de descuento cumpla con la condición de sostenibilidad. Sin embargo, existen factores que pueden afectar estos resultados además del número de empresas, como las asimetrías en costos, la existencia de una

demanda fluctuante, retardos en la detección de los desvíos, casos en el que el precio del rival no es observable, la existencia de contactos en varios mercados, entre otros.

En particular, las estrategias gatillo (*trigger Strategy*) con las que se ha analizado la sostenibilidad de la colusión es considerada muy severa, ya que el castigo por el desvío es jugar indefinidamente a lo Cournot por el resto de períodos.

Por ello, Abreu 1986 planteó algunas condiciones que pudieran hacer sostenibles una *Stick and Carrot Strategy* o estrategia del tipo Palo y la Zanahoria que consiste en jugar al inicio el castigo (como puede ser una producción alta) y luego jugar la recompensa en el siguiente período si la otra empresa no se ha desviado en el período anterior.

En el periodo  $t$  jugar  $q^*$  si todas las firmas jugaron  $q^*$  en  $t-1$ .

Si una firma se desvió de  $q^*$  en  $t-1$ , jugar  $q^p$  en  $t$ .

Si todas las firmas jugaron  $q^p$  en  $t-1$ , jugar  $q^*$  en  $t$ .

Si una firma se desvió de  $q^p$  en  $t-1$ , jugar  $q^p$  en  $t$ .

Donde  $q^*$  es la cantidad correspondiente a la recompensa y  $q^p$  es la cantidad correspondiente al castigo o penalización.

Estas estrategias tienen que cumplir dos condiciones para ser implementables:

La condición de credibilidad:

$$\pi^d(q^p) - \pi(q^p) = \delta [\pi(q^*) - \pi(q^p)] \quad (i)$$

La condición de sostenibilidad:

$$\pi^d(q^*) - \pi(q^*) = \delta [\pi(q^*) - \pi(q^p)] \quad (ii)$$

Como ejemplo, Church y Ware 2000 plantean el caso donde tenemos una demanda de mercado dada por:  $P = 130 - Q$ , donde existen dos competidores a lo Cournot, con un costo marginal constante e igual a 10 para cada uno y donde se asume un factor de descuento de 0,40.

La función de reacción para una empresa está dada por:

$$q_i^r = \frac{1}{2}(S - q_j)$$

Donde:

$$S = \frac{a - c}{b}$$

Y una cantidad de desvío será igual a:

$$q_i^d = \frac{1}{2}(S - q_j^p) \rightarrow q^d = \frac{1}{2}(120 - q^p)$$

Entonces el beneficio será:

$$\pi^d = [a - bQ]q^d - cq^d$$

$$\pi^d = \left[ 130 - \left[ \frac{1}{2}(120 - q^p) + q^p \right] \right] \left[ \frac{1}{2}(120 - q^p) \right] - 10 \left[ \frac{1}{2}(120 - q^p) \right]$$

$$\pi^d = \left[ 130 - \left[ \frac{120 - q^p + 2q^p}{2} \right] \right] \left[ \frac{1}{2}(120 - q^p) \right] - 10 \left[ \frac{1}{2}(120 - q^p) \right]$$

$$\pi^d = \left( \frac{120 - q^p}{2} \right)^2 \quad (iii)$$

Los beneficios del castigo (*punishment*) dependen de la producción de castigo y serán:

$$\pi(q^p) = p(Q)q^p - cq^p$$

$$\pi(q^p) = (130 - 2q^p)q^p - 10q^p \rightarrow \pi(q^p) = (120 - 2q^p)q^p \quad (iv)$$

Reemplazando (iii), (iv),  $\delta = 0,40$  y  $\pi^m = 1800$  en la condición de credibilidad

$$\begin{aligned}\pi^d(q^p) - \pi(q^p) &= \delta [\pi(q^m) - \pi(q^p)] \\ \left(\frac{120 - q^p}{2}\right)^2 - (120 - 2q^p)q^p &= 0,40 [1800 - (120 - 2q^p)q^p] \\ (60 - 0,5q^p)^2 - (120 - 2q^p)q^p &= 720 - 0,40(120 - 2q^p)q^p \\ 3600 + 0,25(q^p)^2 - 60q^p - 0,60(120 - 2q^p)q^p - 720 &= 0 \\ 1,45(q^p)^2 - 132q^p + 2800 &= 0\end{aligned}$$

Utilizando la solución de la fórmula cuadrática, encontramos que la producción de castigo ( $q^p$ ) más severa creíble es:

$$\frac{132 \pm \sqrt{(132)^2 - 4(1,45)(2800)}}{2(1,45)} \rightarrow q^p = 54,77, \text{ y } \pi(q^p) = 572,90$$

Vemos que estos castigos son considerablemente mayores a los castigos antes desarrollados debido a los mayores incentivos a romper la colusión asociados con una menor tasa de descuento (producción de castigo igual a la producción a lo Cournot). Asimismo el beneficio del desvío de la producción monopólica será:

$$\pi_m^d = \left[ a - b \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{a-c}{b} - q^m \right) + q^m \right] \right] \frac{1}{2} \left( \frac{a-c}{b} - q^m \right) - 10 \frac{1}{2} \left( \frac{a-c}{b} - q^m \right)$$

Reemplazando obtenemos:

$$\begin{aligned}\pi_m^d &= \left[ a - \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{a-c}{b} - \frac{1}{4} \left( \frac{a-c}{b} \right) \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{a-c}{b} \right) \right] \right] \frac{1}{2} \left( \frac{a-c}{b} - \frac{1}{4} \left( \frac{a-c}{b} \right) \right) - 5 \left( \frac{a-c}{b} - \frac{1}{4} \left( \frac{a-c}{b} \right) \right) \\ \pi_m^d &= 2025\end{aligned}$$

Para ver si estos castigos o "palos" son suficientes para mantener la maximización de beneficios en conjunto, sustituimos

$$\pi^m = 1800, \pi^d(q^m) = 2025, \delta = 0,40 \text{ y } \pi(q^p) = 572,90$$

En la condición de sostenibilidad:

$$\pi^d(q^m) - \pi(q^m) \leq \delta [\pi(q^m) - \pi(q^p)]$$
$$225 \leq 490,84$$

Este resultado indica que estos castigos son suficientes para sostener la maximización de los beneficios en conjunto.

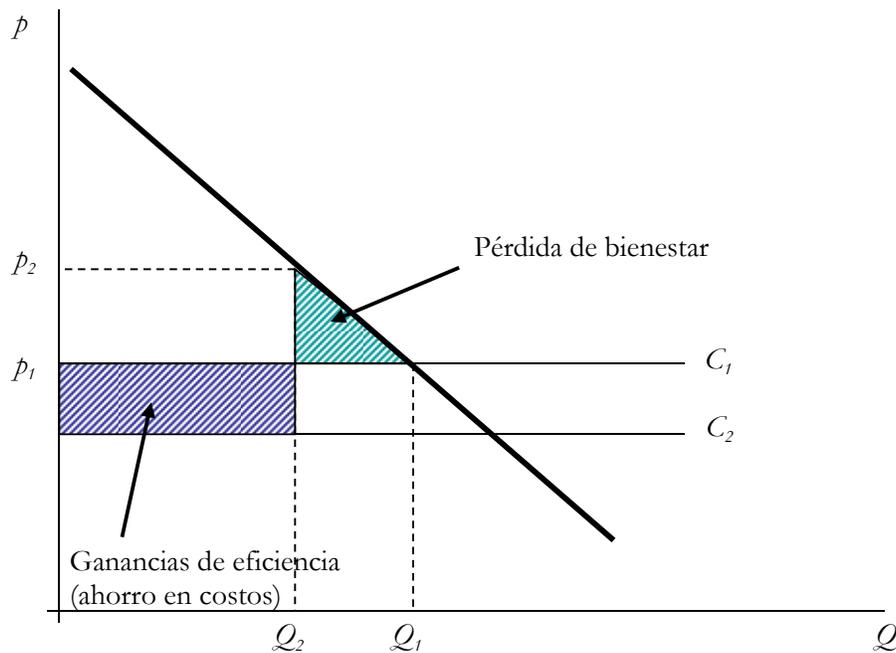
### 4.3 Las Concentraciones Horizontales

Se registra una concentración cuando empresas con unidades de decisión distinta, se funden en una sola empresa, a través de operaciones tales como las fusiones, adquisiciones, absorciones, entre otras. En este sentido, un acto de concentración ocurre cuando el control sobre las decisiones de la empresa de estar en dos grupos económicos para a uno solo.

#### *4.3.1 Efectos de las concentraciones*

Tal como planteó Williamson 1968, cuyo argumento se ilustra en el Gráfico N° 36, como resultado de un proceso de concentración puede aumentar el poder de mercado de la empresa (pasándose del precio  $P_1$  a  $P_2$  y reduciéndose la cantidad vendida de  $Q_1$  a  $Q_2$ ) pero también lograrse eficiencias productivas (que se reflejan en la reducción del costo marginal de  $C_1$  a  $C_2$ ), lo cual lleva a la necesidad de evaluar, en este análisis de equilibrio parcial, la magnitud relativa de ambos efectos para ver su efecto sobre el bienestar.

Gráfico N° 36 Efectos de las concentraciones horizontales



Fuente: Williamson 1968

En análisis de los efectos de las fusiones en los mercados ha tenido un gran desarrollo desde entonces. Una referencia importante es el capítulo 3 de Whinston 2003, En esta sección solo nos concentraremos en los incentivos a fusionarse dentro del modelo de Cournot y algunos de análisis adicionales.

#### 4.3.2 Los incentivos para fusionarse

Diferentes modelos como el de Salant et. al 1983 han mostrado que no necesariamente las empresas que compiten en mercado tienen incentivos para fusionarse siendo posible identificar casos de fusiones no rentables. Por ejemplo, supongamos que primero que existen tres empresas simétricas con costos marginales constantes que juegan a lo Cournot y luego dos de ellas se fusionan. En el caso que las empresas 1 y 2 se fusionen, el problema de maximización de beneficios vendría a ser:

$$\pi_{12} = p(Q)[q_1 + q_2] - cq_1 - cq_2$$

$$\pi_{12} = [a - b(q_1 + q_2 + \bar{q}_3)][q_1 + q_2] - cq_1 - cq_2$$

$$\pi_{12} = aq_1 + aq_2 - bq_1^2 - bq_1q_2 - bq_2q_1 - bq_2^2 - b\bar{q}_3q_1 - b\bar{q}_3q_2 - cq_1 - cq_2$$

Resolviendo las condiciones de primer orden podemos encontrar las funciones de reacción:

$$q_1 = \frac{a - 2bq_2 - b\bar{q}_3 - c}{2b}$$

$$q_2 = \frac{a - 2bq_1 - b\bar{q}_3 - c}{2b}$$

Dado que sabemos que las empresas son simétricas tenemos:

$$q_1 = q_2 \Rightarrow q_1 = \frac{a - 2bq_1 - b\bar{q}_3 - c}{2b} \Rightarrow q_1 = \frac{a - b\bar{q}_3 - c}{4b}$$

Por lo que, la empresa fusionada producirá  $2q_1$ , obteniendo la función de reacción, a la cual llamaremos  $q_{12}$ :

$$q_1 = \frac{a - b\bar{q}_3 - c}{4b} \rightarrow q_{12} = \frac{a - b\bar{q}_3 - c}{2b} \rightarrow q_{12} = \frac{1}{2}(S - q_3)$$

Y la función de reacción de la tercera empresa (la no fusionada) vendrá dado por:

$$q_3 = \frac{1}{2}(S - q_{12}) \Rightarrow q_3 = \frac{1}{2}\left(S - \frac{1}{2}(S - q_3)\right)$$

$$q_3 = \frac{1}{2}\left(S - \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}q_3\right) \Rightarrow q_3 = \frac{S}{3} = \frac{a - c}{3b}$$

Obteniéndose que la empresa fusionada producirá:

$$q_{12} = \frac{1}{2}\left(S - \left(\frac{a - c}{3b}\right)\right) \rightarrow q_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{a - c}{b} - \frac{a - c}{3b}\right) \rightarrow q_{12} = \left(\frac{a - c}{3b}\right)$$

Obtenemos los beneficios para las empresas fusionadas:

$$\begin{aligned}\pi_{12} &= p(Q)q_{12} - cq_{12} = [a - b(q_{12} + q_3)]q_{12} - cq_{12} \\ \pi_{12} &= aq_{12} - bq_{12}^2 - bq_{12}q_3 - cq_{12} \\ \pi_{12} &= a\left(\frac{a-c}{3b}\right) - b\left(\frac{a-c}{3b}\right)^2 - b\left(\frac{a-c}{3b}\right)\left(\frac{a-c}{3b}\right) - c\left(\frac{a-c}{3b}\right) \\ \Rightarrow \pi_{12} &= \left(\frac{a-c}{3}\right)\left(\frac{a-c}{3b}\right) = \frac{(a-c)^2}{9b}\end{aligned}$$

Finalmente, los beneficios para la tercera empresa serán:

$$\begin{aligned}\pi_3 &= [a - b(q_{12} + q_3)]q_3 - cq_3 \\ \pi_3 &= \left[ a - b\left(\frac{a-c}{3b} + \frac{a-c}{3b}\right) \right] \left(\frac{a-c}{3b}\right) - c\left(\frac{a-c}{3b}\right) \\ \pi_3 &= \left[ a - 2\left(\frac{a-c}{3}\right) - c \right] \left(\frac{a-c}{3b}\right) \Rightarrow \pi_3 = \frac{(a-c)^2}{9b}\end{aligned}$$

Como resultado podemos ver que la tercera empresa (es decir, la que no se fusionó) percibe ahora mayores beneficios que en un primer momento, es decir, le convendría que se diera la fusión.

$$\frac{(a-c)^2}{9b} > \frac{(a-c)^2}{16b}$$

Asimismo, la fusión de la empresa 1 y 2 perjudica a sus accionistas pues los beneficios obtenidos con la fusión son menores que los que se obtendrían si produjeran separadamente a lo Cournot.

$$\pi_{1,2}^{fusionadas} = \frac{(a-c)^2}{9b} < 2 \frac{(a-c)^2}{16b} = \pi_1^C + \pi_2^C$$

Como hemos visto, en mercados que compiten a lo Cournot las fusiones entre dos empresas (inclusive más) no necesariamente producen mayores beneficios para dichas empresas, al menos que se produzca como un monopolio. Para verlo mejor, supongamos un mercado con  $N > 2$  empresas

que compiten a lo Cournot. Recordando que el beneficio obtenido para cada una es:

$$\pi_i = \frac{1}{b} \left( \frac{a-c}{N+1} \right)^2 \quad (i)$$

Supongamos que una cantidad ( $M > 2$ ) de estas empresas decide fusionarse, pero sin llegar a formar un monopolio, es decir ( $M < N$ ). Tal fusión lleva ahora a una industria donde compiten ( $N - M + 1$ ) empresas, es decir:

$N - M$ : empresas no fusionadas

1 : la empresa fusionada.

Puesto que todas las empresas son similares podemos decir que la empresa fusionada está conformada por la empresa 1 hasta  $M$ .

Asimismo, sabemos que después de la fusión, las empresas fusionadas actúan como si fueran una sola, es decir, todas y cada una de estas ( $N - M + 1$ ) empresas al tener costos idénticos y fabricar el mismo producto, en equilibrio, deben producir la misma cantidad y tener el mismo beneficio.

Por lo que en el equilibrio de Cournot después de la fusión, debe suceder que la cantidad y beneficios de las empresas fusionadas sean iguales que la producción y beneficios de cada empresa no fusionada. Para un mercado con ( $N - M + 1$ ) empresas, estas son:

$$q_f^c = q_{-f}^c = \frac{a-c}{b(N-M+2)} \quad (ii)$$

$$\pi_f^c = \pi_{-f}^c = \frac{(a-c)^2}{b(N-M+2)^2} \quad (iii)$$

Donde:

$\pi_f^c =$  beneficio de las empresas fusionadas,

$\pi_{-f}^c =$  beneficio de las empresas no fusionadas.

Como existen  $M$  empresas dentro de la fusionada, cada una pudo obtener el beneficio (i) antes de la fusión. Por lo que, para que se produzca la fusión deberá cumplirse que,

$$\frac{(a-c)^2}{b(N-M+2)^2} \geq M \frac{1}{b} \frac{(a-c)^2}{(N+1)^2} \quad (i)$$

Es decir que el beneficio de fusionarse debe ser mayor a la obtenida de no hacerlo. La condición anterior requiere que:

$$(N+1)^2 \geq M(N-M+2)^2 \quad (ii)$$

Esta condición al que llamaremos, de rentabilidad, no depende de ningún parámetro de la demanda o el costo marginal de las empresas. Como se menciona en Pepall et al. 2006, esta ecuación nos habla de la rentabilidad de cualquier fusión de  $M$  empresas. Y todo lo que se requiere es que la demanda sea lineal y que cada una de las empresas tenga los mismos costos marginales constantes.

Si sustituimos  $M = aN$  donde  $0 < a < 1$ , es decir si suponemos que las empresas a fusionarse son una proporción del total de empresas, obtenemos una condición en función de  $a$  (fracción de empresas que se fusionan):

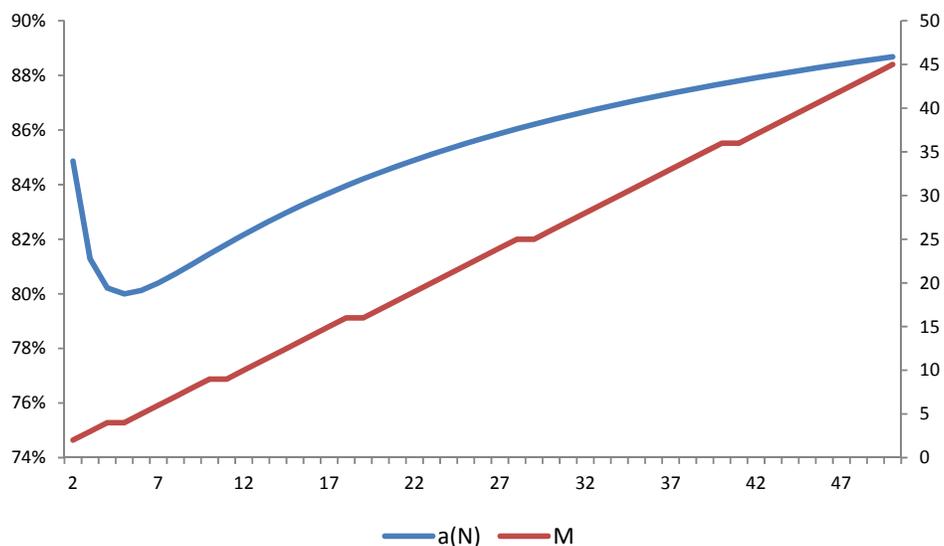
$$a(N) = \frac{3+2N-\sqrt{5+4N}}{2N} \quad (iii)$$

A partir de esta condición, se puede precisar que tan grande tiene que ser  $a$  para que la fusión sea rentable. A modo de ilustración a continuación se describirán los casos en los que la fusión no es rentable y los casos en los que si resulta rentable.

### ***Ejemplo de rentabilidad de la fusión***

Suponiendo una gama de valores de  $N^{34}$ , y usando la ecuación (iii) se halla los distintos valores de  $a(N)$  asociados a los mismos. Y por lo tanto, los valores de  $M$ . El Gráfico N° 37 nos muestra los resultados, en donde se visualiza que la proporción de empresas fusionadas, garantizando la rentabilidad, no es menor al 80% y sigue una tendencia creciente. En otras palabras, a medidas que el número de empresas aumenta en el mercado, el número de empresas que deben de fusionarse debe ser mayor para poder garantizar la rentabilidad de la misma, caso contrario resultará no sostenible.

Gráfico N° 37 Evolución del factor  $a(N)$  y el número de empresas necesaria para sostener la fusión ( $M$ ) conforme de incrementa el número de empresas totales ( $N$ )



Elaboración Propia

Como ejemplo de la no rentabilidad de algunas fusiones en el este modelo, en el Cuadro N° 2 se han supuesto valores alternativos para el número de empresas ( $N$ ) —similar al caso anterior— y en base a esto un valor de las empresas fusionadas ( $M$ ). Lo que se ha hecho es calcular los elementos de la condición (ii). En los casos escogidos ninguna empresa cumple la desigualdad

<sup>34</sup> Se deja al lector replicar el ejemplo con valores para  $N$  de 0 a 100.

y se puede ver estos casos tienen asociado un ratio  $a$  que no sobrepasa el 80%, confirmando lo encontrado mencionado anteriormente.

Cuadro N° 2 Evolución del factor  $a(N)$  y el número de empresas necesaria para sostener la fusión ( $M$ ) conforme de incrementa el número de empresas totales ( $N$ )

N	M	$a(N)$	$(N+1)^2$	$M*(N-M+2)^2$
3	2	67%	16	18
5	3	60%	36	48
9	5	56%	100	180
10	6	60%	121	216
11	7	64%	144	252
12	8	67%	169	288
13	9	69%	196	324
14	10	71%	225	360
15	11	73%	256	396
16	12	75%	289	432
17	13	76%	324	468
18	14	78%	361	504
20	15	75%	441	735

Elaboración Propia

Sin embargo, este resultado, aparentemente paradójico, puede resultar no tan realista. En particular si se considera que la fusión puede generar reducciones en los costos variables y fijos de la empresa fusionada, en particular si estas son bastante apreciables. Otra forma de resolver esta "paradoja" es considerar que la empresa fusionada logra hacer creíble que la nueva escala alcanzada por la fusión le permite convertirse en un líder del mercado a lo Stackelberg <sup>35</sup>.

Por último, Farrell y Shapiro 1989 presentan un análisis de las fusiones horizontales del oligopolio de Cournot encontrando las condiciones generales bajo las cuales este tipo de fusiones puede subir el precio o no dependiendo de la reducción de costos a la que hubiera lugar. También desarrollan un procedi-

<sup>35</sup> Mayores detalles de esta discusión se pueden consultar en el capítulo 16 de Pepall et al. 2006.

miento para analizar el efecto de una fusión en los rivales y en los consumidores y por lo tanto proporcionar las condiciones suficientes para que las fusiones rentables para aumentar el bienestar. Demuestran también que el análisis de fusiones tradicional puede inducir a error si se usa solo en índice de Herfindahl-Hirschman.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABREU, Dilip  
1986 "Extreme equilibrium of oligopolistic supergames", *Journal of Economic Theory*, 39:191-225
- ALLAZ, Blaise y Jean-Luc VILA  
1993 "Cournot Competition, Forward Markets and Efficiency". *Journal of Economic Theory*, Vol. 59, pp.1-16.
- BAUMOL, William Jack  
1982 "Contestable markets: An uprising in the theory of industry structure". *American Economic Review*, Vol. 72, pp. 1-15.
- BERTRAND, Joseph  
1883 "Théorie Mathématique de la Richesse Sociale". En *Journal des Savants* 67, pp. 499-508.
- BOWLEY, A. L.  
1924 "The Mathematical Groundwork of Economics". Reprint of *Economic Classics*. Augustus M. Kelley, Bookseller. New York, 1965
- BRESNAHAN, Timothy F.  
1987 "Competition and Collusion in the American Automobile Industry: the 1955 Price War" *The Journal of Industrial Economics*, Vol. 35, Nº 4, June.
- 1989 "Empirical Studies of Industries with Market Power". En SCHMALENSEE, Richard y Robert WILLIG (editores). *Handbook of Industrial Organization*. Volumen II, Capítulo 17.
- BUSHNELL, James  
2006 "Oligopoly Equilibria in Electricity Contract Markets". Center for the Study of Energy Markets (CSEM). Working Paper 148R. University of California Energy Institute.
- CARLTON, Dennis y Jeffrey PERLOFF  
2005 *Modern Industrial Organization*. Fourth Edition. Pearson – Addison Wesley.
- CHURCH, Jeffrey y Roger WARE  
2000 *Industrial Organization. A Strategic Approach*. McGrawHill.
- COWLING, Keith y Michael WATERSON  
1976 "Price-Cost Margins and Market Structure". *Economica*, Vol. 43, pp 267-274.
- COLOMA, Germán (editor)  
2006 *Progresos en Organización Industrial*. Buenos Aires: TEMAS Grupo Editorial.

- COURNOT, Augustin  
1927[1838] *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth* (translated by N. T. Bacon, 1897). New York: Macmillan.
- EDGEWORTH, Francis Isidro  
1925 "The Pure Theory of Monopoly". En *Papers Relating to Political Economy*, Vol. 1. Londres: Macmillan.
- EKELUND, Robert y Robert HEBERT  
1992 *Historia de la teoría económica y su método*. Madrid, Mc Graw-Hill, 1992.
- ELLISON, Glen  
1994 "Theories of cartel stability and the Joint Executive Committee". *The Rand Journal of Economics*, Vol. 25, Nº 1, pp. 37-57.
- FARRELL, J. y SHAPIRO C.  
1990 "Horizontal Mergers: An Equilibrium Analysis." *American Economic Review*. 80: 107-25.
- FORCHHEIMER, Karl  
1908 "Theoretisches zum unvollständigen Monopole". *Jahrbuch für Gesetzgebung*, vol 32, pp 1-12.
- FRIEDMAN, James  
1971 "A Non-cooperative Equilibrium for Supergames." *Review of Economics Studies*. 28: 1-12
- FUDENBERG, Drew y Jean TIROLE  
1989 "Noncooperative Game Theory for Industrial Organization: An Introduction and Overview". En SCHMALENSSEE, Richard y Robert WILLIG (editores). *Handbook of Industrial Organization*. Volumen I, Capítulo 5.
- GARCÍA, Raúl, NARIO, Tatiana y FLORES, Cristhian  
2010 "Relación entre los Mercados *Spot* y Futuros: El Caso del Sector Eléctrico" en: *Revista de la Competencia y la Propiedad Intelectual de INDECOPI*, año 6, Número 11, Primavera 2010.
- KREPS, David M. y José A. SCHEINKMAN  
1983 "Quantity Precommitment and Bertrand Competition Yield Cournot Outcomes". *The Bell Journal of Economics*, Vol. 14, No. 2 (Autumn), pp. 326-337
- GIBBONS, Robert  
1997 *Un Primer Curso de Teoría de Juegos*. Antoni Bosch Editor.
- GREEN, Edward y Robert PORTER  
1984 "Noncooperative Collusion under Imperfect Price Information". *Econometrica*, Vol. 52, No. 1 (January), pp. 87-100.

- HANNESSON, Rognvaldur  
 1998 Petroleum Economics. Issues and Strategies of Oil and Natural Gas Production, Quórum Books Pub.
- JACQUEMIN, Alexis y Margaret SLADE  
 1989 "Cartels, Collusion and Horizontal Mergers". En SCHMALENSEE, Richard y Robert WILLIG (editores). Handbook of Industrial Organization. Volumen I, Capítulo 7.
- KLEMPERER, Paul. y MEYER, Margaret  
 1986 "Price Competition versus Quantity Competition: The Role of Uncertainty." The Rand Journal of Economics, 17(4): 618-638.
- 1989 "Supply Function Equilibria in Oligopoly Under Uncertainty." Econometrica, VOL. 57, PP. 1243-1277.
- LERNER, Abba  
 1934 "The Concept of Monopoly and the Measurement of Monopoly Power". *The Review of Economic Studies*, Vol. 1, No. 3 (Jun., 1934), pp. 157-175
- MCAFEE, R. Preston y Michael A. WILLIAMS  
 1992 Horizontal Mergers and Antitrust Policy. The Journal of Industrial Economics, Vol. 40, No. 2 (Jun., 1992), pp. 181-187
- MACHADO, Matilde  
 2002 "Modelación de Mercados Eléctricos". Presentación realizada para OSINERGMIN.
- MAS-COLLEL, Andreu, Michael WHINSTON y Jerry GREEN  
 1995 *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press.
- MARTIN, Stephen  
 2002 Advanced Industrial Economics. Segunda edición. Blackwell: Massachusetts.
- NASH, John  
 1951 "Non-Cooperative Games". *The Annals of Mathematics*. Second Series, Vol. 54, No. 2, (Sep., 1951), pp. 286-295
- QUINTANA, Eduardo  
 2012 "Tratamiento de la Colusión Tácita en el Perú: Marchas y Contra-marchas". *Revista de Derecho Competencia*. Bogotá (Colombia), vol. 4 N° 4, 119-189, enero-diciembre 2008.
- PEPALL, Lynne; RICHARDS, Daniel y George NORMAN  
 2006 Organización Industrial. Teoría y Prácticas Contemporáneas. Tercera Edición México: Editorial Thomson.

- PORTER, R.H.  
 1983a "Optimal Cartel Trigger Strategies." *Journal of Economics Theory*, 29: 313-38.
- 1983b "A study of Cartel Stability: The Joint Executive Committee, 1880-1886." *Bell Journal of Economics*, 14: 301-14.
- ROTEMBERG, J. y G. SALONER  
 1986 A Supergame-Theoretic Model of Business Cycles and Price Wars during Booms. *American Economic Review* 76: 390 – 407.
- SALANT, S.W., SWITZER, S. y REYNOLDS, R.J.  
 1983 "Losses from horizontal merger: The effects of an exogenous change in industry structure on Cournot-Nash equilibrium", *Quarterly Journal of Economics* 48:185-199.
- SELTEN, Reinhard  
 1973 "A Simple Model of Imperfect Competition where 4 are Few and 6 are Many". *International Journal of Game Theory* 2, 141 - 201.
- SEADE, Jesús  
 1980 "The stability of Cournot revisited". *Journal of Economic Theory*, 23(1). pp. 15-27.
- SHAPIRO, Carl  
 1989 "Theories of Oligopoly Behavior". En Schmalensee, Richard y Robert Willig (editores). *Handbook of Industrial Organization*. Volumen I, Capítulo 6.
- SCHOOTER, Andrew  
 1996 *Microeconomía. Un enfoque moderno*. México: Editorial CECSA.
- STACKELBERG, Heinrich Von  
 1934(2011) *Market Structure and Equilibrium*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (traducción del alemán).
- STOFT, Steven  
 2002 *Power System Economics: Designing Markets for Electricity*. Wiley-IEEE Press.
- SWEEZY, Paul  
 1939 "Demand Under Conditions of Oligopoly". *Journal of Political Economy*, Vol. 47, No. 4 (Aug., 1939), pp. 568-573
- TIROLE, Jean  
 1988 *The Theory of Industrial Organization*. Cambridge: The MIT Press.
- VALQUEZ, CARLOS S.  
 2006 "Modelos Dinámicos de Interacción Estratégica en Oligopolio: Formación de Precios y Colusión". En Coloma, Germán (editor)

*Progresos en Organización Industrial*. Asociación Argentina de Economía Política.

VÁSQUEZ, Arturo

2006 La Organización Económica de la Industria de Hidrocarburos en el Perú: El Mercado del Gas Licuado de Petróleo. *Revista de la Competencia y la Propiedad Intelectual*. Año 2, N° 3, Primavera 2006. INDECOPI

VILLAR SUÁREZ, Jorge Antonio

2002 "Simulador de un Mercado Hidrotérmico utilizando Teoría de Juegos". Tesis para optar el título de Magíster en Ciencias de la Ingeniería. Pontificia Universidad Católica de Chile.

VIVES, Xavier

2001 *Precios y Oligopolio: Ideas Clásicas y Herramientas Modernas*. Madrid: Antoni Bosch Editor.

WILLIAMSON, Oliver E.

1968 "Economies as an Antitrust Defense: The Welfare Tradeoffs". *The American Economic Review*, Vol. 58, N° 1 (Mar. 1968), pp. 18-36.

WHINSTON M.

2003 "Lectures on Antitrust Economics". The center for the Study of Industrial Organization.

WOLFRAM, CATHERINE D.

1999 "Measuring Duopoly Power in British Electricity Spot Market". *The American Economic Review*. Vol. 89(4), pp. 806-826.

## APÉNDICE

El Teorema Folk en juegos infinitamente repetidos y los modelos de oligopolio

Desde la contribución de Friedman 1971 sobre las condiciones bajo las cuales una estrategia de cooperación en juegos infinitamente repetidos, se han realizado una serie de avances que, principalmente debidos a los trabajos de Abreu 1986 que generalizan estos resultados, los cuales fueron enunciados inicialmente tomando como estrategia de reversión el equilibrio de Nash del juego estático. Siguiendo a Mas-Colell et al. 1995 pasamos a enunciar este teorema para los juegos.

En estos casos, el Teorema Folk, indica lo siguiente: "cualquier conjunto de pagos factibles que da a cada jugador, sobre un período base, más que el menor pago que él puede garantizar por sí mismo en el juego de una sola etapa puede ser sostenible como los pagos de un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos si los jugadores descuentan el futuro en un grado suficientemente bajo" (Mas-Colell et al 1995: 404). La noción de equilibrio de Nash perfecto en subjuegos indica aquellas estrategias que son equilibrio de Nash en cada etapa del juego.<sup>36</sup>

En términos más formales, y siguiendo la notación mantenida hasta ahora, se puede identificar que existen un conjunto de estrategias factibles que pueden ser sostenibles tanto cuando la estrategia es la de reversión a la media como con castigos más severos, tal como mostró Abreu 1986.

Este conjunto factible se puede ilustrar para el caso del duopolio de Cournot. Primero definimos el flujo de pagos descontado para el jugador  $i$  como:

$$v_i(Q) = \sum_{\tau=1}^{\infty} \delta^{\tau} \pi_i(q_{t+\tau})$$

---

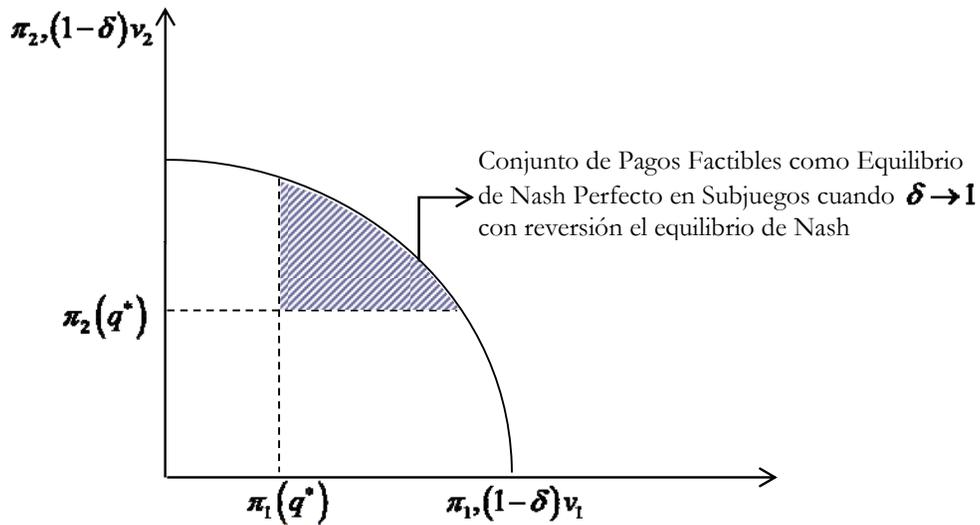
<sup>36</sup> Mayores detalles técnicos se pueden encontrar en el Apéndice A del capítulo 12 de Mas-Collell et al. 1995.

Siendo  $Q$  la senda de producción de una secuencia infinita de acciones de las empresas y  $q_t = (q_{1t}, q_{2t})$ .

De esta forma se puede definir el *pago promedio* de esta senda de producción  $Q$  como sigue  $(1-\delta)v_i(Q)$ . Este corresponde al pago promedio por período que, si el juego es infinitamente repetido, da como pago descontado  $v_i(Q)$ .

En base a ello se puede graficar el conjunto de pagos soportables cuando  $\delta$  tiende a 1 de la siguiente forma:

El Teorema Folk con Reversión al Equilibrio de Nash en el Oligopolio de Cournot



Fuente: Mas-Colell et al. 1995

**ÚLTIMAS PUBLICACIONES DE LOS PROFESORES  
DEL DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA**

*Libros*

Félix Jiménez

2012 *Elementos de teoría y política macroeconómica para una economía abierta* (Tomos I y II). Lima, Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Félix Jiménez

2012 *Crecimiento económico: enfoques y modelos*. Lima, Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Janina León Castillo y Javier M. Iguiñiz Echeverría (Eds.)

2011 *Desigualdad distributiva en el Perú: Dimensiones*. Lima, Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Alan Fairlie

2010 *Biocomercio en el Perú: Experiencias y propuestas*. Lima, Escuela de Posgrado, Maestría en Biocomercio y Desarrollo Sostenible, PUCP; IDEA, PUCP; y, LATN.

José Rodríguez y Albert Berry (Eds.)

2010 *Desafíos laborales en América Latina después de dos décadas de reformas estructurales. Bolivia, Paraguay, Perú (1997-2008)*. Lima, Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú e Instituto de Estudios Peruanos.

José Rodríguez y Mario Tello (Eds.)

2010 *Opciones de política económica en el Perú 2011-2015*. Lima, Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Felix Jiménez

2010 *La economía peruana del último medio siglo*. Lima, Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Felix Jiménez (Ed.)

2010 *Teoría económica y Desarrollo Social: Exclusión, Desigualdad y Democracia. Homenaje a Adolfo Figueroa*. Lima, Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú.

José Rodriguez y Silvana Vargas

2009 *Trabajo infantil en el Perú. Magnitud y perfiles vulnerables. Informe Nacional 2007-2008*. Programa Internacional para la Erradicación del Trabajo Infantil (IPEC). Organización Internacional del Trabajo.

Óscar Dancourt y Félix Jiménez (Ed.)

2009 *Crisis internacional. Impactos y respuestas de política económica en el Perú*. Lima, Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú.

*Serie: Documentos de Trabajo*

- No. 335 “Políticas de tecnologías de información y comunicación en el Perú, 1990-2010”. Mario D. Tello. Setiembre, 2012.
- No. 334 “Explaining the Transition Probabilities in the Peruvian Labor Market”. José Rodríguez y Gabriel Rodríguez. Agosto, 2012.
- No. 333 “Los programas de garantía de rentas en España: la renta mínima de inserción catalana y sus componentes de inserción laboral”. Ramón Ballester. Agosto, 2012.
- No. 332 “Real Output Costs of Financial Crises: a Loss Distribution Approach”. Daniel Kapp y Marco Vega. Junio, 2012.
- No. 331 “Microeconomía: aplicaciones de la teoría del consumidor”. Cecilia Garavito. Junio, 2012.
- No. 330 “Desprotección en la tercera edad: ¿estamos preparados para enfrentar el envejecimiento de la población?”. Luis García Núñez. Junio, 2012.
- No. 329 “Microeconomía: preferencias y elecciones de los consumidores”. Cecilia Garavito. Mayo, 2012.
- No. 328 “Orígenes históricos de la desigualdad en el Perú”. Carlos Contreras, Stephan Gruber y Cristina Mazzeo. Mayo, 2012.
- No. 327 “Residual Based Test for Cointegration with GLS Detrended Data”. Pierre Perron y Gabriel Rodríguez. Marzo, 2012
- No. 326 “Cuál es el costo de la contaminación ambiental minera sobre los recursos hídricos en el Perú?: Comentarios”. Alfredo Dammert, Arturo Vásquez, Raúl García, Víctor Zurita, Humberto Ortiz y Erix Ruiz. Noviembre, 2011.