123

TEORIA DE LA PRODUCCION Y COSTOS: UNA EXPOSICION DIDACTICA

Leopoldo Vilcapoma

DOCUMENTO DE TRABAJO 123

TEORIA DE LA PRODUCCION Y COSTOS: UNA EXPOSICION DIDACTICA

Leopoldo Vilcapoma

RESUMEN

En este trabajo se examinan los diferentes conceptos derivados de la función de producción total y de la función de costos totales. Desde el punto de vista tecnológico el análisis se realiza considerando el sistema tecnológico de Leontief y el sistema tecnológico de von Neumann. Desde el punto de vista económico se asume que la unidad productiva es precio-aceptante en el mercado de factores. Para ello se muestra la "parametrización" de la tecnología, a partir de los procesos de producción, obteniendo la función de producción en el caso de la existencia de un número finito de procesos técnicos. Debido a que esta deducción no he podido encontrar en ninguna referencia bibliográfica, se presenta un breve apéndice matemático. Toda la exposición se realiza en términos muy simples, empleando la matemática elemental.

ABSTRACT

This paper presents different concepts related to total production functions and total cost functions. From the technological point of view, the analysis is made considering the Leontief technological system and the von Neumann technological system. From the economical point of view, it is assumed that the firm is price-taker in the factors market. This paper shows the parametrization of technology from the production processes, deducing a production function for a finite number of technological processes. Because this is a new result, it is explained in a brief mathematical appendix. This is a very simple exposition, using only the college mathematics.

TEORIA DE LA PRODUCCION Y COSTOS: UNA EXPOSICION DIDACTICA

Leopoldo Vilcapoma[*]

Consideremos el caso de una unidad productiva, tal como se concibe en la teoría microeconómica tradicional. En el análisis de la relación entre el proceso de producción y los costos para una unidad simple de producción emplearemos los siguientes supuestos:

(1) Existen solamente dos factores de producción, la mano de obra (L) y la tierra (T).[1] Además, estos medios de producción son factores primarios, esto es, no son producidos ni producibles en el proceso considerado.

(2) La duración de la jornada de trabajo (δ) es constante, además δ=1. Esto nos permite asociar de manera directa, los factores de producción L y T, con sus servicios.[2]

(3) La producción es obtenida directamente empleando los factores L y T. Esto es, no existen relaciones intersectoriales.[3]

(4) La producción es disyunta. El proceso de producción permite obtener un sólo bien. Obviamente, esto implica que no estamos considerando los otros elementos que salen del proceso de producción[4] (mano de obra y tierra usadas, por ejemplo).

---

* Profesor del Departamento de Economía de la Pontificia Universidad Católica del Perú. El autor desea agradecer los valiosos comentarios de Adolfo Figueroa, Oscar Rodríguez y Cecilia Garavito.

1 No hay ninguna pérdida de generalidades si consideramos otros factores de producción.

2 En adelante nos referiremos a L (T) como los servicios de la mano de obra (servicios de la tierra), o simplemente como mano de obra (tierra).

3 En el análisis de una unidad simple de producción, en nuestros términos, no se requiere la consideración de las relaciones intersectoriales. Si el propósito es examinar las interrelaciones entre distintos procesos de producción al interior de una gran unidad de producción, podría ser conveniente tomar en cuenta las relaciones intersectoriales. Si el propósito es analizar una economía que es más o menos integrada con un modelo de equilibrio general, si sería crucial la considerar de tales interrelaciones (véase Leontief (1986)).

4 Existen modelos de producción, sobre todo en la tradición clásica tratan la producción conjunta. Véase por ejemplo, entre otros, von Neumann (1938), Roemer (1982).

Las condiciones de producción que asumimos son muy simples, tanto desde el punto de vista tecnológico como económico. Todos los aspectos tecnológicos del proceso de producción se resumen en la relación que existe entre la producción y los factores de producción empleados, dada cierta duración de la jornada de trabajo.[5] Todos los aspectos económicos de la producción se expresan en la relación de los precios de los factores con los diferentes niveles de producción. Circunscribimos nuestro examen, como ya indicamos, al caso de una unidad simple de producción.[6]

I. PRODUCCION EN EL CASO DE UNA TECNOLOGIA DE RENDIMIENTOS CONSTANTES A ESCALA

Desde el punto de vista tecnológico, asumiremos que la producción es de rendimientos constantes a escala. Esto significa que ante un variación proporcional en el empleo de todos los factores de producción relevantes, se obtiene una variación, en la misma proporción, en el máximo volumen de producción obtenible. Así, una duplicación de los factores permite obtener el doble del nivel de producción. Una reducción de todos los factores en 50% permite obtener, a lo más, la mitad de producción.

En esta parte analizaremos el caso en que los procesos de producción relevantes sean de proporciones factoriales constante, luego consideramos el caso de proporciones factoriales variables.

1.1 Producción con el sistema tecnológico de Leontief

Supongamos que los factores de producción, en el proceso considerado, son limitacionales.[7] Este es un supuesto que hace Leontief para describir la estructura productiva y analizar el funcionamiento de la economía norteamericana.[8]

---

5 Un análisis detallado de la naturaleza de la función de producción se encuentra en Georgescu-Roegen (1973, 1976). Véase también Figueroa (1993).

6 Existe otras dimensiones del proceso de producción que no se considera en el presente análisis. Un aspecto importante es, por ejemplo, la organización y los aspectos sociales del proceso de producción (Coase (1992), Kreps (1990), entre otros).

7 Un factor se define como <u>limitacional</u>, si un incremento en su disponibilidad y uso es un condición necesaria, pero no suficiente para obtener incremento en los niveles de producción. Se dice que un factor es <u>limitativo</u>, si un incremento en su disponibilidad es condición suficiente para obtener incrementos en los niveles de producción. Véase Frisch (1963), Leontief (1951), Georgescu Roegen (1955).

Si la producción de cierto bien se describe a través del vector P_1, tal vector muestra la combinación de insumos (L_1 y T_1) que permite obtener la producción de q_1. Podríamos considerar el vector P_1 como un vector observado empíricamente, o como un vector que proviene de los conocimientos tecnológicos. Si además asumimos que: 1) el método de producción empleado en P es el único existente; 2) existen rendimientos constantes a escala; 3) existe aditividad y divisibilidad en la producción; entonces, tal método de producción se puede representar en una escala unitaria P_u, donde se muestre los requerimientos de L y T para producir una unidad del bien; y además, todas las posibilidades de producción podría ser mostrada empleando el vector P_u.[9] Con estos supuestos P_1 y P_u describen el mismo método productivo. La diferencia entre P_u y P_1 es únicamente de escala de operación. En el gráfico 1.1, se presente de manera completa los procesos de producción tal como han sido especificados. Tanto P_1 como P_u, se encuentran en un espacio de 3 dimensiones. Las combinaciones de trabajo (L) y tierra (T) se encuentran en el subespacio de factores (L,T). Cualquier cambio en P_u implica un cambio tecnológico.

Podemos definir en tal caso, $a_L = L / q$, $a_T = T / q$, que denotan la cantidad de mano de obra (a_L) y la cantidad de tierra (a_T) para producir 1 unidad del bien q, que se puede emplear para definir los procesos:

$$P_1 = \begin{matrix} q_1 \\ L_1 \\ T_1 \end{matrix} \qquad P_u = \begin{matrix} 1 \\ a_1 \\ a_T \end{matrix}$$

El significado de estos vectores es directo: dados todos los supuestos antes mencionados, las cantidades (mínimas) de L_1 y T_1, permiten obtener un nivel (máximo) de producción q_1. O de manera equivalente, las cantidades a_L y a_T permiten obtener 1 de producto (como máximo). La representación de la tecnología por medio de los procesos P, en verdad, se reducen a un punto (el proceso P_u) o a una expansión lineal de dicho punto (q_1, P_u). Cualquier otra combinación o emplea más factores o no es factible con la tecnología disponible.

---

8 Véase W. Leontief (1951, 1986).

9 Todos estos supuestos son únicamente con el objeto de simplificar el análisis. Por ejemplo, si la producción no fuera continua, entonces desde un punto de vista conceptual el tratamiento, cualitativamente sería similar.

A veces es conveniente, por simplicidad, expresar la relación entre insumos y producto en un espacio de 2 dimensiones. Para ello se considera las curvas de nivel del espacio (q, L, T). Entonces, los distintos niveles de producción se pueden expresar por un conjunto de combinaciones de trabajo y tierra tales que permitan obtener un mismo nivel de producción. Así, podemos definir una isocuanta de producción como el conjunto de combinaciones de trabajo y capital tales que proporcionan el mismo nivel de producción.[10] Véase el gráfico 1.2, donde se muestra dos curvas de nivel, asociados a los niveles de producción q=1 y $q=q_1$, de la superficie de producción correspondiente al gráfico 1.1.

En general, la dependencia de la producción q respecto a los factores, se expresa con el concepto de "función de producción". Así, considerando la información contenida en el vector P, y con los supuestos mencionados, se puede expresar la función de producción:

$$q = f\ (L,T\ ) = \min\ [\ L/\ a_L\ ,T/\ a_T\ ] = \min\ [\ a_L^*\ L\ ,\ a_T^*\ T]$$

que describe máximo nivel de producción "q" que se puede obtener con las cantidades mínimas L y T de mano de obra y tierra, respectivamente. Obviamente, si a_L es el requerimiento de factor i para obtener 1 unidad de producto, $1/a_L$ = a es el producto por unidad del factor i. En adelante sólo emplearemos los coeficientes a_i.

---

10 Existen varias maneras, no necesariamente equivalentes de definir una isocuanta de producción. Por ejemplo:

1. Como el máximo nivel de producto que se puede obtener para cada combinación de factores.
2. Como la cantidad mínima de factores necesarias para producir determinado nivel de producción.

Ambos conceptos pueden ser esencialmente útiles según sea el caso. Véase por ejemplo Georgescu-Roegen (1955) donde se emplea la primera definición.

1.1.1 La producción en el largo plazo[11]

Si asumimos que la relación entre insumo y producto es tal que en la expresión

$$q = f\ (L,T\ ) = \min\ [L/\ a_L\ , T/\ a_T\ ]$$

L y T son variables, entonces tenemos la función de producción de largo plazo.

Tal función de producción se expresa gráficamente en el espacio de factores (y producto) por una superficie de producción (como se muestra en el gráfico 1.1). Además, las curvas de nivel de esta superficie son las isocuantas de producción, que en este caso tienen la forma de escuadra. Obviamente, estas isocuantas satisfacen las condiciones usualmente establecidas de convexidad y densidad[12 13].

Si examinamos el espacio de factores y producto (ver gráficos 1.1 y 1.2), en el punto C, el factor L es un factor limitativo, en tanto que el factor T es redundante. En el punto B el factor T es un factor limitativo, en tanto que el factor L es redundante. En el punto A tanto L como T son factores limitacionales: un incremento en L o T no es suficiente para aumentar el nivel de producción.[14] Así, la identificación de un factor como limitacional, limitativo o redundante depende del punto o región del espacio de producción que se considera para caracterizar la redundancia, limitatividad o limitacional de los factores.[15] Dada la tecnología y la disponibilidad de factores, las características de los factores de producción corresponden a cierta vecindad del espacio de producción.

---

11 "Largo plazo" en este caso significa que no existe ningún factor de producción fijo. "Corto plazo" significa que existe por lo menos algún factor fijo.

12 La importancia de la convexidad y la continuidad se hace evidente cuando consideramos la producción con varios procesos.

13 La explicación de estos conceptos se pueden encontrar en Nikaido(1978), Madden(1986).

14 En la representación gráfica, R_1 denota la región del espacio de factores donde la mano de obra es limitada (y la tierra redundante), R_3 la región donde la mano de obra es redundante (y la tierra limitativa), en R_2 ambos factores son limitacionales.

15 Se podría considerar la dotación total de factores para caracterizar que tipo de factores son los considerados.

Como ya se indicó, el proceso de producción unitario resume la tecnología. Además, se asume que tal proceso de producción es reproducible en cualquier escala. En este caso, el presupuesto es que la escala de operaciones no es de importancia.[16] Si existe cierto proceso "unitario" que permite obtener un nivel de producción q = 1, es posible replicar dicho proceso q_1 veces para obtener cierta producción $q = q_1$.[17]

Los diferentes niveles de producción en el largo plazo corresponden a los niveles de producción obtenidos a lo largo del rayo P, pues dado que no existen factores fijos en este caso, se puede modificar los factores de producción en la forma más conveniente, sin ninguna restricción en términos de la cantidad de factores, pues no hay ningún factor fijo. Por ejemplo, el nivel de producción deseado es q_1, se puede obtener empleando por lo menos L_1 y T_1 de trabajo y tierra. Si queremos producir q_2, la cantidad de insumos que permiten alcanzar dicho nivel de producción son L_2 y T_2, respectivamente. La producción de largo plazo, está expresada en los niveles de producción a los que se asocian los "niveles" de las isocuantas.

1.1.2 La producción en el corto plazo

Para configurar un contexto de corto plazo asumamos que el stock de tierra está fijada en cierta magnitud T_1. Dado este factor fijo, podemos obtener ciertos niveles de producción modificando el empleo del factor variable L. Así, obtenemos la curva de producto total de corto plazo (ver gráfico 2.1 y 2.2).

Por nuestros supuestos, ante incremento en el empleo, el nivel de producción aumenta linealmente hasta el punto A, después del cual permanece constante, pues las cantidades adicionales de trabajo no son suficientes para que el producto total se incremente. En B, la mano de obra es redundante mientras que la tierra es limitante. En A ambos factores son limitacionales.

La inclinación de la curva de producto total está relacionada con la "productividad del trabajo" de manera directa. Por ejemplo, si el requerimiento de trabajo por unidad de producto es 1/2, entonces con 10 unidades de L se tiene la

---

16 En algunos modelos puede ser importante la consideración explícita de la escala de producción.

17 Algunas precisiones sobre el carácter de tal replica han sido mencionadas en Arrow K. y F. Hahn (1977).

capacidad de producir 20 unidades de q. Si dicho requerimiento disminuye a la mitad, entonces con las mismas 10 unidades de L es posible obtener 20 unidades de q.

La función de producción total de corto plazo (q (L, T_1)) se puede expresar, algebraicamente, mediante la siguiente ecuación:

$$q(L, T_1) = \begin{cases} (1/a_L)\,L & si\ 0 \leq L \leq L_1 \\ (1/a_L)\,L_1 & si\ L > L_1 \end{cases}$$

y su forma se muestra en el gráfico 2.2.

1.1.3 Las funciones de producto medio y marginal

La evaluación del producto por unidad de trabajo depende del máximo nivel de producción alcanzable con ciertos niveles de empleo. En general, dado la tecnología, el producto medio de la mano de obra (PMeL) depende del nivel de producción y nivel de empleo de los factores. Formalmente, eso se observa en la siguiente ecuación.

$$Pme(L) = q/L = \begin{cases} (1/a_L) & si\ 0 < L \leq L_1 \\ (1/a_L)\,L_1/L & si\ L > L_1 \end{cases}$$

Como se observa, la curva de producto marginal del trabajo (PMgL) es constante e igual a $1/a_L$ hasta el punto A" (Ver gráfico 3.1). Después disminuye a cero. Es claro que mientras existan cantidades disponibles de tierra, si el empleo aumenta en una unidad, entonces el producto aumentará en ($1/a_L$). Para expresarlo en términos numéricos, siendo a_L=1/2, si se aumenta en 1 la cantidad de mano de obra empleada, el producto total aumentará en el "margen" en 2 unidades. Si se alcanza el punto A, entonces cantidades adicionales de trabajo no pueden incrementar los niveles de producción (pues, la tierra se convierte en un factor limitativo o limitante).

$$Pmg(L) = dq/dL = \begin{cases} (1/a_L) & si\ 0 < L \leq L_1 \\ 0 & si\ L > L_1 \end{cases}$$

Aquí observamos lo siguiente:

(1) La relación general entre producto medio y marginal se mantiene. Mientras el producto medio es constante, el producto marginal es constante y además es igual el producto medio. Si el producto medio es decreciente entonces el producto marginal es constante y menor que el producto medio. Además, si el producto marginal es constante, el producto medio no tiene que ser necesariamente constante.

(2) La denominada "ley de rendimientos finalmente decrecientes de un factor" también está presente en este caso particular de tecnología lineal. Tal ley tecnológica dice que el producto marginal de un factor variable disminuye en cierto punto, cuando existen factores fijos. Aquí dicha ley no se manifiesta como una disminución "suave," sino como una variación "abrupta" del producto marginal.

1.1.4 Los costos en el largo plazo

Sean los niveles de producción q_1, q_2 y en general q, que se obtienen con los procesos [q_1, L_1, T_1], [q_2, L_2, T_2], [q, L, T]. Si ningún factor de producción es fijo, ¿cuáles serían los costos totales (mínimos) en que se incurre al usar (las cantidades mínimas necesarias de) factores para obtener tales niveles de producción?

Si los precios de la mano de obra y tierra son w y r, respectivamente, entonces los costos totales estarán dados por las siguientes expresiones:

$$CT\,(q_1) = wL_1 + r\,T_1$$

$$CT\,(q_2) = wL_2 + r\,T_2$$

$$\ldots$$

$$CT(q) = wL + rT$$

Dado que las cantidades de L y T que se emplean para obtener q están especificadas por P_u, podemos expresar, de manera equivalente:

$$CT\,(q_1) = w\,aL\,q_1 + r\,aT\,q_1 = (w\,aL + r\,aT\,)\,q_1$$

$$CT\,(q_2) = w\,aL\,q_2 + r\,aT\,q_2 = (w\,aL + r\,aT\,)\,q_2$$

o en general

$$CT(q) = w\,aL\,q + r\,aT\,q = (w\,aL + r\,aT)\,q$$

Si graficamos la función anterior relacionando q y CT(), obtenemos la curva de costos totales. Como estamos considerando las posibilidades de producción manteniendo variables todos los factores de producción, tenemos la función de costos de largo plazo CTLP(q).

El resultado de una curva de costos de largo plazo lineal es consecuencia de los supuestos de rendimientos constantes a escala y que la empresa es precio-aceptante en el mercado de factores. Si consideramos la interacción de la empresa con otras empresas o tomando en cuenta la industria, estos supuestos no necesariamente conducen a este tipo de costo total.[18] El costo mínimo de producir q_1 es CT (q_1), de producir q_2 es CT (q_2) y de q_3 es CT (q_3). La curva de costos de largo plazo relaciona los costos totales mínimos con diferentes niveles de producción asumiendo que todos los factores son variables y que los precios de los factores y la tecnología están dados (Ver gráficos 4.1 y 4.2). Obviamente, también se puede deducir la curva de costes de corto plazo.

1.1.5 Los costos en el corto plazo

Para obtener la curva de costes de corto plazo consideramos la función de producción de corto plazo. Asumiendo la existencia del factor fijo T en el nivel T_1, mientras que el factor L es variable. Los costos totales se pueden clasificar en costos fijos y costos variables. La presencia del factor fijo T está relacionado a un costo rT_1, como tanto T_1 y r están fijos, rT_1 es un costo fijo para la empresa. Además, como no existen otros costos fijos asociados a otros factores, rT_1 es el costo fijo total de la empresa. Dado que los incrementos en el nivel de producción se obtienen aumentando el nivel de empleo, a este incremento del empleo corresponde un aumento en el costo total. Por lo tanto, el costo total de corto plazo está constituido por el costo fijo (del factor fijo: tierra) y el costo variable: el costo variable (relacionado al factor variable: trabajo L). La siguiente expresión relaciona niveles de producción de corto plazo con los costos totales:

18 Véase por ejemplo, el trabajo clásico Viner (1931).

$$CTCP(q) = rT_1 + w\,L(q) = r\,T_1 + w\,a_L\,q,$$

donde $L(q) = a_L\,q$ es el nivel de empleo necesario para alcanzar q.

Se puede constatar, por lo menos gráficamente, que la curva de corto plazo nunca es menor que la curva de costos de largo plazo para ninguna combinación de insumos.

1.1.6 El costo medio y marginal

Es conveniente responder la siguiente pregunta. ¿En cuánto se modifica el costo total cuando se obtiene niveles de producto adicionales? ¿Cuál es el costo promedio de determinado nivel de producto? El concepto de costo marginal (CMg) se refiere al costo adicional debido a cantidades adicionales de producción. El costo medio (CMe) se refiere al costo por unidad de producción.

En términos formales:

$$CMg(q) = \Delta\,CT(q) / \Delta\,q$$

$$CMe(q) = CT(q) / q$$

Si consideramos la función de producción de largo plazo, entonces los conceptos anteriores devienen en la función de costo marginal de largo plazo (CMgLP) y costo medio de largo plazo (MeLP). Las funciones de costo medio y costo marginal de largo plazo consisten en las siguientes expresiones:

$$CMeLP(q) = w\,a_L + r\,a_T = CTLP(q) / q$$

Esta ecuación expresa que en el largo plazo, el costo promedio de una unidad de q es $w\,a_L + r\,a_T$.

Del mismo modo:

$$CMgLP(q) = w\,a_L + r\,a_T$$

Así, en el largo plazo, aumentar en una unidad el nivel de producción implica un costo adicional de w a_L + r a_T.

Por otra parte, tenemos los costos medios y marginales de corto plazo:

$$CMeCP(q) = rT_1 / q + w^* a_L$$

$$CMgCP(q) = w^* a_L$$

Se observa que, antes de la combinación óptima, el costo marginal de corto plazo es menor que el costo marginal de largo plazo. La explicación radica en que para obtener una unidad adicional en el corto plazo es necesario emplear solamente los requerimientos adicionales de L (y no de T, hasta T_1, ya que tenemos disponible), mientras que en el largo plazo necesitamos emplear tanto trabajo como tierra. Por lo tanto, para incrementar en 1 el nivel de producción, en el largo plazo es necesario incurrir en un costo de $w^*a_L + r^*a_T$, el cual obviamente es mayor que w*aL. Esto no sucede en la "región" de producción donde el producto marginal del factor es cero. (Nótese que en el tramo no decreciente el CMgCP es indeterminado.)

La curva de costo medio de corto plazo es decreciente y luego crece indefinidamente. Esto es así pues, llegado a ciertos niveles de producción cuando el trabajo es redundante, mayores niveles de empleo se traducirán únicamente en aumentos en los costos y no en la producción, pues existen restricciones tecnológicas: la tierra se convierte en un factor limitante.

1.1.7 Un modelo de producción del empresario capitalista

Podemos definir una ecuación de describa el ingreso total (IT) que tiene la empresa:

$$IT(q) = p.q$$

Si el precio de venta no se modifica antes distintos niveles de producción IT será una función lineal.

Podemos definir una ecuación que describa los beneficios (B) de la empresa:

$$B(q) = IT(q) - CT(q)$$

1.1.8 Un modelo de producción del empresario capitalista

En el contexto de una economía de mercado, ¿cuál sería el nivel de producción de un empresario capitalista? La respuesta depende de una serie de consideraciones económicas y tecnológicas. Se requiere una serie de supuestos sobre el productor. Hagamos los siguientes supuestos:

1. La racionalidad del empresario es buscar hacer máximo los beneficios (B).
2. El empresario es precio aceptante tanto en el mercado de bienes como de factores.
3. La tecnología es de Leontief y está dada.
4. La empresa tiene un factor fijo de $T = T_1$.
5. La jornada de trabajo esta dada.

Entonces, la condición de equilibrio implica que el empresario produce siempre que su ingreso marginal sea mayor que su costo marginal y produce hasta que el factor fijo se convierta en limitativo.

Para resumir, las variables exógenas son:

1. Los coeficientes tecnológicos: (a_T, a_L)
2. Los precios de los factores (w y r) y del bien (p)
3. El factor fijo $T=T_1$. Como los costos de los factores están dados, también lo está el costo fijo $CF = rT_1$

En tanto que las variables endógenas son:

1. La producción (q) y empleo de factor variable (L).
2. Los costos variables (wL) y los costos totales (CT).
3. El ingreso total (IT) y los beneficios totales(B).
4. La distribución del ingreso (dy).[19]

¿Cómo están relacionadas las variables endógenas a las exógenas? Esto requiere hacer un ejercicio de estática comparativa.[20] Se puede probar que los signos de la relación entre las variables exógenas y endógenas son los como se indica en la siguiente tabla.

Tabla 1

	T_1	p	w	r	a_L[21]	a_T[22]	δ[23]
q	+	0	0	0	0	+	
L	+	0	0	0	0	+	
wL	+	0	+	0	-	+	
CT	+	0	+	+	-	+	
IT	+	+	0	0	0	+	
B	+	+	-	-	-	+	
dy	0	-	+	+	-	-	

[19] Existen varias manera de cuantificar la distribución del ingreso. En nuestro caso dy = w.L/B.

[20] Desde un punto de vista formal, se puede probar que el equilibrio es estable y único. Sólo en este caso tiene sentido hacer la "estática comparativa".

[21] En este caso, se asume que el efecto es una reducción de este coeficiente.

[22] En este caso, como en el anterior, se asume que se da una disminución de este coeficiente.

[23] En realidad no hay una teoría de la relación entre stocks y servicios dada la jornada laboral. Sería conveniente hacer los supuestos necesarios respecto a esta relación. Por fines de simplificar la exposición, en adelante no consideraremos las modificaciones en la jornada laboral. Para una discusión sobre la importancia de la dimensión temporal en el análisis del proceso de producción. Véase: Georgescu-Roegen (1965, 1976), Figueroa (1993).

Tenemos pues, un modelo muy particular que sirve para analizar el comportamiento de una empresa capitalista individual.

1.1.9 La demanda de trabajo y la oferta del productor

Tomando en cuenta el contexto del empresario de la sección anterior, si consideramos los niveles de empleo asociados a diferentes niveles de salario, entonces obtendremos la demanda de trabajo. La demanda de trabajo consiste en el conjunto de combinaciones de tasa de salario y mano de obra tal que se maximizan los beneficios, asumiendo dados la tecnología, los precios de (los demás) factores y producto.

Del mismo modo, si asociamos diferentes niveles de precios de venta del producto con los niveles de producción, obtenemos la función de oferta del producto, que consiste en las combinaciones de precio y cantidad ofrecida, tales que se maximizan los beneficios, asumiendo dados la tecnología, los precios de los factores.

En este caso, dentro de determinados rangos, la gráfica de la demanda de trabajo y de la oferta de producto serán curvas perfectamente verticales en los planos (L, w) y (p, q) respectivamente. La demanda de trabajo para determinados niveles de salarios se muestran en el gráfico 3.2; donde se ilustra que la demanda está definida para cierto rango de la tasa de salarios. La explicación radica en que para salarios mayores a w^1, no es rentable el empleo de L, y por lo tanto no es viable la producción desde el punto de vista del productor capitalista. La oferta del productor individual es perfectamente inelástica para ciertos argumentos de los precios de venta. Esta idea se ilustra en el gráfico 5.2.

1.2 Producción con el sistema tecnológico de von Neumann

En su famoso artículo sobre crecimiento económico von Neumann[24], asumió la existencia de una economía que dispone de un conjunto finito de procesos primarios. En esta parte de nuestra exposición consideramos el caso más simple de 2 procesos primarios. En la próxima sección consideraremos la presencia de "n"

[24] J. von Neumann, "A Model of General Economic Equilibrium" (1938).

procesos primarios de producción. En ambos casos existe un número infinito de procesos de producción derivados.

Las posibilidades tecnológicas de producción se podrían representar por los vectores $P_{(1)}$, $P_{(2)}$ y $P_{(1,\ 2)} = P^{*} = \alpha\ P_{(1)} + (1-\alpha)\ P_{(2)}$. Donde $P_{(1)}$ y $P_{(2)}$ son procesos primarios y $P_{(1, 2)}$ es un conjunto de procesos derivados. Una representación explícita de los procesos primarios estaría dado por los siguientes vectores, donde P_{u1} y P_{u2} permiten producir a una escala unitaria.[25]

$$P_{(1)} = \begin{matrix} q_{(1)} \\ L_{(1)} \\ T_{(1)} \end{matrix} \qquad P_{(2)} = \begin{matrix} q_{(2)} \\ L_{(2)} \\ T_{(2)} \end{matrix} \qquad P_{u1} = \begin{matrix} 1_{(1)} \\ a_{L(1)} \\ a_{T(1)} \end{matrix} \qquad P_{u2} = \begin{matrix} 1_{(2)} \\ a_{L(2)} \\ a_{T(2)} \end{matrix}$$

Obviamente, esta información se puede expresar también con el concepto de función de producción.

1.2.1 Producción en el largo plazo

La producción en largo plazo, se puede expresar mediante la siguiente ecuación[26]:

$$q = \begin{cases} L \,/\, a_{L(1)} & si (L,T)\ se\ encuentra\ en\ R_1 \\ [(a_{T(1)} - a_{T(2)}\, L - (a_{(1)} - a_{L(2)}\, T] \,/\, [\, a_{L(2)}\ a_{T(1)} - a_{L(1)}\ a_{T(2)}] & si\ (L,T)\ se\ encuentra\ en\ R_2 \\ T \,/\, a_{T(2)} & si\ (L,T)\ se\ encuentra\ en\ R_3 \end{cases}$$

Los niveles de producción en el largo plazo se pueden representar en una superficie de nivel, tal como se ilustra en los gráficos 6.1 y 6.2. Las isocuantas son las curvas de nivel de superficie de producción y muestran la convexidad usual[27].

---

25 En la representación de cada de estos vectores, se expresa la producción, mano de obra y tierra respectivamente en cada componente.

26 El procedimiento a través del cual se obtiene la parametrización de la tecnología, expresada en principio por un conjunto de procesos de producción, hallando una expresión de la función de producción, se encuentra brevemente explicada en el apéndice matemático.

En este caso, desde el punto de vista del ahorro de los recursos, la zona de producción donde no hay desperdicio de recursos está dado por R_2 región donde L y T son limitantes. En el subespacio R_1 y R_3, existe algún factor que es redundante.

1.2.2. Producción en el corto plazo

Supongamos que disponemos de T_2 como factor fijo (Gráfico 7.1). Dada la tecnología, los niveles de producción de corto plazo que se pueden obtener se asocian al producto alcanzable modificando las cantidades de mano de obra empleada, manteniendo constante la cantidad de tierra. Se observa también como en el caso anterior, el producto total obtenible depende de manera directa de la productividad del trabajo.

Si fuera posible emplear tanto P_1 y P_2 en alguna escala convenientemente elegida y por lo tanto emplear procesos derivados, la curva del producto total sería una curva cóncava (aunque no estrictamente cóncava) en todo su dominio. Estos resultados se muestran en el gráfico 7.2, donde se grafican las curvas de producto total de corto plazo para los tamaños de tierra T_1, y T_2 respectivamente. Se puede observar que la curva de producto total es cóncava, además que las funciones de producción de corto plazo obtenidas con menores niveles de factor fijo son "envueltas" por las funciones que poseen un mayor nivel de factor fijo.

De este modo, la curva de producto total de corto plazo sigue la siguiente regla:

$$q(L) = \begin{cases} (1 / a_{L(1)})\, L & si\ (L, T_1)\ se\ encuentra\ en\ R_1 \\ [(a_{T(1)} - a_{T(2)})\, L - (a_{L(1)} - a_{L(2)})\, T] \;/\; [a_{L(2)}\ a_{T(1)} - a_{L(1)}\, a_{T(2)}] & si\ (L, T_1)\ se\ encuentra\ en\ R_2 \\ T \;/\; a_{T(2)} & si\ (L, T_1)\ se\ encuentra\ en\ R_3 \end{cases}$$

En R_1, el producto total crece linealmente. Sin embargo, considerando R_1 y R_2 se observa que la producción aumenta a tasa decreciente (por segmentos).

---

[27] Sin el supuesto de divisibilidad no sería posible obtener isocuantas convexas en el espacio de producción. Consecuentemente, las curvas de producto total de corto plazo, tampoco serían funciones cóncavas para todo nivel de mano de obra.

1.2.3 Las funciones de producto medio y marginal

El producto medio del factor variable tiene la siguiente expresión:

$$
Pme(L) = \begin{cases} (1 / a_{L(1)})\, L & si\ (L, T_1)\ se\ encuentra\ en\ R_1 \\ [(a_{T(1)} - a_{T(2)}) - (a_{L(1)} - a_{L(2)})\, T_1 / L\,] \,/\, [\,a_{L(2)}\ a_{T(1)} - a_{L(1)}\, a_{T(2)}\,] & si\ (L, T_1)\ se\ encuentra\ en\ R_2 \\ T_1 / a_{T(2)} & si\ (L, T_1)\ se\ encuentra\ en\ R_3 \end{cases}
$$

El producto marginal es:

$$
Pmg(L) = \begin{cases} (1 / a_{L(1)}) & si\ (L, T\ )\ se\ encuentra\ en\ esta\ en\ R_1 \\ [(a_{T(1)} - a_{T(2)})\,] \,/\, [\,a_{L(2)}\ \ a_{T(1)} - a_{L(1)}\, a_{T(2)}\,] & si\ (L, T\ )\ se\ encuentra\ en\ R_2 \\ 0 & si\ (L, T)\ se\ encuentra\ en\ R_3 \end{cases}
$$

Desde un punto de vista geométrico, estos resultados se muestran en los gráficos 8.1 y 8.2.

1.2.4 Los costes totales

Podemos determinar en este caso los costes mínimos asociados a cada nivel de producción. Para esto basta relacionar los costes asociados a las cantidades mínimas de insumos para obtener cierta producción.

Si los precios de los factores están dados, si la producción de 1 unidad requiere de $a_{L(1)}$ de trabajo y $a_{T(1)}$ de tierra, la producción empleando solamente el $P_{(1)}$ estaría expresado por:

$$CRLP\,(q_{(1)}) = L_1 w + R_1 r = (a_{L(1)}\, w + a_{T(1)}\, r\ )\, q_{(1)}$$

Si $P_{(2)}$ es el proceso empleado el costo está expresado por

$$CRLP\,(q_{(2)}) = L_2 w + R_2 r = (a_{L(2)}\, w + a_{T(2)}\, r)\, q_{(2)}$$

¿En qué casos emplearemos uno de los procesos? ¿Cuándo será conveniente usar una combinación de los procesos? La respuesta depende de los precios relativos. Para dar una respuesta, supongamos que el proceso $P_{(2)}$ es más intensivo en trabajo que el proceso $P_{(1)}$. Si el valor de m definido como:

$$m = [\, a_{T(1)} - a_{T(2)}] \;/\; [\, a_{L(1)} - a_{L(2)}]$$

y se busca producir con el mínimo costo, entonces si

$$\begin{array}{ll} m < w/r, & \text{entonces se emplear el } P_{(1)} \\ m > w/r, & \text{se emplear el } P_{(2)} \\ m = w/r & \text{el } P_{(1)}, \text{el } P_{(2)} \text{ o ambos.} \end{array}$$

Es posible obtener una relación entre los costos y los niveles de producción. Como tales costos están asociados a los niveles de producción de largo plazo, tales funciones son pues funciones de costos de largo plazo (CTLP). (Véase gráficos 9.1 y 9.2)

En el corto plazo tenemos cierto factor fijo T_1, cuyo costo es rT_1. Asociado a tal factor fijo tenemos un costo fijo (CF). Dado T_1 la única manera de incrementar la producción es empleando cantidades adicionales de mano de obra. Si queremos producir una unidad adicional del bien q, es necesario emplear adicionalmente $a_{L(1)}$ de L, a un costo unitario de $a_{L(1)}$ w. El costo total de producir q unidades se puede expresar mediante la ecuación:

$$CTCP(q) = rT_1 + w\, L(q)$$

En particular, considerando el valor explícito de L(q), la mano de obra necesaria para producir q, se tiene:

$$CTCP(q) = \begin{cases} rT_1 + w\, a_L\, q, \text{ si } (L, T_1) \text{ se encuentraen } R_1 \\ rT_1 + w\, [(\, a_{L(2)}\, a_{T(1)} - a_{L(1)}\, a_{T(2)})\, q + (\, a_{L(1)} - a_{L(2)})\, T_1] \;/\; [(\, a_{T(1)} - a_{T(2)})\,] \\ q^*, \text{ para } CT\,(q) > CT\,(q^*) \end{cases}$$

La forma de la curva de costos totales está estrechamente relacionada con los procesos de producción empleados; por lo tanto, con las proporciones factoriales que se utilizan en cada caso. En el primer tramo se emplea enteramente el primer proceso $P_{(1)}$, luego se pasa a emplear ambos procesos en R_2. La curva de costos totales empieza a aumentar a una mayor tasa en el segundo tramo debido a que la cantidad del factor variable por unidad de producción aumenta a medida que se expande la producción.

Finalmente, en R_3 no es posible incrementar la producción incrementando el empleo del factor variable (consiguientemente elevando los costos).

1.2.5 Los costos medios y marginales

Las funciones de costo medio y costo marginal de largo plazo consisten en las siguientes expresiones:

$$CMeCP(q) = \begin{cases} rt_1 / q + w\, a_L \text{, } si\ (L, T_1)\ en\ R_1 \\ rT_1/q + w\,[(a_{L(2)}\, a_{T(1)} - a_{L(1)}\, a_{T(2)}) + (a_{L(1)} - a_{L(2)})\, T_1/q\,]\ /\ [(a_{T(1)} - a_{T(2)})\,] \\ q^*,\ para\ CMe\,(q\ ) > CMe\,(q^*\ ) \end{cases}$$

Esta ecuación expresa que en el largo plazo, el costo promedio de una unidad de q es w $a_{L(1)}$+r $a_{T(1)}$, y dada la configuración de precios relativos que se asumieron, el proceso empleado es $P_{(1)}$.

Los costos marginales de corto plazo se expresan en las siguientes fórmulas:

$$CMgCP(q) = \begin{cases} {}^*\, w\, a_L \text{, } si\ (L, T_1)\ en\ R_1 \\ {}^*\, w\,[(a_{L(2)}\, a_{T(1)} - a_{L(1)}\, a_{T(2)})\,]\ /\ [(a_{T(1)} - a_{T(2)})\,] \\ \quad si\ (L, T_1)\ en\ R_2 \\ q^*,\ para\ CT\,(q\ ) > CT\,(q^*\ ) \end{cases}$$

Se observa que, en R_1, el costo marginal de corto plazo es menor que el costo marginal de largo plazo. La explicación radica en que para obtener una unidad adicional en el corto plazo es necesario solamente los requerimientos adicionales de L (y no de T, hasta T_1, ya que tenemos disponible), mientras que en el largo plazo necesitamos emplear tanto trabajo como tierra. Por lo tanto, para incrementar en 1 el nivel de producción, en el largo plazo necesitamos $w^*a_L+r^*a_T$, el cual obviamente es mayor que w*aL. Esto no sucede en la "región" de producción donde el producto marginal del factor es cero; aquí el costo marginal deviene en una magnitud indeterminada. (Véase los gráficos 10.1 y 10.2)

La curva de costo medio de corto plazo es decreciente y luego crece indefinidamente. Esto es así pues, llegado a ciertos niveles de producción cuando el trabajo es redundante mayores niveles de empleo se traducirán únicamente en aumentos en los costos y no en la producción, pues existen restricciones tecnológicas: la tierra se convierte en un factor limitante.

1.2.6 La demanda de Trabajo y la oferta

Si consideramos un empresario capitalista, podemos relacionar los niveles de empleo asociados a diferentes niveles de salario, entonces obtendremos, como antes, la demanda de trabajo. Del mismo modo, si asociamos diferentes niveles de precios de venta del producto con los niveles de producción, obtenemos la oferta de bienes producidos.

Con los supuestos indicados, el gráfico de la demanda de trabajo es una curva con tramos perfectamente verticales en el plano (L, w), tal como se muestra en el gráfico 8.2. Para salarios mayores a w^1, el nivel de empleo que hace máximo el beneficio es cero, si el salario se encuentra entre W^1 y W^o, el empleo es L_1. Finalmente, si el salario es menor W^o, el empleo es L_2 en el plano (p, q), tal como se ilustra en el gráfico 10.2. Si el precio es superior a p^1, el nivel de producción que hace máximo el beneficio es q_4 si p se encuentra entre p_1 y p_o la cantidad a producir será q_2. Finalmente, si el precio es menor que p_o, la cantidad ofrecida será cero.

1.2.7 Un modelo de un empresario capitalista

Sea un empresario capitalista. Además, supongamos que nuestro productor es precio aceptante en el mercado del bien que produce y en el mercado de los factores que emplea. ¿Cuál será la producción? ¿Cuál el nivel de empleo? La respuesta depende de una serie de consideraciones económicas y tecnológicas. Hagamos los siguientes supuestos:

1. La racionalidad del empresario es buscar hacer máximo los beneficios.
2. El productor no puede modificar los precios de q, L y T, esto es, que el productor es precio aceptante en le mercado de factores.
3. Que la tecnología es de von Neumann, con dos procesos primarios y está dada.
4. Que el empresario tiene un factor fijo de $T = T_1$.
5. La jornada de trabajo está determinada exógenamente.

El empresario produce eligiendo el nivel de producción que hace máxima la diferencia entre sus ingresos totales y costos totales. En particular, el empresario tiende a producir más siempre que su ingreso marginal sea mayor que su costo marginal, y a la inversa, el empresario tiende a reducir su producción si es que su ingreso marginal es menor que su costo marginal.

Para resumir el modelo, las variables exógenas son:
1. La tecnología. ($a_{T(1)}$, $a_{L(1)}$ $a_{T(2)}$, $a_{L(2)}$). La manera como operan este proceso.
2. Los precios de los factores (w y r) y del producto (p).
3. El factor fijo $T=T_1$. Como los costos de los factores están dados, también lo está el costo fijo $CF = rT_1$.
4. La duración de la jornada de trabajo δ.

En tanto que las variables endógenas son:
1. La producción (q) y empleo de factor variable (L).
2. Los costos variables (wL) y los costos totales (CT).
3. El ingreso total(IT) y los beneficios totales (B).
4. El proceso tecnológico empleado (P_i).
5. La distribución del ingreso (dy).

¿Cómo están relacionadas las variables endógenas a las exógenas? En términos intuitivos se puede probar que, bajo determinadas condiciones, los signos de variaciones positivas en algunas variables exógenas sobre las variables endógenas indicadas, son la siguiente tabla:

Tabla 2

	T_1	W	r	p	$a_{L(1)}$	$a_{T(1)}$	$a_{L(1)}$	$a_{T(2)}$
q	+	0	0	0	+			
L	+	0	0	0	+			
wL	+	+	0	-	+			
CT	+	+	+	-	+			
IT	+	0	0	0	+			
B	+	-	-	-	+			
Pi	0	$P_{(1)}$	0	0	0	$P_{(1)}$	$P_{(2)}$	
dy	0	+	+	-				

1.3 Producción con el sistema tecnológico de von Neumann con n procesos

En esta exposición consideraremos el caso de n procesos primarios, pero manteniendo el supuesto de 2 factores de producción.

Supongamos que los procesos están ordenados en términos crecientes respecto a la intensidad de cierto factor, por ejemplo, la mano de obra. Las posibilidades tecnológicas de producción se podría representar por los vectores

$$P_{(1)}, P_{(2)}, P_{(1,2)} = P^* = \alpha\, P_{(1)} + (1-\alpha)\, P_{(2)}$$

$$P_{(2)}, P_{(3)}, P_{(2,3)} = P^* = \alpha\, P_{(2)} + (1-\alpha)\, P_{(3)}$$

....

$$P_{(n-1)}, P_{(n)}, P_{(n-1,n)} = P^* = \alpha\, P_{(n-1)} + (1-\alpha)\, P_{(n)}$$

o en términos generales:

$$P_{(i)}, P_{(i+1)}, P_{(i,i+1)} = P^* = \alpha\, P \;+ (1-\alpha)\, P_{(i+1)}$$

con i= 0,1,..n-1.

$$P_{(1)} = \begin{matrix} q_{(1)} \\ L_{(1)} \\ T_{(1)} \end{matrix} \qquad P_{(2)} = \begin{matrix} q_{(2)} \\ L_{(2)} \\ T_{(2)} \end{matrix} \qquad P_{1} = \begin{matrix} 1_{(1)} \\ a_{L(1)} \\ a_{T(1)} \end{matrix} \qquad P_{2} = \begin{matrix} 1_{(2)} \\ a_{L(2)} \\ a_{T(2)} \end{matrix}$$

o expresado en una escala unitaria:

$$P_{U1} = \begin{matrix} q_{(1)} \\ L_{(1)} \\ T_{(1)} \end{matrix} \qquad P_{U2} = \begin{matrix} q_{(2)} \\ L_{(2)} \\ T_{(2)} \end{matrix} \qquad P_{1} = \begin{matrix} 1_{(1)} \\ a_{L(1)} \\ a_{T(1)} \end{matrix} \qquad P_{Un} = \begin{matrix} 1_{(2)} \\ a_{L(2)} \\ a_{T(2)} \end{matrix}$$

Obviamente, esta información se puede expresar en el concepto de función de producción.

1.3.1 Producción en el largo plazo

La producción en largo plazo, se puede expresar mediante la siguiente ecuación[28]:

$$q = \begin{cases} L / a_{L(1)} \text{ Si } (L,T) \text{ se encuentra en } R_1 \\ [(a_{T(i)} - a_{T(i+1)})L - (a_{L(i)} - a_{L(i+1)})T] / [a_{L(i+1)}\, a_{T(i)} - a_{L(i)}\, a_{T(i+1)}] \\ \quad \text{si } (L,T) \text{ se encuentra en el cono } R_{2(i,i)}, \text{ para } i = 1 .. n-1 \\ T / a_{T(n)} \text{ si } (L,T) \text{ se encuentra en } R_3 \end{cases}$$

Los niveles de producción en el largo plazo se pueden representar en una superficie de nivel. Como ya se vio antes, las curvas de nivel son las isocuantas de producción y presentan convexidad usual. Si excluyéramos el supuesto de divisibilidad no sería posible obtener isocuantas convexas en el espacio de producción.

28 Esta ecuación es una representación analítica de un sistema tecnológico con n procesos primarios. Importantes implicancias para el análisis del cambio técnico y crecimiento de países subdesarrollados, se pueden encontrar en Stiglitz-Akerlof (1969), Eckaus (1955).

En este caso, desde el punto de vista del ahorro de los recursos, la zona de producción donde no hay desperdicio de recursos está dado por R_2 región donde L y T son limitantes. En el subespacio que no es el cono, existe algún factor que es redundante.

1.3.2. Producción en el corto plazo

Aquí disponemos de T como factor fijo. Los niveles de producción de corto plazo dependen de la cantidad de mano de obra, dado la cantidad constante de tierra y la tecnología.

Se observa también como en el caso anterior, el producto total obtenible depende de manera directa de la productividad del trabajo y esta se encuentra asociada al nivel de empleo.

Como es posible emplear tanto $P_{(i)}$ y $P_{(i+1)}$ en alguna escala convenientemente elegida y, por lo tanto, emplear procesos derivados, la curva de producto total es una curva cóncava en todo su dominio.

De este modo, la curva de producto total de corto plazo sigue la siguiente regla:

$$q(L) = \begin{cases} (1/a_{L(1)} L) & si\ L < L_1 (Si\ (L,T_1)\ esta\ en\ R_1 \\ [(a_{T(i)} - a_{T(i+1)})L - (a_{L(i)} - a_{L(i+1)})T] / [(a_{L(i+1)}\, a_{T(i)} - a_{L(i)}\, a_{T(i+1)}] & si\ (L,T)\ se\ encuentra\ en\ R_2 \\ T / a_{T(n)} & si\ (L,T_1)\ se\ encuentra\ en\ R_3 \end{cases}$$

En R_1, el producto total crece linealmente. Sin embargo, aumenta a tasa decreciente, considerando los diferentes pares de procesos primarios en R_2, los aumentos en la producción es con producto marginal disminuye por tramos sucesivos. Cuanto mayor sea el número de procesos y más amplio el ángulo del cono R_2, la curva de producto total y las isocuantas serán más parecidas a las isocuantas que se construyen asumiendo la existencia de infinitos procesos[29].

---

[29] La relación existente entre procesos primarios representados con isocuantas de "coeficientes fijos" y las isocuantas suaves y continuamente diferenciables ha sido mencionado por Stiglitz-Akerlof (1969).

1.3.3 Las funciones de producto medio y marginal

El producto medio del factor variable tiene la siguiente fórmula:

$$Pme\,(L) = \begin{cases} 1/\,a_{L(1)}\,L & si\ L < L_1\ (Si\ (L, T_1)\ esta\ en\ R_1 \\ [(\,a_{T(i)} - a_{T(i+1)}) - (\,a_{L(i)} - a_{L(i+1)})T_1 / L\,]\ /\ [(\,a_{L(i+1)}\,a_{T(i)} - a_{L(i)}\,a_{T(i+1)}\,] & si\ (L, T_1)\ se\ encuentra\ en\ R_2 \\ T_1 / a_{T(n)} & si\ (L, T_1\ )\ se\ encuentra\ en\ R_3 \end{cases}$$

El producto marginal es:

$$Pmg\,(L) = \begin{cases} 1/\,a_{L(1)} & si\ L < L_1\ (Si\ (L,T)\ esta\ en\ R_1 \\ [(\,a_{T(i)} - a_{T(i+1)})]\ \ /\ \ [(\,a_{L(i+1)}\,a_{T(i)} - a_{L(i)}\,a_{T(i+1)}\,] & si\ (L, T)\ se\ encuentra\ en\ R_2 \\ 0 & si\ (L,T\ \ )\ se\ encuentra\ en\ R_3 \end{cases}$$

1.3.4 Los costes totales

Podemos determinar en este caso los costes mínimos asociados a cada nivel de producción. Para esto basta relacionar los costes asociados a las cantidades mínimas de insumos para obtener ciertos niveles de producción.

Si los precios de los factores están dados, si la producción de 1 unidad requiere de $a_{(i)L}$ de trabajo y $a_{(i)T}$ de tierra. La producción empleando solamente el $P_{(i)}$ estaría expresado por:

$$CTPL\,(\,q_{(i)} = 1) = a_{(i)L}\,w + a_{(i)T}\,r$$

Si $P_{(j)}$ es el proceso empleado el costo esta expresado por

$$CTPL\,(\,q_{(j)} = 1) = a_{(j)L}\,w + a_{(j)T}\,r$$

¿En qué casos emplearemos uno de los procesos, o cierta combinación de los procesos? La respuesta depende de los precios relativos. Para dar una respuesta, supongamos que el proceso $P_{(i)}$ es más "trabajo intensivo" que el $P_{(1)}$. Entonces, se puede probar que si el valor de m

$$m_{ij} = [\, a_{(i)T} - a_{(j)T} \,] \,/\, [\, a_{(i)L} - a_{(j)L} \,]$$

es tal que

$$\begin{aligned} m_{ij} &< w/r, && \text{entonces se emplear el } P_{(1)} \\ m_{ij} &> w/r, && \text{se emplear el } P_{(j)} \\ m_{ij} &= w/r && \text{el } P_{(i)}, \text{el } P_{(j)} \text{ o ambos.} \end{aligned}$$

Como son tales costos están asociados a niveles de producción de largo plazo, tales funciones de costos de largo plazo (CTLP).

En el corto plazo tenemos cierto factor fijo T_1, cuyo costo es rT_1. Asociado a tal factor fijo tenemos un costo fijo (CF). La única manera de incrementar la producción es empleando cantidades adicionales de mano de obra. Si queremos producir una unidad adicional del bien q, es necesario emplear adicionalmente $a_{L(i)}$ de L, a un costo unitario de $a_{L(i)}w$. El costo total de producir q unidades se puede expresar mediante la ecuación:

$$CTCP_{(q)} = rT_1 + w\, L_{(q)}$$

En particular:

$$CTCP_{(1)} = \begin{cases} r\,T_1 + w\, a_L\, q, \; si\; (L, T_1)\; en\; R_1 \\ [\, rT_1 + w\,[(\, a_{L(i+1)} + a_{T(i)} - a_{L(i)}\, a_{T(i+1)})\, q + (\, a_{L(i)} - a_{L(i+1)})\, T_1] \,/\, [(\, a_{T(i)} - a_{T(i+1)}\,] \\ q^*, \; para\; CT_{(q)} > CT_{(q^*)} \end{cases}$$

La forma de la curva de costos totales está estrechamente relacionada con los procesos de producción empleados; por lo tanto, con las proporciones factoriales que se utilizan en cada caso. En el primer tramo se emplea enteramente el primer proceso P_1, luego se pasa los procesos $P_{(1)}$ y $P_{(2)}$, ... $P_{(i)}$ y $P_{(i+1)}$. La curva de costos totales empieza a aumentar a una mayor tasa en el segundo tramo debido a que la cantidad del factor variable por unidad de producción aumenta a medida que se expande la producción. El resultado de las curvas de costos de corto plazo convexas es consecuencia de curvas de producto total cóncavas.

1.3.5 Los costos medios y marginales

Las funciones de costo medio y costo marginal de largo plazo consisten en las siguientes expresiones:

$$CTCP = \begin{cases} r\,T_1 / q + w\,a_{L(1)}\,,\ si\ (L, T_1)\ en\ R_1 \\ rT_1 / q + w\,[(\,a_{L(i+1)}\,a_{T(i)} - a_{L(i)}\,a_{T(i+1)}) + (\,a_{L(i)} - a_{L(i+1)})\,T_1 / q\,] \,/\, [(\,a_{T(i)} - a_{T(i+1)}\,] \\ q^*,\ para\ CMe_{(q)} > CMe_{(q^*)} \end{cases}$$

Esta ecuación expresa que en el largo plazo, el costo promedio de una unidad de q es w $a_{L(1)}$+r $a_{T(1)}$. Con la configuración de precios relativos que se asumió el proceso empleado es $P_{(1)}$.

Los costos marginales de corto plazo se expresan en las siguientes formulas:

$$CMgCP_{(q)} = \begin{cases} w\,a_L\,,\ si\ (L, T_1)\ en\ R_1 \\ w\,[(\,a_{L(2)}\,a_{T(1)} - a_{L(1)}\,a_{T(2)})\,] \,/\, [(\,a_{T(1)} - a_{T(2)}\,)] \\ si\ (L, T_1)\ en\ R_2 \\ q^*,\ para\ CT_{(q)} > CT_{(q^*)} \end{cases}$$

Se observa que el costo marginal de corto plazo es menor que el costo marginal de largo plazo, antes de llegar a R_3. La explicación es directa: para obtener una unidad adicional en el corto plazo es necesario solamente los requerimientos adicionales de L (y no de T, hasta T_1, ya que tenemos disponible), mientras que en el largo plazo necesitamos emplear tanto trabajo como tierra. Por lo tanto, para incrementar en 1 el nivel de producción, en el largo plazo necesitamos w*a_L+r*a_T, el cual obviamente es mayor que w*aL. Esto no sucede en la "región" de producción donde el producto marginal del factor es cero.

La curva de costo medio de corto plazo es decreciente y luego crece indefinidamente. Esto es así pues, llegado a ciertos niveles de producción cuando el trabajo es redundante mayores niveles de empleo se traducirán únicamente en aumentos en los costos y no en la producción, pues existen restricciones tecnológicas para esto.

1.4. Una digresión: El caso de infinitos procesos de producción primarios

En esta sección haremos una breve explicación de las consecuencias de incrementar el número de procesos primarios. Si el número de procesos primarios aumenta, intuitivamente se puede observar las isocuantas, las funciones de producción y de costo de corto plazo, se van configurando como funciones suaves tal como se muestra en los libros de texto y en el gráfico 12.1.

Sin embargo, conviene advertir las siguientes posibilidades:

(1) Aunque el número de procesos considerados sea infinito, las isocuantas pueden no ser "suaves" y diferenciables en todos los puntos del espacio de factores.

(2) Para que la isocuanta resulte en una curva "suavemente" diferenciable no es necesario que existan "infinitos procesos" en cierta vecindad finita. Puede no ser el caso, y aún ser la isocuanta una curva "suave".

Si asumimos que los precios de los factores y la tecnología están dados, isocuantas, curvas de producción y costos "suaves" satisfacen las siguientes relaciones:

(1) Si las isocuantas son convexas y el producto marginal de todos los factores es innegativo, entonces la curva de producción total de corto plazo es cóncava.

(2) Si la función de producción es cóncava, entonces la curva de costos tiene que ser convexa.

APENDICE: Acerca de la parametrización de la tecnología

Es frecuente representar directamente la tecnología por una función apropiada que reproduzca las propiedades teóricas que se asumen sobre la naturaleza de los procesos de producción. Es posible generar a través de un procedimiento constructivo, a partir de los procesos primarios de producción, la función de producción que relacione las cantidades de insumos empleados con el máximo nivel de producción obtenible.

Consideremos en principio el caso más simple, donde existen dos procesos primarios de producción: $P_{(1)}$ y P(2). Además asumiendo rendimientos constantes a escala, divisibilidad y aditividad, es posible construir conjunto de procesos derivados $P_{(1,2)}$. Este último proceso genera un cono convexo, que en nuestra exposición se ha denotado por R_2.

La producción está obviamente determinada si (L,T) pertenece a la región R_1 y R_3, como ya se señaló en el texto. La determinación de la función producción en R_2 es la que merece cierta explicación.

Si se quiere lograr la producción asociada al vector P = [q L T], entonces debemos hallar la combinación convexa $\lambda_{(1)}$ + (1-λ) $P_{(2)}$ tal que multiplicada k veces nos permite obtener el vector P. Esto es:

$$k\,(\,\lambda\, P_{(1)} + (1 - \lambda)\, P_{(2)}\,) = P\,[q\,]$$

A partir de este sistema de ecuaciones se puede encontrar la expresión del producto total cuando (L,T) se encuentra en R_2. De modo que, la función de producción tiene la siguiente expresión algebraica:

$$
q(L,T) = \begin{cases} L/\,a_{L(1)} & \text{si } (L,T) \text{ esta en } R_1 \\ [(a_{T(i)} - a_{T(2)})L - (a_{L(1)} - a_{L(2)})T\,] \,/\, [(a_{L(2)}\, a_{T(1)} - a_{L(1)}\, a_{T(2)}\,] & \\ \qquad \text{si } (L,T) \text{ se encuentra en el cono } R_2 & \\ T \,/\, a_{T(2)} & \text{si } (L,T\;) \text{ se encuentra en } R_3 \end{cases}
$$

La generalización al caso de n procesos primarios es directa.

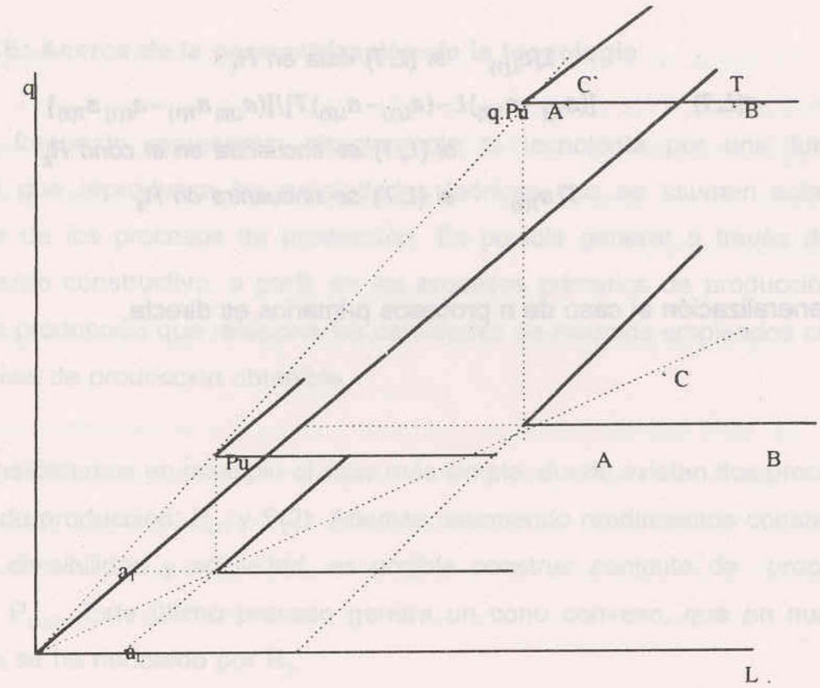


Gráfico 1.1

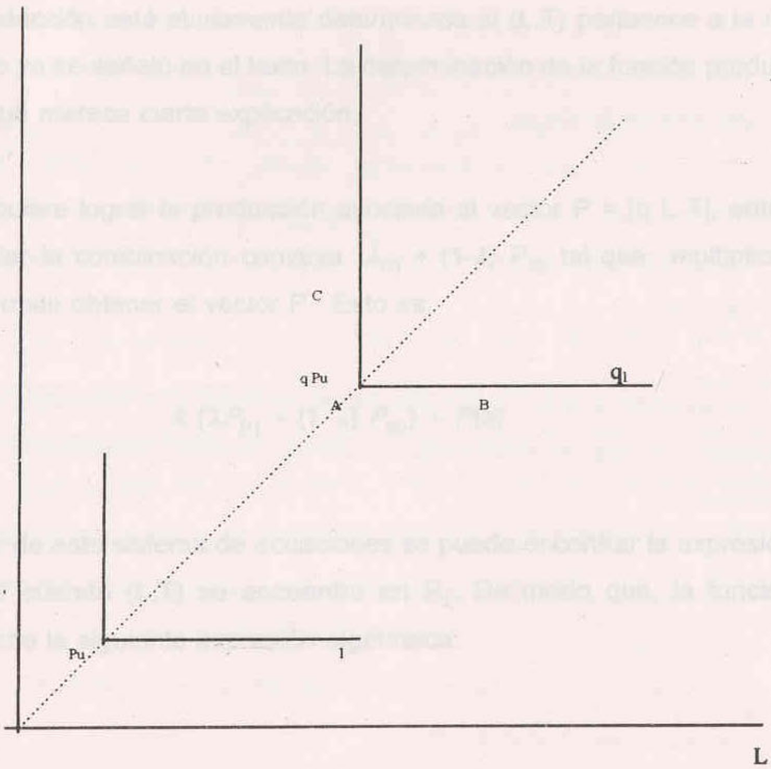


Gráfico 1.2

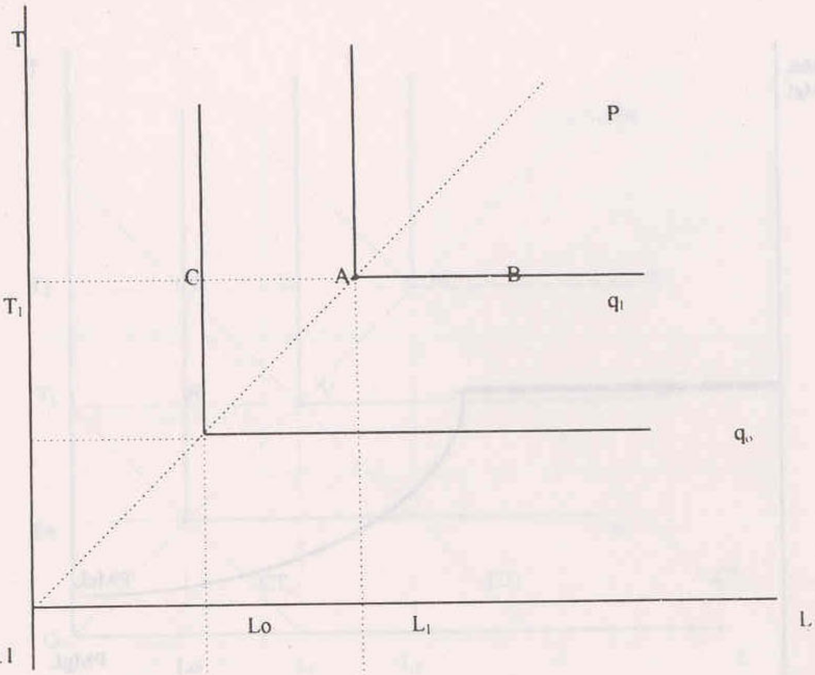
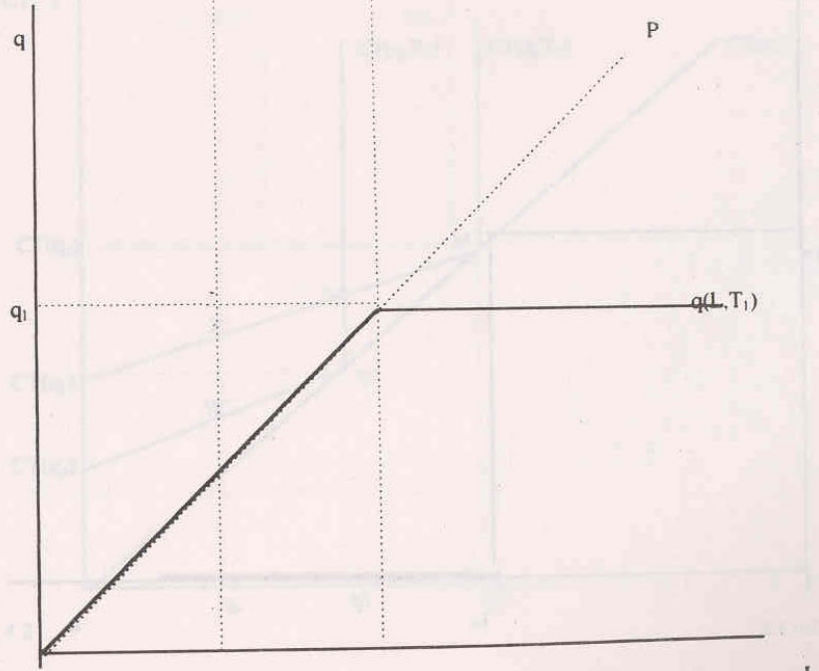


Gráfico 2.1



Gráficoo 2.2

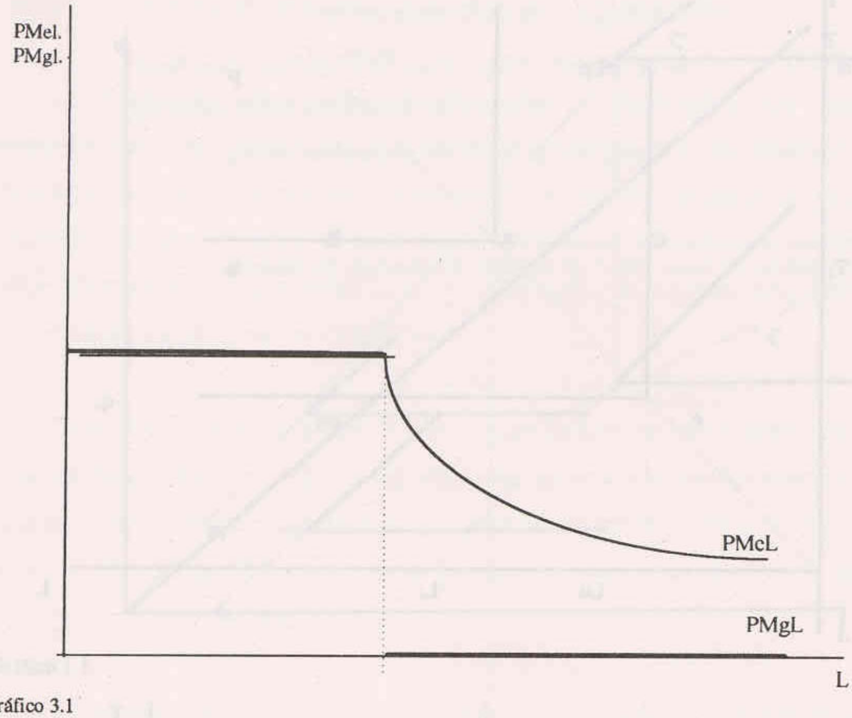


Gráfico 3.1

Gráfico 3.2

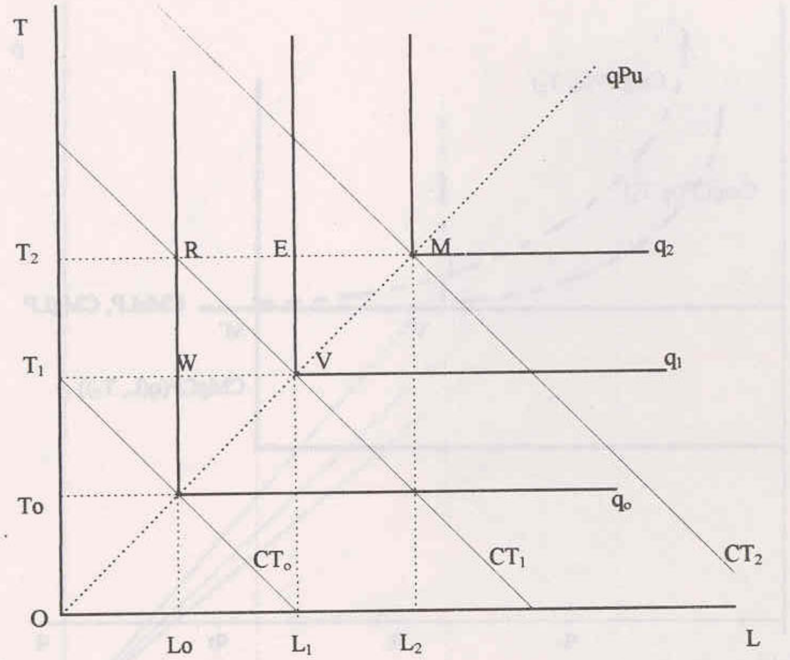


Gráfico 4.1

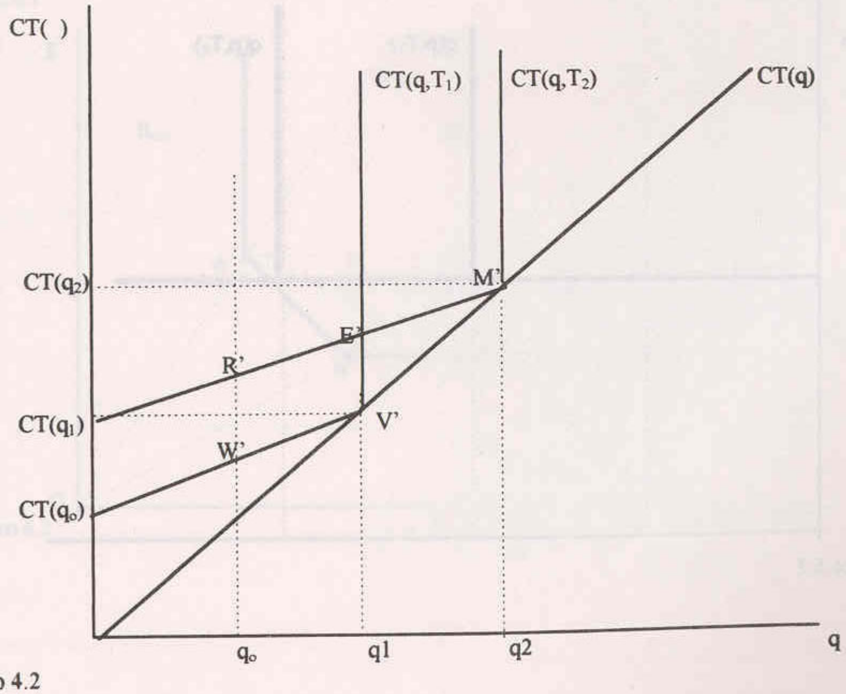


Gráfico 4.2

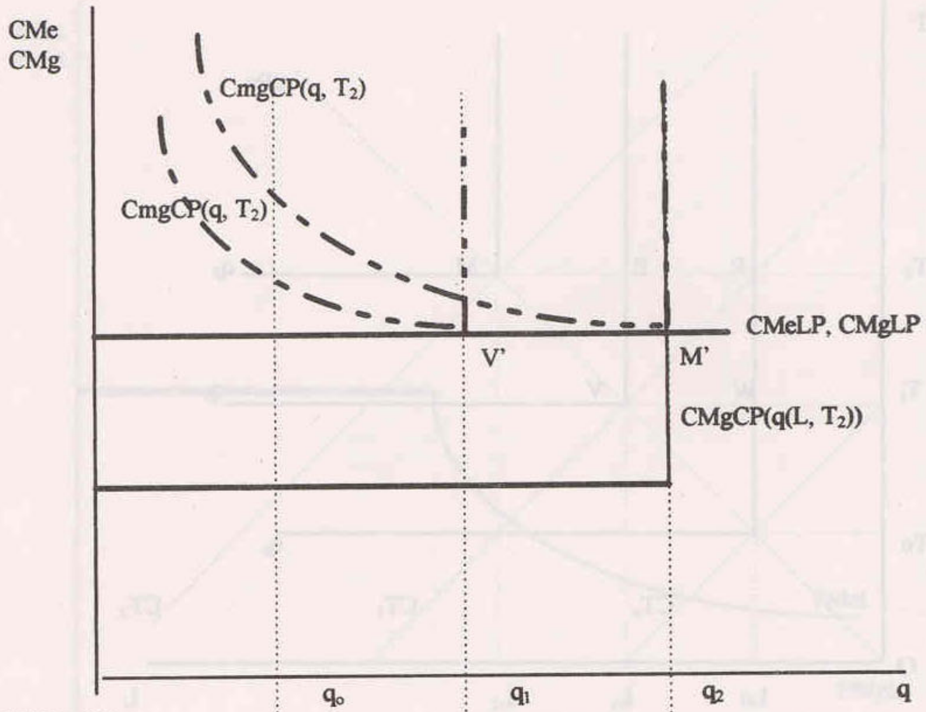


Gráfico 5.1

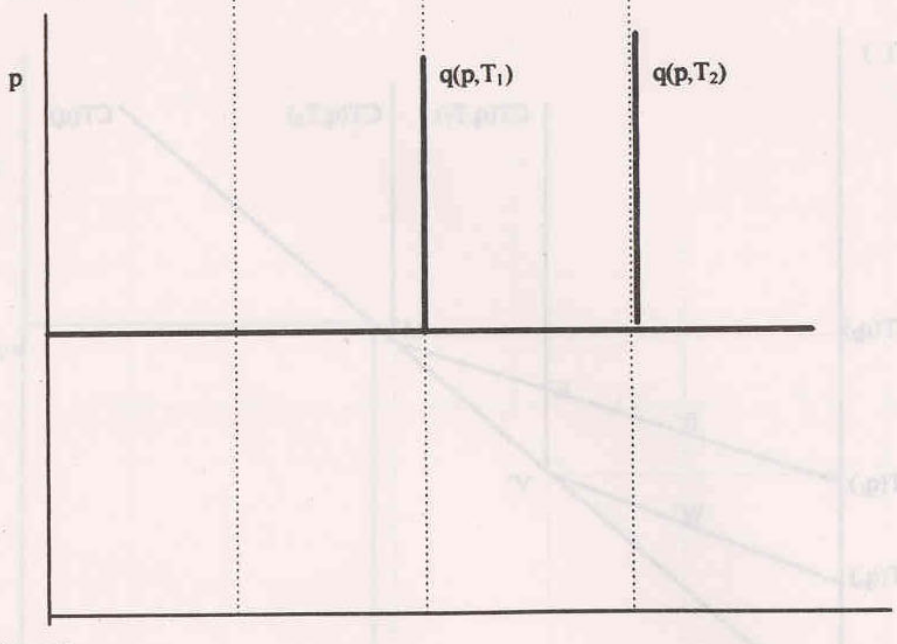


Gráfico 5.2

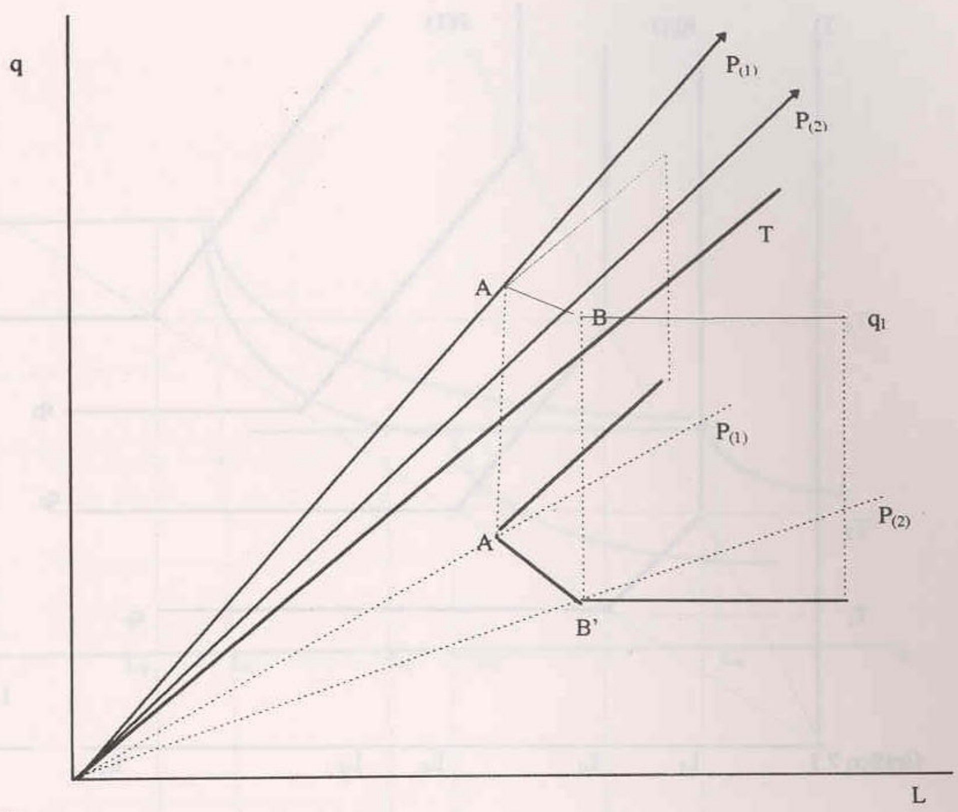


Gráfico 6.1

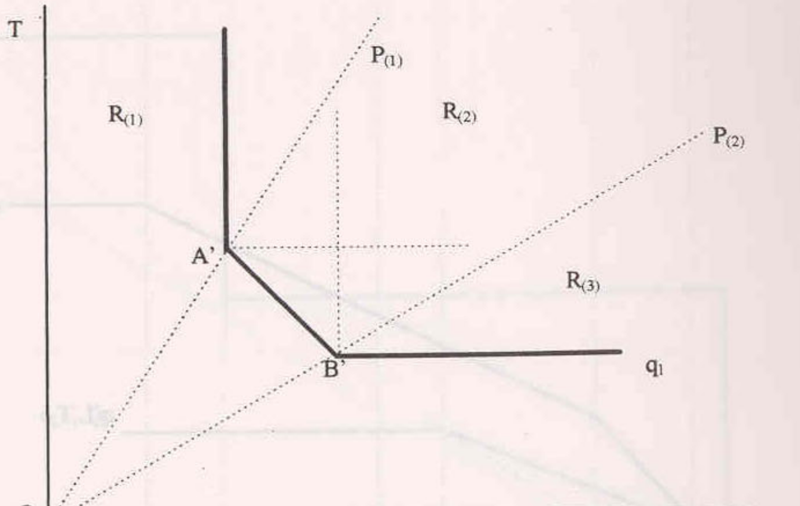


Gráfico 6.2

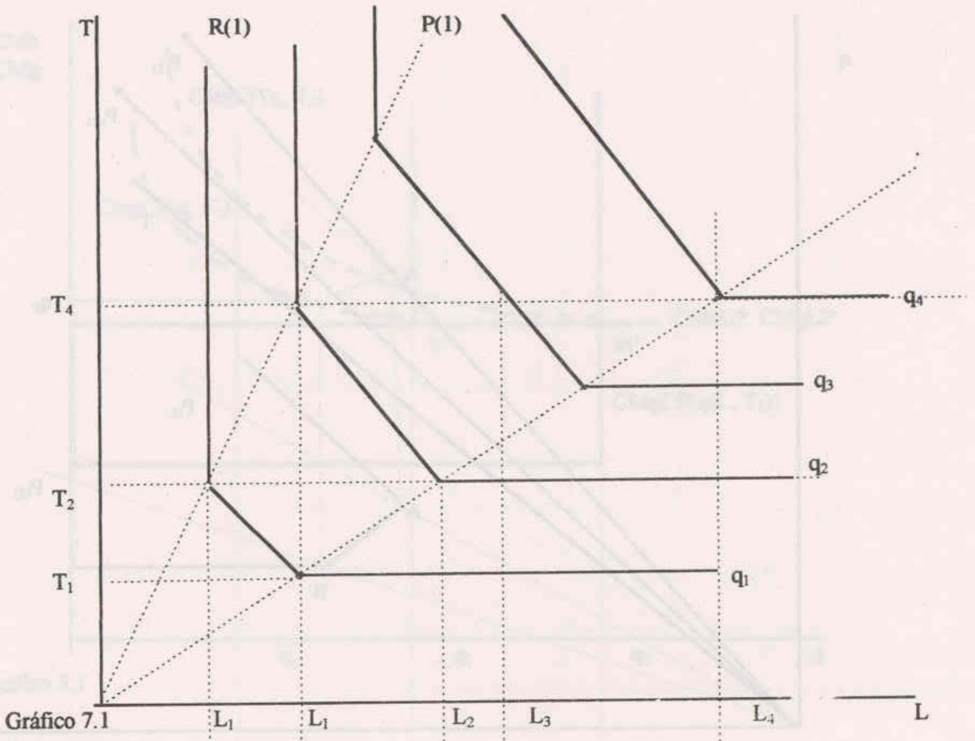


Gráfico 7.1

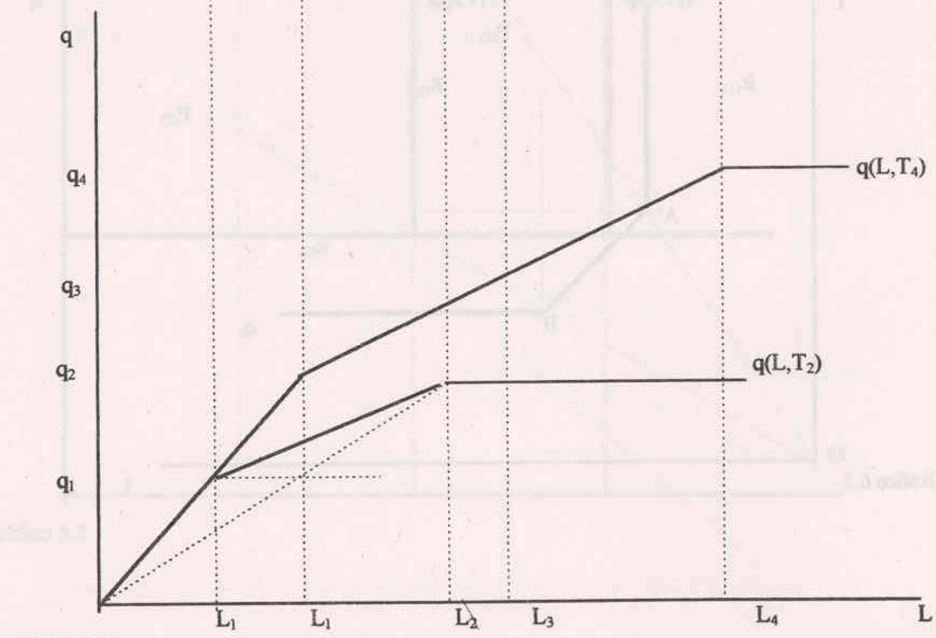


Gráfico 7.2

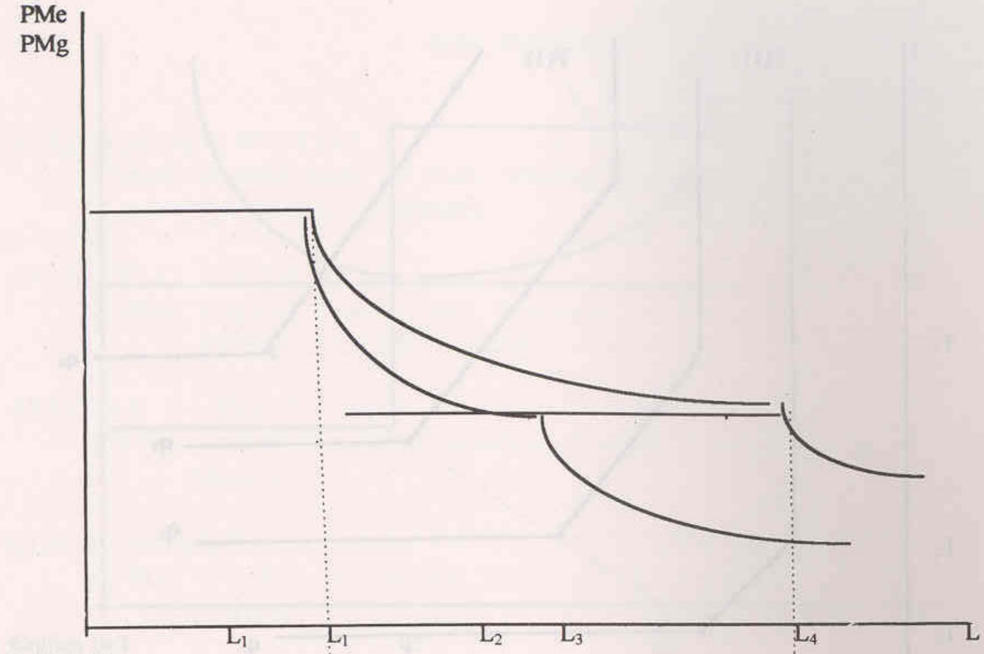


Gráfico 8.1

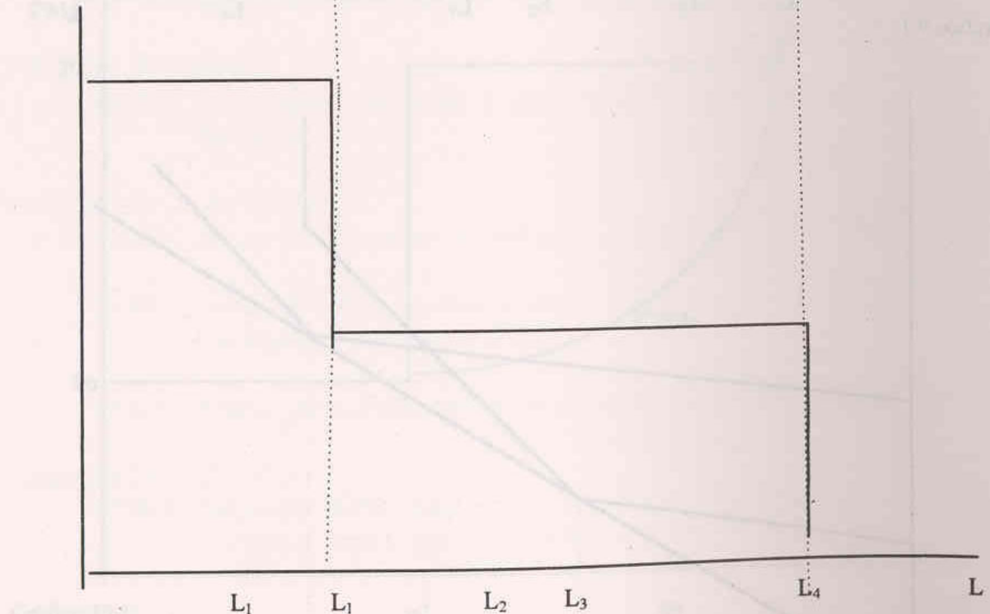


Gráfico 8.2

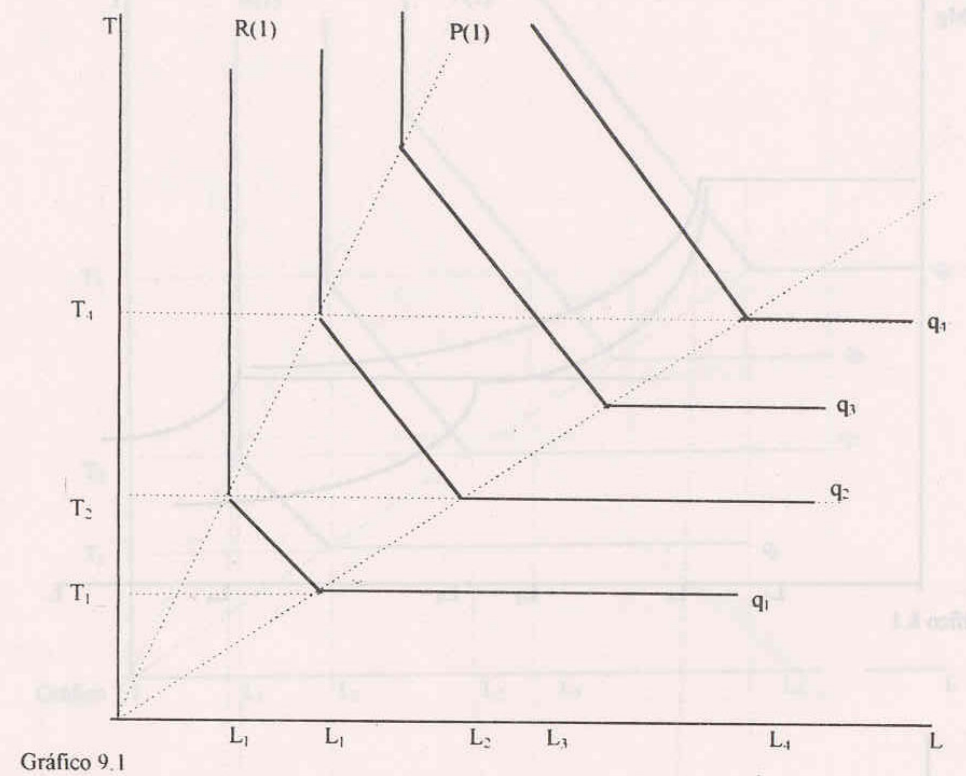


Gráfico 9.1

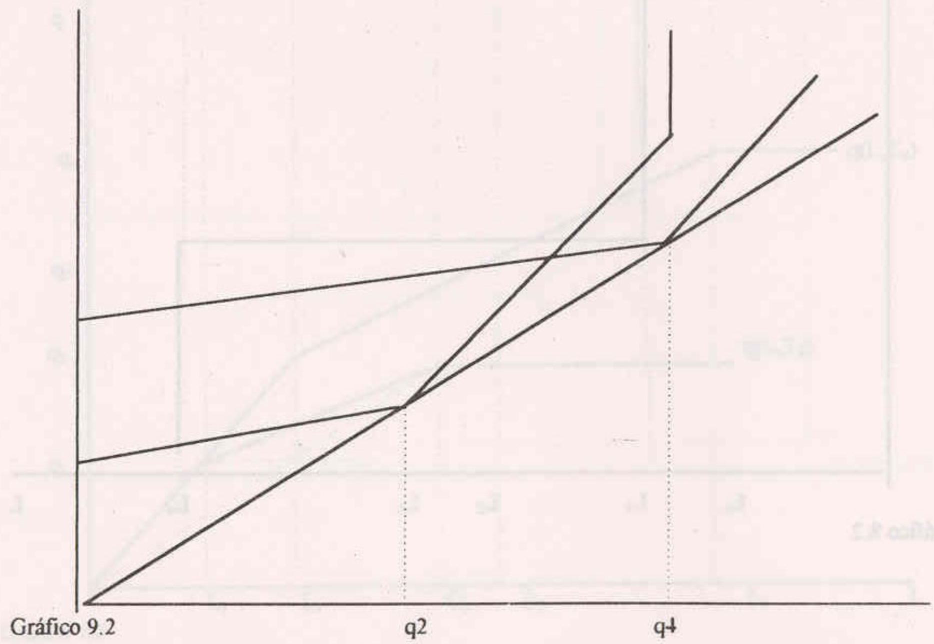


Gráfico 9.2

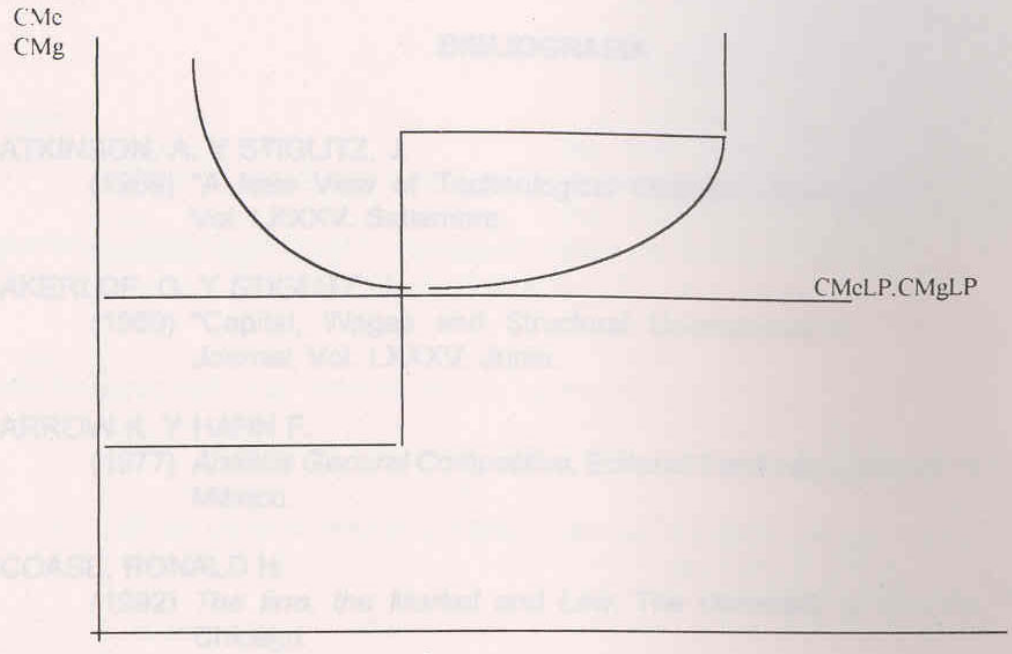


Gráfico 10.1

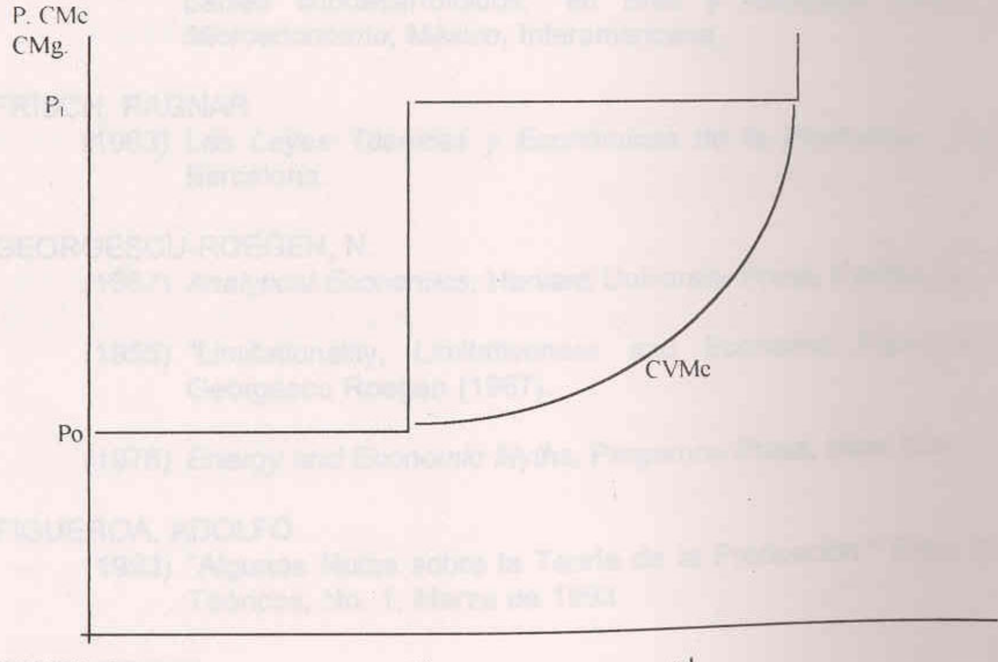


Gráfico 10.2

BIBLIOGRAFIA

ATKINSON, A. Y STIGLITZ, J.

(1969) "A New View of Technological Change," *The Economic Journal*, Vol. LXXXV. Setiembre.

AKERLOF, G. Y STIGLITZ, J.

(1969) "Capital, Wages and Structural Unemployment," *The Economic Journal*, Vol. LXXXV. Junio.

ARROW K. Y HAHN F.

(1977) *Análisis General Competitivo*, Editorial Fondo de Cultura Económica, México.

COASE, RONALD H.

(1992) *The firm, the Market and Law*, The University of Chicago Press, Chicago.

ECKAUS, RICHARD

(1955) "El Problema de la proporciones en el uso de los factores en los países subdesarrollados," en Breit y Hochman (eds.) (1973) *Microeconomía*, México, Interamericana.

FRISCH, RAGNAR

(1963) *Las Leyes Técnicas y Económicas de la Producción*, Sagitario, Barcelona.

GEORGESCU-ROEGEN, N.

(1967) *Analytical Economics*, Harvard University Press, Cambridge.

(1955) "Limitationality, Limitativeness and Economic Equilibrium," en Georgescu Roegen (1967).

(1976) *Energy and Economic Myths*, Pergamon Press, New York.

FIGUEROA, ADOLFO

(1993) "Algunas Notas sobre la Teoría de la Producción," Serie Ensayos Teóricos, No. 1, Marzo de 1993.

HAHN, FRANK

(1971) *Readings in the Theory of Growth*, St. Martin Press, London.

KREPS, D.

(1990) *A course in Microeconmic Theory*, Princeton University Press, NJ.

LEONTIEF, WASSILY

(1986) *Input-Output Economics*, Oxford University Press, New York.

(1986) *The Structure of American Economy 1919-1939*, Oxford University Press, New York, 1951. (Hay edición en español).

MADDEN, P.
(1986) *Concavidad y Optimización en Microeconomía*, Alianza Editorial, Madrid.

NIKAIDO, H.
(1978) *Métodos Matemáticos del Análisis Económico Moderno*, Ed. Vicens-Vives, Barcelona.

ROEMER, JOHN
(1982) *A General Theory of Explotation and Class*, Harvard University Press, Cambridge.

STIGLER, GEORGE
(1968) *Ensayos sobre la teoría de los precios*, Ed. Aguilar, Madrid.

VON NEUMANN, J.
(1938) "A Model of General Economic Equilibrium" (1938), reimpreso en F. Hanhn (1971).

VINER, JACOB
(1931) "Curvas de Coste y Curvas de Oferta," en Stigler G. y Boulding K. (eds.) (1968) *Ensayos sobre la teoría de los Precios*, Ed. Aguilar, Madrid.

PUBLICACIONES

Libros

Adolfo Figueroa (1993)
Crisis Distributiva en el Perú. Pontificia Universidad Católica del Perú - Fondo Editorial.

Mario D. Tello (1993)
Mecanismos Hacia el Crecimiento Económico. Fondo Editorial. Pontificia Universidad Católica del Perú. Consorcio de Investigación Económica.

Máximo Vega-Centeno (1993)
Desarrollo Económico y Desarrollo Tecnológico. Pontificia Universidad Católica del Perú - Fondo Editorial.

Adolfo Figueroa (1992)
Teorías Económicas del Capitalismo. Fondo Editorial. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Serie Documentos de Trabajo

No. 115, Gloria Canales, "Dolarización y Fragilidad Financiera en el Perú". Noviembre, 1993.

No. 116, Oscar Dancourt, Jorge Rojas "El Perú desde 1990: El Fin de la Restricción Externa". Noviembre, 1993.

No. 117, Oscar Dancourt, "Sobre el Retraso Cambiario y la Repatriación de Capitales en una Economía Dolarizada". Noviembre, 1993.

No. 118, Alan Fairlie Reinoso, "Una Lectura Peruana del Plan de Convertibilidad Argentino". Febrero, 1994.

No. 119, Felix Jiménez, "El dinero y Relación con los Precios: Del Monetarismo Neoclásico al Tratado del Dinero de Keynes". Setiembre, 1994.

No. 120, Felix Jiménez, "Dinero, Inversión y Financiamiento: Apuntes sobre el Discurso Teórico de J.M. Keynes". Setiembre, 1994.

No. 121, Cecilia Garavito, "Oferta de Trabajo en Lima Metropolitana: 1989-1992," Mayo 1995.

No. 122, Waldo Mendoza, "Dinero, Tipo de Cambio y Expectativas," Setiembre 1995.

Serie Informes de Coyuntura

Informe de Coyuntura: Perú: 1994. Oscar Dancourt, Waldo Mendoza y Lucía Romero, Marzo 1995.

Informe de Coyuntura: Primer Trimestre de 1995. Oscar Dancourt, Waldo Mendoza y Lucía Romero, Mayo 1995.

Informe de Coyuntura: Segundo Trimestre de 1995. Oscar Dancourt, Waldo Mendoza y Lucía Romero, Julio 1995.

Informe de Coyuntura: Tercer Trimestre de 1995. Oscar Dancourt y Waldo Mendoza, Julio 1995.