

232

**LA RELACIÓN DINERO-PRODUCTO, BRECHA
DEL PRODUCTO E INFLACIÓN SUBYACENTE:
UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE
WAVELETS Y SUS APLICACIONES**

**Erick Lahura
Marzo, 2004**

DOCUMENTO DE TRABAJO 232
<http://www.pucp.edu.pe/economia/pdf/DDD232.pdf>

LA RELACIÓN DINERO-PRODUCTO, BRECHA DEL PRODUCTO E INFLACIÓN SUBYACENTE: UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE WAVELETS Y SUS APLICACIONES

Erick Lahura

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo es introducir la teoría de wavelets y algunas de sus aplicaciones (potenciales) en el análisis empírico de variables y relaciones macroeconómicas. Para tal efecto, se presentan las características básicas de la teoría de wavelets y tres aplicaciones utilizando información para la economía peruana: (1) un análisis de la relación de causalidad en el sentido de Granger entre el dinero y el producto real; y dos propuestas de medidas alternativas para la medición de (2) la brecha del producto (output gap), y (3) la inflación subyacente (core inflation). Los resultados para el caso peruano muestran potenciales ventajas del uso de funciones wavelets como complemento de las herramientas econométricas convencionales para el análisis de series de tiempo no estacionarias. Además, esta evidencia es consistente con la de investigaciones que utilizan evidencia a nivel internacional.

ABSTRACT

This paper is intended to introduce the theory of wavelets and some (potential) applications to the empirical analysis of macroeconomic variables and relationships. The basics of wavelets and three applications using Peruvian data are presented for this purpose: (1) an analysis of money-output causal relationship in the sense of Granger, and two proposals of alternatives measures of (2) output gap, and (3) core inflation. The Peruvian evidence supports potential advantages of using wavelets as a compliment of standard econometric techniques for analyzing non-stationary time series. Furthermore, the results are in line with those from investigations using international evidence.

LA RELACIÓN DINERO-PRODUCTO, BRECHA DEL PRODUCTO E INFLACIÓN SUBYACENTE: UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE WAVELETS Y SUS APLICACIONES¹

Erick Lahura²

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo del presente trabajo es introducir la teoría de wavelets y algunas de sus aplicaciones (potenciales) en el análisis empírico de variables y relaciones macroeconómicas, línea de investigación iniciada por Ramsey y Lampart (1998). Para tal efecto, se presentan las características básicas de la teoría de wavelets y tres aplicaciones utilizando información para la economía peruana: (1) el análisis de la relación de causalidad en el sentido de Granger entre el dinero y el producto real; y dos propuestas de medidas alternativas para la medición de (2) la brecha del producto (output gap), y (3) la inflación subyacente (core inflation).

Los resultados muestran potenciales ventajas del uso de funciones wavelets como complemento de las herramientas econométricas para el análisis de series de tiempo no estacionarias. En particular, se encuentra evidencia que (1) la relación de causalidad en el sentido de Granger entre dinero y producto no es única, sino que depende de la escala temporal (asociado a ciertas frecuencias) analizada, resultados consistentes con la de otras investigaciones que utilizan evidencia internacional (Chew 2001 y Gencay et al. 2002), y (2) las medidas de brecha de producto e inflación subyacente propuestas son consistentes con consideraciones teóricas y hechos importantes observados en la economía peruana, quedando como agenda de investigación futura el desarrollo de pruebas econométricas robustas para consolidar esta evidencia preliminar.

¹ Este trabajo forma parte de una agenda de investigación sobre las potenciales aplicaciones de la teoría de wavelets al análisis macroeconómico iniciada en abril de 2002 por el autor, mientras cursaba sus estudios de Maestría en Matemáticas Puras en la Pontificia Universidad Católica del Perú. La teoría y resultados presentados se basan principalmente en su Tesis de Licenciatura en Economía.

² Profesor del Departamento de Economía de la Pontificia Universidad Católica del Perú. El autor agradece los comentarios y sugerencias de Máximo Vega Centeno (Economía-PUCP), Fernando Vásquez (BCRP), Rafael Herrada (BCRP) y Marco Vega (BCRP), así como el apoyo brindado por Alejandro Ortiz (Matemáticas-PUCP), Loretta Gasco (Matemáticas-PUCP) y Hugo Perea (BCRP). Asimismo, agradece a Donita Rodríguez Zegarra (PUCP) por su excelente labor como asistente de investigación.

El trabajo está organizado en siete secciones. En la sección 2 —la más extensa— se presenta a nivel de introducción la teoría de wavelets y su uso para el análisis multiresolución de señales. En la sección 3 se discuten algunas cuestiones prácticas sobre el uso de las wavelets para el análisis multiresolución de series de tiempo, como por ejemplo las características que debería presentar la wavelet elegida o la muestra a utilizar. En la sección 4 se presenta una aplicación de la teoría de wavelets al análisis de la relación de causalidad en el sentido de Granger entre el dinero y el producto, utilizando información para el caso peruano. En la sección 5 se plantea el uso de las wavelets para la construcción de indicadores alternativos de producto de tendencia, brecha del producto e inflación subyacente a partir del análisis multiresolución de las series PBI real e inflación para la economía peruana. Finalmente, en la sección 6 se presentan las principales conclusiones del trabajo y una posible agenda de investigación futura.

2. UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE WAVELETS Y EL ANÁLISIS MULTIRESUOLUCIÓN³

Las *wavelets* pueden ser comparadas con una cámara muy sofisticada, cuyos lentes proporcionan una vista panorámica de toda una ciudad y, a la vez, permiten observar detalles como los árboles, las casas y la forma de las ventanas, puertas y cerraduras⁴. De esta manera, las wavelets permiten analizar el “todo” y sus “componentes” (o “detalles”). Una característica interesante de la información que proporcionan las wavelets es que muchas veces es posible reconstruir el “todo” a partir de una suma simple de los componentes, lo cual se denomina formalmente *análisis multiresolución*.

Ramsey y Lampart (1998) proponen el uso de las wavelets para descomponer series de tiempo macroeconómicas en componentes asociados a diferentes escalas temporales (análisis multiresolución), y de esta manera tener una visión más “detallada” de las series de tiempo y de las posibles relaciones entre ellas. De esta manera, las wavelets se constituyen en filtros (no lineales y no paramétricos) pues permiten extraer información asociada a diferentes escalas temporales (y frecuencias). Entre los trabajos más importantes en esta línea de investigación figuran Chew (2001) y Gencay et al. (2002).

³ Esta sección y la siguiente se basan en Daubechies (1992), Gencay, et. al. (2002), Kaiser (1994), Misiti, et. al. (2002), Ogden (1997), Ramsey y Lampart (1998b) y Schleicher (2002).

⁴ Esta analogía recoge la que establece Schleicher, 2002.

En esta sección —la más extensa del documento— se presenta de manera introductoria la teoría básica de wavelets y su uso para el análisis multiresolución de series temporales, basado en la denominada transformada de Wavelet (TW). El principal resultado de esta sección consiste en mostrar el uso de wavelets como un filtro, al hacer posible la descomposición de una serie de tiempo en diferentes *escalas temporales*, que son componentes de la serie asociadas a movimientos cíclicos de diferente duración temporal y diferente contenido frecuencial. Esta descomposición se logra a través del análisis multiresolución asociado a las wavelets. De esta manera, se tiene que las wavelets funcionan como filtros (no lineales) para series de tiempo, los cuales permiten extraer componentes que contienen información en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia, ésta última expresada en términos de escalas.

Para ello, en la sección 2.1 presenta una breve descripción de la transformada de Fourier (TF), la transformada de Fourier por ventanas (TFV) y la transformada de Wavelet (TW), instrumentos matemáticos utilizados para el análisis de una serie de tiempo en el dominio de la frecuencia y del tiempo de manera simultánea⁵. Debido a las semejanzas que guarda la TFV y la TW, en la sección 2.2 se presentan las ideas principales de la transformada de Fourier y en la sección 2.3 las correspondientes a la transformada de Fourier por ventanas. En la sección 2.4 se presentan y discuten, a nivel introductorio, los conceptos de función wavelet y transformada de wavelet, así como las principales semejanzas y diferencias entre la TW y la TFV. En la sección 2.5 se presenta la definición de análisis multiresolución de una señal y su relación con la transformada de wavelet; específicamente, se muestra que si existe un análisis multiresolución para una señal, entonces ésta puede descomponerse en elementos que dependen de dos tipos de funciones wavelets: una wavelet padre, que recoge componentes tendenciales de la señal, y una wavelet madre, a partir de la cual se recogen movimientos cíclicos asociados a diferentes escalas temporales.

2.1. Análisis en el Dominio del Tiempo y la Frecuencia

En muchas ocasiones, el análisis de una señal cualquiera involucra el estudio de los posibles componentes frecuenciales localizados en el tiempo. Las partituras de una canción constituyen un ejemplo (Daubechies 1992: 1) de la localización temporal de frecuencias: las

⁵ La transformada de Fourier solamente permite analizar una señal en el dominio de la frecuencia, como se mostrará más adelante.

notas musicales indican al músico que nota (información frecuencial) tocar en cada momento (información temporal).

El análisis de una serie de tiempo puede realizarse en dos dominios diferentes: el tiempo y la frecuencia. Así, por ejemplo, si se considera una serie de tiempo representada por el siguiente proceso estocástico estacionario:

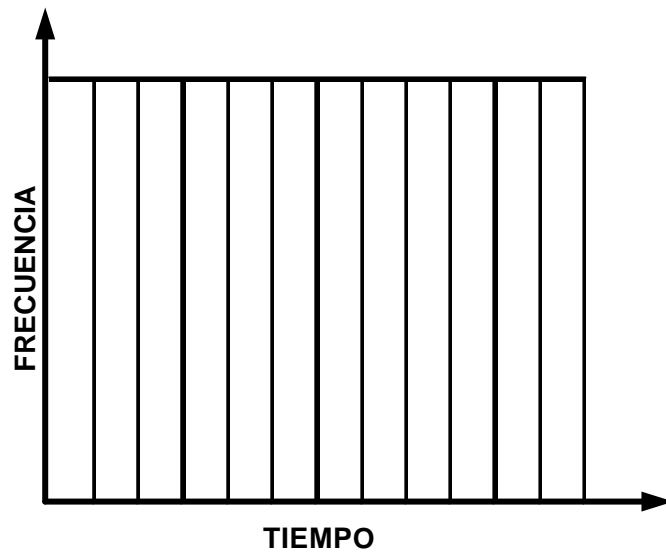
$$(2.1) \quad Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \text{ donde } \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad , \quad |\beta_1| < 1$$

denominado proceso autorregresivo estacionario de orden 1 o AR(1), o en términos de la solución de la ecuación (2.1):

$$(2.2) \quad Y_t = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1} + \sum_{j=0}^{\infty} \beta_1^j \varepsilon_{t-j}$$

El análisis de la señal Y_t en el *dominio del tiempo* implica, por ejemplo, el estudio de la relación entre Y_t e Y_{t-j} a través de las autocovarianzas $\gamma_j = Cov(Y_t, Y_{t-j})$. El análisis en el dominio del tiempo se caracteriza porque permite obtener una *buena resolución temporal*; es decir, permite extraer información de la señal en cada instante e intervalo de tiempo. Sin embargo, no es posible obtener información sobre las posibles frecuencias que pueden existir en la señal. Estas características del análisis en el dominio del tiempo se ilustran en la Figura 1: en el eje del tiempo, la señal puede analizarse detalladamente (líneas verticales), mientras que en el eje de la frecuencia, no se obtiene ninguna información detallada; en otras palabras, se obtiene una buena resolución temporal pero no frecuencial.

Figura 1: Análisis en el dominio del tiempo



Fuente: Gencay y Otros (2002), p. 98.

El análisis de Y_t en el *dominio de las frecuencias*, denominado *análisis espectral*, implica que Y_t puede representarse como la suma de funciones seno y coseno:

$$(2.3) \quad Y_t = a_0 + \int_{-\pi}^{\pi} a(j) \cos(jt) dj + \int_{-\pi}^{\pi} b(j) \text{sen}(jt) dj$$

o en términos discretos:

$$(2.4) \quad Y_t = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} [a_j \cos(jx) + b_j \text{sen}(jx)]$$

donde j representa una frecuencia particular. El análisis en el dominio de la frecuencia consiste en determinar la existencia e importancia de las diferentes frecuencias (asociadas a movimientos cíclicos de la señal) en la explicación del comportamiento de Y_t . La *transformada de Fourier* (TF) es el instrumento matemático más adecuado para extraer información sobre el contenido frecuencial de una señal $f(t)$, sin embargo, no permite obtener una buena resolución temporal.

En la Figura 2 se ilustra la idea de la transformada de Fourier: permite obtener una buena resolución frecuencial (líneas horizontales), mas no así una buena resolución temporal (no hay líneas verticales):

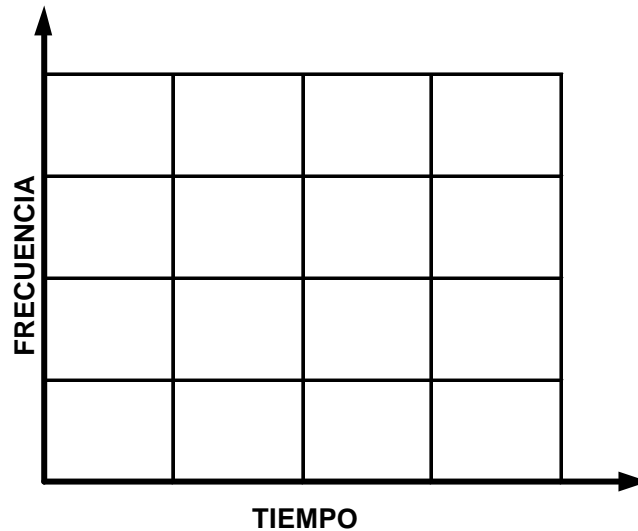
Figura 2: Análisis en el dominio de la frecuencia y transformada de Fourier



Fuente: Gencay y Otros (2002), p. 98.

Sin embargo, en muchas ocasiones es importante identificar adecuadamente las diferentes frecuencias que pueden existir en un instante o intervalo de tiempo dado, es decir, contar una *buena resolución temporal y frecuencial*. En este caso, la *transformada de Fourier por ventanas* (TFV) es una herramienta que supera a la transformada de Fourier, la cual consiste en aplicar la TF a ‘pedazos’ o ‘ventanas’ de la señal con la misma longitud temporal; de esta forma, la TFV permite obtener una mejor resolución temporal del contenido frecuencial de una señal, pero para intervalos de tiempo similares. La Figura 3 ilustra esta idea, donde para intervalos de tiempo de igual tamaño (determinados por las líneas verticales), la TFV permite obtener información sobre el contenido frecuencial (líneas horizontales).

Figura 3: Transformada de Fourier por Ventanas



Fuente: Gencay y Otros (2002), p. 98.

Si bien es cierto que la TFV permite localizar en el tiempo la información frecuencial y a la vez localizar la información temporal en el dominio de la frecuencia, existe un límite para esta resolución tiempo-frecuencia simultánea. Este límite está determinado por el tamaño de la ventana que se escoja: si se elige una ventana amplia (angosta) en el dominio del tiempo entonces esto implicará que la ventana sea angosta (amplia) en el dominio de la frecuencia⁶. Así, de manera análoga al principio de incertidumbre de Heisenberg⁷, ***es difícil alcanzar una buena resolución frecuencial y temporal simultáneamente*** a través de la TFV, pues existe un límite de resolución tiempo-frecuencia; en particular, una vez fijado el tamaño temporal de la ventana, la TFV no puede capturar eventos que pueden aparecer al interior de cada ventana.

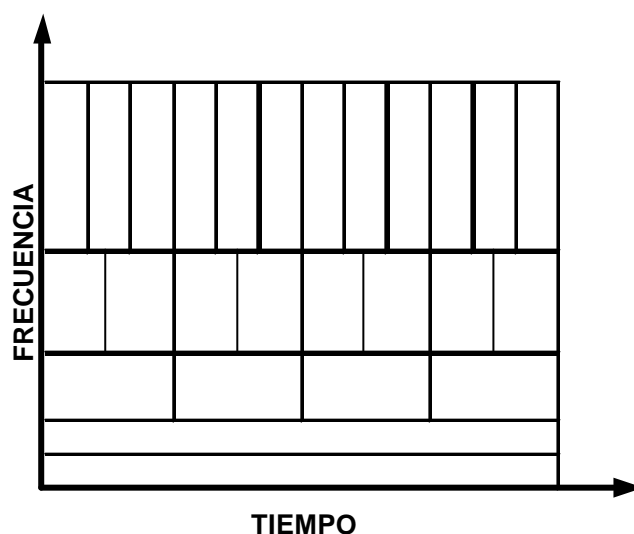
En este contexto, la ***transformada de Wavelets*** (TW) surge como una alternativa a la Transformada de Fourier por Ventanas. Al igual que la TFV, la TW también posee una buena resolución temporal y frecuencial. Sin embargo, la “ventana” en la cual se basa, denominada wavelet, no tiene un tamaño ni forma “fijos”, sino que va cambiando de acuerdo al tipo de información que se desee obtener. Específicamente, cuando se analiza el contenido de baja

⁶ Dado esto, la TF es un caso particular de la TFV cuando la ventana tiene una amplitud temporal igual a todo el período analizado; así, a medida que la amplitud de la ventana sea más pequeña, se mejora la resolución temporal de la señal. Ver Odgen, Ibid, op. cit., página 74.

⁷ En 1927, Werner Heisenberg introduce en la física teórica el principio de indeterminación o incertidumbre, posteriormente conocido como principio de Heisenberg, por el cual recibió el premio Nobel de Física en 1932. Este principio establece que es físicamente imposible medir simultáneamente la posición exacta y el momento exacto de una partícula.

frecuencia de una señal, la ventana wavelet se “amplía” o “dilata” en el tiempo, lo cual es consistente con el hecho que los fenómenos de baja frecuencia se desarrollan a lo largo períodos de tiempo prolongados. Del mismo modo, cuando se analiza fenómenos de alta frecuencia, la ventana wavelet se contrae, capturando de esta manera fenómenos que se desarrollan a lo largo de períodos cortos de tiempo.

Figura 4: La transformada de Wavelet



Fuente: Gencay y Otros (2002), p. 98.

Como se ilustra en la Figura 4, la TW permite obtener una buena resolución temporal al analizar frecuencias altas (líneas verticales), mientras que la resolución temporal disminuye cuando se analizan bajas frecuencias, pero se mejora la resolución frecuencial (líneas horizontales).

De esta manera, si bien es cierto no se ha incumplido el análogo al principio de Heisenberg (pues a mayor resolución frecuencial, menor resolución temporal y viceversa), lo que se logra con la TW es aprovechar que los *movimientos de baja frecuencia estén usualmente asociados a períodos de tiempo prolongados*, y *movimientos de alta frecuencia a períodos cortos de tiempo*.

Además de lograr una buena localización de la información de una señal en el dominio del tiempo y de la frecuencia, otra característica importante de la TW es que permite *descomponer ortogonalmente* una señal, donde los componentes están asociados a

*diferentes escalas y períodos de tiempo*⁸, que se denominarán *escalas temporales*. De esta forma, como se verá más adelante, la TW de una señal es un instrumento importante para la construcción aproximaciones de la misma con *diferentes niveles de resolución frecuencial y temporal*, las que además permiten obtener una reconstrucción total de la señal. A este proceso de construcción de aproximaciones sucesivas se le denomina *Análisis Multiresolución* (AMR). Específicamente, la TW permite expresar una señal $f(t)$ como:

$$(2.5) \quad f(t) = S_J + D_J + D_{J-1} + \dots + D_1$$

El término S_J de la expresión (2.5) representa el componente de tendencia suave de la señal original, que captura los movimientos de la serie que se desarrollan a lo largo de períodos de tiempo prolongados, asociados principalmente a las frecuencias más bajas contenidas en la señal. Los términos D_j de la expresión (2.5) representan componentes asociados a diferentes escalas (y frecuencias): para valores pequeños (grandes) de j , los componentes D_j capturan movimientos que se desarrollan en períodos de tiempo relativamente cortos (largos), asociados usualmente a movimientos de alta (baja) frecuencia.

Estas características que presenta la TW hace que supere en una gran cantidad de casos a la TFV, específicamente se tiene que la TW:

- (a) Permite una mejor localización temporal de las frecuencias de una señal, pues la wavelet se adapta (dilatándose y trasladándose) para *capturar eventos no estacionarios* de una serie de tiempo, como quiebres, outliers, entre otros, y eventos estacionarios.
- (b) Permite realizar un análisis multiresolución de la señal, expresándola como una *suma de componentes ortogonales*, cada uno de los cuales está asociado a diferentes frecuencias (escalas temporales) y períodos de tiempo.

⁸ Es importante mencionar que la TW depende de dos parámetros: un parámetro de escala (que mide la “longitud” de la ventana “wavelet” y que está relacionado a la información frecuencial) y uno de posición temporal (que determina la ubicación de la “wavelet”). Esto se analiza mas adelante.

En las siguientes secciones se presenta la teoría básica de series de Fourier, Transformada de Fourier (TF), Transformada de Fourier por Ventanas (TFV), wavelets y Transformada de Wavelet (TW).

2.2. La Transformada de Fourier

La transformada de Fourier es una de las herramientas más importantes para el análisis espectral de una señal. En las siguientes secciones se presentan los principales conceptos y resultados que permitirán entender el uso en el análisis espectral de una señal: serie de Fourier, transformada de Fourier y transformada de Fourier por ventanas. Para los lectores no familiarizados con los conceptos e instrumentos matemáticos del análisis espectral, se recomienda revisar el Anexo 1 para seguir adecuadamente el resto del capítulo.

2.2.1. *Series de Fourier*

Una serie de Fourier es la representación de una función periódica en el dominio de la frecuencia; es decir, permite expresar una función periódica como la suma de funciones senos y cosenos, asociadas a diferentes frecuencias. En el siglo XIX, el físico Jean-Baptiste Fourier mostró que existen muchas clases de funciones que pueden ser representadas de esta manera⁹.

- Series de Fourier con coeficientes reales

La *serie de Fourier* con coeficientes reales de una función f periódica en el intervalo $[-\pi, +\pi]$, está dada por:

$$(2.6) \quad f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} [a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)]$$

⁹ En adelante, se analizarán solamente funciones definidas en el intervalo $[-\pi, +\pi]$. Esto no es una limitación, pues si la función a analizar h está definida en un intervalo con límites finitos, entonces puede ser transformada en utilizando la siguiente fórmula:
 $f(x) = h[2\pi x / (b - a) - (a + b)\pi / (b - a)]$

o, alternativamente, haciendo $2a_0 = k_0$:

$$(2.7) \quad f(x) = \frac{1}{2}k_0 + \sum_{j=1}^{\infty} [a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)]$$

Así, la serie de Fourier de $f(x)$, con coeficientes reales, es una combinación lineal de funciones seno, coseno y una función constante, $\{\sin(j\bullet), \cos(j\bullet), h(\bullet) = cte\}$, para $j = 1, 2, 3, \dots$. Sin embargo, una función también puede ser aproximada adecuadamente en el sentido L^2 por una suma finita de la forma¹⁰:

$$(2.8) \quad S_J(x) = \frac{1}{2}k_0 + \sum_{j=1}^J [a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)]$$

Matemáticamente, $\{\sin(j\bullet), \cos(j\bullet), h(\bullet) = cte\}$ forman una base para el espacio de funciones periódicas en el intervalo $[-p, +p]$, y también para funciones cuadrado integrables¹¹ definidas en el mismo intervalo, que se denotan por $L^2[-\pi, +\pi]$; esto significa que la *serie de Fourier de $f(x)$* es una *buena representación* de una *función cuadrado integrable*.

Los coeficientes de la serie de Fourier determinan la importancia de las diferentes frecuencias en el comportamiento de la señal. Para calcular los coeficientes de la representación (2.8), se utiliza el producto interno entre la función f y las funciones base $\sin(j\bullet)$ y $\cos(j\bullet)$, de la siguiente manera:

$$(2.9) \quad k_0 = \frac{1}{\pi} \langle f, \cos(0\bullet) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx$$

$$(2.10) \quad a_j = \frac{1}{\pi} \langle f, \cos(j\bullet) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos(jx) dx \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$(2.11) \quad b_j = \frac{1}{\pi} \langle f, \sin(j\bullet) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin(jx) dx \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

¹⁰ Ver definición en el Anexo 1.

¹¹ Ver definición en el Anexo 1.

Si se tiene una función periódica en un intervalo $[-L, L]$, haciendo el cambio de variables $x = \pi x' / L$ y $dx = \pi dx' / L$, se puede pasar de un intervalo de integración $[-\pi, \pi]$ a $[-L, L]$. Con esto, la serie de Fourier de $f(x')$ esta dada por:

$$(2.12) \quad f(x') = \frac{1}{2}k_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left[a_j \cos\left(\frac{j\pi x'}{L}\right) + b_j \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi x'}{L}\right) \right]$$

Los coeficientes de (2.12) están dados por las siguientes expresiones:

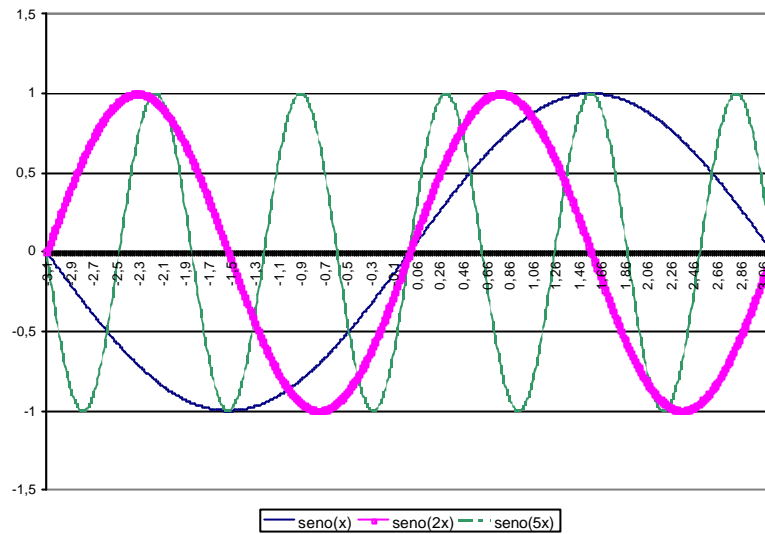
$$(2.13) \quad k_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x') dx'$$

$$(2.14) \quad a_j = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x') \cos\left(\frac{j\pi x'}{L}\right) dx'$$

$$(2.15) \quad b_j = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi x'}{L}\right) dx'$$

Dadas estas expresiones, se dice que los coeficientes a_j y b_j miden el contenido frecuencial de la función f a un nivel de resolución frecuencial j ; es decir, miden la **importancia de las funciones de frecuencia j en la señal analizada**. En general, el coeficiente a_j mide la importancia de una frecuencia menor que el coeficiente a_{j+1} pues, para un intervalo dado, $\operatorname{sen}((j+1)x)$ tiene mayor frecuencia que $\operatorname{sen}(jx)$. La Figura 5 ilustra esta idea utilizando como ejemplo las funciones $\operatorname{sen}(x)$, $\operatorname{sen}(2x)$ y $\operatorname{sen}(5x)$:

Figura 5: Funciones seno con diferentes frecuencias



Fuente: Elaboración propia.

- Series de Fourier con coeficientes complejos

Dada una función periódica $f(x)$, su serie de Fourier en términos de coeficientes complejos está dada por la siguiente expresión:

$$(2.16) \quad f(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_j e^{i j x}$$

para la cual, los coeficientes A_j se obtienen a partir de:

$$(2.17) \quad A_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) [\cos(jx) - i \operatorname{sen}(jx)] dx$$

donde:

$$(2.18) \quad A_j = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)[\cos(jx) + isen(jx)]dx & j < 0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx & j = 0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)[\cos(jx) - isen(jx)]dx & j > 0 \end{cases}$$

Para el caso que f sea una función periódica en el intervalo $[-L/2, +L/2]$, la serie de Fourier de f y sus correspondientes coeficientes complejos están dados por:

$$(2.19) \quad f(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_j e^{i(2\pi j x/L)}$$

$$(2.20) \quad A_j = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} f(x) e^{-i(2\pi j x/L)} dx$$

2.2.2. Transformada de Fourier Continua

La transformada de Fourier (TF) es la representación en el dominio de la frecuencia de funciones que no necesariamente son periódicas. En este sentido, la TF es una generalización de las series de Fourier complejas cuando el límite del intervalo donde la función es periódica tiende al infinito ($L \rightarrow \infty$).

Formalmente, la **transformada Fourier continua** de una función $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, denotada por $(T^F f)(j)$, es una función que depende de la frecuencia j y que se define como:

$$(2.21) \quad (T^F f)(j) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi j t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) [\cos(2\pi j t) - isen(2\pi j t)] dt$$

Si se aplica la fórmula (2.21) a la misma transformada de Fourier $(T^F f)(j)$, se obtiene:

$$(2.22) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (T^F f)(j) e^{-i 2 \pi j x} dj$$

Estos resultados muestran dos propiedades importantes de la transformada de Fourier:

- (1) Propiedad Cíclica; cuando $f(x)$ es una función par de x , se tiene que $f(x) = f(t)$.
- (2) Propiedad Recíproca; si $(T^F f)(j)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$, entonces $f(t)$ es la transformada de Fourier de $(T^F f)(j)$.

Estas propiedades son imperfectas, pues cuando $f(t)$ es una función impar, $f(x) = f(-t)$. Así, se tiene que en general $f(x) = f(-t)$, sin importar que $f(t)$ sea impar o par. A partir de estas propiedades, se tiene que la **representación de Fourier de una función** $f(t)$ está dada por las siguientes ecuaciones:

$$(2.23) \quad (T^F f)(j) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i 2 \pi j t} dt$$

$$(2.24) \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (T^F f)(j) e^{i 2 \pi j t} dj$$

La ecuación (2.23) se denomina **transformada de Fourier de $f(t)$** o **ecuación de análisis**, pues proporciona información sobre la importancia de cada frecuencia j en el comportamiento de la señal $f(t)$. La ecuación (2.24) se denomina **transformada inversa de Fourier de $f(t)$** o **ecuación de síntesis**, pues permite representar a $f(t)$ como una suma ponderada de funciones seno y coseno complejas, donde los ponderadores son las

transformadas de Fourier $(T^F f)(j)$. Estas dos ecuaciones están relacionadas de manera simultánea, como lo establece el teorema de la Integral de Fourier¹².

- Fórmula de Parseval

La fórmula de Parseval establece la existencia de una relación entre funciones y sus respectivas transformadas de Fourier. En particular, establece una relación entre la **energía total** y el **espectro de poder** de una función. Por un lado, la **energía total** de una función $f(t)$, se define como:

$$(2.25) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$$

mientras que su **espectro de poder** (*power spectrum*):

$$(2.26) \quad |(T^F f)(j)|^2$$

Dadas estas definiciones, si f y g son funciones cuadrado integrables, la fórmula de Parseval establece la siguiente relación:

$$(2.27) \quad \langle f, g \rangle = \langle T^F f, T^F g \rangle$$

o, alternativamente:

$$(2.28) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f g| dt = \int_{-\pi}^{+\pi} |(Tf)(j)|(Tg)(j)| dj$$

2.2.3. Transformada de Fourier discreta.

La serie de Fourier y la transformada de Fourier pueden considerarse como medidas del contenido frecuencial de funciones que pueden ser descritas a través de una expresión analítica, pues implican el uso de expresiones con integrales. Sin embargo, en las aplicaciones usualmente se necesita calcular la serie de Fourier y la transformada de Fourier de sucesiones. Para tal fin, se utiliza la transformada de Fourier discreta.

¹² En el anexo 1 se presenta una versión del enunciado del Teorema de la Integral de Fourier.

Sea $f(t)$ una sucesión finita de valores $\{x_t\}$, tal que la sucesión es estacionaria; la representación de Fourier de $f(t)$ está dada por las siguientes ecuaciones:

$$(2.29) \quad X(j) \equiv \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} x_t e^{-i 2\pi j t / N} \quad , \quad j = 0, 1, \dots, N-1$$

$$(2.30) \quad x_t = \sum_{k=0}^{N-1} X(j) e^{i 2\pi j t / N} \quad , \quad t = 0, 1, \dots, N-1$$

En este caso, la **energía total** de la señal $\{x_t\}$, está dada por:

$$(2.31) \quad \sum_{t=0}^{N-1} |x_t|^2$$

mientras que su **espectro de poder** (*power spectrum*) por:

$$(2.32) \quad |X(j)|^2$$

De esta manera, la fórmula de Parseval establece la siguiente relación entre la energía total y el espectro de poder de una sucesión finita $\{x_t\}$:

$$(2.33) \quad \sum_{t=0}^{N-1} |x_t|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(j)|^2$$

2.2.4. Usos y limitaciones del análisis de Fourier

Uno de los principales usos del análisis de Fourier es la identificación de los diferentes componentes frecuenciales de una serie de tiempo integrada de orden cero o estacionaria. Debido a que una serie estacionaria no cambia mucho a lo largo del tiempo, sino que preserva sus características, el análisis espectral de una serie estacionaria a través de la transformada de Fourier es adecuado. Esto se explica porque la transformada de Fourier se basa en funciones seno y coseno, las cuales se comportan de la misma manera a lo largo del dominio sobre el cual se definen, y no están asociadas a un punto específico del mismo.

Uno de los instrumentos más utilizados que se deriva del análisis de Fourier es el *gráfico del espectro de poder*, el cual permite identificar la importancia relativa de cada uno de los componentes frecuenciales de la señal analizada. Para ilustrar su uso, se construyó una señal compuesta por un término de perturbación u y tres funciones seno con frecuencias 50, 120 y 200:

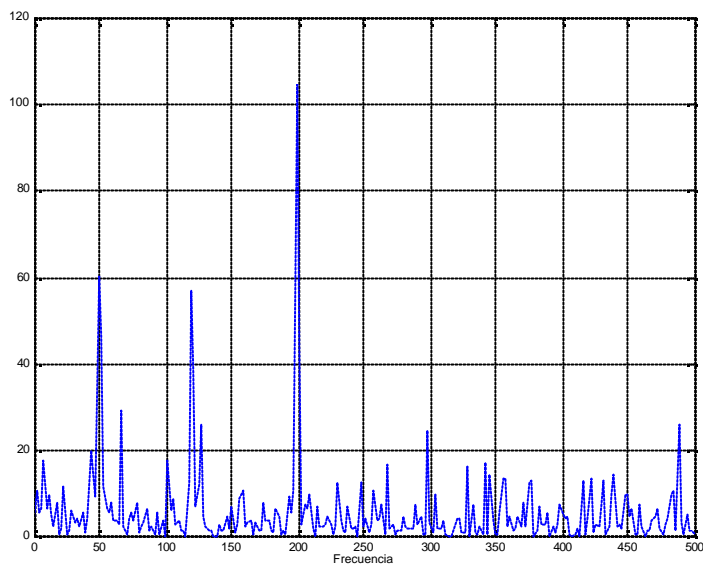
$$(2.34) \quad y_t = \text{sen}(2\pi 50t) + \text{sen}(2\pi 120t) + \text{sen}(2\pi 200t) + u$$

a partir de la cual se generaron 600 observaciones ($t = 1, \dots, 600$). La Figura 6 muestra el gráfico del espectro de poder¹³ para la señal y_t , donde se observa que las frecuencias más importantes de la señal son 50, 120 y 200, como era de esperarse.

Una de las principales limitaciones del análisis de Fourier es que no permite identificar el momento en el que sucedió algún evento particular. Así, si la señal presenta componentes *no estacionarios* como tendencias, quiebres, inicio y finalización de eventos, entre otros, el análisis espectral de la señal a través de la transformada de Fourier no puede identificarlos. Esto se explica porque la importancia de cada frecuencia en una señal que se obtiene a partir de la transformada de Fourier no está asociada a un punto específico del tiempo (no puede ser localizada en el tiempo), sino que es un *promedio* a lo largo de toda la señal, dado que las funciones que constituyen la representación de Fourier de una señal son ondas que van de menos a más infinito con la misma frecuencia j .

¹³ El espectro de poder muestra la importancia de cada frecuencia en la serie a partir de la transformada de Fourier.

Figura 6: Espectro de poder de la señal y_t



Fuente: Elaboración propia.

Para ilustrar esta limitación del análisis de Fourier, se modificó la señal representada por (2.34), haciendo que $\text{sen}(2\pi 120t)$ sólo sea relevante para el período 200-400:

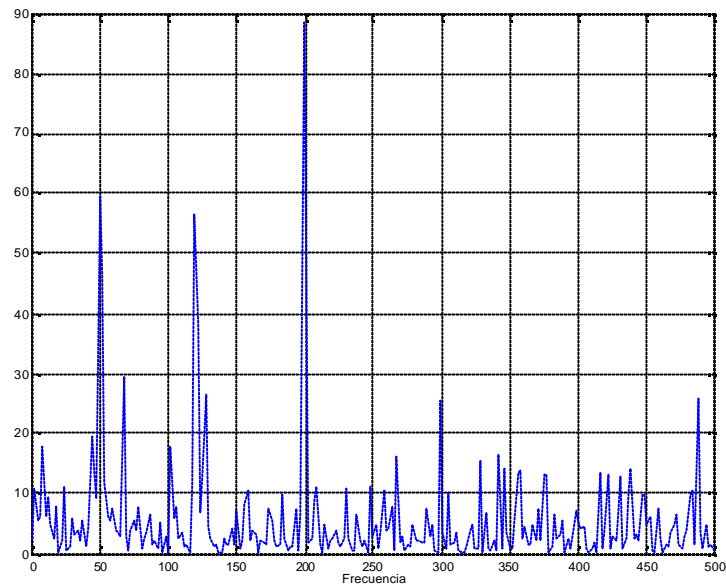
$$(2.35) \quad y_t = \text{sen}(2\pi 50t) + \text{sen}(2\pi 120t) + z(t) + u$$

donde:

$$(2.36) \quad z(t) = \begin{cases} \text{sen}(2\pi 120t) & 0 \leq t < 200, 400 < t \leq 600 \\ 0 & 200 \leq t \leq 400 \end{cases}$$

La Figura 7 muestra el espectro de poder de la señal representada por (2.36), donde se puede observar que las frecuencias 50, 120 y 200 siguen siendo las más importantes, pero no es posible distinguir que $\text{sen}(2\pi 120t)$ sólo es importante para un intervalo de tiempo determinado.

Figura 7: Espectro de poder de la señal modificada y_t



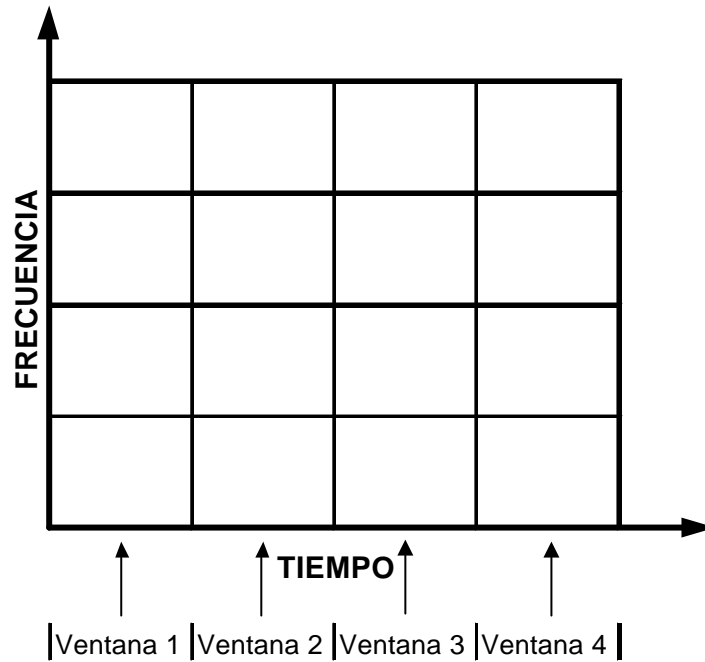
Fuente: Elaboración propia.

De esta forma, si bien es cierto que la transformada de Fourier permite analizar el contenido frecuencial de una señal (es decir, tiene una buena resolución temporal), esta transformada es limitada pues **no permite localizar temporalmente el contenido frecuencial**. Esto significa que la TF no es aplicable a funciones cuyo contenido frecuencial cambia en el tiempo, es decir, señales **no estacionarias**.

2.3. Transformada de Fourier por Ventanas

En muchas ocasiones es importante identificar las diferentes frecuencias que pueden existir en un instante o intervalo de tiempo dado, es decir, contar una **buena resolución temporal y frecuencial**. La **transformada de Gabor** o **Fourier por ventanas** (TFV) es una modificación de la transformada de Fourier que supera su resolución temporal. La TFV consiste en aplicar la TF a “pedazos” o “ventanas” de la señal con la misma longitud temporal, obteniéndose de esta forma una mejor resolución temporal del contenido frecuencial de una señal, pero para intervalos de tiempo similares. La Figura 8 ilustra esta idea, donde para intervalos de tiempo de igual tamaño (líneas verticales), la TFV permite obtener información sobre el contenido frecuencial (líneas horizontales).

Figura 8: Transformada de Fourier por Ventanas



Fuente: Elaboración propia, sobre la base de Gencay y otros (2002), p. 98..

La “ventana” se representa por una función $g(t)$, la cual está definida para un “pedazo” de la función. Si se multiplica la señal $f(t)$ por la ventana, se obtiene $f(t)g(t)$, expresión para la cual puede calcularse su transformada de Fourier. Si se repite esta operación para versiones trasladadas de la ventana, $g(t-s)$, se obtiene la transformada de Fourier por ventanas.

2.3.1. Caso Continuo

La transformada de Fourier por ventanas continuas es una función que depende de la frecuencia ω y del tiempo t , que se define de la siguiente forma:

$$(2.37) \quad (T^V f)(\omega, t) = \int f(s) g(s-t) e^{-i\omega s} ds$$

donde $g(s)$ es la ventana¹⁴. Dada su naturaleza, la TVF es una técnica de localización de una señal en el tiempo y la frecuencia. Al igual que en el caso de la transformada de Fourier, también existe una transformada de Fourier por ventanas inversa.

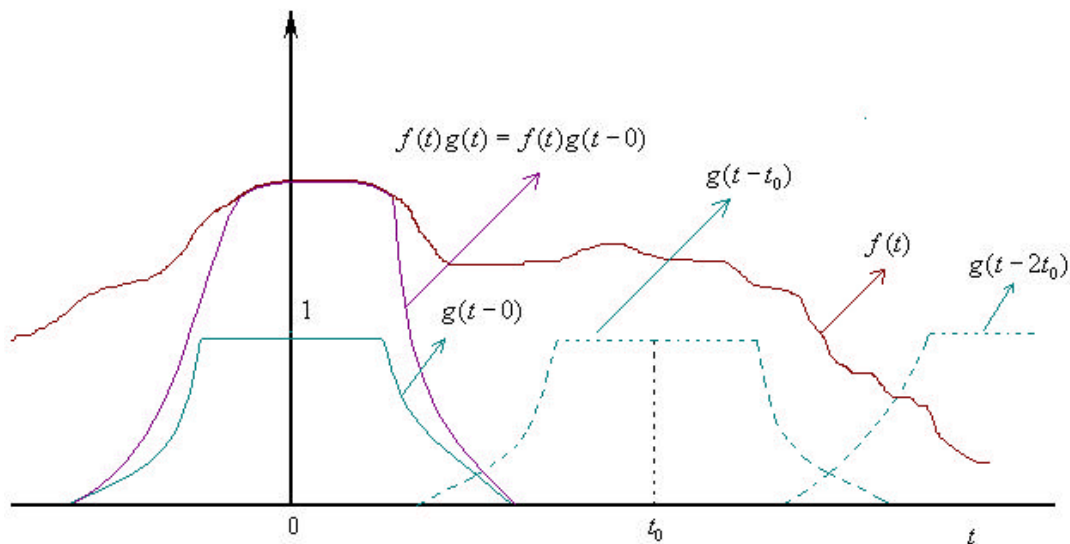
2.3.2. Caso Discreto

La versión discreta de la transformada de Fourier por ventanas está dada por:

$$(2.38) \quad T_{m,n}^V(f) = \int f(s)g(s - nt_0)e^{-im\omega_0s} ds$$

donde n y m toman valores enteros; además, t_0 y ω_0 toman valores fijos positivos. Como se puede apreciar, la TFV discreta se obtiene a partir de la TFV continua haciendo que t y ω tomen valores discretos: $t = nt_0$ y $\omega = m\omega_0$.

Figura 9: La Transformada de Fourier por Ventanas



Fuente: Elaboración propia, basada en Daubechies (1992), página 2.

¹⁴ Existen diversas posibilidades para la forma de la función ventana g ; sin embargo, una de las funciones más utilizadas para este fin es la función gaussiana.

La Figura 9 ilustra la naturaleza de la TFV: para un n fijo, la función $T_{m,n}^V(f)$ está determinada por los coeficientes de Fourier de $f(\cdot)g(\cdot - nt_0)$; al cambiar el valor de n , se trasladan los pedazos de la función en múltiplos de t_0 , y de esta forma se puede analizar el contenido frecuencial de toda la señal f .

2.3.3. Usos y limitaciones de la transformada de Fourier por ventanas

El análisis de una señal a través de la transformada de Fourier por ventanas permite mejorar la resolución temporal del contenido frecuencial de la señal para ciertos intervalos de tiempo, cuyo tamaño está determinado por el tamaño de la “ventana” que se define. De esta manera, la TFV es útil para analizar señales cuyo contenido frecuencial cambia de ventana en ventana.

Sin embargo, a pesar de que la TFV permite localizar en el tiempo la información frecuencial y a la vez localizar la información temporal en el dominio de la frecuencia, existe un límite para esta resolución tiempo-frecuencia simultánea. Este límite está determinado por el tamaño de la ventana que se escoja: si se elige una ventana amplia (angosta) en el dominio del tiempo, esto implicará que la ventana sea angosta (amplia) en el dominio de la frecuencia¹⁵. Así, de manera análoga al principio de incertidumbre de Heisenberg, ***es difícil alcanzar una buena resolución frecuencial y temporal simultáneamente*** a través de la TFV, pues existe un límite de resolución tiempo-frecuencia. Además, dado que una vez que se define el “tamaño” de la ventana éste se mantiene “fijo”, la TFV no puede identificar cualquier tipo de comportamiento no estacionario al interior de cada ventana.

En general, es posible definir un “patrón” deseable para las posibles formas de las ventanas. Por un lado, para el análisis de las frecuencias bajas de una señal, es deseable una ventana ancha en el tiempo, pues los ***movimientos de baja frecuencia usualmente están asociados a períodos prolongados de tiempo***. Por otro lado, para el análisis de las frecuencias altas de una señal, es deseable una ventana angosta en el tiempo, pues los ***movimientos de alta frecuencia usualmente están asociados a períodos cortos de tiempo***. Si las ventanas tienen esta flexibilidad, entonces es posible obtener una mejor resolución

¹⁵ Dado esto, la TF es un caso particular de la TFV cuando la ventana tiene una amplitud temporal igual a todo el período analizado; así, a medida que la amplitud de la ventana sea más pequeña, se mejora la resolución temporal de la señal. Ver Odgen, Ibid, op. cit., página 74.

temporal y frecuencial con la TW que con la TFV. Como se muestra en la siguiente sección, si las ventanas son representadas por funciones denominadas *wavelets*, entonces es posible obtener ese patrón deseable.

2.4. La Transformada de Wavelet

La teoría de wavelets nace formalmente como teoría matemática a mediados de los años ochenta; sin embargo, en la práctica ha sido utilizada desde inicios de siglo, especialmente en la ingeniería. Sus antecedentes matemáticos se remontan al análisis de las frecuencias desarrollado por Joseph Fourier en el siglo diecinueve. La primera vez que se utilizó la palabra wavelet fue en 1910 en la tesis de Alfred Haar, pero no fue sino hasta 1984 en que Alex Grossman y Jean Morlet establecieron el concepto de “wavelets” en su forma teórica presente. Los principales algoritmos utilizados en el análisis de wavelets provienen del trabajo de 1988 de Stephane Mallat¹⁶.

La transformada de Wavelet (*TW*) permite describir una señal en el tiempo y en la frecuencia de manera similar a la *TFV*, pero con algunas diferencias importantes que en muchos casos la hace superior. Las principales propiedades de las wavelets que son útiles para el análisis econométrico de series de tiempo son:

- (a) Pueden ser usadas en el análisis de series no estacionarias.
- (b) Permiten localizar en el tiempo fenómenos específicos.
- (c) Permiten obtener una buena aproximación de la señal original.

Para entender la naturaleza de la *TW* y sus diferencias respecto de la *TFV*, es importante establecer la definición y características de las denominadas funciones *wavelets*.

2.4.1. *Definición de Wavelet*

Una *wavelet* $\psi(t)$ es una función que depende del tiempo y que presenta dos propiedades: (1) *condición de admisibilidad*; y (2) *energía unitaria*.

¹⁶ Misiti, et. al., 2002.

- Condición de Admisibilidad

Sea $\psi(t)$ una función y $(T\psi)(j)$ su transformada de Fourier. Se dice que $\psi(t)$ cumple con la condición de admisibilidad si:

$$(2.39) \quad C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|(T\psi)(j)|}{j} dj < +\infty$$

Esta condición asegura que la transformada de Fourier de $\psi(t)$ se acerca rápidamente a cero cuando la frecuencia tiende a cero, es decir:

$$(2.40) \quad \lim_{j \rightarrow 0} (T\psi)(j) = 0$$

Para garantizar que se cumpla la condición de admisibilidad, es necesario que la transformada de Fourier de la función $\psi(t)$ se anule en la frecuencia cero, $(T\psi)(0) = 0$, lo cual es equivalente a:

$$(2.41) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$$

La expresión (2.41) implica que la función $\psi(t)$ al menos presenta un movimiento cíclico; es decir al menos una vez pasa una de un valor positivo a uno negativo.

- Energía Unitaria

La **energía** de una función f , cuyo dominio es el intervalo $[a, b]$, se define como la integral del cuadrado de la función sobre su dominio, es decir:

$$(2.42) \quad \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

Dado esto, se dice que la energía de una función $\psi(t)$ es unitaria si:

$$(2.43) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1$$

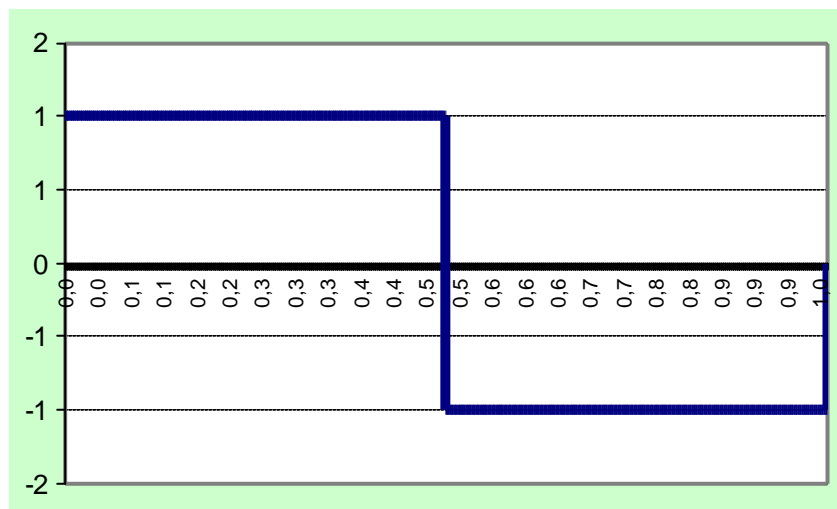
Ejemplos de Wavelets

Una de las wavelets más conocidas en la literatura es la *wavelet de Haar*, la cual se define como:

$$(2.44) \quad \psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 0.5 \\ -1 & 0.5 \leq x < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

y cuya forma se muestra en la Figura 10. En general, y como se puede apreciar a partir del gráfico de la wavelet de Haar, la condición de admisibilidad y la de energía unitaria determinan la forma de una wavelet: todas las desviaciones respecto del origen se cancelan, lo cual implica que una wavelet toma la forma de una onda.

Figura 10: La wavelet de Haar



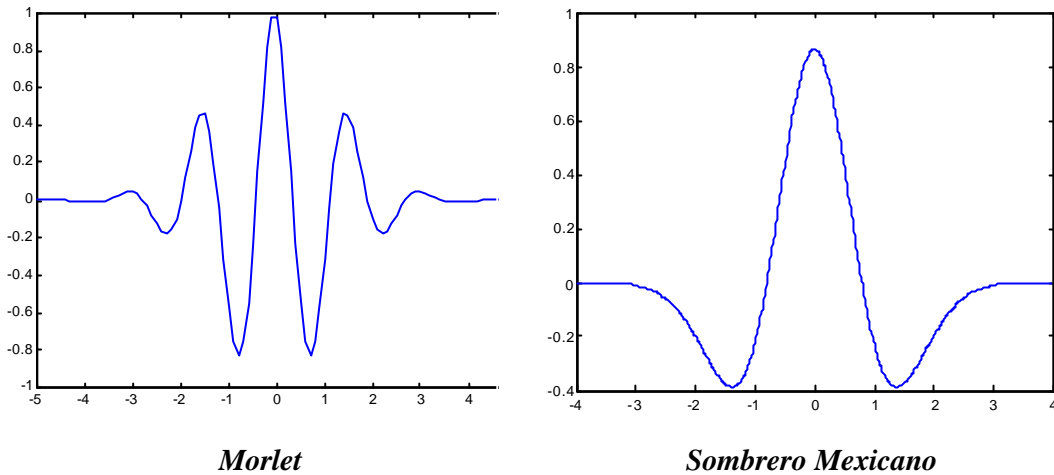
Fuente: Elaboración propia.

Un segundo ejemplo es la *wavelet de Morlet*, que se define como:

$$(2.45) \quad \psi^M(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega_0 t} e^{-t^2/2}$$

donde $i = \sqrt{-1}$ y ω_0 es la frecuencia central de la wavelet. La Figura 11 muestra la forma de la wavelet de Morlet.

Figura 11: Ejemplos de Wavelets



Fuente: Elaboración propia

Otro ejemplo conocido es la **wavelet sombrero mexicano**, definida como la segunda derivada de la función gaussiana:

$$(2.46) \quad \psi^{Mex}(t) = (1-t^2)e^{-t^2/2}$$

Su nombre proviene de la forma de la onda que genera, la cual es similar a un sombrero mexicano, como se muestra en la Figura 11.

2.4.2. Familias de Wavelet

A partir de una wavelet $\psi(t)$ es posible generar una **familia de funciones wavelet**, **dilatando** y **trasladando** $\psi(t)$:

$$(2.47) \quad \psi^{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

El parámetro a se denomina **factor de escala** o **dilatación**, el cual expande el rango de la wavelet; así, cuando a es grande, la wavelet es una onda que se completa en un intervalo más amplio. El parámetro b se denomina **factor de traslación**, el cual mueve el rango de ψ en u unidades hacia la derecha. Así, **dilatando y trasladando una wavelet** ψ , es posible **generar una familia de funciones wavelet** $\psi^{a,b}$, asociadas cada una a una escala

y una ubicación temporal particulares. Cuando sucede esto, la wavelet ψ se denomina *wavelet madre*. Si la dilatación y traslación de una wavelet se hace a partir de valores discretos de a y b , como por ejemplo $a = a_0^j$ y $b = nb_0 a_0^j$, se tiene que cada elemento de la familia de wavelet esta dado por:

$$(2.48) \quad \Psi_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{a_0^j}} \Psi\left(\frac{t - kb_0 a_0^j}{a_0^j}\right)$$

o alternativamente:

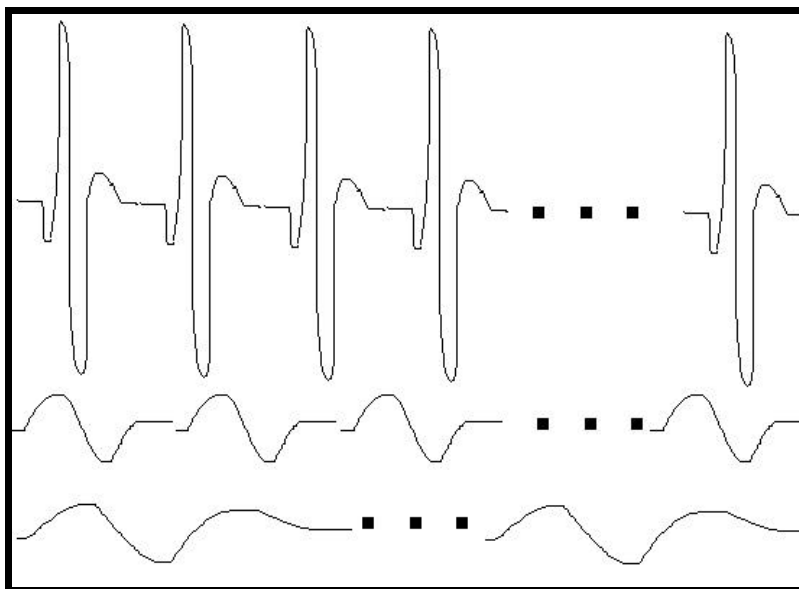
$$(2.49) \quad \Psi_{j,k} = a_0^{-j/2} \Psi(a_0^j t - kb_0)$$

donde j y k toman valores enteros, $a_0 > 1$ y $b_0 > 0$. Los valores de j determinarán la amplitud de la wavelet y el factor de traslación de las mismas:

- (a) Las *wavelets angostas* o de *escalas pequeñas* (usualmente asociadas a frecuencias altas) corresponden a valores pequeños de j , lo cual implica que para cubrir todo el rango temporal sobre el que se define la señal, se trasladan a intervalos pequeños.
- (b) Las *wavelets más amplias* o de *escalas grandes* (usualmente asociadas a frecuencias bajas) están asociadas a valores grandes de j , lo cual implica que para cubrir todo el rango temporal sobre el que se define la señal, se trasladan a intervalos más grandes.

La Figura 12 muestra el comportamiento de una familia de wavelets de diferentes escalas.

Figura 12: Dilatación y traslación de una wavelet



Fuente: Elaboración propia

La familia de wavelet más simple y conocida es la **familia de wavelets de Haar**, la cual se obtiene dilatando la wavelet madre Haar utilizando el factor de escala $a = 2^j$ y se trasladándola con el parámetro $b = k2^j$:

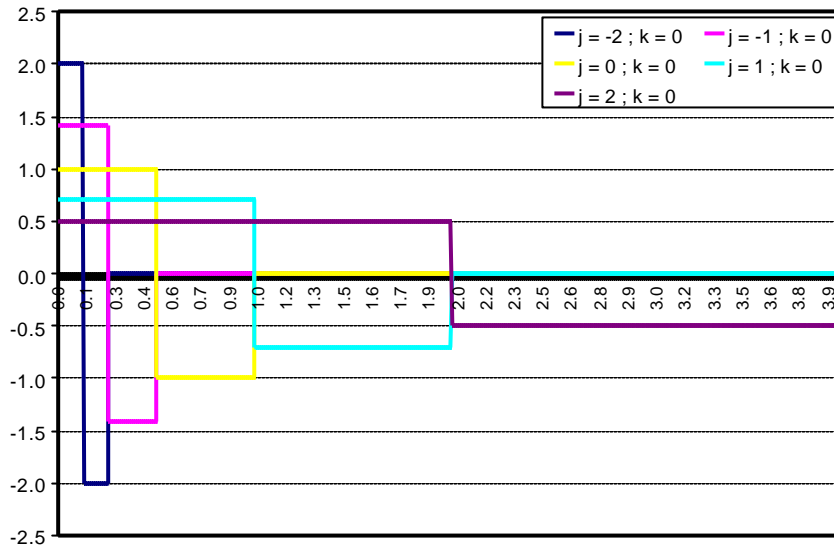
$$(2.50) \quad \Psi_{m,n}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k)$$

De esta manera, la familia de wavelets generadas por la wavelet de Haar, puede definirse formalmente como:

$$(2.51) \quad H = \{\psi_{j,k}(x), \quad j \in \mathbb{Z} \wedge k \in \mathbb{Z}\}$$

El subíndice j **dilata** cada wavelet; así, a mayor (menor) j , la función wavelet se expande (se contrae), como se muestra en la Figura 13:

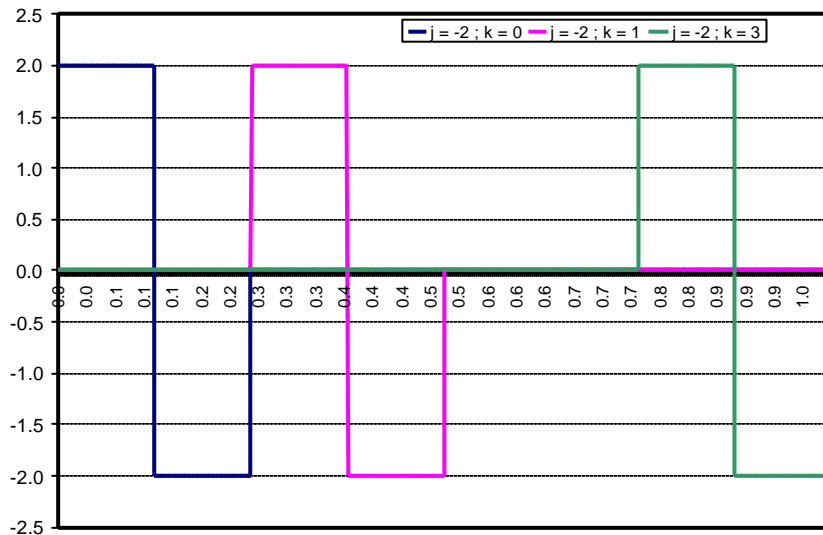
Figura 13: Dilataciones de la wavelet de Haar



Fuente: Elaboración Propia

El subíndice k *traslada* la función; así, valores mayores de k hacen que la función se traslade hacia la derecha, como se muestra en la Figura 14:

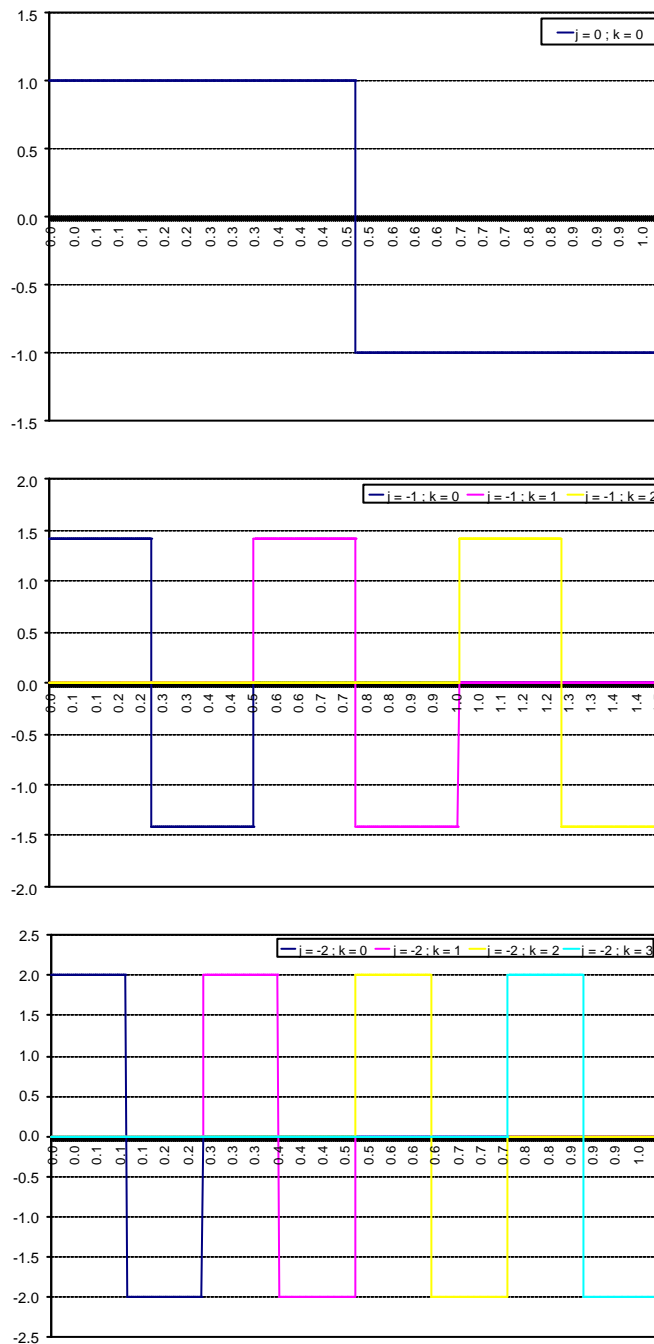
Figura 14: Traslaciones de la wavelet de Haar.



Fuente: Elaboración Propia

La Figura 15 muestra cómo las wavelets angostas generadas por la wavelet madre de Haar (asociadas a frecuencias altas y valores pequeños de j) se trasladan a intervalos pequeños para cubrir todo el rango temporal sobre el que se define la señal, mientras que las wavelets anchas de Haar (asociadas a frecuencias bajas y valores grandes de j), se trasladan a intervalos más grandes.

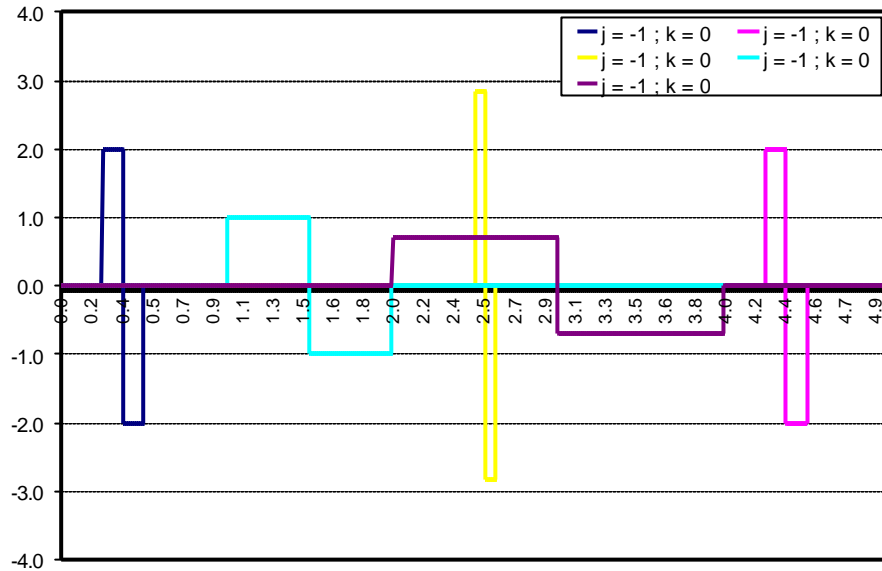
Figura 15: Dilataciones y Traslaciones de la wavelet de Haar.



Fuente: Elaboración propia

La Figura 16 muestra algunos de los miembros de la familia de wavelets de Haar:

Figura 16: Familia de Haar



Fuente: Elaboración propia.

La familia de wavelets de Haar es importante en la literatura de wavelets porque constituyen una **base ortonormal** para **cualquier función cuadrado integrable**. Esto significa que cualquier función cuadrado integrable puede ser expresada como la suma (ortogonal) de funciones wavelets dilatadas y trasladadas.

Además, de las wavelets de Haar, Morlet y Mexicana, existen otras familias de wavelets, entre las cuales destacan: Daubechies, Symlets, Coiflets, Biortogonal, Meyer, Gaussiana y Shanon. Las propiedades de cada una de estas serán presentadas en la sección 2.6.

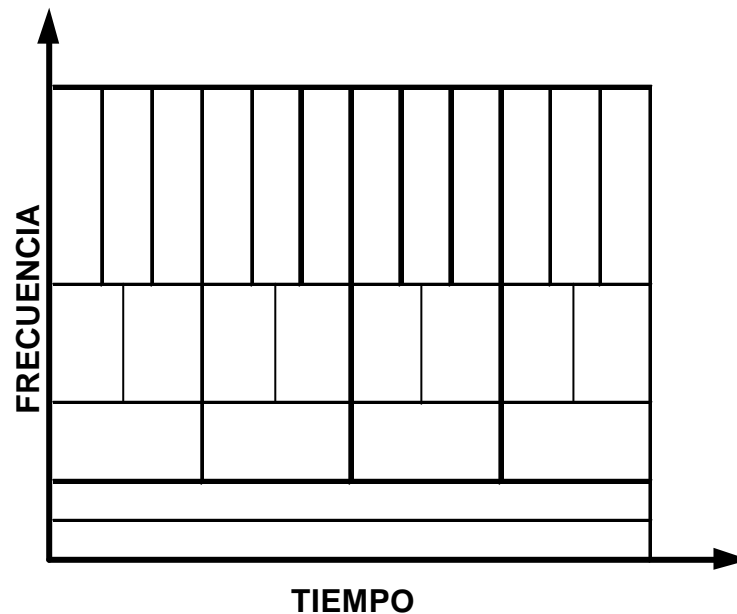
2.4.3. Transformada de Wavelet Continua

De manera similar a la transformada de Fourier por Ventanas (TFV), la transformada de wavelet (TW) posee una buena resolución temporal y frecuencial. Sin embargo, la “ventana” en la cual se basa, denominada wavelet, no tiene un tamaño ni forma “fijos”, sino que va cambiando de acuerdo al tipo de información que se desee obtener. Específicamente, cuando se analiza el contenido de baja frecuencia de una señal, la ventana wavelet se

“amplía” o “dilata” en el tiempo, lo cual es consistente con el hecho que los fenómenos de baja frecuencia se desarrollan a lo largo períodos de tiempo prolongados. Del mismo modo, cuando se analiza fenómenos de alta frecuencia, la ventana wavelet se contrae, capturando de esta manera fenómenos que se desarrollan a lo largo de períodos cortos de tiempo.

Como se ilustra en la Figura 17, la TW permite obtener una buena resolución temporal al analizar frecuencias altas (líneas verticales), mientras que la resolución temporal disminuye cuando se analizan bajas frecuencias, pero se mejora la resolución frecuencial. De esta manera, si bien es cierto no se ha incumplido el análogo al principio de Heisenberg (pues a mayor resolución frecuencial, menor resolución temporal y viceversa), lo que se logra con la TW es aprovechar que los *movimientos de baja frecuencia estén usualmente asociados a períodos de tiempo prolongados*, y *movimientos de alta frecuencia a períodos cortos de tiempo*.

Figura 17: La transformada de Wavelet



Fuente: Gencay y Otros (2002), p. 98.

Formalmente, la transformada de Wavelet continua (TWC) de una función $f(t)$ se define como la proyección de $f(t)$ sobre un conjunto de funciones wavelet $\psi^{a,b}(t)$:

$$(2.52) \quad (T^W \psi)(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^{a,b}(t) dt$$

donde:

$$(2.53) \quad \psi^{a,b}(t) = |a|^{-j/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Dado que los coeficientes de la transformada de wavelet dependen del factor de escala a , y del factor de traslación b , cada uno de ellos proporcionará información de la señal relacionada a la *escala* y a su *ubicación temporal*. Como función de b en un valor fijo a , la TW representa el detalle contenido en la señal $f(b)$ en la escala a . La TWC permite obtener una buena localización de la señal en el dominio del tiempo y de la frecuencia, pues la ventana ψ toma diferentes formas que dependen del factor de escala a (asociado a ciertas frecuencias) y del factor de traslación b . Por un lado:

- (a) Valores grandes del parámetro de escala a están asociados usualmente a frecuencias bajas (valores grandes de j). Así, a mayor escala de $\psi^{a,b}$ (wavelets más anchas), menor frecuencia.
- (b) Valores pequeños del parámetro de escala a están asociados usualmente a frecuencias altas (valores pequeños de j). Así, a menores escalas de $\psi^{a,b}$ o escalas más finas (wavelets más angostas), mayor frecuencia.

Por otro lado, si el parámetro de traslación b cambia, se mueve el centro de localización temporal. De esta forma, la TWC proporciona una descripción de una señal en el dominio de la frecuencia y del tiempo, pero en términos de *escalas* y *tiempo*, lo cual se denomina análisis escala-tiempo o *escalas temporales*.

La expresión de la transformada de wavelet —cuya forma es análoga a la ecuación de análisis de la representación de Fourier de una señal— permite analizar la señal en términos de un factor de escala (asociada a diferentes frecuencias) y uno de ubicación temporal. Además, bajo el supuesto de que ψ es una wavelet (en particular, si cumple la condición de

admisibilidad), es posible reconstruir la señal original a partir de los coeficientes wavelet, a través de una expresión análoga a la ecuación de síntesis de la representación de Fourier de una señal:

$$(2.54) \quad f(t) = \frac{1}{C_\Psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (T^W \Psi)(a,b) \Psi^{a,b}(t) du \frac{ds}{s^2}$$

Una propiedad muy importante de la transformada de wavelet es que permite descomponer y reconstruir perfectamente una señal representada por una función cuadrado integrable.

2.4.4. Transformada de Wavelet Discreta

La transformada de wavelet continua (TWC) es una función de dos parámetros (a, b) y, por lo tanto, contiene mucha información redundante cuando se analiza la función que representa a la señal. Sin embargo, si sólo se considera un número finito de coeficientes de la TWC, se obtiene la denominada **transformada de Wavelet Discreta** (TWD), definida como:

$$(2.55) \quad T_{j,k}^W(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Psi_{j,k}(t) dt$$

donde:

$$(2.56) \quad \Psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^j}} \Psi\left(\frac{t - kb_0 a_0^j}{a_0^j}\right)$$

La ecuación (2.56) representa una versión discreta de (2.53), donde $a = a_0^j$ y $b = ka_0^j b_0$. Reemplazando (2.56) en (2.55), se obtiene:

$$(2.57) \quad T_{j,k}^W(f) = a_0^{-\frac{j}{2}} \int f(t) \Psi(a_0^{-j} t - kb_0) dt$$

De esta manera, la TWD permite obtener una localización de la señal en el dominio del tiempo y de la frecuencia (en términos de escalas), utilizando solamente dilataciones y traslaciones finitas de las funciones wavelets.

2.4.5. Semejanzas y Diferencias entre TW y TFV

La principal semejanza entre TW y TFV es que ambas **proyectan una señal sobre un conjunto de componentes ortonormales**: funciones trigonométricas en el caso de TFV y wavelets en el caso de TW. De esta manera, la TFV y TW están definidas como productos internos de una señal f con una familia de funciones (que conforman una base ortonormal) indexadas por dos índices. Para el caso de la TFV:

$$(2.58) \quad (T^V f)(\omega, t) = \int f(s) g^{\omega, t}(s) ds$$

la expresión (3.58) representa una función está indexada a una frecuencia ω y un momento t , y el producto interno está definido para la señal f y la función:

$$(2.59) \quad g^{\omega, t}(s) = e^{-i\omega s} g(s-t)$$

De esta forma, la TFV permite obtener la proyección de una señal sobre un conjunto de componentes ortonormales. Para el caso de la TW:

$$(2.60) \quad (T^W \psi)(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^{a,b}(t) dt$$

la función está indexada a una escala a y una ubicación temporal b , y el producto interno está definido para la señal f y la función:

$$(2.61) \quad \psi^{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

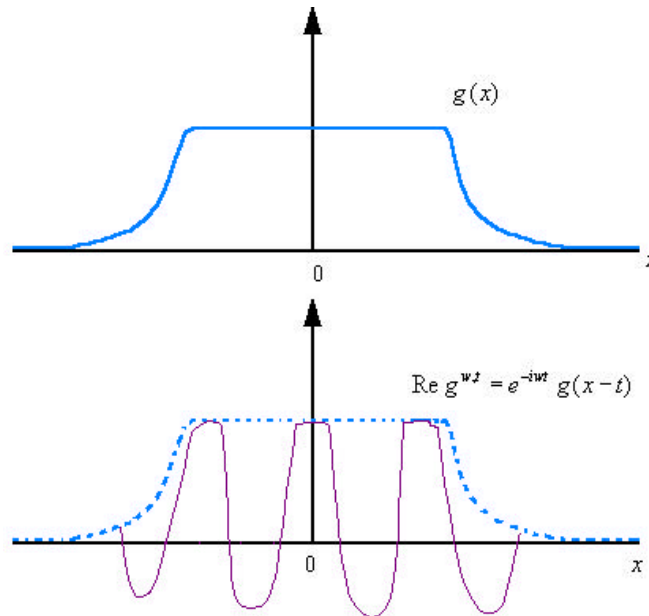
En estos casos, se asume que $g(\cdot)$ y $\psi(\cdot)$ son funciones reales¹⁷.

La **principal diferencia** entre la TFV y TW radica en la forma de las funciones $\psi^{a,b}$ y $g^{\omega, t}$. Por un lado, las funciones de la forma $g^{\omega, t}$ depende de la misma función envolvente o ventana, g , trasladada hacia la ubicación temporal adecuada y “rellenas” con oscilaciones

¹⁷ Aunque estas funciones podrían ser complejas, en cuyo caso deberían introducirse las conjugadas complejas respectivas.

de alta frecuencia. De esta manera, todas las funciones $g^{\omega,t}$ tienen el mismo “ancho” independientemente del valor de ω ; la Figura 17a ilustra esta idea.

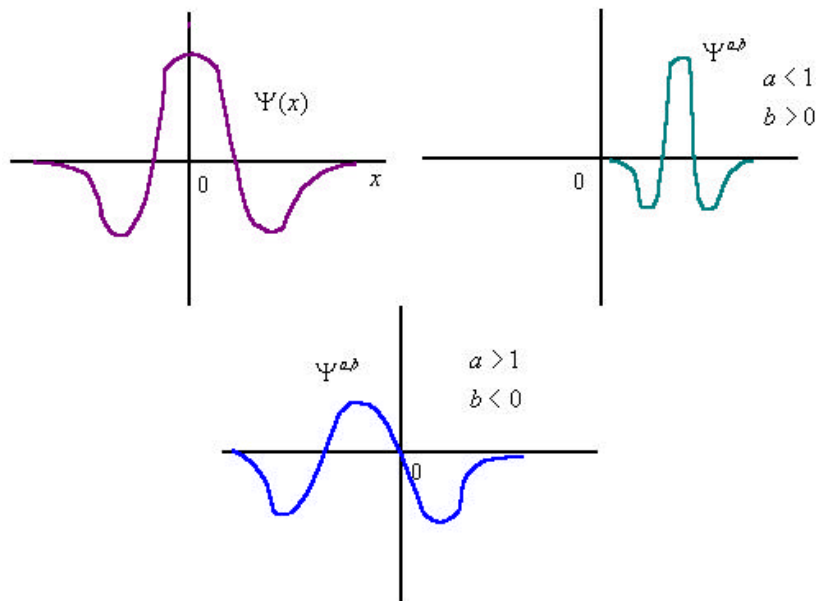
Figura 17a: Ventana de la TFV



Fuente: Elaboración propia.

Por otro lado, las funciones wavelet $\psi^{a,b}$ tienen una amplitud temporal que se adapta a su frecuencia; en particular, una wavelet $\psi^{a,b}$ con un factor de escala pequeña se asocia usualmente a componentes de alta frecuencia, mientras que una wavelet $\psi^{a,b}$ con un factor de escala grande se asocia usualmente a componentes de baja frecuencia es muy angosta asociada a bajas frecuencias. Esto se puede observar en la Figura 17b.

Figura 17b: Dilatación y Traslación de una Wavelet



Fuente: Elaboración propia.

Dadas estas características, si el componente frecuencial de la señal que se desea analizar cambia en el tiempo (es decir, si la señal es no estacionaria), se tiene que las **wavelets permiten obtener una mejor representación de la señal** que la transformada de Fourier por ventanas. Esto se explica por la capacidad que tienen las wavelets para adaptar su forma —a través de dilataciones y traslaciones— a las características de la señal; de esta forma, la TW puede capturar características de una señal que son particulares a un tiempo y frecuencia específicos.

Usualmente se tiende a afirmar que la **escala** y la **frecuencia son conceptos similares**. En general, **no existe un vínculo directo entre escala y frecuencia** (Priestley, 1996), sino solamente una conexión intuitiva y muy indirecta. En particular, la relación entre escala y frecuencia es interpretable si la señal es estacionaria. Solamente en el caso más simple se cumple que las wavelets de escalas grandes (pequeñas) corresponden solamente a bajas (altas) frecuencias, lo cual se asocia al hecho que la detección de bajas frecuencias requiere componentes que abarquen un período temporal amplio o escalas grandes (algo que se ha mencionado a lo largo de este capítulo). Dado esto, algo que se podría afirmar es que en cada escala, lo que se extrae son aquellos componentes de los datos que son muy importantes en dicha escala.

2.4.6. Wavelets Discretas y Bases Ortonormales

Para algunas funciones wavelet ψ y valores específicos de a_0 y b_0 , es posible que la familia de wavelets $\{\psi_{j,k}(x), k, j \in \mathbb{Z}\}$ constituya una **base ortonormal** para el espacio de las funciones $L^2(\mathbb{R})$. En particular, para $a_0 = 2$ y $b_0 = 1$, existen wavelets ψ tales que la familia de wavelets $\mathbf{y}_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \mathbf{y}(2^{-j}t - k)$ constituye una **base ortonormal** para $L^2(\mathbb{R})$. El ejemplo clásico de este tipo de familia de wavelets es la **familia de wavelets de Haar**.¹⁸

2.5. El Análisis Multiresolución (AMR)

En esta sección se presenta la definición de Análisis Multiresolución de una señal y su relación con las transformadas de wavelets. Específicamente, se muestra que si existe un análisis multiresolución para una señal, entonces ésta puede descomponerse en elementos que dependen de dos tipos de funciones wavelets: una wavelet padre, que recoge componentes tendenciales o suaves de la señal, y una wavelet madre, a partir de la cual se recogen movimientos cíclicos asociados a diferentes escalas temporales. En particular, estas funciones wavelets que permiten realizar un análisis multiresolución constituyen **una base ortonormal para las funciones cuadrado integrables**.

2.5.1. Definición de Análisis Multiresolución o AMR

El Análisis Multiresolución (AMR) o Aproximación Multiresolución, es la formalización matemática de la idea de obtener **aproximaciones sucesivas** de una **señal**:

$$\dots, S_J, S_{J-1}, S_{J-2}, \dots$$

tales que cada aproximación sea una mejor representación de la señal original; así, S_{J-1} denota una mejor aproximación de la señal que S_J . Esta idea se entiende fácilmente en un contexto donde la señal es una imagen, donde muchas veces es importante obtener la mayor nitidez o resolución posible.

¹⁸ La demostración de este resultado puede encontrarse en Daubechies (1992), páginas 10-13.

Las diferencias entre las diferentes aproximaciones sucesivas de una señal se denominan *detalles*:

$$(2.62) \quad D_J \equiv S_{J-1} - S_J$$

Dado esto, se tiene que una aproximación puede expresarse como la suma de una aproximación con menor resolución más un detalle adicional:

$$(2.63) \quad S_{J-1} = S_J + D_J$$

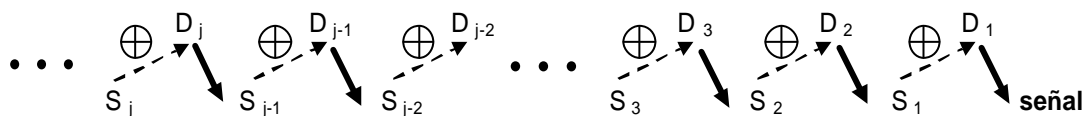
En general, si S_1 es la mejor aproximación (la que posee mejor resolución) de la señal $f(t)$, entonces:

$$(2.64) \quad f(t) = S_1 + D_1$$

Dada la existencia de las aproximaciones multiresolución, es posible expresar cada una de ellas como la suma de una aproximación con menor resolución y un detalle, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_2 + D_2 \\ S_2 &= S_3 + D_3 \\ &\vdots \\ S_{j-1} &= S_j + D_j \\ S_{j-2} &= S_{j-1} + D_{j-1} \end{aligned}$$

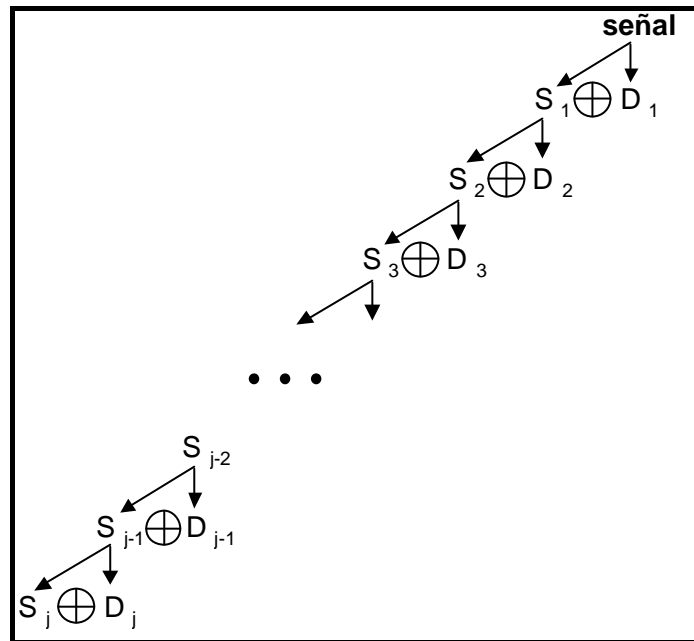
lo cual puede verse a través del siguiente esquema:



De esta manera, el análisis multiresolución permite expresar una señal $f(t)$ como **la suma (ortogonal) de una aproximación inicial S_J y de diferentes detalles:**

$$(2.65) \quad f(t) = S_J + D_J + D_{J-1} + \dots + D_j + \dots + D_1$$

lo cual puede ser representado a través del siguiente árbol:



2.5.2. Análisis Multiresolución y Wavelets.

Uno de los resultados importantes de la teoría de wavelets es la existencia de una correspondencia entre el análisis multiresolución de una señal y una familia de wavelets. Específicamente, se tiene que si existe un análisis multiresolución para una señal representada por una función cuadrado integrable, entonces es posible expresar S_j y D_j en función de dos familias de wavelets. Por un lado, los detalles D_j :

$$(2.66) \quad D_j = \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad , \quad j = 1, 2, \dots, J-1$$

representan los componentes de la señal asociados a escalas menores a J . Formalmente, estos detalles se obtienen a partir de las transformadas de wavelet discreta, las cuales son

proyecciones de la señal sobre una familia de wavelets $\psi_{j,k}(t)$ generada a partir de traslaciones y dilataciones de una *wavelet madre* ψ , utilizando un factor de traslación $k = 0, 1, 2, \dots$ y uno de dilatación $a = 2^j$, con $j = 1, 2, 3, \dots$. Por otro lado, la aproximación S_J :

$$(2.67) \quad S_J = \sum_k s_{J,k} \phi_{J,k}(t)$$

representa el componente de la señal asociado a la mayor escala de la señal J . Formalmente, este componente se obtiene a partir de la transformada de wavelet discreta, la cual es la proyección de la señal sobre una familia de wavelets $\phi_{J,k}(t)$ generada a partir de traslaciones del nivel de dilatación J de una wavelet ϕ utilizando el mismo factor k . La wavelet ϕ se denomina *wavelet padre*, la cual se caracteriza por:

$$(2.68) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt = 1$$

La wavelet padre se usa para capturar los componentes tendenciales suaves usualmente asociados a bajas frecuencias, lo cual requiere que la wavelet sea amplia en el tiempo; la wavelet madre se usa para capturar componentes asociados a escalas menores, que corresponden en general a frecuencias más altas que las de los componentes tendenciales. En otras palabras, S_J representa los componentes tendenciales de la serie, asociado a movimientos de larga duración o mayor escala temporal, mientras que los detalles $D_J, D_{J-1}, \dots, D_j, \dots, D_1$ representan las desviaciones de esta tendencia, asociados a movimientos de corta duración o menor escala. De esta forma, se tiene que la señal puede ser expresada como:

$$(2.69) \quad f(t) = \sum_k s_{J,k} \phi_{J,k}(t) + \sum_k d_{J,k} \psi_{J,k}(t) + \sum_k d_{J-1,k} \psi_{J-1,k}(t) + \dots + \sum_k d_{1,k} \psi_{1,k}(t)$$

donde J denota la *escala* de la wavelet. Las escalas grandes (valores grandes de j) están relacionadas a niveles altos de dilatación de las wavelets, las cuales contienen movimientos suaves —o de larga duración— y de baja frecuencia de $f(t)$; las escalas pequeñas (valores

pequeños de j) están relacionadas a niveles bajos de dilatación, usados para variaciones de menor duración y de mayor frecuencia. A esta descomposición de la señal $f(t)$ en diferentes escalas temporales (asociadas a diferentes frecuencias), se denomina **descomposición tiempo escala** o **escala temporal**, y puede denotarse como:

$$(2.70) \quad \{S_j, D_j, D_{j-1}, \dots, D_1\}$$

El detalle 1 (escala 1) contiene información de los movimientos de la señal que se producen entre 2^1 y 2^2 períodos temporales, movimientos de corta duración temporal que pueden estar asociados a movimientos de alta frecuencia. En general, el detalle j contiene información de la señal asociada a movimientos que van de 2^j hasta 2^{j+1} períodos. Así, los detalles más grandes (escalas mayores), contienen información de movimientos de larga duración, usualmente asociados a movimientos de baja frecuencia. Esta descomposición en escalas que son potencia de 2 se denomina análisis multiresolución diádico.

Esta descomposición en escalas temporales hace a las wavelets comparables a una cámara con lentes de gran alcance: permiten obtener una visión general de todo el paisaje (componente suavizado) y, a la vez, permiten realizar acercamientos tales que es posible identificar características particulares o detalles que a simple vista no son perceptibles (detalles). Este es uno de los resultados más importantes que serán utilizados en las aplicaciones a las variables y relaciones macroeconómicas de las wavelets.

3. CUESTIONES PRÁCTICAS SOBRE EL USO DE WAVELETS

En esta sección se discuten algunas cuestiones prácticas sobre el uso de las wavelets para el análisis multiresolución de series de tiempo, como por ejemplo las características que debería presentar la wavelet elegida o la muestra a utilizar.

Existen muchas familias de wavelets, cada una con diferentes propiedades. En el manual del Matlab se pueden encontrar hasta 15 familias, entre las que destacan: Haar (haar), Daubechies (dbN), Symlets (symN), Coiflets (coifN), Biortogonal (bioNr.Nd), Meyer (meyr), Mexicana (mexh), Morlet (morl), entre otras.

3.1. Propiedades deseables en una familia de wavelets

La tabla 1 muestra algunas propiedades de las principales familias de wavelets. En las aplicaciones, las propiedades que se buscan en una familia de wavelet son las siguientes:

- (1) **Ortonormalidad**. Si los elementos de la familia de wavelets conforman una base ortogonal y además poseen una norma unitaria (es decir, conforman una base ortonormal), entonces se asegura que los coeficientes empíricos sean independientes¹⁹.
- (2) **Soporte Compacto**. Es importante que el soporte de la función wavelet sea compacto pues muchas veces los datos muestrales (finitos) son transformados de tal forma que toman valores en el intervalo $[0,1]$ ²⁰.
- (3) **Simetría**. Si la wavelet madre es simétrica, será posible asociar directamente cada punto del tiempo de los detalles con la serie original.

¹⁹ Odgen, página 25 y capítulo 7.

²⁰ Odgen (1997), página 25.

Tabla 1: Algunas propiedades de las familias de wavelets más importantes.

PROPIEDAD	morl	mexh	meyr	haar	dbN	symN	coifN	biorNr.Nd
Infinitamente regular	X	X	X					
Regularidad arbitraria					X	X	X	X
Ortogonal y de soporte compacto				X	X	X	X	
Biorotogonal y de soporte compacto								X
Simétrica	X	X	X	X				
Asimétrica					X			
Casi simétrica						X	X	
Número arbitrario de momentos que se desvanecen					X	X	X	X
Momentos que se desvanecen para ϕ							X	
Existencia de ϕ			X	X	X	X	X	X
Análisis ortogonal			X	X	X	X	X	
Análisis Biorotogonal			X	X	X	X	X	X
Reconstrucción exacta		X	X	X	X	X	X	X
Filtros FIR				X	X	X	X	X
Transformada continua	X	X	X	X	X	X	X	X
Transformada discreta			X	X	X	X	X	X
Algoritmo rápido				X	X	X	X	X
Expresión explícita	X	X		X				

Fuente: Elaboración propia, basada en Misiti y Otros (2002), p. 6-80 y 6-81.

(4) **Momentos que se anulan.** Se dice que $\psi(t)$ tiene P momentos que anulan si:

$$\int t^P \psi(t) dt = 0 \quad P = 0, 1, \dots, P-1$$

Lo deseable será que la wavelet posea un número alto de momentos que se anulan. Esto se explica porque a mayor número de momentos que se anulan, la longitud de los filtros wavelets²¹ es mayor. La longitud de los filtros wavelet determinan las siguientes características:

(a) Mientras mayor sea la longitud de los filtros wavelet, mejor será su aproximación a un filtro de paso ideal, definido como un filtro que aísla las características frecuenciales para intervalos específicos de frecuencia.

²¹ Una buena presentación de la transformada de wavelet como un filtro y de los conceptos importantes para estudiar filtros lineales y no lineales puede encontrarse en Gencay, et. Al. (2002).

- (b) Mientras mayor sea la longitud de los filtros, estos generarán vectores de coeficientes wavelets estacionarios para procesos estocásticos con alto grado de no estacionariedad²².
- (c) Mientras mayor sea la longitud del filtro wavelet, ésta tendrá un comportamiento más suavizado. Sin embargo, es importante notar que si la wavelet elegida tiene una forma suave en general, la menor o mayor longitud no generará diferencias significativas.
- (5) **Existencia de una wavelet padre.** Es importante que la wavelet madre posea una wavelet padre asociada para que sea factible el análisis multiresolución. De esta forma, el análisis de una señal a través de wavelets permitirá obtener información sobre frecuencias altas (wavelet madre) y bajas (wavelet padre)²³.
- (6) **Análisis Ortogonal.** La familia de wavelets debe ser tal que sea factible realizar un análisis multiresolución en términos de componentes ortogonales; así, la suma simple de ellos permita reconstruir la señal original de manera adecuada.

3.2. Algunos problemas prácticos.

Las funciones wavelets se usan para representar la información contenida una señal, y para ello debe replicar sus características subyacentes. Así, por ejemplo, si los datos tuvieran la apariencia de ser una suma de funciones escalera, entonces sería adecuado usar la wavelet de Haar; mientras que si los datos son suaves, entonces se debería usar una wavelet con una longitud mayor.

Una pregunta importante es, *¿cuántos datos necesitamos para realizar una filtración utilizando wavelets?* El supuesto sobre el cual se realiza el análisis multiresolución es que el tamaño de muestra N tiene que ser una potencia de dos, es decir $N = 2^J$. Sin embargo, no necesariamente tiene que ser igual al número de detalles, sino que puede ser menor. Sin embargo, existe la posibilidad de aplicar la Transformación de wavelet Discreta Estacionaria, que es aplicable a cualquier tamaño de muestra (Gençay et al., 2002).

²² Gençay, et. al. (2002); página 114.

²³ Gençay, et. al., páginas 106-117 es una buena presentación de estas ideas en términos de filtros discretos.

Figura 19: Análisis Multiresolución del logaritmo del PBI real.



Fuente: Elaboración propia

Un problema práctico asociado al análisis multiresolución es que éste se basa en el análisis de escalas definidas para períodos de tiempo que son potencia de 2 (análisis diádico). Sin embargo, las estructuras económicas no necesariamente se reflejan en períodos de tiempo cuya duración sea potencia de 2 (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 períodos etc.). Pollock (2003) propone una solución a este problema que actualmente sigue investigando.

3.3. Aplicación del AMR a una serie de tiempo no estacionaria.

La Figura 19 muestra la aplicación del análisis multiresolución al logaritmo de la serie mensual del PBI real desestacionalizado (LPBISA), el cual se ha aproximado a través de un componente suave (A5_LPBISA) y cinco detalles (D1_LPBISA, . . . , D5_LPBISA). Para esto se utilizó la wavelet madre Symlet(12) con $j = 5$ y su correspondiente wavelet padre. Los detalles de la serie original presentan movimientos de diferente duración temporal; así, el detalle 1 (D1_LPBISA) asociado a la escala 1 presenta movimientos corta duración temporal (de 2 a 4 meses), mientras que el detalle cinco (D5_LPBISA) asociado a la escala cinco presenta movimientos de larga duración (de 32 a 64 meses).

4. **APLICACIÓN: LA RELACIÓN DINERO-PRODUCTO Y CAUSALIDAD EN EL SENTIDO DE GRANGER**

En esta sección se presenta una aplicación de la teoría de wavelets al análisis de la relación de causalidad en el sentido de Granger entre el dinero y el producto, propuesta por primera vez por Ramsey y Lampart (1998), y posteriormente replicada por Chew (2001) y Gencay et al. (2002).

Uno de los conceptos más utilizados para el análisis de causalidad empírica entre variables económicas es el de *causalidad en el sentido de Granger* (Granger 1969), el cual se basa en el supuesto de que la variable “causa” se mueve antes que la variable “respuesta”, lo que implica una secuencialidad causa-efecto. Específicamente, dadas dos variables X e Y , si X causa en el sentido de Granger a Y solamente se puede afirmar que los movimientos de X permitirán *predecir estadísticamente* los movimientos de Y , más no se puede decir necesariamente que X cause a Y en el sentido de que X realmente influya en el comportamiento de Y . Sin embargo, Engle et al. (1983), muestran la importancia del concepto de causalidad en el sentido de Granger para determinar si una serie de tiempo es

fuertemente exógena, en el sentido que esta pueda ser utilizada para predecir el comportamiento futuro de otra.

Uno de los resultados que se desprende de la teoría de wavelets y que Ramsey y Lampart (1998a,1998b) utilizan como instrumento complementario de la econometría convencional de series de tiempo es el denominado *análisis multiresolución (AMR)* de series económicas a través del uso de funciones wavelets. Así, de manera alternativa al que se denominará “enfoque tradicional”, el análisis de la relación de causalidad en el sentido de Granger puede llevarse a cabo considerando la información contenida en cada uno de los detalles del análisis multiresolución de la series.

4.1. El enfoque tradicional

Tradicionalmente, la relación de causalidad entre dinero y producto ha sido estudiada empíricamente desde tres perspectivas: (1) el grado de predicción entre variables nominales y reales a través del análisis de una sola ecuación, (2) la existencia de relaciones estructurales significativas entre ellas, a través del análisis de modelos VAR reducidos y estructurales, y (3) la existencia de una relación de largo plazo, a través del análisis de un vector de cointegración y el modelo de corrección de errores asociado. En el caso (1), la relación se analiza en un contexto de corto plazo, mientras que en los casos (2) y (3) se analiza considerando el corto y el largo plazo.

Empíricamente el largo plazo se asocia al comportamiento tendencial de una serie, mientras que el corto plazo se asocia al comportamiento cíclico de la misma, medido como la diferencia entre la serie observada y la tendencia (que se denomina brecha de una serie). En términos de cointegración (Engle y Granger, 1987), la relación de largo plazo entre las series estaría determinada por el comportamiento de las tendencias estocásticas de las series (que se reflejaría en el denominado vector de cointegración), mientras que el comportamiento de corto plazo estaría determinado por las primeras diferencias de las series y las posibles desviaciones de sus trayectorias respecto de la relación de largo plazo.

Estas formas de analizar empíricamente la relación de causalidad entre variables económicas presentan algunos problemas potenciales. En primer lugar, las alternativas (1) y (2) asumen que las series son estacionarias, lo cual no es una característica de las series de

tiempo macroeconómicas, por lo que se utiliza una transformación estacionaria de las series originales: la primera diferencia o la brecha. Para el caso de la alternativa (3), parte del análisis de causalidad entre series no estacionarias se basa en las primeras diferencias de las mismas. Así, un problema consiste en que las series son no estacionarias, y que al utilizar transformaciones estacionarias de las mismas podría eliminarse información importante para determinar la relación de causalidad empírica entre las series.

En particular, al analizar las brechas de las series (desviaciones de la tendencia o de la trayectoria de largo plazo) o las primeras diferencias de las series, la ausencia de relación de causalidad entre las brechas o las primeras diferencias podría explicarse por la existencia de causalidad entre los diferentes componentes de las series y no entre ellas, con lo cual se tendría la posibilidad de diferentes relaciones de causalidad (una para cada componente de las brechas).

4.2. Enfoque Alternativo: Wavelets y Análisis Multiresolución

Como se desprende de la literatura sobre el análisis tradicional de la relación de causalidad empírica entre el dinero y el nivel de actividad, no es posible establecer claramente la dirección de la causalidad, al menos en el corto plazo²⁴. Una posible explicación de la ausencia de un consenso en los resultados teóricos y empíricos consiste en que el análisis basado en el corto y largo plazo (empíricamente asociados a horizontes temporales de corta y larga duración, respectivamente), no estaría rescatando la posible relación de causalidad entre dinero y nivel de actividad. Como lo afirman Ramsey y Lampart (1998b), desde los inicios de la teoría económica como disciplina independiente, muchos economistas han afirmado que el proceso de decisión económica involucra diferentes períodos de tiempo, por lo cual la relación de causalidad entre variables económicas podría cambiar al analizar diferentes horizontes temporales:

Marshall, Edgeworth, Schumpeter, Hicks, and others of the period realized that there were more time periods involved in economic decision making, but pedagogical advantages of just two periods dominated the relevance of many periods. In any event, it was recognized early in the profession that the time period of analysis, or as we would now term the matter, the timescale of analysis, is very important for determining those aspects of decision making

²⁴ B. Hayo (1998) presenta una buena revisión de la literatura hasta esa fecha.

that are relatively more important and those that are less important. (Ramsey y Lampart 1998: 49)

Como se ha mostrado, las **funciones wavelets** permiten descomponer las series económicas en diferentes **detalles** asociados a diferentes **escalas temporales**, capturando en cada uno de ellos **movimientos cíclicos asociados a diferentes frecuencias**, lo cual se denomina **análisis multiresolución**. De esta forma, el estudio empírico de las relaciones económicas puede realizarse analizando por separado los diferentes componentes o detalles de las series que usualmente están agrupados en una brecha o en las primeras diferencias.

Ramsey y Lampart (1998a y 1998b) aplicaron esta metodología al análisis de relaciones entre variables económicas, encontrando resultados que la econometría de series de tiempo estándar no permitía alcanzar. Por un lado, muestran que es posible analizar diferentes niveles de relación entre consumo e ingreso, en términos de diferentes escalas temporales, y que el efecto del ingreso sobre el consumo cambia en cada escala temporal (Ramsey y Lampart 1998a). Por otro lado, analizan la causalidad en el sentido de Granger entre dinero e ingreso entre los diferentes detalles de las series (asociados a diferentes escalas temporales), y encuentran que la **relación de causalidad empírica cambia con la escala temporal analizada** (Ramsey y Lampart 1998b). Chew (2001), realiza el mismo análisis de Ramsey y Lampart (1998a), utilizando información de dinero e ingreso de países de la Unión Europea, llegando a resultados similares.

De esta manera, el uso de wavelets y del análisis multiresolución asociado parece proporcionar una alternativa para analizar empíricamente las relaciones de causalidad en el sentido de Granger entre variables económicas, pues como lo han mostrado Ramsey y Lampart (1998a y 1998b), es posible encontrar evidencia a favor de que la relación entre variables económicas sea única y que involucre diferentes horizontes temporales. En términos de la relación entre dinero y nivel de actividad, esta posibilidad de diferentes relaciones de causalidad en el sentido de Granger proporcionaría información relevante sobre aspectos de política monetaria; en particular, como lo muestran Ramsey y Lampart (1998b) y Chew (2001), es más probable que movimientos en la cantidad de dinero de muy corta duración (de 2 a 4 meses, por ejemplo), sean respuesta a movimientos similares del nivel de actividad, mientras que movimientos en la cantidad de dinero de mayor duración (de 4 a 8

meses, por ejemplo), estén orientados a afectar de alguna manera el comportamiento del nivel de actividad.

La principal característica del *AMR* es que permite descomponer una serie de tiempo (estacionaria o no estacionaria), en un *componente tendencial suave* (que depende de una wavelet padre) y *diferentes componentes estacionarios* o detalles (que depende de una wavelet madre) de *diferente duración temporal* o *escalas temporales*, asociados a *diferentes frecuencias*. Una característica adicional es que la suma simple de los detalles y del componente suavizado permite reconstruir la serie original. De esta forma, la teoría de wavelets proporciona un método de filtración de series de tiempo, donde el componente cíclico o estacionario asociado no es único, sino que su número depende del grado de suavizamiento del componente tendencial.

Dada esta característica, el análisis empírico de la causalidad en el sentido de Granger entre dos (o más variables) puede realizarse entre los diferentes detalles de las series y no solamente entre las series en niveles (en caso sean estacionarias) o entre las primeras diferencias (o la brecha de las mismas, o alguna transformación que sea estacionaria). Así, el uso del *AMR* de una señal implica el uso de diferentes modelos de vectores autorregresivos o VAR para cada detalle de las series. Específicamente, si se desea analizar la relación de causalidad entre dos variables X e Y , el análisis de causalidad en el sentido de Granger entre los detalles 1 de las series implica el uso del siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
 Y_t(D_1) &= \alpha_{11}(D_1)Y_{t-1}(D_1) + \alpha_{12}(D_1)Y_{t-2}(D_1) + \dots + \alpha_{1p}(D_1)Y_{t-p}(D_1) \\
 &\quad + \beta_{11}(D_1)X_{t-1}(D_1) + \beta_{12}(D_1)X_{t-2}(D_1) + \dots + \beta_{1p}(D_1)X_{t-p}(D_1) + v_{Yt} \\
 X_t(D_1) &= \alpha_{21}(D_1)Y_{t-1}(D_1) + \alpha_{22}(D_1)Y_{t-2}(D_1) + \dots + \alpha_{2p}(D_1)Y_{t-p}(D_1) \\
 &\quad + \beta_{21}(D_1)X_{t-1}(D_1) + \beta_{22}(D_1)X_{t-2}(D_1) + \dots + \beta_{2p}(D_1)X_{t-p}(D_1) + v_{Xt}
 \end{aligned}$$

donde, por ejemplo, $\alpha_{1p}(D_1)$ es un parámetro que representa el efecto del rezago p del detalle 1 o D_1 de la variable Y (denotada por $Y_{t-p}(D_1)$), sobre el valor del detalle 1 o D_1 de Y en t (denotada por $Y_t(D_1)$). Para el detalle 2:

$$\begin{aligned}
 Y_t(D_2) &= \alpha_{11}(D_2)Y_{t-1}(D_2) + \alpha_{12}(D_2)Y_{t-2}(D_2) + \dots + \alpha_{1p}(D_2)Y_{t-p}(D_2) \\
 &\quad + \beta_{11}(D_2)X_{t-1}(D_2) + \beta_{12}(D_2)X_{t-2}(D_2) + \dots + \beta_{1p}(D_2)X_{t-p}(D_2) + v_{Yt}
 \end{aligned}$$

$$X_t(D_2) = \alpha_{21}(D_2)Y_{t-1}(D_2) + \alpha_{22}(D_2)Y_{t-2}(D_2) + \dots + \alpha_{2p}(D_2)Y_{t-p}(D_2) \\ + \beta_{21}(D_2)X_{t-1}(D_2) + \beta_{22}(D_2)X_{t-2}(D_2) + \dots + \beta_{2p}(D_2)X_{t-p}(D_2) + v_{Xt}$$

y, en general, para el detalle j :

$$Y_t(D_j) = \alpha_{11}(D_j)Y_{t-1}(D_j) + \alpha_{12}(D_j)Y_{t-2}(D_j) + \dots + \alpha_{1p}(D_j)Y_{t-p}(D_j) \\ + \beta_{11}(D_j)X_{t-1}(D_j) + \beta_{12}(D_j)X_{t-2}(D_j) + \dots + \beta_{1p}(D_j)X_{t-p}(D_j) + v_{Yt}$$

$$X_t(D_j) = \alpha_{21}(D_j)Y_{t-1}(D_j) + \alpha_{22}(D_j)Y_{t-2}(D_j) + \dots + \alpha_{2p}(D_j)Y_{t-p}(D_j) \\ + \beta_{21}(D_j)X_{t-1}(D_j) + \beta_{22}(D_j)X_{t-2}(D_j) + \dots + \beta_{2p}(D_j)X_{t-p}(D_j) + v_{Xt}$$

Este grupo de modelos VAR sobre los cuales se basa el análisis de causalidad en el sentido de Granger entre dos variables X e Y muestra las siguientes ventajas del AMR de series temporales respecto del análisis econométrico tradicional:

- (a) El AMR permite aprovechar la información contenida en las diferentes escalas temporales de la señal. De esta forma, para el caso de dos series X e Y , la causalidad ya no se analiza solo para los niveles (o las primeras diferencias), sino para cada par de detalles o escalas. Dado esto, el AMR haría posible verificar la hipótesis de que las **relaciones entre variables económicas** —en términos de predicción— **pueden cambiar de sentido si se analizan diferentes escalas temporales**. Como lo sugieren Ramsey y Lampart (1998b), la idea central es que las decisiones económicas muchas veces involucran **horizontes temporales con diferente duración**.
- (b) El AMR puede aplicarse a cualquier tipo de serie temporal, **sea o no estacionaria**, **presente o no quiebres**. Dado que los detalles que se obtienen de cada serie son estacionarios, es posible aplicar directamente el contraste de causalidad en el sentido de Granger entre series **no estacionarias**, analizando los detalles de las mismas. En general, las wavelet se caracterizan por capturar los componentes no estacionarios y estacionales contenidos en las series.

Dadas estas ventajas del análisis multiresolución a través del uso de wavelets, es posible evaluar la hipótesis de que la relación de causalidad entre dinero (medido a través de algún agregado monetario relevante) e ingreso (medido a través de algún indicador del nivel de actividad económica) puede cambiar si se consideran diferentes horizontes temporales: en

períodos cortos (escalas pequeñas), los movimientos en el nivel de actividad podrían preceder a los de la cantidad de dinero, mientras que en períodos de mediana duración (escalas mayores), los movimientos del dinero podrían preceder a los movimientos del nivel de actividad, mientras que en períodos mayor duración (escalas grandes), podría observarse una doble relación. De esta manera, el uso de wavelets para realizar un análisis multiresolución series de tiempo se constituye en un complemento potencial de la econometría de series de tiempo.

4.3. Datos

Para analizar la relación empírica entre el dinero y el producto tomando como criterio básico la posible existencia de causalidad en el sentido de Granger, se utilizó la información disponible en la base de datos mensual del BCRP, para el período mayo 1992 - diciembre 2002. De esta forma que se utilizó una muestra cuyo tamaño es potencia de 2 (en este caso $n = 128 = 2^7$) para realizar la descomposición de las series a través del uso de funciones wavelets²⁵. Sin embargo, el análisis se realizó utilizando la descomposición de las series para el período enero 1993 - diciembre 2001, caracterizado por un esquema de política monetaria con ancla nominal, donde el ancla o meta intermedia era la emisión primaria²⁶.

Para aproximar empíricamente la variable dinero, se eligieron cinco agregados monetarios nominales: emisión primaria promedio del mes, circulante en moneda nacional, dinero en moneda nacional, liquidez en moneda nacional y liquidez en moneda extranjera (expresada en soles). El agregado monetario dinero está compuesto por el circulante y los depósitos a la vista; la liquidez en moneda nacional por el dinero en moneda nacional más los depósitos de ahorro, plazo y otros valores denominados en moneda nacional; la liquidez en moneda extranjera por los depósitos a la vista, ahorro, plazo y otros valores denominados en moneda extranjera. El producto fue aproximado a través del Producto Bruto Interno real a soles de 1994. Finalmente, para aproximar la variable nivel de precios, se utilizó el índice de precios al consumidor (IPC).

²⁵ Dado que la filtración de las series a través de wavelets ha considerado 20 períodos adicionales a los analizados (12 previos y ocho posteriores), esto ayuda a eliminar posibles problemas en los extremos de cada una de las series filtradas.

²⁶ A partir de enero de 2002 la política monetaria sigue un esquema de inflación objetivo (inflation targeting), donde la meta intermedia es un nivel de inflación.

Las series fueron desestacionalizadas²⁷ y se utilizaron en logaritmos. Por un lado, el análisis de las series a través del enfoque tradicional se basó en los logaritmos de las series en niveles y en primeras diferencias, además de sus brechas. Por otro lado, para el enfoque de wavelets se filtraron los logaritmos de las series utilizando la función wavelet Symmlet.

Para realizar el contraste de causalidad en el sentido de Granger siguiendo el enfoque tradicional, se utilizó el estadístico χ^2 sobre los coeficientes respectivos de un VAR cuyas variables son el PBI (nominal o real) y los diferentes agregados monetarios. Para la elección del número de rezagos óptimos del modelo VAR, solo se consideraron aquellos modelos VAR estables y que no presentaban algún patrón de autocorrelación significativo en los residuos. De esta forma, se buscó que el patrón de autocorrelación capture toda la dinámica que podría existir en el sistema además del dinero y nivel de actividad. La elección final del modelo se realizó a través de los contrastes tradicionales de determinación del número de rezagos óptimo: Akaike, Schwarz, Error de Predicción Final, Hannan - Quinn y Ratio de Verosimilitud.

4.4. Enfoque Tradicional: Evidencia Empírica

El primer paso fue analizar la hipótesis de existencia de raíz unitaria en las series. Las pruebas ADF y Phillip Perron mostraron que no es posible rechazar la hipótesis de raíz unitaria. Dado esto, se procedió a aplicar las pruebas de Zivot y Andrews (1992) y Perron (1997), para evaluar la posibilidad de que las series sean estacionarias con quiebre; los resultados mostraron evidencia a favor de la hipótesis de raíz unitaria. De esta manera, se concluyó que los logaritmos de las series en niveles son no estacionarios e integrados de orden 1. Dado este resultado, el enfoque tradicional consiste en analizar la causalidad en el sentido de Granger usando las primeras diferencias de las series, las brechas de las mismas o, en caso exista un vector de cointegración, usando un Modelo de Corrección de Errores (MCE).

²⁷ Las wavelets pueden capturar los componentes estacionales de las series. Sin embargo, se optó por trabajar con las series desestacionalizadas para poder comparar los resultados del análisis utilizando la econometría tradicional con el enfoque alternativo usando wavelets.

Para evaluar la existencia de vectores de cointegración de las series, se utilizaron las metodologías de Engle y Granger (1987) y la de Johansen (1991,1995)²⁸. Ambas metodologías muestran evidencia a favor de vectores de cointegración al 1 y 5 por ciento de significancia, entre los diferentes agregados monetarios y el producto real. Debido a esto, se procedió a realizar el análisis de causalidad en el sentido de Granger bajo el supuesto de la existencia de un vector de cointegración y un modelo de corrección de errores correspondiente.

Para la muestra analizada, la existencia de una relación de cointegración entre el producto y los diferentes agregados monetarios en moneda nacional solamente se presenta bajo los siguientes supuestos: (a) no existe tendencia determinística en los datos, (b) el vector de cointegración no presenta intercepto ni tendencia, y (c) el modelo de corrección de errores no presenta intercepto. La existencia de una relación de cointegración entre el producto y la liquidez en moneda extranjera se presenta bajo los mismos supuestos, excepto el (b), pues en este caso fue necesario asumir que el vector de cointegración presenta intercepto pero no tendencia.

La Tabla 2 muestra los resultados del análisis de causalidad en el sentido de Granger en un contexto de cointegración, en donde el producto causa en el sentido de Granger a todos los agregados monetarios considerando las primeras diferencias, excepto para la emisión y la liquidez en moneda extranjera. Por un lado, la emisión y el producto se causan mutuamente en niveles, por lo que muestran evidencia de ser ambas endógenas. Por otro lado, se tiene que el PBI es débilmente exógeno al considerar el agregado monetario dinero. En el caso de circulante y liquidez en moneda nacional, existe evidencia de que el PBI es fuertemente exógeno. Finalmente, solo el agregado monetario liquidez en moneda extranjera es débilmente exógeno.

²⁸ En el caso del análisis de relaciones bivariadas entre cada agregado monetario con el producto, los resultados proporcionados por la metodología de Engle y Granger fueron similares a los de la metodología de Johansen, por lo cual la presentación de los resultados se basó en los estadísticos obtenidos por esta última metodología.

Tabla 2

COINTEGRACIÓN Y CAUSALIDAD A LA GRANGER:

1993:01 - 2001:12 ^{1/}

Hipótesis Nula	VEC	Niveles
PBIR no causa BASE	0.4618	SI
BASE no causa PBIR	0.0592	SI
Rezaqos	12	12
PBIR no causa CIR	0.0164	SI
CIR no causa PBIR	0.0651	NO
Rezaqos	14	14
PBIR no causa DIN	0.0060	SI
DIN no causa PBIR	0.0472	NO
Rezaqos	14	14
PBIR no causa LIQMN	0.0000	SI
LIQMN no causa PBIR	0.0645	NO
Rezaqos	24	24
PBIR no causa LIQME	0.5739	NO
LIQME no causa PBIR	0.1010	SI
Rezaqos	21	21

1/ En todos los casos, existe un vector de cointegración al 1% y 5% de significancia, excepto para el modelo con circulante (solo al 5%).

Fuente: Elaboración propia.

Estos resultados deben ser considerados con cautela, pues los supuestos bajo los cuales se han obtenido no son consistentes con la naturaleza de los datos. En particular, el supuesto de ausencia de tendencias determinísticas en los datos no es adecuado, especialmente para los agregados monetarios. Asimismo, solamente cuando las series tienen media cero los supuestos (a), (b) y (c) son relevantes. Debido a esto, se procedió a la búsqueda de vectores de cointegración con supuestos consistentes con la naturaleza de los datos (en particular la presencia de tendencias determinísticas); si embargo, en todos los casos no fue posible encontrar vectores de cointegración. Esto tampoco fue posible considerando la relación entre cada agregado monetario, el PBI real y el deflactor del PBI.

Considerando los resultados arriba mencionados, se procedió a realizar el contraste de causalidad en el sentido de Granger utilizando las primeras diferencias de los logaritmos de las series y las brechas de las mismas. Los resultados del análisis de los agregados monetarios y el PBI real se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3

SERIES ESTACIONARIAS Y CAUSALIDAD A LA GRANGER:
1993:01 - 2001:12

Hipótesis Nula	Primeras Diferencias	Brechas HP
PBIR no causa BASE	0.0082	0.0812
BASE no causa PBIR	0.3290	0.4044
Rezaqos	4	6 ^{1/}
PBIR no causa CIR	0.0181	0.0899
CIR no causa PBIR	0.1046	0.0001
Rezaqos	14 ^{1/}	22
PBIR no causa DIN	0.0092	0.1350
DIN no causa PBIR	0.0339	0.0017
Rezaqos	20	21
PBIR no causa LIQMN	0.3630	0.0467
LIQMN no causa PBIR	0.0221	0.0945
Rezaqos	1	21
PBIR no causa LIQME	0.4795	0.4172
LIQME no causa PBIR	0.0029	0.0145
Rezaqos	24	26

1/ Autocorrelación de primer orden.

Fuente: Elaboración propia.

Para el caso de las primeras diferencias de los logaritmos de las series (tasas de crecimiento), se concluye que el producto causa en el sentido de Granger al dinero cuando éste se mide como base, circulante, o circulante más depósitos vista (dinero); la causalidad se revierte cuando se consideran los agregados monetarios más amplios, tanto en moneda nacional como en moneda extranjera. Para el caso de las brechas, el dinero causa en el sentido de Granger al producto cuando se utiliza el circulante, circulante más depósitos vista (dinero) y liquidez en moneda extranjera; el único caso donde el producto causa en el sentido de Granger al dinero es cuando se mide como liquidez en moneda extranjera; cuando se considera la base, no se puede concluir nada acerca de la existencia de causalidad en el sentido de Granger.

En resumen, los resultados no muestran claramente la existencia de una relación de causalidad en el sentido de Granger entre el producto y los diferentes agregados monetarios,

tanto en moneda nacional como extranjera. Estos resultados son similares a los que se obtienen incluyendo el deflactor del PBI real²⁹.

4.5. Enfoque Alternativo: Evidencia Empírica

Como alternativa al enfoque tradicional, se realizó el análisis de causalidad en el sentido de Granger entre producto y los diferentes agregados monetarios, a través del análisis multiresolución de las series utilizando wavelets. Específicamente, las series fueron filtradas usando la función wavelet madre denominada Symmlet de orden 12 (Sym12) —y la wavelet padre asociada— caracterizada por ser ortonormal, de soporte compacto y casi simétrica. Se eligió una longitud de 12 para el filtro wavelet Symmlet, para que de esta forma la wavelet presente buenas propiedades en términos de regularidad³⁰.

El análisis multiresolución se realizó considerando 6 detalles para cada serie: $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$ y un componente suavizado S_6 . El detalle D_1 contiene información de movimientos de la serie (usualmente de alta frecuencia) que ocurren entre $2^1 = 2$ y $2^2 = 4$ meses; el detalle D_2 movimientos de la serie entre $2^2 = 4$ y $2^3 = 8$ meses, el detalle D_3 movimientos de la serie entre $2^3 = 8$ y $2^4 = 16$ meses, . . . , el detalle D_6 movimientos de la serie entre $2^6 = 64$ y $2^7 = 128$ meses.

Considerando los resultados del enfoque tradicional, donde no se encontró evidencia a favor de la existencia de una relación de largo plazo entre el producto real y el dinero nominal, la relación de causalidad en el sentido de Granger se analizó considerando una relación de corto plazo entre dinero y PBI real. Por ello, el análisis de causalidad en el sentido de Granger se realizó a través de un modelo de vectores autorregresivos o VAR sin restricciones.

La Tabla 4 presenta los resultados de la prueba de causalidad en el sentido de Granger entre diferentes agregados monetarios nominales y el PBI real (relación de corto

²⁹ Sin embargo, es posible que exista una relación de largo plazo entre algunos componentes no estacionarios de la series, lo cual se denomina **cointegración oculta** (Granger y Yoon, 2002). En un trabajo próximo a ser culminado, el autor vincula el uso de wavelets y el concepto de cointegración oculta y encuentra la existencia de cointegración entre algunos componentes del análisis multiresolución de las series.

³⁰ Ver en la sección 2 la discusión sobre las propiedades deseables de una wavelet para su aplicación al análisis multiresolución.

plazo), utilizando cada uno de los detalles de las series obtenidos a partir del AMR de las mismas.

Tabla 4

CAUSALIDAD A LA GRANGER USANDO WAVELETS: 1993:01 - 2001:12

(Series mensuales con ajuste estacional)

Hipótesis Nula	D1 (2 a 4 m.)	D2 (4 a 8 m.)	D3 (8 a 16 m.)	D4 (16 a 32 m.)	D5 (32 a 64 m.)	D6 (64 a 128 m.)
PBIR no causa BASE	0.0157	0.0138	0.2558	0.0005	0.3396	
BASE no causa PBIR	0.7242	0.0119	0.3445	0.0000	0.0018	INESTABLE
Rezagos	16	23	9	18	19	
Autocorrelación	NO	NO	SI	NO	NO	
PBIR no causa CIR	0.0000	0.0000	0.0020	0.0017	0.0000	
CIR no causa PBIR	0.2075	0.2754	0.0079	0.0000	0.0000	INESTABLE
Rezagos	13	22	23	18	27	
Autocorrelación	NO	NO	SI	NO	NO	
PBIR no causa DIN	0.0472	0.3146	0.0032	0.0000	0.0000	0.1856
DIN no causa PBIR	0.9915	0.0004	0.2547	0.0000	0.0000	0.0000
Rezagos	23	18	13	23	23	9
Autocorrelación	NO	NO	SI	NO	NO	SI
PBIR no causa LIQMN	0.0007	0.0289	0.2545	0.1518	0.3431	0.0000
LIQMN no causa PBIR	0.6918	0.2427	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Rezagos	29	20	13	20	13	20
Autocorrelación	NO	NO	SI	NO	SI	NO
PBIR no causa LIQME	0.0206	0.5486	0.0258	0.0001	0.1929	0.0001
LIQME no causa PBIR	0.9991	0.2839	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
Rezagos	10	14	5	26	6	20
Autocorrelación	SI	SI	SI	NO	SI	NO

Fuente: Elaboración propia.

Se puede observar que la relación de causalidad entre las variables dinero (medido a través de los diferentes agregados monetarios) y el producto (medido a través del PBI real) **no es única** y que **cambia con la escala temporal analizada**; sin embargo, el cambio en la relación de causalidad difiere entre agregados monetarios. Estos resultados se pueden resumir de la siguiente manera:

- (1) Para todos los agregados monetarios, se tiene que el producto causa en el sentido de Granger al dinero cuando se analiza el detalle 1, que contiene movimientos de 2 a 4 meses de las series (escala 1).
- (2) Al analizar los siguientes detalles (escalas mayores), la causalidad cambia, observándose causalidad unidireccional de dinero a producto y viceversa, doble causalidad y ausencia de causalidad.

- (3) El caso más interesante es del agregado monetario *dinero*, definido como la suma de circulante más depósitos a la vista. En este caso, se tiene que al considerar movimientos de 2 a 4 meses (escala 1), el producto causa en el sentido de Granger al dinero; para movimientos de 4 a 8 meses (escala 2), la causalidad se revierte y el dinero causa en el sentido de Granger al producto; para movimientos de 8 a 16 meses (escala 3), nuevamente el producto causa en el sentido de Granger al dinero³¹; finalmente, al considerar movimientos de mayor duración (escalas 4 y 5), se tiene que existe doble causalidad entre producto y dinero³².

De esta manera, a diferencia del enfoque tradicional, el enfoque alternativo a través del uso de wavelets y el análisis multiresolución permiten establecer la existencia de causalidad en el sentido de Granger en diferentes direcciones, dependiendo de las escalas de tiempo consideradas y del agregado monetario³³. Específicamente, el uso de wavelets permite encontrar evidencia a favor del uso de los agregados monetarios como predictores del comportamiento del producto real.

5. PRODUCTO DE TENDENCIA, BRECHA DEL PRODUCTO E INFLACIÓN SUBYACENTE: OTRAS POSIBLES APLICACIONES.

Como se ha mostrado, una serie de tiempo macroeconómica puede ser filtrada mediante el uso de funciones wavelets, dando origen a un análisis multiresolución que permite expresar una serie en componentes ortogonales asociados a diferentes escalas y frecuencias. Dado esto, ¿qué tipo de información podría extraerse del análisis multiresolución del PBI real? ¿y del análisis multiresolución de la inflación total? En esta sección, se plantea el uso potencial de las wavelets para la construcción de indicadores alternativos de producto de tendencia, brecha del producto e inflación subyacente a partir del análisis multiresolución de las series PBI real e inflación.

³¹ Aunque en este caso, existe autocorrelación generada por un proceso autorregresivo de orden 4, donde solo los rezagos 2 y 4 son significativos.

³² Este resultado está en la línea de la evidencia presentada por Ramsey y Lampart (1998b), Chew (2001) y Gencay, et. al. (2002).

³³ Esta diversidad de relaciones de causalidad en el sentido de Granger también se obtiene cuando se incluye en el análisis el nivel de precios.

5.1. Producto de Tendencia y Brecha del Producto

La brecha del producto es un concepto económico que hace referencia al componente de demanda agregada del nivel de actividad económica. Específicamente, la brecha del producto se define como:

$$Brecha = \frac{PBI \text{ real} - PBI \text{ potencial}}{PBI \text{ potencial}}$$

de donde se desprende que es un indicador de presión de demanda, al medir el exceso de demanda respecto del nivel de producción potencial de la economía. Cuando el PBI potencial se aproxima a través de una tendencia obtenida con filtros estadísticos, la brecha del producto se define en términos de un PBI de tendencia:

$$Brecha = \frac{PBI \text{ real} - PBI \text{ tendencia}}{PBI \text{ tendencia}}$$

La brecha del producto es un elemento importante para la toma de decisiones de política económica, pues permite determinar si la economía está en recesión (brecha negativa) o expansión (brecha positiva). En términos de una curva de Phillips, la brecha proporciona información sobre la existencia de presiones inflacionarias (brecha positiva) o deflacionarias (brecha negativa).

Gallegos y Jonson (2001), utilizan funciones wavelets para estimar el PBI de tendencia y la brecha del producto asociada; sin embargo, los autores no consideran satisfactorio sus resultados debido a que la serie de producto de tendencia que obtienen se parece mucho al producto observado.

Considerando este resultado, y dado que no ha sido posible encontrar en la literatura el uso de wavelets en la construcción de un indicador de brecha del producto, en el presente trabajo se plantea realizar un análisis multiresolución de la serie del PBI real (incluso sin ajuste estacional) y determinar —tomando en cuenta criterios económicos y específicos a la economía analizada— cuáles de los detalles cíclicos deberían ser considerados como parte del ciclo económico, cuáles como movimientos transitorios y estacionales, y cuáles como

parte de los movimientos tendenciales (los cuales son representados principalmente por el componente suavizado del análisis multiresolución)³⁴.

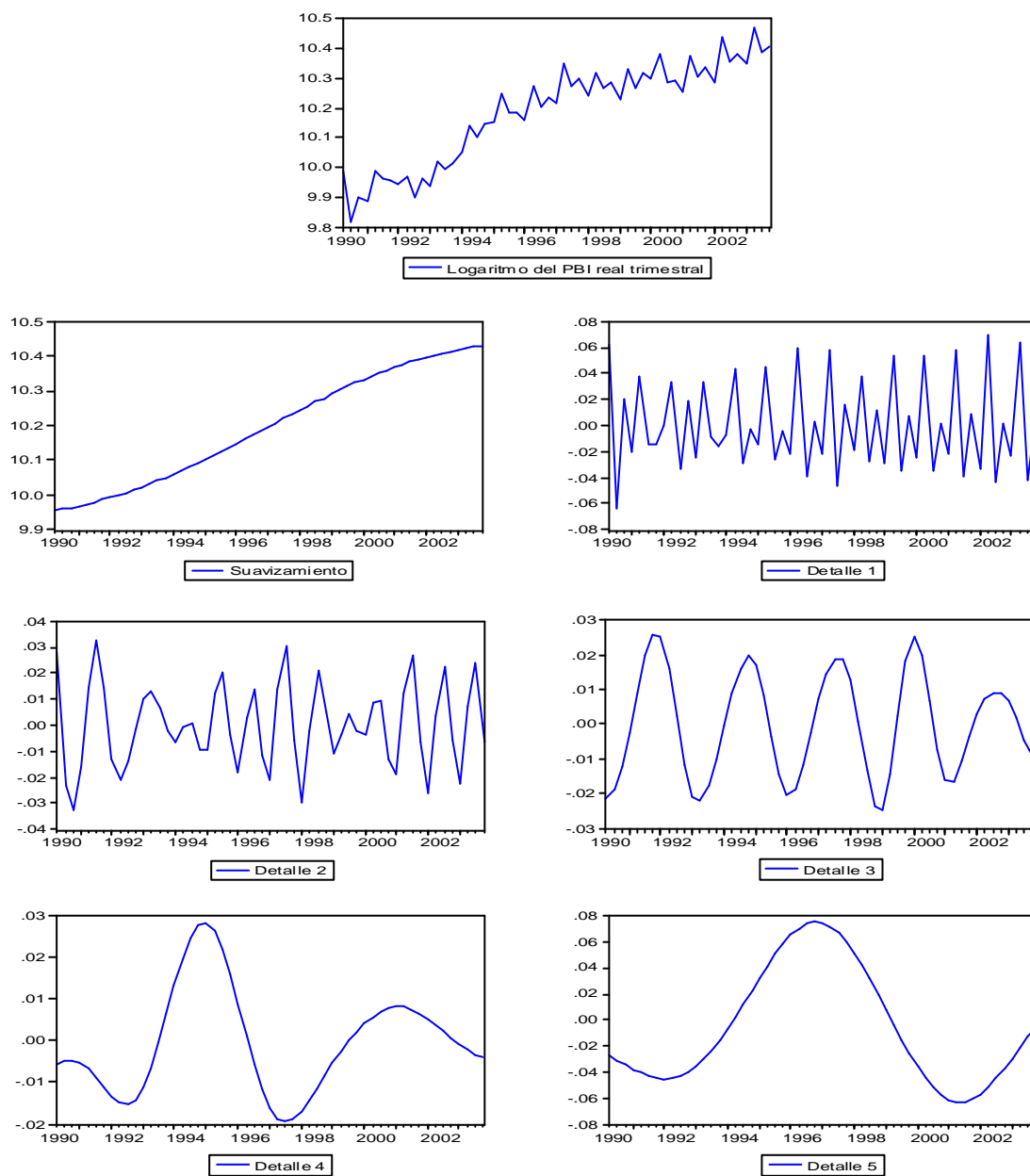
Para ilustrar estas ideas, se realizó un análisis multiresolución de la serie trimestral del PBI real³⁵, desde el segundo trimestre de 1990 hasta el cuarto trimestre del 2003. La descomposición de la serie se muestra en la Figura 20. Los criterios que se consideraron para la construcción del producto e tendencia y la brecha fueron los siguientes:

- (a) Burns y Mitchell (1946), plantearon que los ciclos económicos están compuestos por fluctuaciones con un período de 6 a 32 trimestres. Siguiendo este criterio, Baxter & King (1999) sugieren la extracción de fluctuaciones de 2 a 8 años para obtener una buena representación de los ciclos económicos. Dado esto, el primer criterio consiste en incluir en la brecha del producto movimientos cíclicos entre 2 (8 trimestres) y 8 años (32 trimestres).

³⁴ Aparentemente, Gallego y Jonson no hacen esto, y por ello el suavizamiento que obtienen (que sería el PBI de tendencia), es muy parecido al PBI observado.

³⁵ Para esto se uso la wavelet madre Symlet(12).

Figura 20: Análisis Multiresolución del logaritmo del PBI real trimestral: 1990-2003.



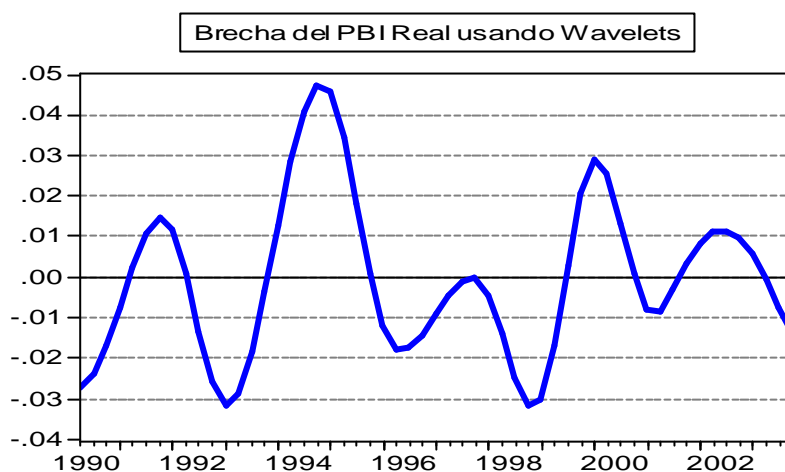
Fuente: Elaboración propia.

- (b) El análisis de una serie de PBI real con ajuste estacional puede estar sesgado si el proceso de desestacionalización elimina parcial o totalmente algún componente cíclico importante. Dado esto, un segundo criterio consiste analizar a serie de PBI real sin ajuste estacional.

Así, bajo los criterios establecidos se tiene que:

- (a) La brecha debería incorporar solamente el detalle 3 (movimientos cíclicos de 8 a 16 trimestres) y el detalle 4 (movimientos cíclicos de 16 a 32 trimestres). De esta manera, la brecha sería como se muestra en la Figura 21.

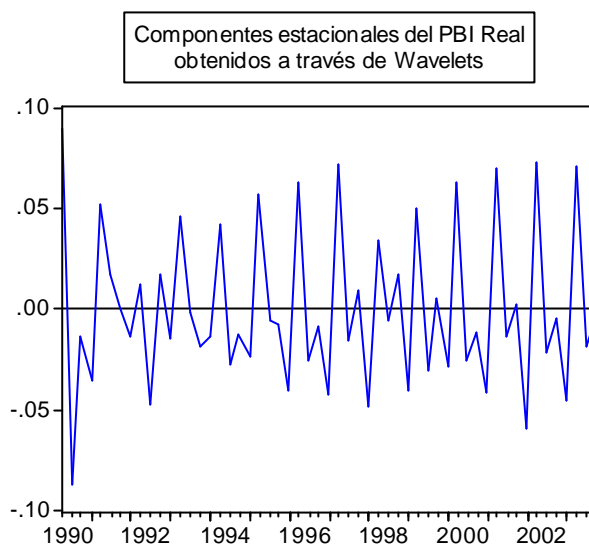
Figura 21:



Es importante observar que esta brecha es consistente con la evolución de la economía peruana desde inicios de los años 90's. En particular, la brecha del producto obtenida a través de wavelets refleja las expansiones de la economía experimentadas a mediados de 1991, 1994-1995, 1999-2000 y 2002

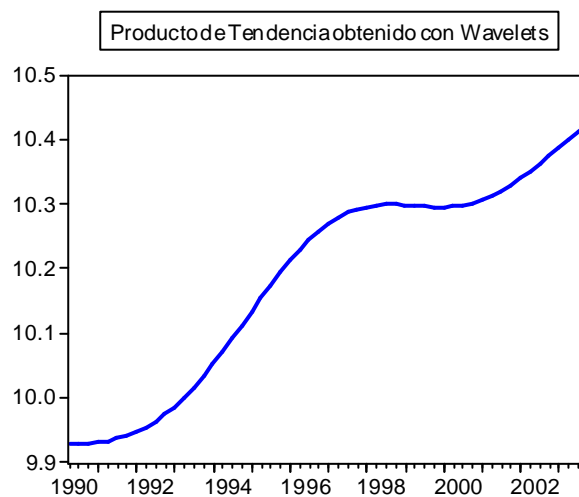
- (b) Los componentes estacionales estarían capturados principalmente por el detalle 1 (movimientos cíclicos de 2 a 4 trimestres), y en menor medida por el detalle 2 (movimientos cíclicos de 4 a 8 trimestres). La Figura 22 muestra esta serie que contiene los componentes estacionales más importantes.

Figura 22:



- (c) El producto de tendencia estaría compuesto por el suavizamiento y el detalle 5, que equivale al suavizamiento de un análisis multiresolución de la serie considerando solo 4 detalles, como se muestra en la Figura 23.

Figura 23:

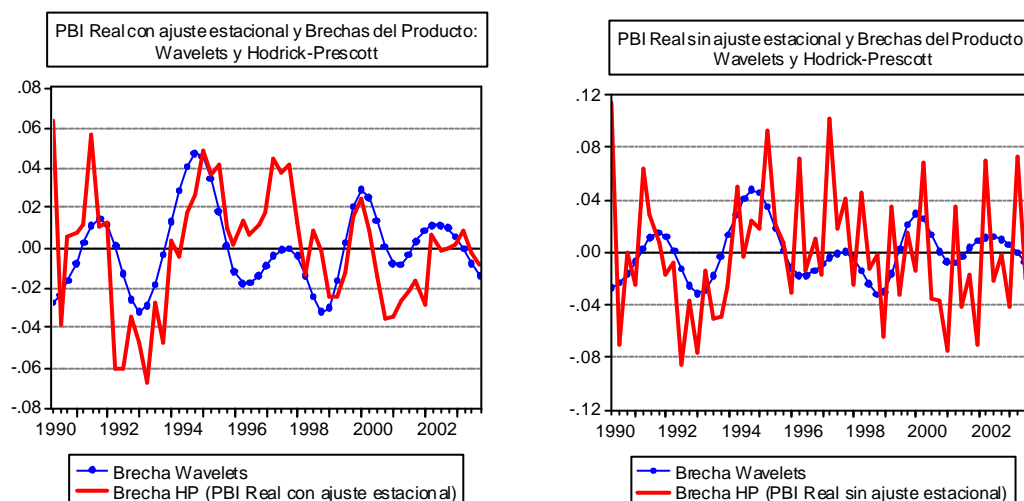


La Figura 24 compara la brecha del producto obtenida a través del uso de wavelets y la obtenida con el conocido filtro Hodrick-Prescott (HP). Las brechas presentan en general el mismo comportamiento; sin embargo, en algunos períodos la brecha obtenida con wavelets

indica que la economía está en expansión, mientras que la brecha obtenida con el filtro HP indica que está en recesión, y viceversa, especialmente durante 1996 y 1997. Esta figura permite observar que la brecha obtenida a través de wavelets es suave a pesar que se ha considerado a serie sin ajuste estacional, lo cual no ocurre con la brecha obtenida a través del filtro HP: la brecha es muy errática cuando se utiliza la serie sin ajuste estacional.

Sin embargo, para determinar la superioridad del uso de wavelets en la construcción de indicadores de PBI de tendencia y brecha de producto frente a otros filtros univariados -e inclusive multivariados como el VAR estructural o el filtro de Kalman multivariado- es necesario un análisis más riguroso, estadística y económicamente.

Figura 24: Comparación de brechas del producto.



Fuente: Elaboración propia

5.2. Inflación Total y Subyacente

La inflación total se define usualmente como la tasa de crecimiento un índice de precios representativo de la economía que incluye los precios de los bienes más importantes para los consumidores. Este índice se denomina *índice de precios al consumidor* (IPC). Una característica del IPC es que incluye precios con diferente variabilidad, por lo que en la práctica el índice se descompone en dos: (a) IPC subyacente que incluye los precios con menor variabilidad, y (b) IPC no subyacente, que incluye los precios con mucha variabilidad.

De esta forma, además de la inflación total, se cuenta con dos medidas adicionales de variación de precios: inflación subyacente o *core inflation* y la inflación no subyacente.

Teóricamente, la inflación presenta un componente persistente (poco volátil) y uno transitorio (más volátil). Por un lado, el componente persistente de la inflación es incorporado usualmente en las expectativas de los agentes, por lo que no necesariamente es perjudicial para la actividad económica (Friedman, 1963). Por otro lado, el componente transitorio de la inflación usualmente es no anticipado, y por lo tanto tendría mayores efectos negativos. Bajo estas consideraciones, Quah y Vahey (1995) definen la inflación subyacente como el componente de la inflación que no tiene efectos de mediano y largo plazo sobre el producto real. En este sentido, bajo la hipótesis de expectativas racionales, la inflación subyacente puede ser aproximada por la inflación total observada excluyendo de ella movimientos transitorios que usualmente son inesperados y por tanto tienen impacto sobre el nivel de actividad real.

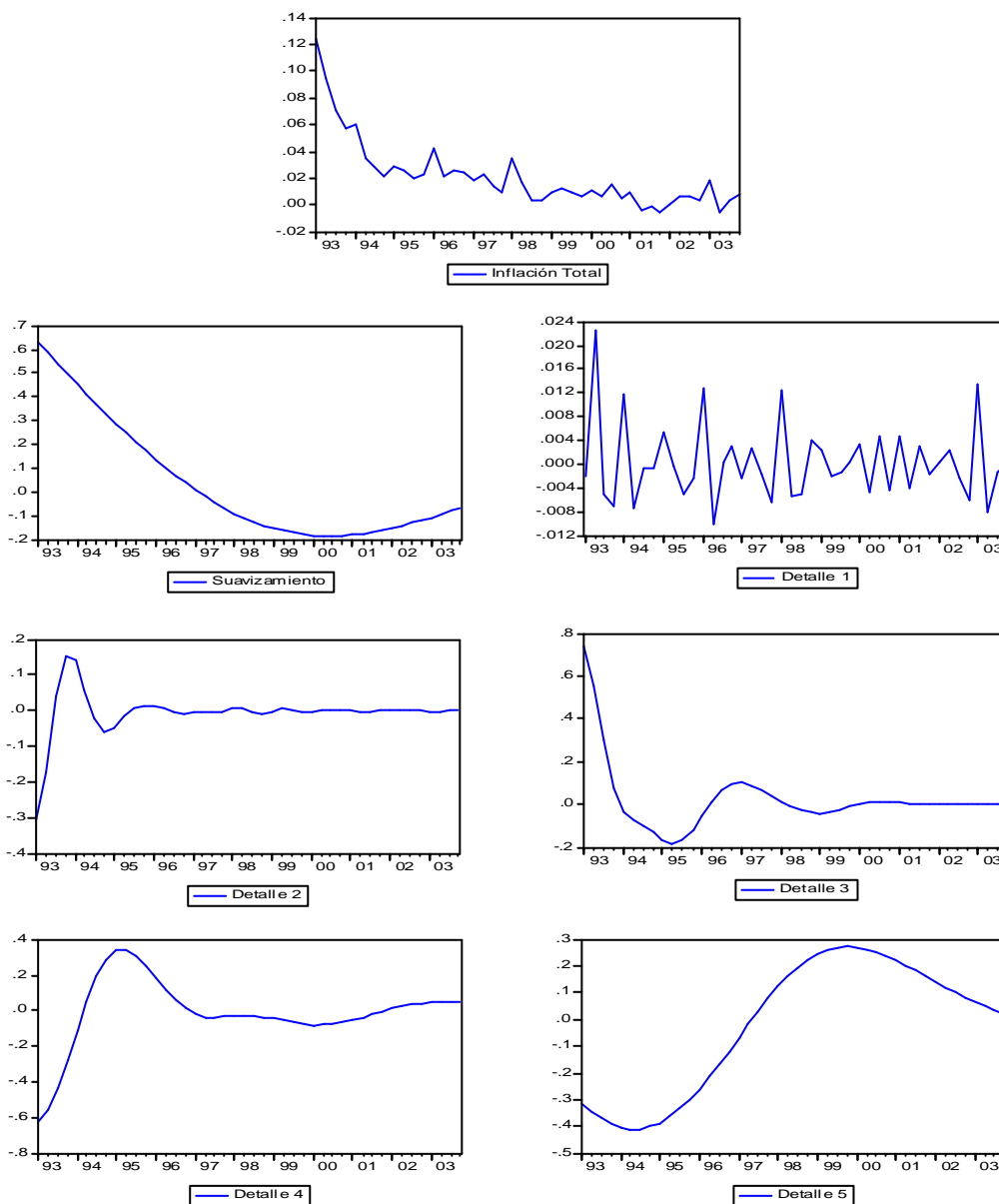
Bajo estas consideraciones, se tiene que la inflación subyacente es un indicador de política importante, pues refleja las expectativas de los agentes. Así, en términos de política monetaria —y especialmente bajo un régimen de metas explícitas de inflación o *inflation targeting*— la variable relevante ante la cual debería reaccionar un banco central es la inflación subyacente, pues está asociado principalmente a consideraciones de demanda y no de oferta (como en el caso de la inflación no subyacente).

En la práctica la construcción de los índices depende de la decisión de los especialistas para determinar los precios con mayor y menor volatilidad, lo cual puede cambiar cada cierto tiempo. Sin embargo, es posible determinar los componentes subyacentes econométricamente considerando los efectos de corto y largo plazo de la inflación sobre el producto real, por ejemplo a través de un VAR estructural.

Gencay, et al. (2002), propone el uso de wavelets para la construcción de una serie de inflación subyacente. Específicamente, señala como indicador de inflación subyacente el suavizamiento del análisis multiresolución de la serie inflación. En el presente trabajo, se retoma y enriquece esta idea, y se propone una medida de inflación subyacente atendiendo a su definición. Para ilustrar esta propuesta, se realizó un análisis multiresolución de la serie

trimestral de la inflación total del índice de precios al consumidor³⁶, desde el primer trimestre de 1988 hasta el cuarto trimestre del 2003. La descomposición de la serie para la muestra 1993-2003 se muestra en la Figura 25³⁷.

Figura 25: Análisis Multiresolución de la Inflación Total trimestral: 1993-2003.



Fuente: Elaboración propia.

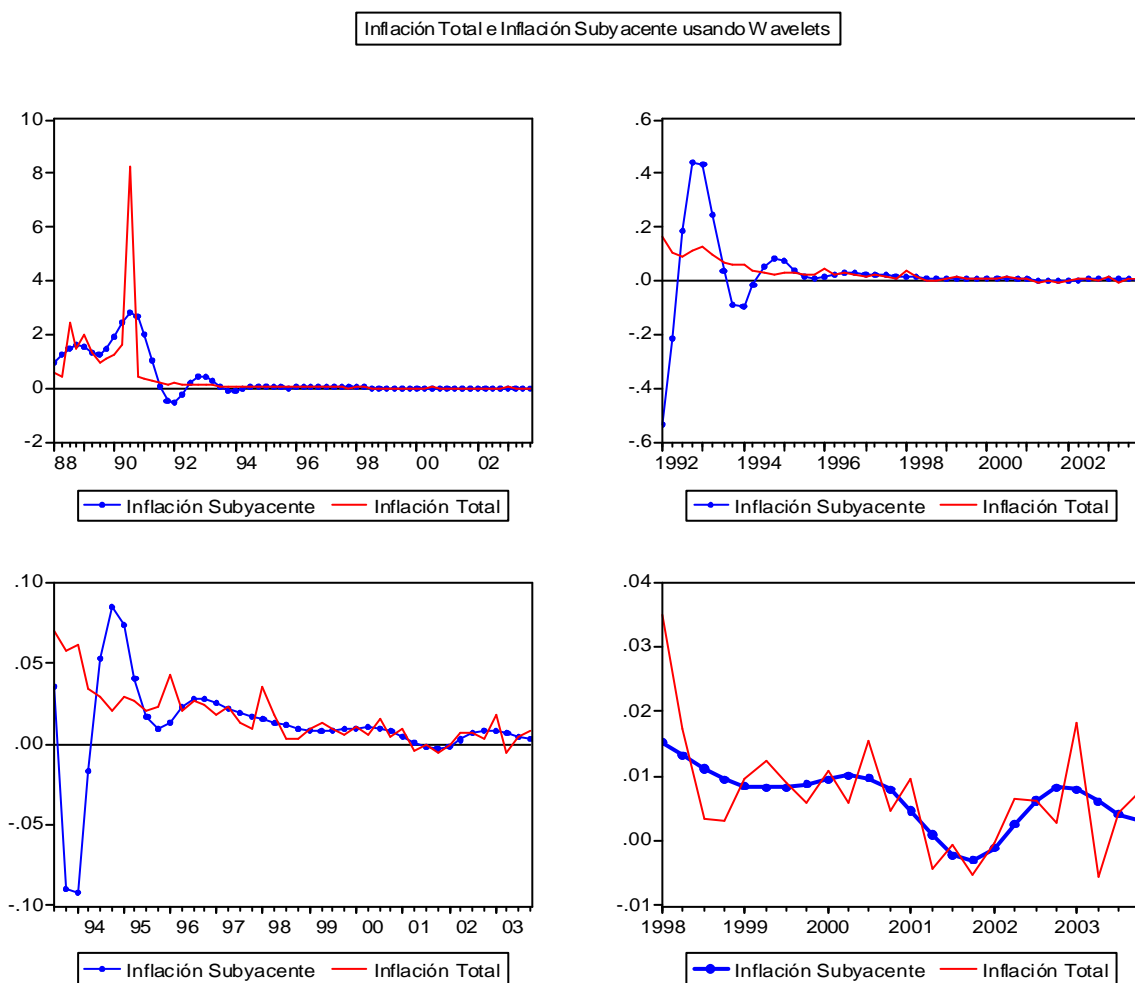
³⁶ Para esto se uso la wavelet madre Symlet(12).

³⁷ Se ha reducido la muestra para efecto de vizualización de los gráficos.

La construcción de la inflación subyacente consideró toda la serie de inflación menos los detalles 1 y 2, que son los que contienen movimientos asociados a altas frecuencias. De esta manera, se recoge la definición de inflación subyacente propuesta por Quah y Vahey (1995), pues solamente se consideran movimientos de mayor escala y baja frecuencia de la inflación, es decir movimientos suaves asociados a factores de demanda, principalmente.

Los resultados muestran una serie de inflación subyacente que captura características importantes asociadas a las presiones de demanda convencionales que se han observado en la economía peruana. Por un lado, la Figura 26 compara la inflación total y la medida de inflación subyacente propuesta, donde se observa una inflación con un comportamiento suave, pero que no necesariamente coincide con el de la inflación total.

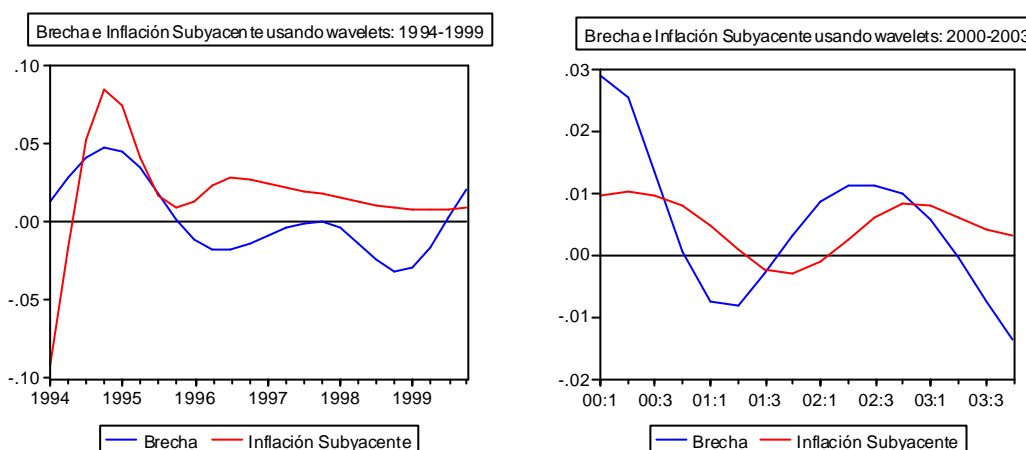
Figura 26: Análisis Multiresolución de la Inflación Total Trimestral:



Fuente: Elaboración propia.

Por otro lado, la Figura 27 compara las series de inflación subyacente y brecha del producto, obtenidas utilizando wavelets, donde se puede observar que la inflación subyacente recoge las presiones de demanda positivas observadas en el año 1994 (inflación positiva) y las presiones de demanda negativas del 2001 (inflación negativa).

Figura 27: Brecha del Producto e Inflación Subyacente.



Fuente: Elaboración Propia

Al igual que en el caso de la medida de brecha de producto propuesta, para determinar la superioridad del uso de wavelets en la construcción de indicadores de inflación subyacente frente a otras alternativas es necesario un análisis estadístico y económico más riguroso, además de la consistencia con algunos hechos estilizados que aquí se han mencionado.

6. CONCLUSIONES

El objetivo del presente trabajo es introducir la teoría de wavelets y su uso potencial en el análisis empírico de variables y relaciones macroeconómicas, iniciado por Ramsey y Lampart (1998). Para tal efecto, se han presentado las consideraciones básicas de la teoría de wavelets y tres aplicaciones utilizando información para la economía peruana: (1) el análisis de la relación de causalidad dinero-producto en términos de predicción, y dos propuestas de medidas alternativas para la medición de (2) la brecha del producto (*output gap*), y (3) la inflación subyacente (*core inflation*).

Por un lado, los resultados del análisis empírico análogo al aplicado por Ramsey y Lampart (1998b), Chew (2001) y Gencay (2002), muestran que para el caso peruano:

- (1) Existe causalidad en el sentido de Granger entre el producto real y los diferentes agregados monetarios considerados, que ésta no es única y depende de la escala temporal analizada.
- (2) El caso más interesante es del agregado monetario *dinero*, definido como la suma de *circulante más depósitos a la vista*. En este caso, se tiene que al considerar movimientos de 2 a 4 meses (escala 1), el producto causa en el sentido de Granger al dinero; para movimientos de 4 a 8 meses (escala 2), la causalidad se revierte y el dinero causa en el sentido de Granger al producto; para movimientos de 8 a 16 meses (escala 3), nuevamente el producto causa en el sentido de Granger al dinero; finalmente, al considerar movimientos de mayor duración (escalas 4 y 5), se tiene que existe doble causalidad entre producto y dinero.
- (3) Considerando los resultados obtenidos a partir del uso de wavelets y del análisis multiresolución, se propone como parte de una agenda de investigación futura el estudio de la factibilidad de su uso para analizar la dinámica de la economía a través de un modelo VAR estructural. Dadas las características del análisis multiresolución, esto podría resolver problemas asociados al impacto de choques monetarios sobre el nivel de actividad si se analizaran los diferentes detalles de las series y no simplemente las primeras diferencias.

En segundo lugar, las propuestas de construcción de indicadores alternativos de producto de tendencia, brecha del producto e inflación subyacente muestran la posibilidad de aprovechar la información proporcionada por el uso de las wavelets en el análisis multiresolución de series de tiempo no estacionarias y con componentes estacionales. En particular, para el caso peruano la aplicación de las wavelets ha permitido construir:

- (1) Un producto de tendencia y una brecha del producto que reflejan características importantes observadas desde inicios de los años noventa. Sin embargo, para determinar la superioridad del uso de wavelets en la construcción de indicadores de PBI de tendencia y brecha de producto frente a otros filtros univariados —e inclusive

multivariados como el VAR estructural o el filtro de Kalman multivariado— es necesario un análisis más riguroso, estadística y económicamente.

- (2) Una serie de inflación subyacente que captura características importantes asociadas a las presiones de demanda convencionales que se han observado en la economía peruana; en particular, esta serie rescata las presiones de demanda positivas observadas en el año 1994 (inflación positiva) y las presiones de demanda negativas del 2001 (inflación negativa). Sin embargo, al igual que en el caso de la brecha de producto propuesta, la superioridad del uso de wavelets en la construcción de indicadores de inflación subyacente frente a otras alternativas dependerá de un adecuado análisis estadístico y económico, además de la consistencia con algunos hechos estilizados que aquí se han mencionado.

Finalmente, y considerando posibilidades de mejorar el uso de las funciones wavelets, sería importante estudiar la posibilidad de realizar un análisis multiresolución que no dependa de escalas que sean potencias de dos (análisis multiresolución diádico) sino un número arbitrario, permitiendo de esta manera una mejor descripción de los datos económicos. Pollock (2003) es el primer trabajo en esta línea de investigación para aplicaciones a la economía.

Referencias Bibliográficas

Baxter, Marianne y Robert G. King.

1999 *Measuring Business Cycles: Approximate band-pass filters for economic time series*. The Review of Economics and Statistics. Vol. 81. 1999. p. 573-593.

Chew, Cyrene

2001 *Money and Income Relationship of European Countries by Time Scale Decomposition using Wavelets*. New York University: Preliminary Paper. 39 p.

Daubechies, Ingrid.

1992 *Ten Lectures on Wavelets*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics. 357 p.

Engle, Robert F. y Clive W. Granger.

1987 *Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing*. Econométrica. Vol. 55. No. 2. p. 251-276.

Gallego, Francisco y Christian Jonson.

2001 *Teorías y métodos de medición del producto de tendencia: un aplicación al caso de Chile*. Economía Chilena. Banco Central de Chile. Volumen 4. N° 2. Agosto. p. 27-58.

Gençay, Ramazan y Otros.

2002 *An Introduction to Wavelets and other Filtering Methods in Finance and Economics*. San Diego: Academic Press. 359 p.

Granger, Clive W.J.

1963 *Economic processes involving feedback*. Information and Control. N° 6. p. 28-48.

Granger, Clive W.J.

1969 *Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods*. Econométrica. No. 36. p. 424-438.

Hamilton, James.

1994 *Time Series Analysis*. Princeton, N.J.: Princeton University Press. 799 p.

Hendry, David F. y Grayham E. Mizon.

1999 *The Pervasiveness of Granger Causality in Economics*. EN: ENGLE, Robert. *Cointegration, causality and forecasting: a festschrift in honour of Clive W. J. Granger*. Oxford: Oxford University Press. 497 p.

Johansen, Soren.

1988 *Statistical Analysis of Cointegrated Vectors*. Journal of Economic Dynamics and Control. Vol. 12. p. 231-254.

Johansen, Soren.

1991 *Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models*. Econometrica 59. p. 1551-1580.

Johansen, Soren.

1996 *Likelihood Based Inference on Cointegration in the Vector Autoregressive Model*. 2da ed. Oxford: Oxford University Press.

Johansen, Soren and Katerina Juselius.

1990 *Maximum Likelihood Estimation and Inference on Cointegration with Application to Demand for Money*. Oxford Bulletin of Economics and Statistics. Vol. 52. p. 169-210.

Kaiser, Gerald.

1994 *A friendly guide to wavelets*. Boston: Birkhäuser. 300 p.

Kennedy, Peter.

2003 *A guide to Econometrics*. 5^a ed. Cambridge, Massachusetts: MIT Press. 621 p.

Lahura, Erick.

2004 *La relación dinero-producto en el Perú, causalidad en el sentido de Granger y Cointegración: Una aplicación de la teoría de Wavelets*. Lima: PUCP, 2004. Tesis de Licenciatura en Economía.

Misiti, Michel y Otros.

2002 *Wavelet Toolbox User's Guide*. Version 2. The Mathworks. (documento electrónico de <http://www.mathworks.com>)

Ogden, R. Todd.

1997 *Essential Wavelets for Statistical Applications and data Analysis*. Boston: Birkhäuser. 206 p.

Pollock, Stephen.

2003 *Adapting Discrete Wavelet Analysis to the Circumstances of Economics*. Queen Mary, University of London: Working Paper. Marzo. 25 p.

Priestley, M.

1996 *Wavelets and time-dependent spectral analysis*. Journal of Time Series Analysis. Vol. 17. p. 85-103.

Quah, Danny y Shaun Vahey.

1995 *Measuring Core Inflation*. The Economic Journal. Vol. 105, No. 432 (setiembre).

Ramsey, James B.

1998 *The Contribution of Wavelets to the Analysis of Economic and Financial Data*. New York University: Unpublished paper. 14 p.

Ramsey, James and Camille Lampart.

1998a *The Decomposition of Economic Relationship by Timescale using Wavelets: Expenditure and Income*. Studies in Non-Linear Dynamics and Econometrics. Vol. 3. p. 23-42.

Ramsey, James and Camille Lampart.

1998b *Decomposition of Economic Relationship by Timescale using Wavelets: Money and Income*. Macroeconomic Dynamics. Vol. 2. p. 49-71.

Schleicher, Christoph.

2002 *An Introduction to Wavelets for Economists*. Bank of Canada: Working Paper 3. 32 p.

Weaver, Joseph H.

1989 *Theory of Discrete and Continuous Fourier Analysis*. New York: Wiley. 307 p.

Wiener, N.

1956 *The theory of prediction*. En: Beckenbach, Edwin F. *Modern mathematics for engineer*. New York: McGraw-Hill, 514 p.

ANEXOS

ANEXO 1: CONCEPTOS Y RESULTADOS MATEMÁTICOS IMPORTANTES

I. Preliminares Matemáticos

▪ Números Imaginarios y Complejos

El **número imaginario** i se define como aquel número que satisface la ecuación $x^2 = -1$; es decir, $i = \sqrt{-1}$. Además, se tiene que $i^2 = -1$ y $(-i)^2 = -1$

Un **número complejo** se define como la suma de un número real y un número imaginario:

$$z = a + bi$$

donde a y b son números reales. Esta representación de un número complejo se denomina **representación cartesiana o rectangular**. Sin embargo, también existe la denominada **representación polar** de un número complejo, dada por la siguiente expresión:

$$z = R[\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)]$$

donde R es el módulo del número complejo y θ es el ángulo o fase de z . La **relación de Euler** establece que:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\text{sen}(\theta) \quad \text{y} \quad e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\text{sen}(\theta)$$

y de manera más general:

$$R e^{i\theta} = R [\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)] \quad \text{y} \quad R e^{-i\theta} = R [\cos(\theta) - i\text{sen}(\theta)]$$

Así, a través de la relación de Euler se tiene que:

$$a + ib = R [\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)]$$

$$[a + ib]^s = R^s [\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)]$$

- Funciones Periódicas

Una función $f(t)$ es periódica si existe una constante $T > 0$ tal que $f(t+T) = f(t)$, para todo t y $t+T$ en el dominio de $f(t)$. A la constante T se le denomina **período** de **la función**. Entre las propiedades más importantes de las funciones periódicas se tiene:

- (a) La suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones de periodo T también es periódica.
- (b) Si se conoce el comportamiento de la función en el intervalo $T = [a - T/2, a + T/2]$, entonces es posible conocer el comportamiento de la función en toda la recta, debido a su naturaleza periódica.

- Funciones Cuadrado Integrables

Una función f es **cuadrado integrable** en el intervalo $[a, b]$ (pertenece al espacio de las funciones cuadrado integrables en el intervalo $[a, b]$) si:

$$\int_a^b f^2(x) dx < \infty$$

y se denota como $f \in L^2[a, b]$. En general, una función f es cuadrado integrable en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ (pertenece al espacio de las funciones cuadrado integrables en el intervalo $(-\infty, +\infty)$) si:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx < \infty$$

y se denota como $f \in L^2[-\infty, +\infty]$ o $f \in L^2[\mathbb{R}]$.

- Aproximación en el sentido L^2

Se dice que la expresión $\frac{1}{2} a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} [a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)]$ es una buena aproximación de una función $f(x)$ **en el sentido L^2** si se cumple que:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2} a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} [a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)] \right) \right]^2 dx = 0$$

- Producto Interno y Norma en L^2

El producto interno de dos funciones se define como:

$$\langle f, g \rangle = \int f(x)g(x)dx$$

donde los límites de integración están definidos adecuadamente en la recta numérica. Dado esto, la norma L^2 de una función se define como:

$$\| f \| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int f^2(x)dx}$$

- Funciones Pares e Impares

Se dice que una función $f(x)$ es una función par de x si:

$$f(x) = f(-x)$$

y es una función impar de x si:

$$f(x) = -f(-x)$$

Una función que no es par ni impar, puede ser escrita como la suma de una función par y una función impar.

- Espacio de Funciones y Bases

Un espacio es un conjunto cuyos elementos poseen ciertas propiedades de adición. Es un concepto muy general, por lo cual usualmente se asocia a otras cosas. Un ejemplo de espacio es el denominado espacio vectorial, cuyas características principales son dos:

(a) Adición: la suma de dos elementos del espacio pertenece al espacio.

(b) Multiplicación escalar: la multiplicación de cualquier elemento del espacio por un escalar da como resultado un elemento del espacio.

El **espacio de funciones** es un espacio vectorial (topológico) cuyos elementos son funciones; por lo tanto, es un conjunto de funciones que es completo y cerrado bajo adición y multiplicación escalar.

El **subespacio generado** por los vectores v y u es el conjunto:

$$\text{span} = \{ \mathbf{a}v + \mathbf{b}u, \mathbf{a} \in R, \mathbf{b} \in R \}$$

En particular, se dice que un conjunto de funciones $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ **genera** un espacio vectorial V si cada función g de V puede expresarse como combinación lineal de f_1, f_2, \dots, f_m , es decir:

$$g = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_m f_m$$

Una colección de funciones $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ forma una **base** para el espacio V si:

- (a) Las funciones son linealmente independientes; esto significa que solamente cuando todos los α_i son nulos se cumple que:

$$0 = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_m f_m$$

- (b) Las funciones $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ **generan** el espacio V .

De esta forma, si $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ forma una **base** para el espacio de funciones, esto significa que cualquier función h del espacio puede ser escrita de manera única como:

$$h = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_m f_m$$

Una base de funciones $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ se denomina **base ortogonal** si:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x) f_j(x) dx = 0 \quad \text{para todo } i \text{ diferente de } j.$$

Si además de ser ortogonal se tiene que cada f_i tiene norma unitaria, es decir, $\|f_i\|=1$, se dice que la base es ortonormal (ortogonal y norma unitaria).

- Teorema de la Integral de Fourier

Este teorema establece la existencia de una relación entre la transformada de Fourier $(T^F f)(j)$ y la transformada inversa de Fourier de una señal $f(t)$, de manera simultánea. Específicamente, si se cumple que:

(a) La integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ existe.

(b) Las posibles discontinuidades de $f(t)$ son finitas.

entonces:

$$f(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi jt} dt \right] e^{i2\pi jt} dj$$

si $f(t)$ es continua; pero si $f(t)$ es discontinua en un número finito de puntos, se cumple que:

$$\frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi jt} dt \right] e^{i2\pi jt} dj$$

II. Análisis Multiresolución

Un Análisis Multiresolución (AMR) consiste en una sucesión de aproximaciones sucesivas de espacios $V_j, j \in \mathbb{Z}$. De manera más precisa, un AMR del espacio de las funciones reales cuadrado integrables, $L^2(\mathfrak{R})$, esta formado por una sucesión de **subespacios cerrados** $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ que satisfacen las siguientes propiedades:

$$(1) \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots$$

$$(2) \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$$

$$(3) \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathfrak{R})$$

$$(4) f \in V_j \Leftrightarrow f(2^j \cdot) \in V_0$$

$$(5) \text{ Si } f \in V_0 \Rightarrow f(\cdot - n) \in V_0, \forall n \in \mathbb{Z}$$

(6) $\exists \phi \in V_0$ tal que el conjunto $\{\phi_{0,n}, n \in \mathbb{Z}\}$ constituye una base ortonormal para V_0 , donde:

$$\begin{aligned} \phi_{0,n} &= \phi(\cdot - n) \\ f_{m,n}(x) &= 2^{-\frac{m}{2}} f(2^{-m} x - n) \quad \forall m, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

donde ϕ se denomina usualmente "función escala".

Si se denota por P_j el operador de proyección ortogonal en el espacio V_j , entonces la propiedad (3):

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathfrak{R})$$

asegura que para toda la función " f " $\in L^2(\mathfrak{R})$ se cumple que:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P_j f = f$$

Existen muchas sucesiones de espacios que satisfacen las propiedades (1), (2) y (3), pero que no están asociadas al análisis multiresolución. La naturaleza del análisis multiresolución está determinada por la propiedad (4):

$$f \in V_j \Leftrightarrow f(2^j \cdot) \in V_0$$

Esto significa que todos los subespacios V_j son versiones a “diferentes escalas” del subespacio central V_0 . La propiedad (6) y la propiedad (4) implican que:

$$\{f_{m,n}, n \in \mathbb{Z}\} \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

es una base ortonormal para V_j . La propiedad (5):

$$\text{Si } f \in V_0 \Rightarrow f(\cdot - n) \in V_0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

implica—dada la propiedad (4)— que:

$$\text{Si } f \in V_j \Rightarrow f(\cdot - 2^j n) \in V_j, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Un ejemplo conocido en la literatura es el Análisis Multiresolución de Haar, asociado a una wavelet madre y padre de Haar. Este AMR está dado por conjunto de subespacios V_j definidos por:

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}); \forall k \in \mathbb{Z}; f \Big|_{[2^j k, 2^j(k+1)]} = \text{constante} \right\}$$

los cuales satisfacen las propiedades (1)-(5). Además, una elección posible para ϕ es la función indicadora para el intervalo $[0,1]$:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

III. Bases Wavelets Ortonormales y Análisis Multiresolución

En la literatura de Wavelets existe un teorema muy importante que establece una correspondencia entre el Análisis Resolución. La demostración puede revisarse en Daubechis (1992, p. 129-135).

El enunciado del teorema es como sigue: “Si una sucesión de subespacios cerrados $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ en el espacio $L^2(\mathfrak{R})$ satisface las condiciones (1)–(6), entonces existe una base wavelet ortonormal $\{\Psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$ para $L^2(\mathfrak{R})$, tal que:

$$P_{j-1}f = P_j f + \sum_k \langle f, \Psi_{j,k} \rangle \Psi_{j,k}$$

Una posibilidad para construir la wavelet Ψ es:

$$\Psi(x) = \sum_n (-1)^n h_{-n+1} \phi_{-1,n}$$

o

$$\Psi(x) = \sqrt{2} \sum_n (-1)^n h_{-n+1} \phi(2x - n)$$

donde ϕ es la función escala del análisis multiresolución”.

Un resultado conocido en la literatura de wavelets es que es para el ejemplo del análisis multiresolución de Haar, la wavelet “madre” Ψ es la función Haar. Es importante destacar que cuando se demuestra que una familia de Wavelets constituye una base ortonormal para $L^2(\mathfrak{R})$, se tiene que cada aproximación de la señal f puede expresarse como la suma de una aproximación menos fina y una función de detalle:

$$P^{j-1}f = P^j f + g^j$$

donde la función detalle g^j , representa $P^{j-1}f - P^j f$, la diferencia entre dos aproximaciones. El teorema establece que g^j puede expresarse en términos wavelets dilatadas y trasladadas:

$$P^{j-1}f = P^j f + \sum_k \langle f, \Psi_{j,k} \rangle \Psi_{j,k}$$

Esta descomposición puede extenderse recursivamente:

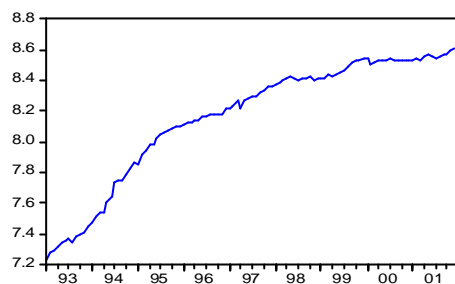
$$P^{j-1} f = P^{j_0} f + \sum_{l=j_0}^j \sum_k g_l$$

$$P^{j-1} f = P^{j_0} f + \sum_{l=j_0}^{j-1} \sum_k \langle f, \Psi_{l,k} \rangle \Psi_{l,k}$$

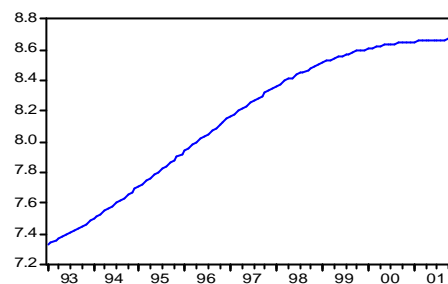
Con esto, se tiene que es posible construir aproximaciones con mayores niveles de resolución que son combinaciones lineales de dilataciones y traslaciones de una función escala ϕ , donde las diferencias entre aproximaciones se expresan como combinaciones lineales de dilataciones y traslaciones de una función wavelet ψ .

ANEXO 2: Análisis multiresolución de las series.

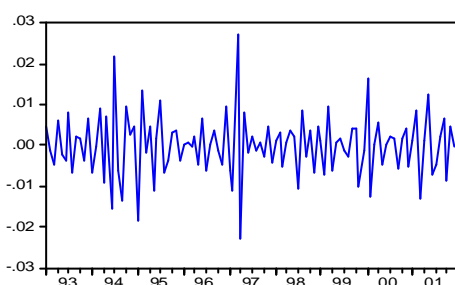
Base Monetaria



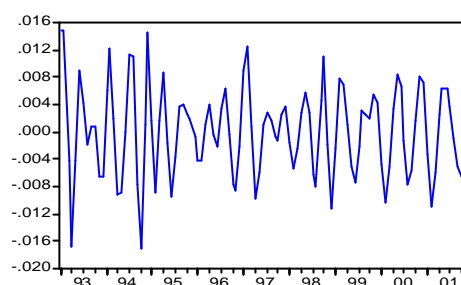
LBASESA



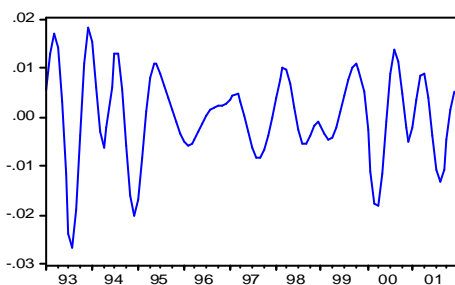
LBASESA_A6



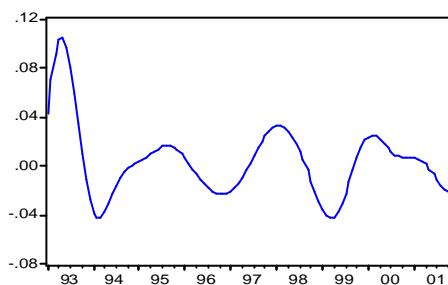
LBASESA_D1



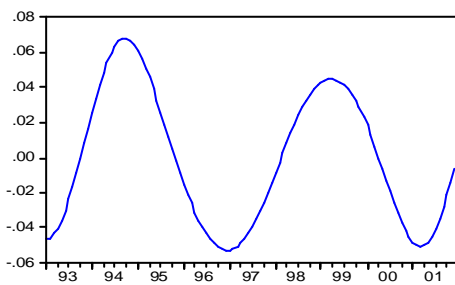
LBASESA_D2



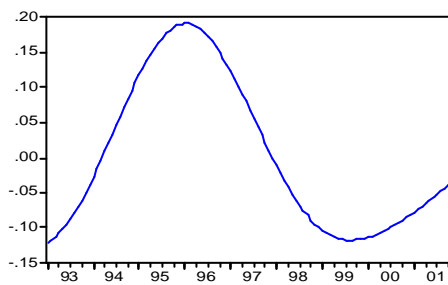
LBASESA_D3



LBASESA_D4

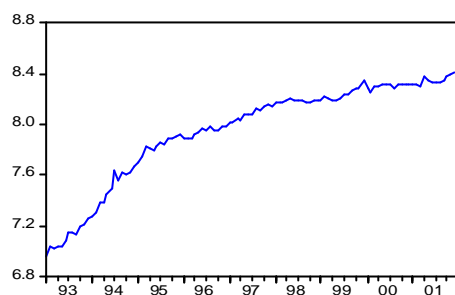


LBASESA_D5

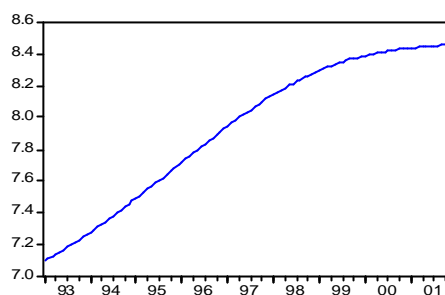


LBASESA_D6

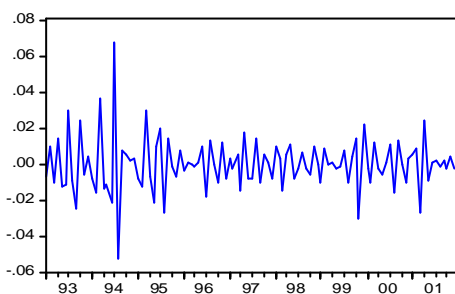
Circulante



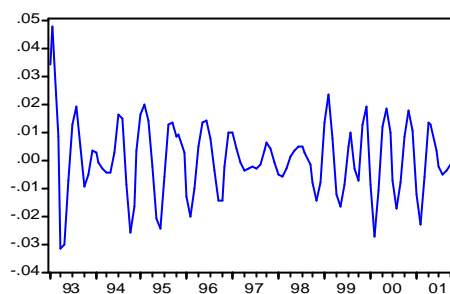
— LCIRSA



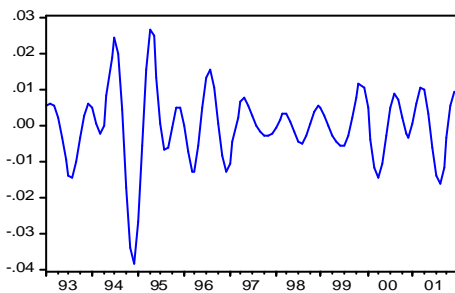
— LCIRSA_A6



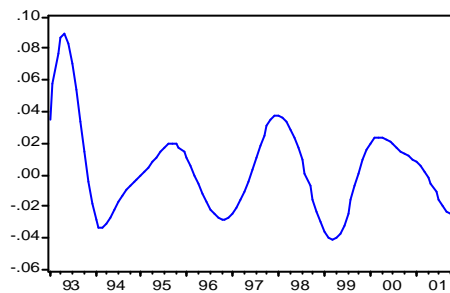
— LCIRSA_D1



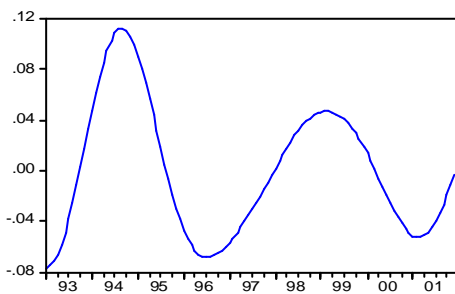
— LCIRSA_D2



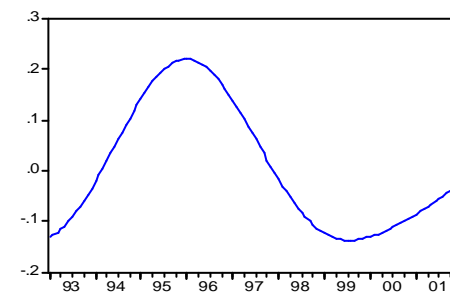
— LCIRSA_D3



— LCIRSA_D4

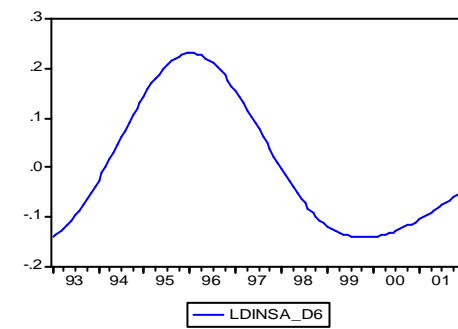
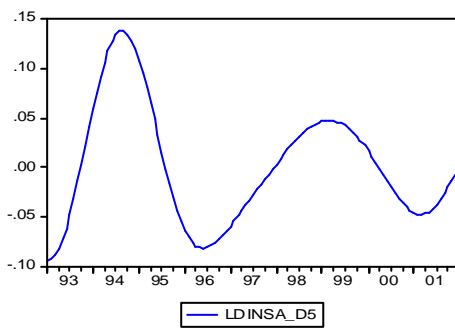
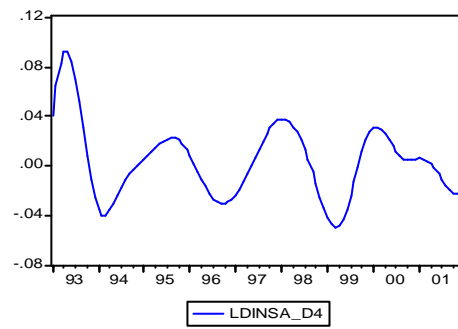
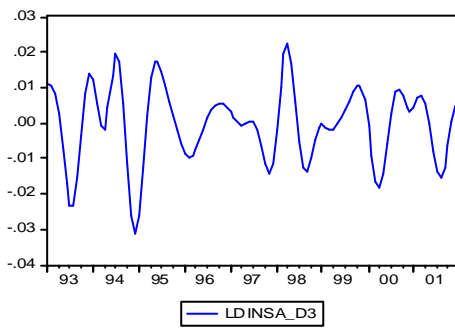
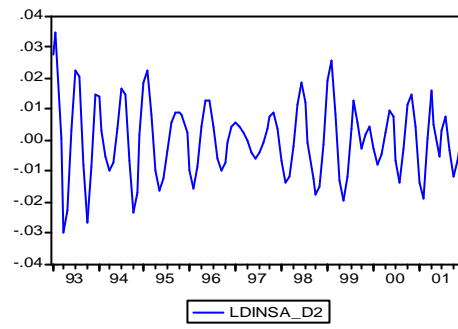
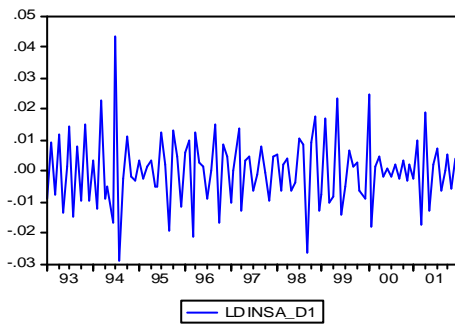
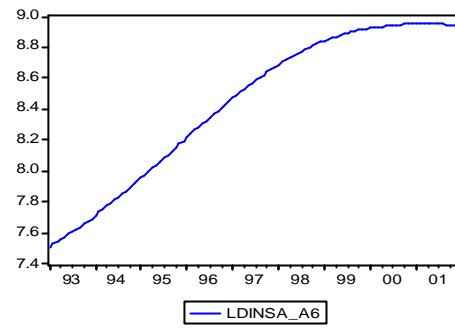
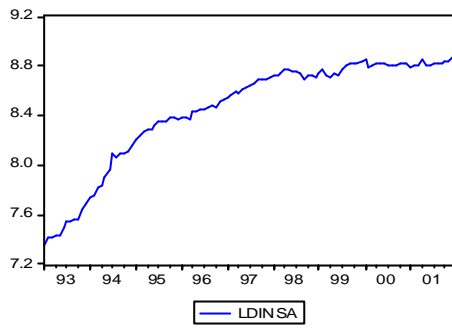


— LCIRSA_D5

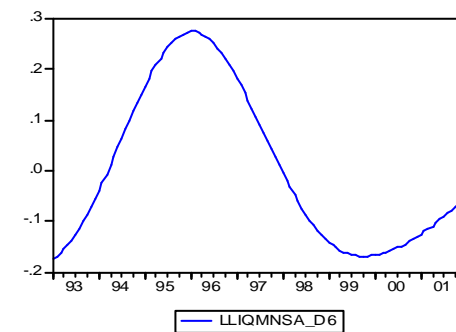
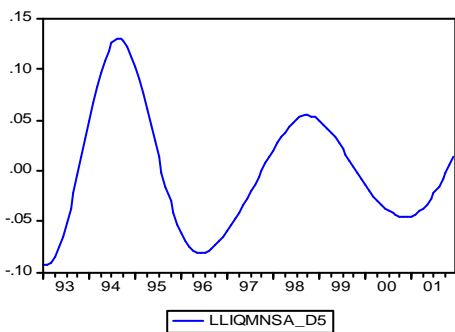
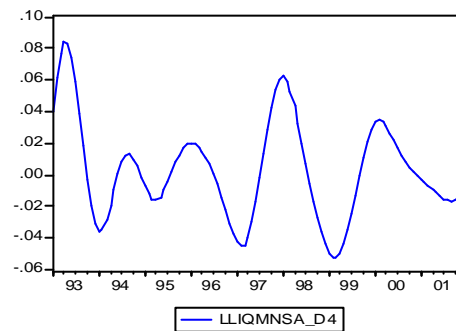
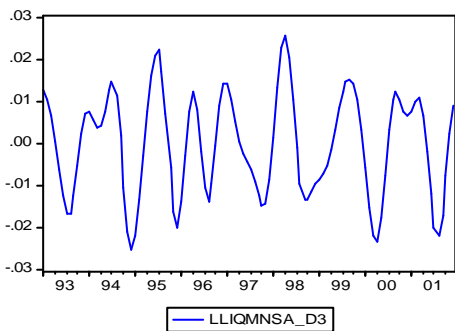
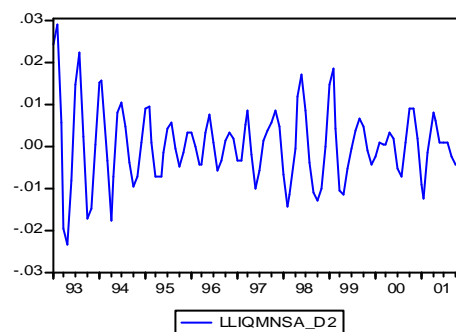
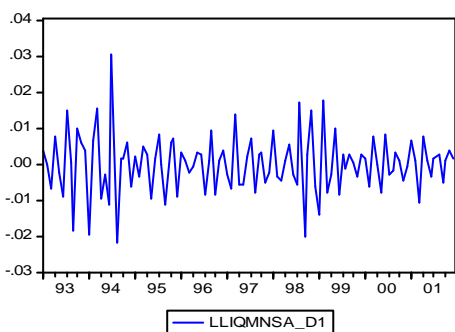
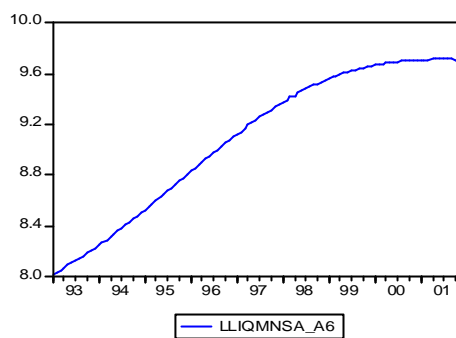
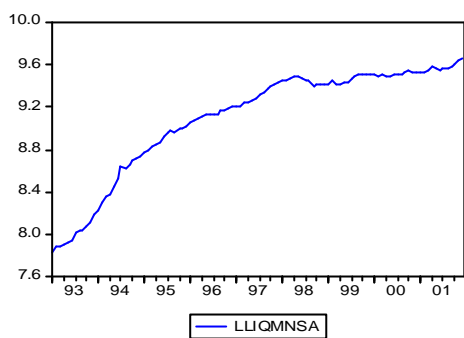


— LCIRSA_D6

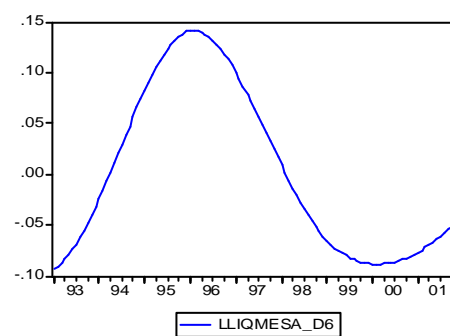
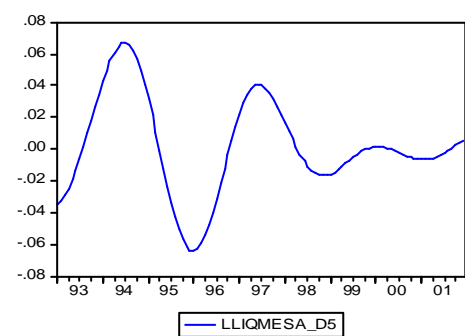
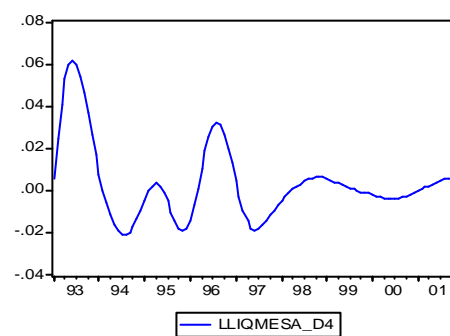
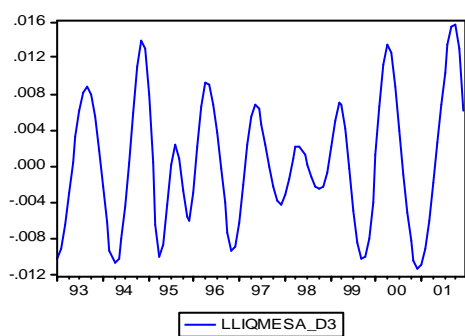
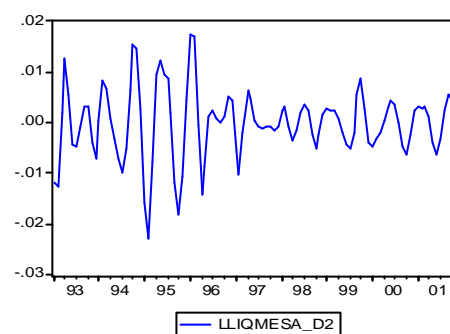
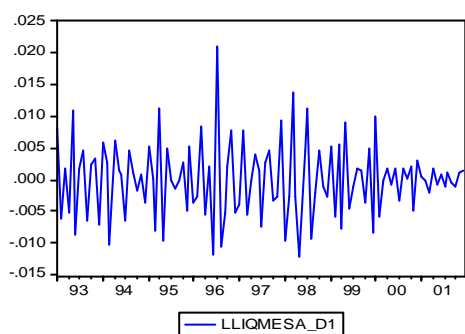
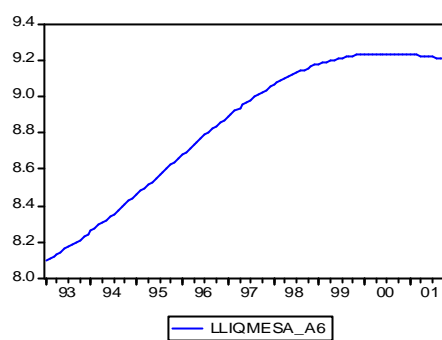
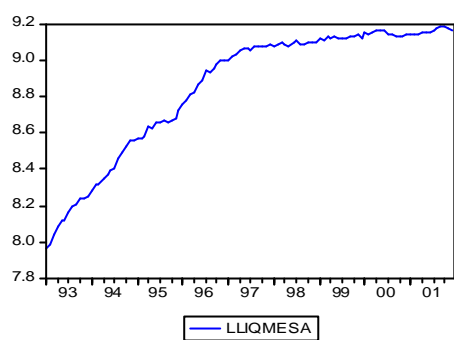
Dinero



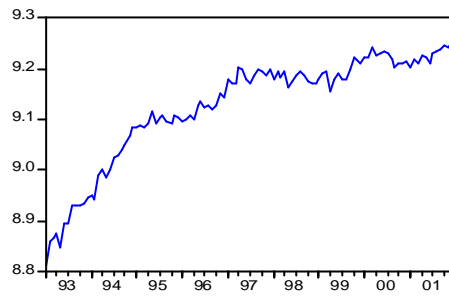
Liquidez en moneda nacional



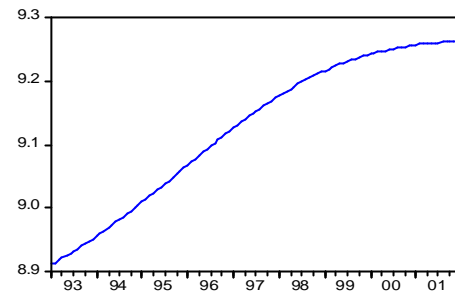
Liquidez en moneda extranjera



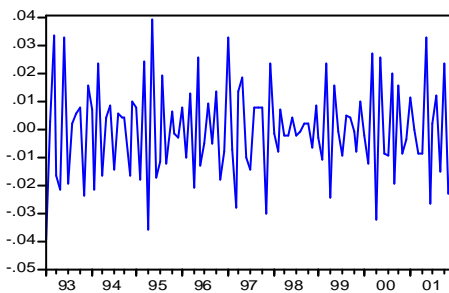
PBI real



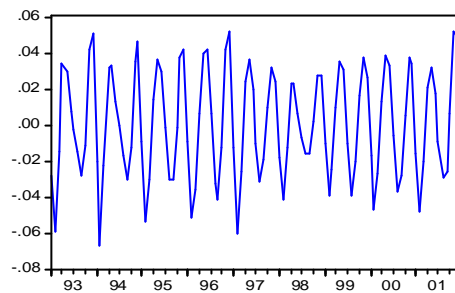
— LPBIR94SA



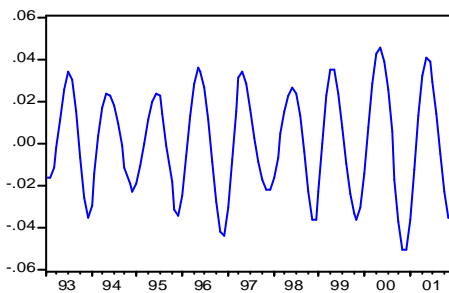
— LPBIR94_A6



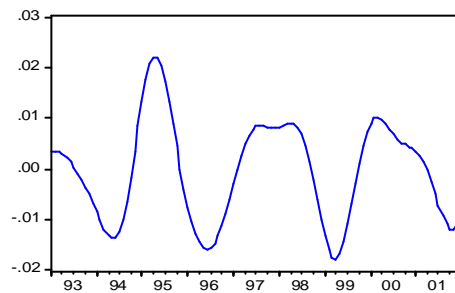
— LPBIR94_D1



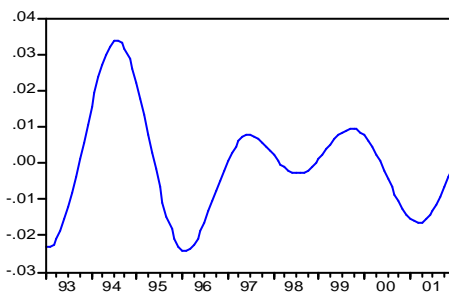
— LPBIR94_D2



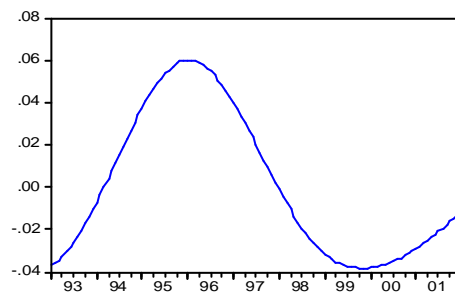
— LPBIR94_D3



— LPBIR94_D4



— LPBIR94_D5



— LPBIR94_D6

Deflactor del PBI

