CAPITULO 4: ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA MECANICA DE FLUIDOS

Las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos y que sirven para resolver numerosos problemas que se presentan en la práctica son:

* la ecuación de continuidad
* la ecuación de la energía
* la ecuación de cantidad de movimiento
* la ecuación del momento de la cantidad de movimiento.

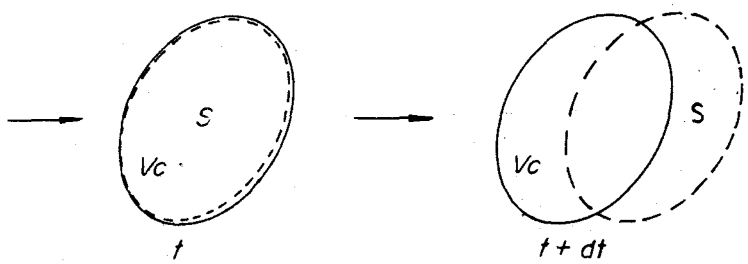
4.1 Concepto de sistema y volumen de control

El método que se emplea para deducir estas ecuaciones es el método de Euler, que consiste en lo siguiente:

1º adoptar una porción fija del espacio dentro del seno fluido de forma y tamaño constantes. Esta porción de espacio se llama volumen de control y su delimitación superficie de control;

2º escoger una porción de masa fluida de modo que en un instante dado coincida con el volumen de control. Esta porción de masa se llama sistema y su delimitación contorno.

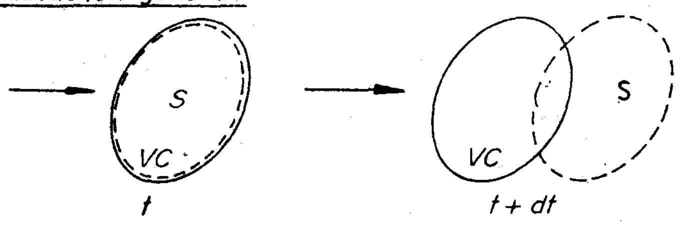
3º considerar la coincidencia en un instante t, el sistema desplazado un dt después y aplicarle los principios de la mecánica.



Las ecuaciones que se deducen en este capítulo son aplicables a los fluidos reales, de manera que rigen tanto para flujo laminar como para flujo turbulento y tanto para flujo rotacional como irrotacional.

4.2 Ecuación de continuidad

4.2.1 Formulación general



$m_{VC\ t}$ ... masa en el volumen de control en el momento t.

$m_{VC(t+dt)}$ ... masa en el volumen de control en el momento t+dt

dm_s ... masa que ha salido del VC en el intervalo dt.

dm_e ... masa que ha entrado en el VC en el intervalo dt.

la masa en el sistema permanece invariable:

$$m_{VC\,t} = m_{VC(t+dt)} + dm_s - dm_e$$

dividiendo entre dt y ordenando:

$$\frac{m_{VC(t+dt)} - m_{VC\,t}}{dt} = \frac{dm_e - dm_s}{dt} \quad \ldots\ (16)$$

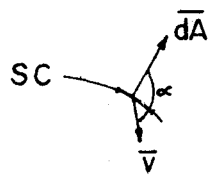
es decir, "la rapidez de variación dela masa en el volumen de control es igual al caudal neto de masa entrante".

El primer miembro es igual a:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \, d\mathcal{V}_o = \int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\,V_o$$

En el segundo miembro:

$$\frac{dm_s}{dt} = \int_{As} \rho\, v \cos\alpha \; d\,As$$



$$\frac{dm_e}{dt} = -\int_{Ae} \rho\, v \cos\alpha \; d\,Ae$$

El caudal neto de masa entrante es $\dfrac{dm_e - dm_s}{dt} = -\int_{SC} \rho \; \overline{v} \,.\, d\overline{A}$

Reemplazando en (16):

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\,V_o = -\int_{SC} \rho \; \overline{v} \,.\, d\overline{A} \quad \ldots\ (17)$$

que es la expresión más amplia de la ecuación de continuidad para un volu_ men de control.

Para movimiento permanente se anula el primer miembro de la (17):

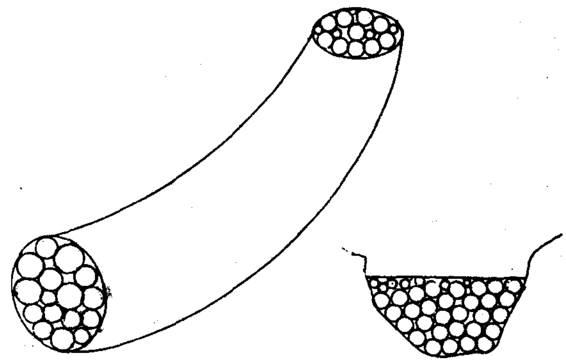
$$\int_{SC} \rho \; \overline{v} \,.\, d\overline{A} = 0 \quad \ldots\ (18)$$

para un tubo de flujo, como el fluido no atraviesa las paredes sólo quedan las áreas extremas,

$$\rho_2\, v_2\, dA_2 - \rho_1\, v_1\, dA_1 = 0$$

es decir: $\rho_1\, v_1\, dA_1 = \rho_2\, v_2\, dA_2$ .... (19)

para una tubería o un canal se puede considerar que el flujo está conformado por un conjunto de tubos de flujo, de modo que se puede usar en cada sección una ρ constante y una velocidad media también constante.



$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \quad \ldots \qquad (20)$$

por definición de caudal: $\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 \quad \ldots \qquad (21)$

es decir, el caudal en masa se mantiene constante.

Si además el fluido es incompresible:

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 = cte \quad \ldots \qquad (22)$$

que es la forma más simple de la ecuación de continuidad en flujo unidimensional, muy útil en problemas de tuberías y canales.

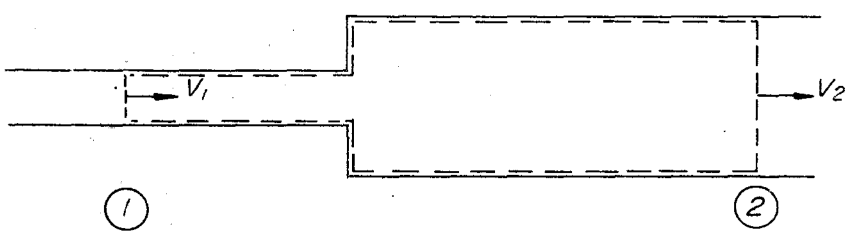
Comentario.- Para un fluido incompresible (ρ constante), la ecuación de continuidad del movimiento permanente y no permanente es, según la (17):

$$\int_{SC} \overline{v} \cdot d\overline{A} = 0 \quad \ldots \qquad (23)$$

de manera que de aquí se puede también derivar la (22).

4.2.2 Ejemplos de aplicación

Ejemplo 36.- Una tubería de 60 cm de diámetro está seguida de otra de 90 cm de diámetro. Si en la sección 1 la velocidad media del agua es de 1 m/sg, hallar el caudal y también la velocidad en la sección 2.



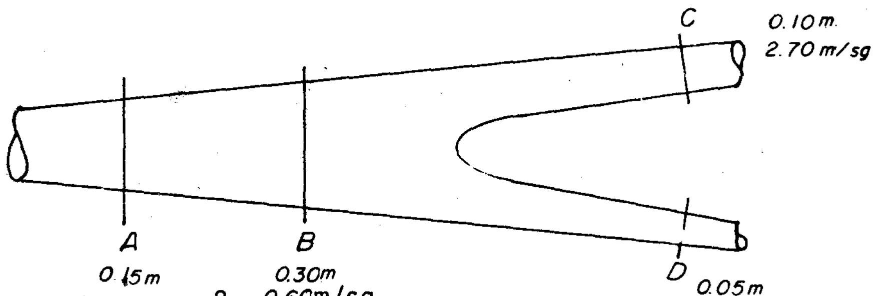
según la (22): $Q = A_1V_1 = A_2V_2 = \text{constante}$

es decir, $Q = A_1V_1 = \dfrac{\pi D_1^2}{4} V_1 = 0.283\ m^3/sg$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = 0.44\ m/sg.$$

Ejemplo 37.- La figura muestra la bifurcación de una tubería según los diámetros indicados. El agua escurre de izquierda a derecha

Si la velocidad media en B es de 0.60 m/sg y en C es de 2.70 m/sg, calcular las velocidades medias en A y D y el gasto en cada ramal.



$$Q_B = A_B\,V_B = \frac{\pi\,D_B^2}{4} \times V_B = \quad 0.042 \quad m^3/sg$$

$$V_A = \frac{Q_B}{A_A} = \quad 2.38 \quad m/sg$$

$$Q_C = A_C V_C = \quad 0.021 \quad m^3/sg$$

$$Q_D = Q_B - Q_C = \quad 0.021 \quad m^3/sg$$

$$V_D = \frac{Q_D}{A_D} = \quad 10.70 \quad m/sg$$

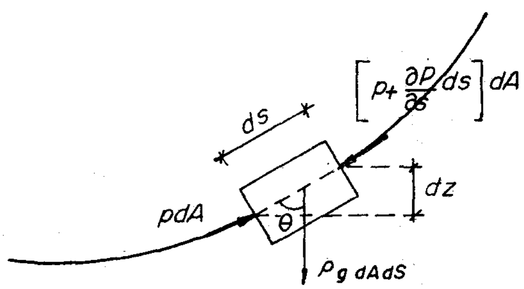
4.3 Ecuación de la energía

4.3.1 Ecuación del movimiento a lo largo de una l.c.

En la figura una partícula de fluido de forma prismática se está moviendo a lo largo de una l.c. en la dirección +s y su masa es ρ . dA . ds Para simplificar se supone líquido perfecto, es decir sin viscosidad, por lo que no hay fuerzas de rozamiento. La fuerza de cuerpo es ρg . dA . ds Las fuerzas de superficie son:

$$p\,dA \quad y \quad \left(p + \frac{\partial p}{\partial s}\,ds\right) dA$$

ya que cualquier otra fuerza en la superficie del elemento es normal a s.



Segunda ley de Newton: $\qquad \Sigma F_s = dm \,.\, a_s$

reemplazando:

$$p\,dA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s}\,ds\right) dA - \rho g\,dA\,ds\cos\theta = \rho\,dA\,ds \,.\, a_s$$

dividiendo entre la masa de la partícula y simplificando:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\cos\theta + a_s = 0$$

de la figura: $\cos\theta = \frac{dz}{ds}$

según la (7): $a_s = v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t}$

reemplazando: $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{\partial z}{\partial s} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$

Para flujo permanente:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g\frac{\partial z}{\partial s} + v\frac{\partial v}{\partial s} = 0$$

ahora p, z y v son sólo funciones de s:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds} + g\frac{dz}{ds} + v\frac{dv}{ds} = 0$$

$$\frac{dp}{\rho} + g\,dz + v\,dv = 0 \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

que es la ecuación de Euler del movimiento a lo largo de una l.c. para:

* líquido perfecto, sin viscosidad
* flujo permanente.

4.3.2 Ecuación de Bernoulli

Se obtiene integrando la (24) para fluido incompresible (ρ constante):

$$gz + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{constante}$$

dividiendo entre g:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{constante}$$

es decir, $$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \quad \ldots \quad (25)$$

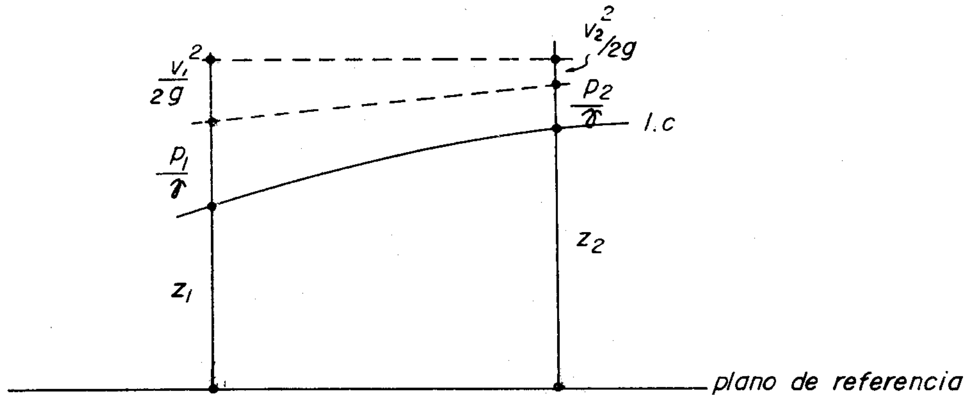
que es la ecuación de Bernoulli para una línea de corriente, en el flujo permanente del líquido perfecto e incompresible. Cada término tiene unidades de energía por unidad de peso, es decir kg-m/kg. Los tres términos se consideran como energía utilizable.

z ... energía potencial del fluido por unidad de peso medida a partir de un nivel arbitrario llamado plano de referencia;

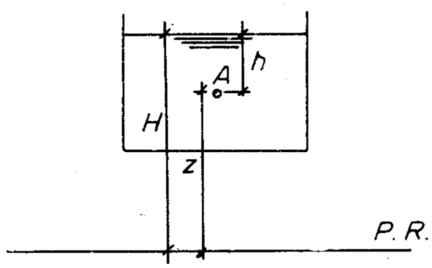
$\frac{v^2}{2g}$ ... energía cinética del fluido por unidad de peso;

$\frac{p}{\gamma}$ ... energía de presión del fluido por unidad de peso.

La representación gráfica es:



Por resultar de interés práctico se va a demostrar que en un depósito lleno de líquido la energía por unidad de peso es la misma en todos los puntos.



para un punto cualquiera A :

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{cte.}$$

$$z + h + 0 = \text{cte.}$$

$$H = \text{cte.}$$

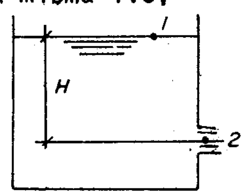
es decir, para todos los puntos la suma de las tres energías por unidad de peso es H.

Otra observación importante se desprende de la (25):

$$(z_1 - z_2) + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = 0$$

es decir, en realidad lo que interesa son las diferencias de energía por unidad de peso entre dos puntos, de tal manera que no importa la ubicación del plano de referencia ni tampoco el origen de medición de las presiones.

Comentario.- Cuando se trata de la aplicación de la ecuación de Bernoulli en un depósito, los puntos 1 y 2 pueden elegirse arbitrariamente sin necesidad de que estén en una misma l.c,

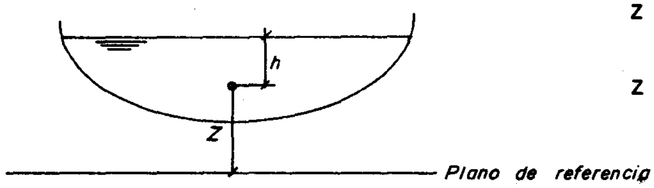


Cuando se trata de gases sometidos a muy escasa presión puede aplicarse todavía la ecuación de Bernoulli con el valor medio del peso específico γ.

Para flujo no permanente con un cambio muy lento de las variables hidráulicas, tal como en el vaciado de un gran depósito, puede aplicarse la ecuación de Bernoulli sin error apreciable.

También, la ecuación de Bernoulli puede utilizarse en el estudio de problemas de líquidos viscosos reales, ignorando en un primer momento la viscosidad para corregir después la formulación teórica obtenida mediante un coeficiente determinado experimentalmente.

Por último, así como se ha obtenido en 4.3.1 la ecuación del movimiento en la dirección tangencial s, se puede también obtener la ecuación del movimiento en la dirección normal n. Cuando se hace esto se llega a la importante conclusión de que no obstante estar el líquido en movimiento, la presión en una vertical se distribuye de manera hidrostática.



$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{constante}$$

$$z + h = \text{constante}$$

4.3.3 Formulación general

La ecuación de Bernoulli es:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$

válida para una l.c., en flujo permanente, de un fluido ideal incompresible. Cada término tiene unidades de energía por unidad de peso y los tres términos se refieren a energía utilizable.

De considerarse la viscosidad en el análisis de 4.3.1 y 4.3.2, aparecería un término adicional en función del esfuerzo de corte τ que representaría la energía por unidad de peso empleada para vencer las fuerzas de fricción. Este término, por razones de orden práctico se puede expresar e interpretar del modo que sigue:

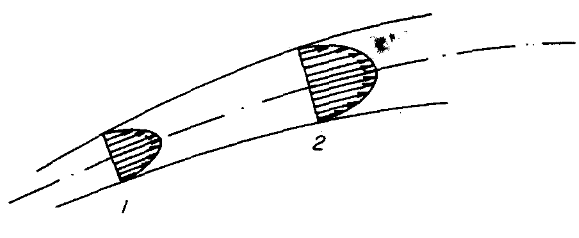
$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} - h\,p_{1-2} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \qquad \dots.\ (26)$$

$h\,p_{1-2}$ ... pérdida de energía por unidad de peso $(\frac{kg\text{-}m}{kg})$.

La (26) viene a resultar así la ecuación de la energía para una l.c. Se lee "la energía total por unidad de peso en 1 menos la pérdida de energía es igual a la energía total por unidad de peso en 2".

Para una tubería se puede considerar:

* una l.c. coincidente con su eje;
* que los valores de z, p y γ son representativos de cada sección;
* que el valor de v en esta l.c. no es representativo de las velocidades en la sección;



* que conviene utilizar como valor representativo de estas velocidades el valor medio V (velocidad media), debiendo en consecuencia reemplazarse:

$$\frac{v^2}{2g} \quad \text{por} \quad \alpha \cdot \frac{V^2}{2g}$$

reemplazando en la (26):

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} - \sum_1^2 hp = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} \quad .... \quad (27)$$

que es la ecuación de la energía para una tubería, en flujo permanente de un fluido real viscoso, incompresible. El factor α se llama coeficiente de Coriolis y su valor depende de la distribución de velocidades en la sección. Cuando no aparece al lado de la altura de velocidad media es porque se supone igual a la unidad.

Es costumbre referirse a los términos de la (27) indistintamente como alturas, cargas o energías:

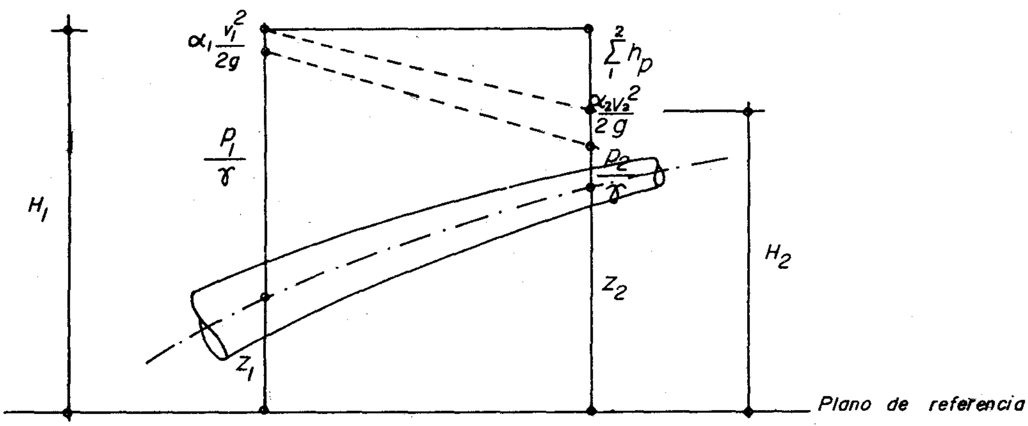
z ... carga o energía potencial

$\frac{p}{\gamma}$ ... carga o energía de presión

$\alpha \frac{V^2}{2g}$ ... carga o energía cinética

$\sum_1^2 hp$ ... pérdida de carga o energía

Es costumbre también referirse a la ecuación (27) como la ecuación de Bernoulli.
La representación gráfica de la ecuación (27) es:



La forma simplificada de la ecuación (27) es:

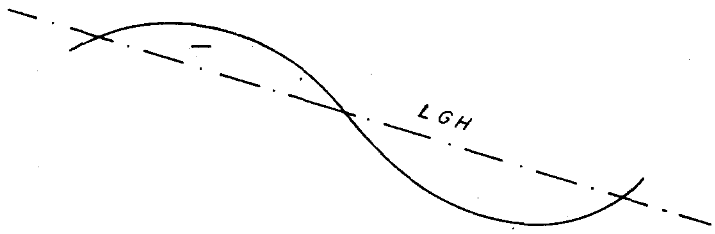
$$H_1 - \sum_1^2 hp = H_2$$

H ... carga o energía total

al término $z + \frac{p}{\gamma}$ se llama altura piezométrica; la línea de puntos superior es la línea de altura totales o línea de energía (LE) y la inferior la línea de altura piezométrica o línea de gradiente hidráulico (LGH); la distancia entre ambas líneas es la altura de velocidad.

(estrictamente ni la LE ni la LGH son rectas, pero es común suponerlas como tales, sobre todo tratándose de conducciones largas y tendidas sin ondulaciones fuertes en su perfil longitudinal)

La distancia vertical del eje de la tubería a la LGH representa la altura de presión. De modo que si como ocurre a veces, la LGH queda en algún tramo por debajo de la tubería, en ese tramo la presión relativa es negativa, existe un vacío parcial y se puede presentar el fenómeno de cavitación (apartado 1.7). En la práctica se toman medidas precautorias.



La pérdida de energía que se produce en una conducción (tubería o canal) y que en las fórmulas se indica como:

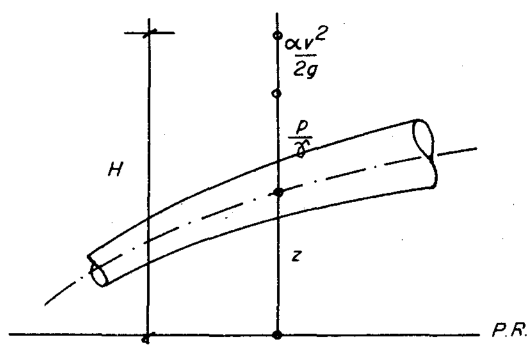
$$\sum_{1}^{2} hp$$

puede deberse sólo al efecto de la fricción o también a pérdidas localizadas en algunas singularidades de la conducción (cambio en la sección, cambio en la dirección, válvulas y compuertas, etc). Estas pérdidas se llaman locales y en tuberías se acostumbra expresarlas en la forma $K \frac{V^2}{2g}$, donde el coeficiente K depende de las características de cada singularidad. - No conviene darles a estas pérdidas el nombre de menores con que aparecen en algunos libros, porque a veces son tanto o más significativas que las motivadas por la fricción.

Potencia de una corriente

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g}$$

representa la carga total o energía total por unidad de peso en una sección, con respecto a un plano de referencia $(m, \frac{kg\text{-}m}{kg})$.



γQ , representa el peso de líquido que pasa por la sección en la unidad de tiempo $(\frac{kg}{sg})$.

γQH , representará la energía por unidad de tiempo, es decir la potencia de la corriente con respecto al plano de referencia $(\frac{kg\text{-}m}{sg})$

por eso: Pot $= \gamma \; Q \; H$

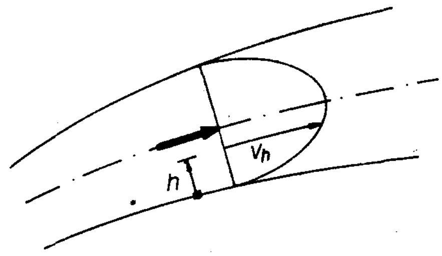
Expresión del coeficiente de Coriolis (α)

En una l.c.,

energía cinética por unidad de peso $= \frac{v_h^2}{2g}$

potencia que le corresponde $= \gamma \, d\,Q \,.\, \frac{v_h^2}{2g}$

$= \gamma \, v_h \, dA \,.\, \frac{v_h^2}{2g}$



potencia de toda la corriente $= \int_A \frac{\gamma}{2g} \, v_h^3 \, dA$

En toda la corriente,

energía cinética por unidad de peso utilizando la velocidad media $= \frac{V^2}{2g}$

potencia que le corresponde $= \gamma \, Q \, \frac{V^2}{2g}$

$= \gamma \, A \, V \,.\, \frac{V^2}{2g}$

$= \frac{\gamma}{2g} \, A \, V^3$

potencia real = potencia corregida $= \alpha \, \frac{\gamma}{2g} \, A \, V^3$

Igualando las dos expresiones:

$$\alpha \, \frac{\gamma}{2g} \, A \, V^3 = \int_A \frac{\gamma}{2g} \, v_h^3 \, dA$$

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v_h}{V}\right)^3 dA$$

el valor de α depende, como se ve, de la distribución de velocidades en la sección. Cuando no se indica su valor, como ocurre en muchas situaciones prácticas, es que se está suponiendo $\alpha = 1$.

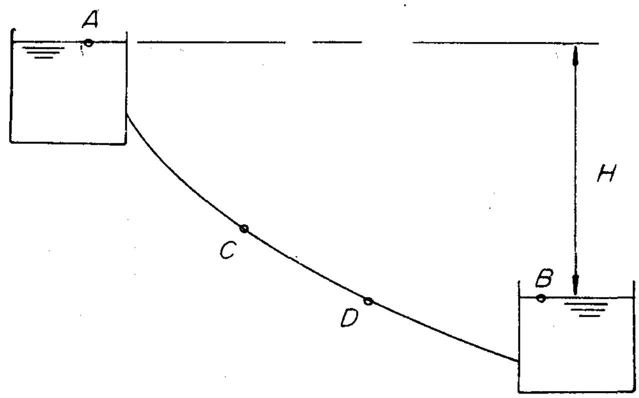
LE y LGH confundidas.- En ocasiones, sobre todo en tuberías de gran extensión o "tuberías largas", el valor de la carga de velocidad

$$\alpha \, \frac{V^2}{2g}$$

es muy pequeño al lado de las otras cargas.
En tal caso la carga de velocidad puede ignorarse y resultan confundiéndose la LE y la LGH.

Descarga entre dos depósitos.- En el esquema, H es el desnivel entre los depósitos; L y D son datos de la tubería en la cual suponemos instaladas dos válvulas C y D.

Escribiendo la ecuación de la energía desde $\overset{x}{A}$ hasta $\overset{x}{B}$ tendremos:



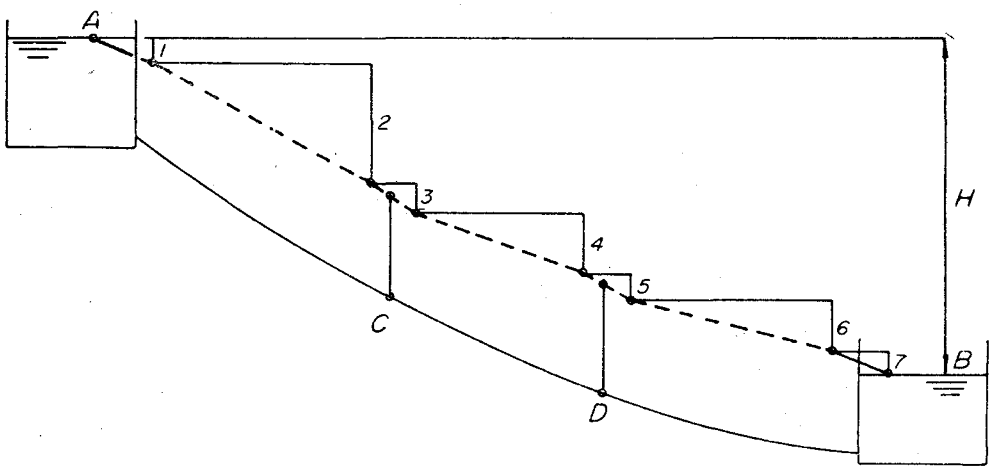
$$\left(Z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \alpha_A \frac{V_A^2}{2g}\right) - \sum_A^B hp = Z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \alpha_B \frac{V_B^2}{2g}$$

$$Z_A + 0 + 0 - \sum_A^B hp = Z_B + 0 + 0$$

$$Z_A - Z_B = \sum_A^B hp$$

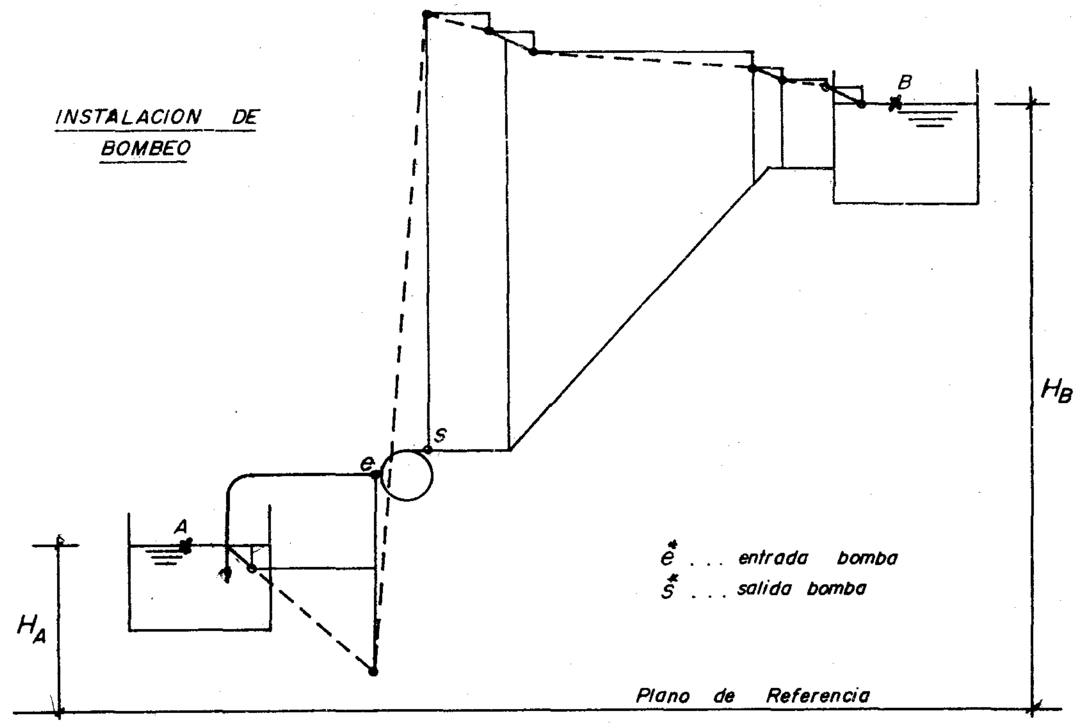
$$H = \sum_A^B hp$$

decir, el flujo se acomoda y se produce una descarga Q de tal magnitud que la carga disponible H resulta igual a la suma de todas las pérdidas (entrada tanque-tubería, fricción, válvula C, válvula D y salida tubería-tanque). H es la carga que produce la descarga Q. El esquema detallado de la LE es:



1 ... pérdida tanque-tubería
3 ... pérdida válvula C
5 ... pérdida válvula D
7 ... pérdida tubería-tanque
2, 4, 6 ... pérdida por fricción

<u>Instalación de bombeo</u>.- El esquema es autoexplicativo.



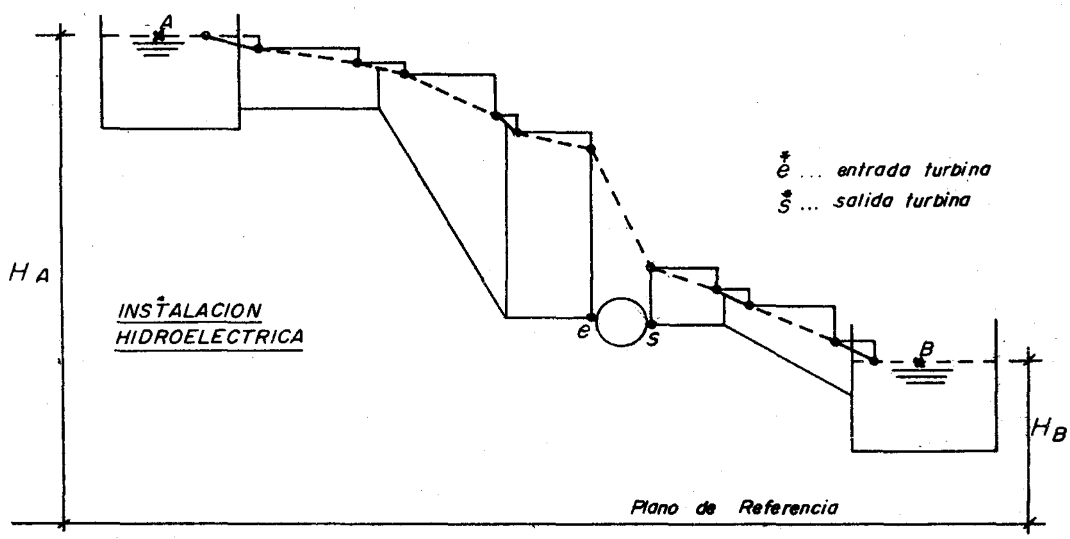
La ecuación de la energía, escrita entre A y B, resulta:

$$H_A - \sum_{A}^{e} hp + H_{es} - \sum_{s}^{B} hp = H_B$$

en la que : H_{es} = carga neta que el agua recibe de la bomba

por lo tanto: Pot = γ Q H_{es} = potencia neta que recibe el agua.

Instalación hidroeléctrica.- El esquema es autoexplicativo.



La ecuación de la energía, escrita entre A y B, resulta:

$$H_A - \sum_{A}^{e} hp - H_{es} - \sum_{s}^{B} = H_B$$

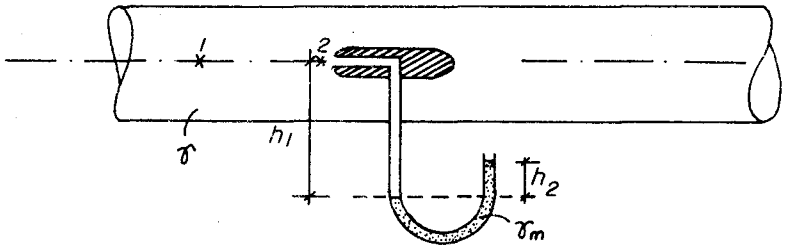
en la que: H_{es} = carga neta que la turbina recibe del agua.

por lo tanto: $Pot = \gamma\, Q\, H_{es}$ = potencia neta que recibe la turbina.

4.3.4 Dispositivos para medir velocidades y caudales.

Para medir velocidades:

Previamente veremos qué es el tubo de presión total.



El tubo de presión total (sombreado) debe ser de pequeño diámetro a fin de que la perturbación de la corriente sea mínima. Se considera la parte de una l.c. de 1 a 2; la pérdida de energía es pequeña y puede despreciarse. La ecuación de Bernoulli resulta:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma}$$ ... el 2 se llama punto de estancamiento y en él $v_2 \approx 0$.

$$p_1 + \rho\,\frac{v_1^2}{2} = p_2 \qquad \text{... (m)}$$

p_1 ... presión estática

$\rho\,\dfrac{v_1^2}{2}$ ... presión dinámica

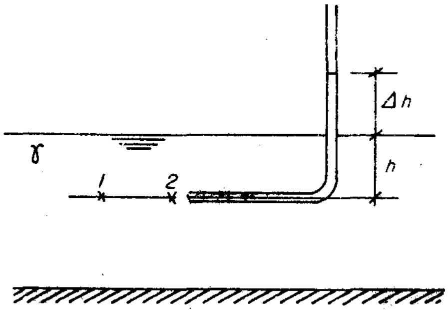
p_2 ... presión total

la presión total puede obtenerse por medio de un manómetro en U:

$$p_2 + \gamma h_1 = \gamma_m \cdot h_2$$

$$p_2 = \gamma_m h_2 - \gamma h_1$$

Tubo pitot simple.- Sirve para medir la velocidad local del líquido (v_1) en un canal. La ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2 (punto de estancamiento):

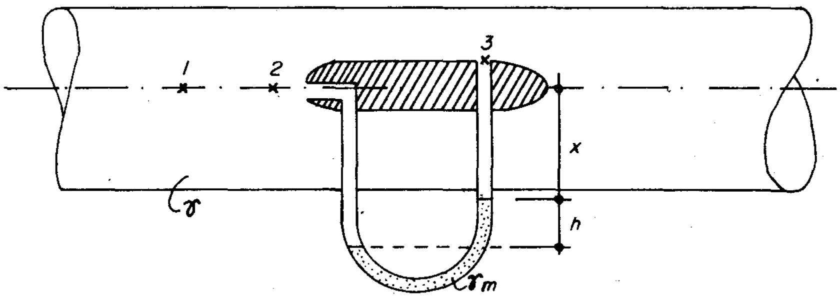


$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma}$$

$$h + \frac{v_1^2}{2g} = \Delta h + h$$

$$v_1 = \sqrt{2g\,\Delta h}$$

Tubo pitot tipo Prandtl.- Sirve para medir la velocidad local del fluido (v_1) en una tubería:



como la perturbación del flujo es pequeña, se puede suponer que las condiciones en el punto 1 (v_1, p_1) se restablecen en el punto 3, despreciándose la pérdida de energía.

En el manómetro diferencial:

$$p_2 + \gamma X + \gamma h = p_3 + \gamma X + \gamma_m \cdot h$$

$$p_2 - p_3 = \gamma_m h - \gamma h$$

$$= (\gamma_m - \gamma) h$$

como $p_3 \simeq p_1$

$$p_2 - p_1 = (\gamma_m - \gamma) h \quad \ldots . \ (n)$$

como $p_2 - p_1 = \rho \dfrac{v_1^2}{2}$, según ecuación (m)

$$\rho \frac{v_1^2}{2} = (\gamma_m - \gamma) h$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 (\gamma_m - \gamma) h}{\rho}}$$

se puede escribir:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}}$$

v_1 ... velocidad del fluido en el punto 1.

Δp ... presión total - presión estática; se obtiene con el manómetro diferencial (ecuación n)

ρ ... densidad del fluido

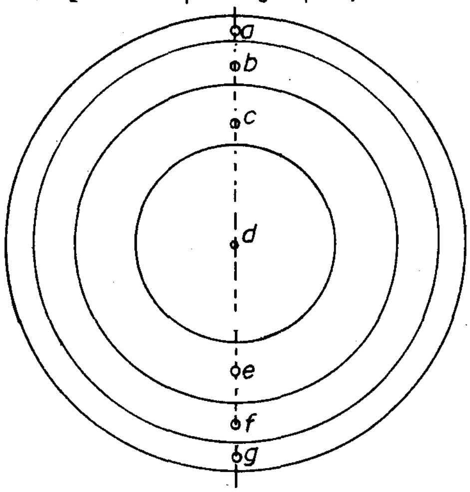
Caso particular: cuando por la tubería escurre un gas (por ejemplo aire) γ resulta bastante menor que γ_m y se puede ignorar. Es decir:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}}$$

con $\Delta p = \gamma_m \cdot h$

Para medir caudales:

Con un tubo pitot tipo Prandtl.- Se divide la sección transversal de la tubería en un cierto número de superficies concéntricas de igual área (cuatro por ejemplo).



midiendo las velocidades en los puntos a, b, c, ... g se puede escribir:

$$v_1 = \frac{v_a + v_g}{2}$$

$$v_2 = \frac{v_b + v_f}{2}$$

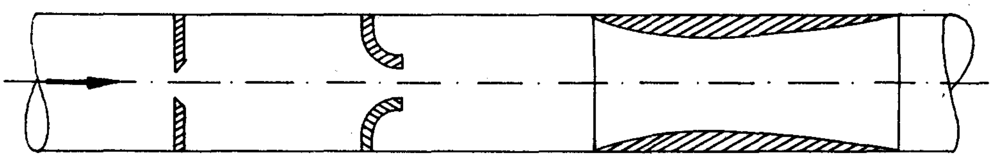
$$v_3 = \frac{v_c + v_e}{2}$$

$$v_4 = v_d$$

por otro lado: $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A$

$$\begin{aligned} Q_1 &= A_1V_1 = AV_1 \\ Q_2 &= A_2V_2 = AV_2 \\ Q_3 &= A_3V_3 = AV_3 \\ Q_4 &= A_4V_4 = AV_4 \end{aligned} \qquad Q = \Sigma Q = A\,(V_1 + V_2 + V_3 + V_4)$$

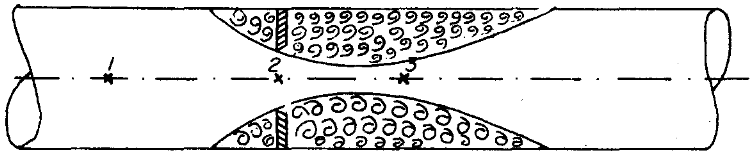
Utilizando bridas (a), tubos de medida (b) y venturímetros (c)



(a) (b) (c)

El principio de la medición es el mismo en los tres dispositivos. Se refiere al hecho de que un estrechamiento en una tubería provoca un cambio de velocidad, que da por resultado un cambio mensurable de la presión estática. En base a la relación existente entre presión estática y velocidad puede calcularse ésta y con ella el caudal.

Sea una brida:



son hechos comprobados que la brida produce una contracción del chorro (3) y que se presentan zonas muertas en las que la presión estática es la misma que la del líquido circundante.

La ecuación de Bernoulli entre 1 y 3 considerando distribuciones uniformes de velocidad y que no hay pérdidas es:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_3}{\gamma} = \frac{V_3^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}$$

pero $A_1 V_1 = A_3 V_3$

$$V_1 = \frac{A_3}{A_1} V_3$$

artificio: $V_1 = \frac{A_3}{A_2} \cdot \frac{A_2}{A_1} V_3$

es decir, $\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_3}{\gamma} = \frac{V_3^2}{2g} - \left(\frac{A_3}{A_2} \cdot \frac{A_2}{A_1}\right)^2 \frac{V_3^2}{2g}$

$$\frac{p_1 - p_3}{\gamma} = \frac{V_3^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{A_3}{A_2} \cdot \frac{A_2}{A_1}\right)^2 \right]$$

llamando: u al coeficiente de contracción $\frac{A_3}{A_2}$

m a la relación de áreas $\frac{A_2}{A_1}$

$$\frac{p_1 - p_3}{\gamma} = \frac{V_3^2}{2g} \left[1 - u^2 m^2\right]$$

$$V_3 = \sqrt{\frac{2g \cdot \frac{p_1 - p_3}{\gamma}}{1 - u^2 m^2}} = \sqrt{\frac{\frac{2 (p_1 - p_3)}{\rho}}{1 - u^2 m^2}}$$

Para encontrar el caudal escribimos:

$$Q = A_2 V_2$$

$$A_2 V_2 = A_3 V_3$$

$$V_2 = \frac{A_3}{A_2} V_3$$

$$V_2 = u V_3$$

$$Q = A_2\, u\, V_3$$

$$Q = A_2\, u \sqrt{\frac{2\,(p_1 - p_3)}{\rho\,(1 - u^2\, m^2)}}$$

en vez de medir $p_1 - p_3$ se prefiere medir Δp muy cerca de la brida por lo que habrá que introducir un coeficiente de corrección. Se estila:

$$p_1 - p_3 = \xi^2 \,.\, \Delta p$$

$$Q = A_2\, u \sqrt{\frac{2\,\Delta p \,.\, \xi^2}{\rho\,(1 - u^2\, m^2)}}$$

$$Q = A_2\, u \,.\, \frac{\xi}{\sqrt{1 - u^2\, m^2}} \,.\, \sqrt{\frac{2\,\Delta p}{\rho}}$$

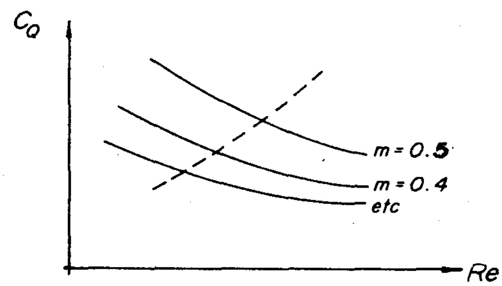
cuando el valor $\frac{\Delta p}{p_1}$ es relativamente grande se corrige esta ecuación con un factor ε llamado coeficiente de expansión y que para los fluidos incompresibles vale la unidad.

$$Q = \varepsilon\, A_2\, C_Q \sqrt{\frac{2\,\Delta p}{\rho}} \quad \ldots\ldots \quad (q)$$

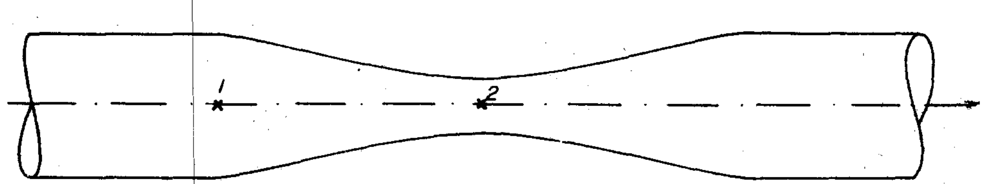
$$C_Q = \frac{u\,\xi}{\sqrt{1 - u^2\, m^2}} \quad \ldots\ldots \quad (r)$$ ... coeficiente de fluidez.

La fórmula (q) es válida para bridas, tubos y venturímetros, variando para cada caso tan sólo la expresión de C_Q que para las bridas se ha encontrado es la (r).

Por experiencias realizadas se sabe que C_Q se mantiene constante a partir de un cierto número de Reynolds (R_e) llamado Reynolds límite para cada valor de m.



Para medidores venturi:

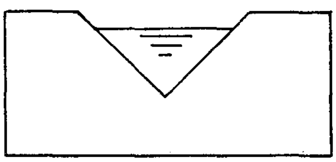


$$Q = \varepsilon A_2 C_Q \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}} \quad \ldots \quad \Delta p \text{ es ahora } p_1 - p_2$$

$m = \frac{A_2}{A_1}$	C_Q	R_e límite
0.05	0.987	6.0×10^4
0.10	0.989	6.5×10^4
0.15	0.997	7.5×10^4
0.20	0.999	9.0×10^4
0.25	1.007	11.0×10^4
0.30	1.017	12.5×10^4
0.35	1.029	14.5×10^4
0.40	1.043	16.5×10^4
0.45	1.060	18.0×10^4
0.50	1.081	19.0×10^4
0.55	1.108	20.0×10^4
0.60	1.142	20.0×10^4

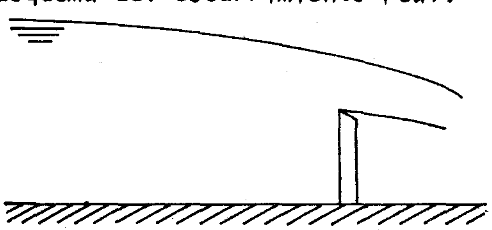
$$R_e = \frac{V_1 D_1}{\nu}$$

Vertedero triangular.- Sirve para medir caudales en canales. Consiste de una placa delgada, generalmente metálica, que se instala perpendicularmente a la dirección del flujo y que tiene una escortadura en forma de V por donde pasa el agua.



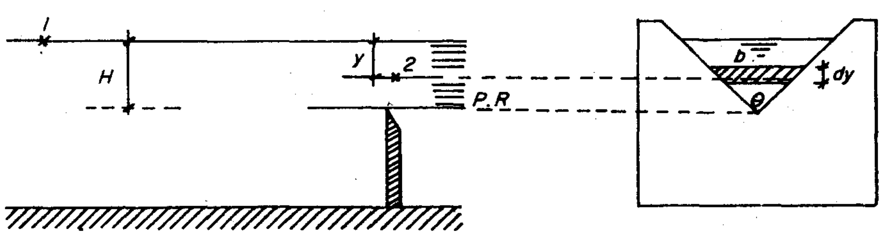
Antes del vertedero se produce un remanso, la velocidad con la que se aproxima el agua disminuye bastante, razón por la cual se ignora en el análisis.

Esquema del escurrimiento real:



Se produce una contracción vertical importante de la vena líquida y existen pérdidas de energía por fricción.

Esquema del escurrimiento teórico:



se asume que no se produce contracción vertical, ni pérdida de energía, que la distribución de velocidades es uniforme y que dentro del chorro actúa la presión atmosférica.

Se deduce la expresión del caudal teórico y luego de corrige con un coeficiente determinado experimentalmente.

Bernoulli entre 1 y 2:

$$H = (H - y) + 0 + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$v_2 = \sqrt{2g\,y}$$

$$d\,Q_t = v_2 \,.\, dA = \sqrt{2g\,y} \;.\; b\,dy$$

por semejanza de triángulos: $\frac{b}{B} = \frac{H - y}{H}$

$$b = \frac{H - y}{H} \,.\, B$$

$$d\,Q_t = \frac{H - y}{H}\; B\,\sqrt{2g\,y}\;\; dy$$

$$= \sqrt{2g}\;\; \frac{B}{H}\,(H - y)\;\sqrt{y}\;\; dy$$

$$= \sqrt{2g}\;\; \frac{B}{H}\,(H\,y^{1/2} - y^{3/2})\;dy$$

$$Q_t = \int d\,Q_t = \sqrt{2g}\;\frac{B}{H}\,\left(H\,y^{3/2} \,.\, \frac{2}{3} - y^{5/2} \,.\, \frac{2}{5}\right)_0^H$$

$$Q_t = \sqrt{2g}\;\frac{B}{H}\,\left(\frac{2}{3}\,H^{5/2} - \frac{2}{5}\,H^{5/2}\right)$$

$$= \frac{4}{15}\;\;\sqrt{2g}\;\frac{B}{H}\;\;H^{5/2}$$

$$= \frac{8}{15}\;\;\sqrt{2g}\;\frac{\frac{B}{2}}{H}\;\;H^{5/2}$$

$$= \frac{8}{15}\;\;\sqrt{2g}\;\;tg\,\frac{\theta}{2}\,H^{5/2}$$

$$Q_r = c'\,\frac{8}{15}\,\sqrt{2g}\;\;tg\,\frac{\theta}{2}\;\;H^{5/2}$$

es un coeficiente de corrección por pérdidas y contracción vertical.

$$Q = C\;tg\,\frac{\theta}{2}\;\;H^{5/2}$$

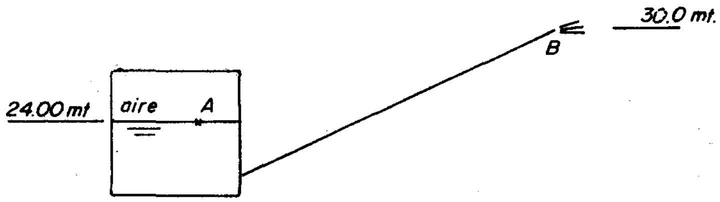
se comprueba experimentalmente que c' no es constante sino que varía con H Naturalmente C también varía con H.

4.3.5 Ejemplos de aplicación

Ejemplo 36.- Una tubería que transporta aceite de g.e. = 0.877 pasa de 15 cm de diámetro en la sección 1 a 45 cm en la sección 2. La sección 1 está 3.60 m por debajo de la 2 y las presiones respectivas son 0.930 kg/cm² y 0.615 kg/cm². Si el caudal es 146 lps, determinar la pérdida de carga y la dirección del flujo.

$$\gamma = 877 \text{ kg/m}^3$$
$$A_1 = 0.018 \text{ m}^2$$
$$A_2 = 0.159 \text{ m}^2$$
$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = 8.11 \text{ m/sg} \quad \ldots \quad \frac{V_1^2}{2g} = 3.36 \text{ m}$$
$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = 0.92 \text{ m/sg} \quad \ldots \quad \frac{V_2^2}{2g} = 0.04 \text{ m}$$
$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{9300}{877} = 10.60 \text{ m}$$
$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{6150}{877} = 7.01 \text{ m}$$
$$H_1 = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = 0 + 10.60 + 3.36 = 13.96 \text{ m}$$
$$H_2 = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} = 3.60 + 7.01 + 0.04 = 10.65 \text{ m}$$
$$\Delta H = H_1 - H_2 = 3.31 \text{ m}, \quad \text{y el flujo es de 1 a 2.}$$

Ejemplo 37.- Está fluyendo un aceite (g.e. = 0.84) desde el depósito A a través de una tubería de 15 cm de diámetro y hasta el punto B. ¿Qué presión en kg/cm² tendrá que actuar sobre A para que circulen 13 lps de aceite, si por fricción se pierde una carga igual a 23.5 $V^2/2g$ y en la entrada a la tubería se pierde 0.5 $\frac{V^2}{2g}$?



$$A = 0.018 \text{ m}^2$$
$$V = \frac{Q}{A} = 0.72 \text{ m/sg}$$
$$\frac{V^2}{2g} = 0.03 \text{ m}$$

Ecuación de la energía entre A y B:

$$Z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} - \sum_A^B hp = Z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g}$$

$$24.0 + \frac{p_A}{\gamma} + 0 - (0.5 + 23.5)\frac{V^2}{2g} = 30.0 + 0 + \frac{V^2}{2g}$$

$$\frac{p_A}{\gamma} = (30.0 - 24.0) + 25\,\frac{V^2}{2g} = 6.75 \text{ m de aceite}$$

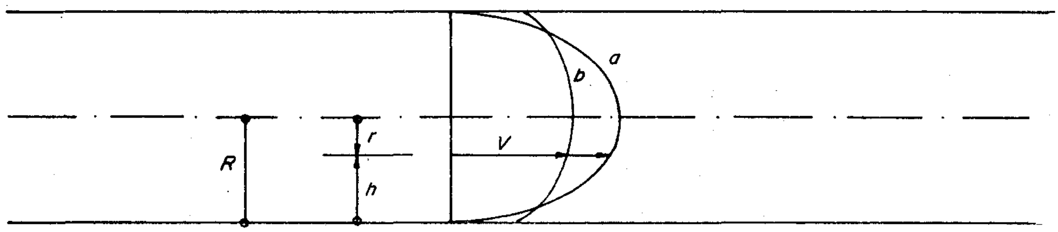
$$p_A = 840 \times 6.75 = 5{,}670\ \frac{kg}{m^2} = 0.57\ \frac{kg}{cm^2}$$

Ejemplo 38.- En la sección transversal de una tubería la distribución de velocidades sigue la ley:

a) $v = v_{máx}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$, si el flujo es laminar

b) $v = v_{máx}\ \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7} = v_{máx}\ \left(\frac{h}{R}\right)^{1/7}$, si el flujo es turbulento.

Determine el valor de α en cada caso.



a) $$V = \frac{\int v\, dA}{A} = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R v_{máx}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] 2\pi r\, dr = \frac{v_{máx}}{2}$$

$$\frac{v}{V} = 2\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

$$\alpha = \frac{1}{A}\int_0^R \left(\frac{v}{V}\right)^3 dA = \frac{8}{\pi R^2}\int_0^R \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^3 2\pi r\, dr = 2$$

b) $$V = \frac{\int v\, dA}{A} = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R v_{máx}\left(\frac{h}{R}\right)^{1/7} 2\pi (R-h)\, dh = \frac{49}{60}\ v_{máx}$$

$$\frac{v}{V} = \frac{60}{49}\left(\frac{h}{R}\right)^{1/7}$$

$$\alpha = \frac{1}{A}\int_0^R \left(\frac{v}{V}\right)^3 dA = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R \left(\frac{60}{49}\right)^3 \left(\frac{h}{R}\right)^{3/7} 2\pi (R-h)\, dh = 1.06$$

Ejemplo 39.- En una tubería que une dos depósitos, la pérdida de carga por fricción se considera igual a $200\ V^2/2g$. Determinar el caudal para un diámetro de tubería de:

a) 10 cm $(A = 0.0079\ m^2)$

b) 20 cm $(A = 0.0314\ m^2)$

si el desnivel entre los depósitos es de 10 m.

En ambos casos:

$$H = \sum_{1}^{2} hp$$

$$10 = 200 \frac{V^2}{2g}$$

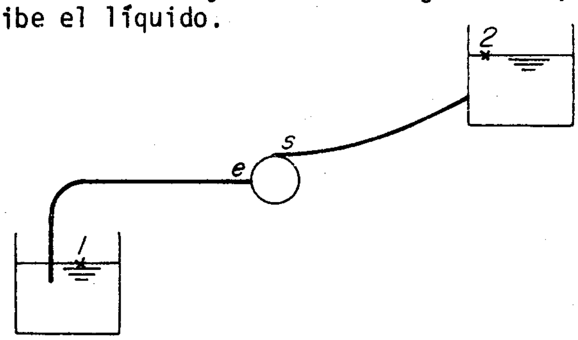
$$V = \sqrt{\frac{2g\ 10}{200}} = 0.99 \text{ m/sg}$$

a) $Q = A\,V = 0.0078 \text{ m}^3/\text{sg} = 7.8$ lps

b) $Q = A\,V = 0.0311 \text{ m}^3/\text{sg} = 31.1$ lps

La interpretación es que al aumentar el diámetro de la tubería el agua encuentra menor resistencia a su paso y fluye un caudal mayor.

Ejemplo 40.- En una instalación de bombeo el nivel del líquido (0.762) en el depósito inferior es 15 m y en el depósito superior - 60 m. Si el diámetro de la tubería es 30 cm, escurren 160 lps, la pérdida en la aspiración es 2.50 m y en la descarga 6.50 m, determinar la potencia en HP que recibe el líquido.



La ecuación de la energía entre 1 y 2 es:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} - \sum_{1}^{e} hp + H_{es} - \sum_{s}^{2} hp = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g}$$

$$Z_1 + 0 + 0 - \sum_{1}^{e} hp + H_{es} - \sum_{s}^{2} hp = Z_2 + 0 + 0$$

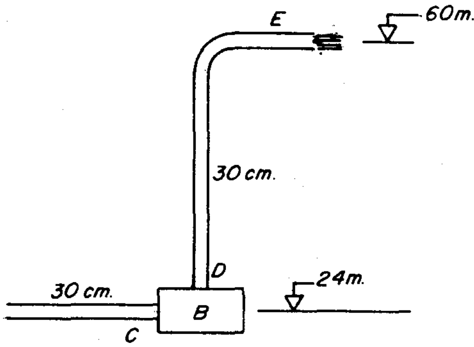
$$H_{es} = (Z_2 - Z_1) + \sum_{1}^{e} hp + \sum_{s}^{2} hp$$

$$= 45 + 2.50 + 6.50$$

$$= 54.0 \text{ m}$$

$$HP_{es} = \frac{\gamma\, Q\, H_{es}}{76} = \frac{762 \times 0.160 \times 54.0}{76} = 87 \text{ HP}$$

Ejemplo 41.- La bomba comunica una carga de 42.20 m al agua que fluye hacia E como se indica. Si la presión en C es -0.15 kg/cm^2 y la pérdida de carga entre D y E es 8 $V^2/2g$, ¿cuál es el caudal?



$$A = \frac{\pi D^2}{4} = 0.071 \text{ m}^2$$

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{Q^2}{2g\,A^2} = 10.121\, Q^2 \quad \text{m}$$

$$hp_{DE} = 8\,\frac{V^2}{2g} = 80.968\, Q^2 \quad \text{m}$$

Ecuación de la energía entre C y E :

$$Z_C + \frac{p_C}{\gamma} + \frac{V_C^{\,2}}{2g} + H_{CD} - \sum_D^E hp = Z_E + \frac{p_E}{\gamma} + \frac{V_E^{\,2}}{2g}$$

$$\sum_D^E hp = H_{CD} - (Z_E - Z_C) - \left(\frac{p_E}{\gamma} - \frac{p_C}{\gamma}\right)$$

$$= 42.20 - (60 - 24) - (0 + 1.50)$$

$$= 42.20 - 36.0 - 1.50$$

$$80.968\, Q^2 = 4.70 \text{ m}$$

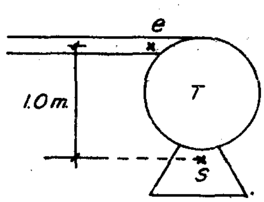
$$Q = 0.241 \text{ m}^3/\text{sg}$$

Ejemplo 42.- Un caudal de 220 lps de agua pasa por una turbina en las siguientes condiciones.

D_e = 30 cm D_s = 60 cm

p_e = 1.5 kg/cm^2 p_s = - 0.35 kg/cm^2

Si el desnivel entre las secciones de entrada y salida es de 1 m, determinar la potencia en HP que entrega el agua a la turbina.



$A_e = 0.071 \text{ m}^2$ $A_s = 0.283 \text{ m}^2$

$V_e = \frac{Q}{A_e} = 3.11$ m/sg $V_s = 0.78$ m/sg

$\frac{V_e^{\,2}}{2g} = 0.49$ m $\frac{V_s^{\,2}}{2g} = 0.03$ m

La ecuación de energía entre e y s resulta:

$$Z_e + \frac{p_e}{\gamma} + \frac{V_e^{\,2}}{2g} - H_{es} = Z_s + \frac{p_s}{\gamma} + \frac{V_s^{\,2}}{2g}$$

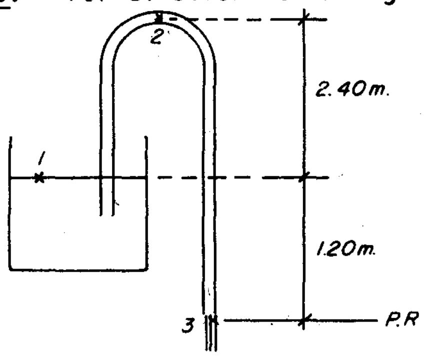
$$H_{es} = (Z_e - Z_s) + \left(\frac{p_e}{\gamma} - \frac{p_s}{\gamma}\right) + \left(\frac{V_e^{\,2}}{2g} - \frac{V_s^{\,2}}{2g}\right)$$

$$= 1.0 + 18.50 + 0.46$$

$$= 20 \text{ m}$$

$$HP_{es} = \frac{\gamma\, Q\, H_{es}}{76} = \frac{1{,}000 \times 0.220 \times 20}{76} = 58$$

Ejemplo 43.- Por el sifón de la figura fluye agua a razón de 100 lps.



a) calcular la pérdida de energía entre los puntos 1 y 3, si D = 20 cm.

$$A = \frac{\pi\, D^2}{4} = 0.031 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{Q}{A} = 3.18 \text{ m/sg}$$

$$\frac{V^2}{2g} = 0.52 \text{ m}$$

Ecuación de la energía entre 1 y 3:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} - \sum_1^3 hp = Z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g}$$

$$Z_1 + 0 + 0 - \sum_1^3 hp = 0 + 0 + \frac{V^2}{2g}$$

$$\sum_1^3 hp = Z_1 - \frac{V^2}{2g}$$

$$= 1{,}20 - 0.52$$

$$= 0{,}68 \ \frac{\text{kg-m}}{\text{kg}} \text{ ó m.}$$

b) Calcular la presión en el punto 2, suponiendo que entre 1 y 2 ocurren los 2/3 de la pérdida total de energía en el sifón.

Ecuación de la energía entre 1 y 2:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} - \sum_1^2 hp = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

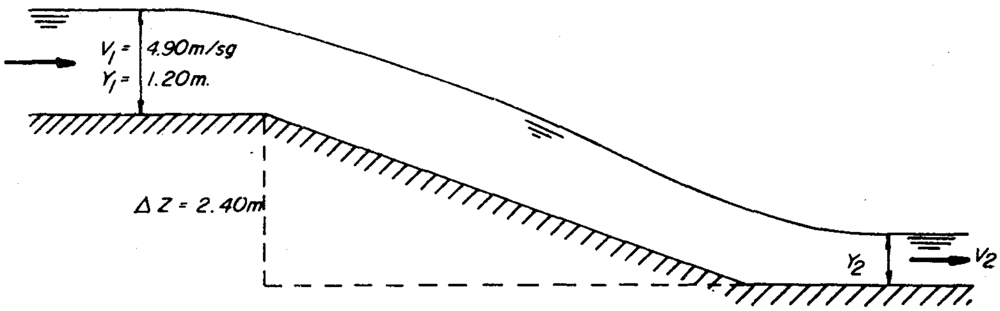
$$1.20 + 0 + 0 - \frac{2}{3}(0.68) = 3.60 + \frac{p_2}{\gamma} + 0.52$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = -\ 3{,}37 \text{ m de agua}$$

$$p_2 = -\ 0.337 \text{ kg/cm}^2 \ \ldots \text{ existe vacío parcial.}$$

Comentario.- Para que el flujo quede establecido es necesario extraer previamente el aire de la tubería, de un modo similar a cuando se desea extraer gasolina del tanque de un vehículo. Por otro lado, la presión de vapor del agua a la temperatura ambiente es de 0.024 kg/cm^2 en unidades absolutas ó -1.009 kg/cm^2 en unidades relativas, por lo que es de esperar un flujo normal sin formación de burbujas de aire ($p_2 > p_v$).

Ejemplo 44.- Por un canal rectangular de 3 m de ancho fluye el agua con los datos de la figura.



Calcular el tirante en la sección 2, considerando despreciable la pérdida de energía.

$$Z_1 + Y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + Y_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$(Z_1 - Z_2) + Y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = Y_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$Z_1 - Z_2 = 2.40 \text{ m}$$

$$Y_1 = 1{,}20 \text{ m}$$

$$V_1 = 4.90 \text{ m/sg}$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{b\,Y_2} = \frac{Q}{3\,Y_2}$$

$$Q = A_1 V_1 = b\,Y_1 \cdot V_1 = 17.64 \text{ m}^3/\text{sg}$$

después de reemplazar y ordenar se obtiene:

$$Y_2^3 - 4.83\,Y_2^2 + 1.764 = 0$$

de las tres raíces de esta ecuación, dos son reales:

$$Y_2 = 0.65 \text{ m}$$

$$Y_2' = 4.75 \text{ m}$$

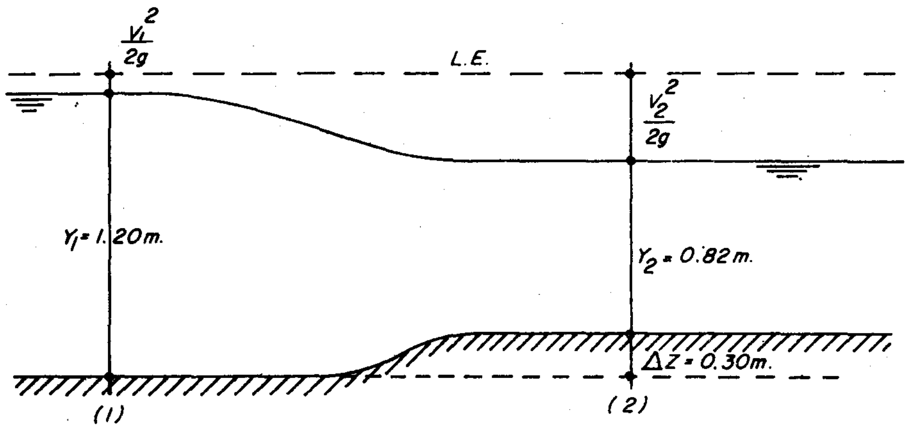
y puesto que el agua se acelera al pasar de la sección 1 a la 2, la respuesta es 0.65 m.

Ejemplo 45.- En un canal de sección rectangular, en un tramo en que el ancho se angosta de 1.80 m a 1.50 m, y el fondo se eleva 30 cm. se han hecho estas mediciones: $Y_1 = 1.20$ m, $Y_2 = 0.82$ m.

Determinar el caudal de agua en el canal, asumiendo que la pérdida de energía que se produce es despreciable.

$$Z_1 + Y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + Y_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$Y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \Delta Z + Y_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$



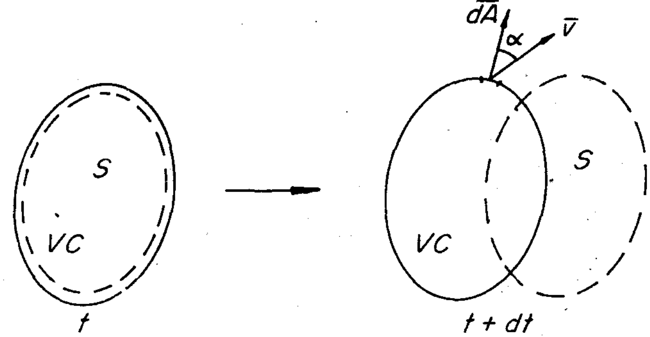
poniendo las velocidades en función de Q y resolviendo se obtiene:

$$Q = 1.874 \ m^3/sg.$$

4.4 Ecuación de la cantidad de movimiento

4.4.1 Formulación general

Se sigue un procedimiento similar al utilizado para la ecuación de continuidad.



la cantidad de movimiento M en la dirección X en el instante t es la misma dentro del sistema que dentro del volumen de control,

$$M_{X\,t\,S} = M_{X\,t\,V}$$

asimismo, en el instante t + dt se verifica,

$$M_{X(t\,+\,dt)\,S} = M_{X(t\,+\,dt)\,V} + dM_{XS} - DM_{Xe}$$

restando miembro a miembro y dividiendo entre dt:

$$\frac{M_{X(t+dt)\,S} - M_{X\,t\,S}}{dt} = \frac{M_{X(t+dt)\,V} - M_{X\,t\,V}}{dt} + \frac{dM_{XS} - dM_{Xe}}{dt} \qquad \ldots (28)$$

es decir, "para una dirección X, la rapidez de variación de la cantidad de movimiento en el sistema, es igual a la rapidez de variación de la cantidad de movimiento en el volumen de control más el flujo neto de cantidad de movimiento que sale del volumen de control".

El primer término se puede expresar:

$$dM_X \quad \text{ó} \quad \frac{d\,(m\, v_X)}{dt} \, , \quad \text{ó} \quad \Sigma\, F_X$$ según la segunda ley de Newton.

El segundo término se puede escribir:

$$\frac{\partial\, M_{XV}}{\partial t} \, , \quad \text{ó} \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho\, \overline{v}_X \, dV_o$$

El tercer término se puede expresar:

$$\int_{SC} (\rho\ v \cos \alpha\ dA)\ \overline{v}_X \, , \quad \text{ó} \quad \int_{SC} \rho\, \overline{v}_X \, (\overline{v}\ .\ d\overline{A})$$

reemplazando en (28):

$$\Sigma\, F_X = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho\, \overline{v}_X \, dV_o + \int_{SC} \rho \overline{v}_X \, (\overline{v}\ .\ d\overline{A}) \quad \ldots \qquad (29)$$

que es la expresión más amplia de la ecuación de la cantidad de movimiento para un volumen de control.

Para flujo permanente se anula el segundo término de la (29),

$$\Sigma\, F_X = \int_{SC} \rho\, \overline{v}_X \, (\overline{v}\ .\ d\overline{A})$$

Por analogía:

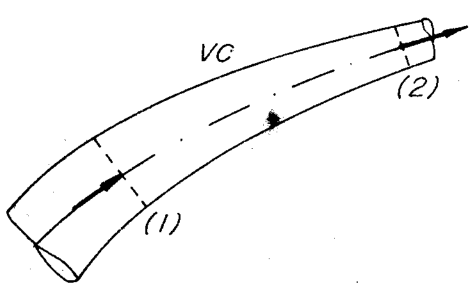
$$\Sigma\, F_Y = \int_{SC} \rho\, \overline{v}_Y \, (\overline{v}\ .\ d\overline{A})$$

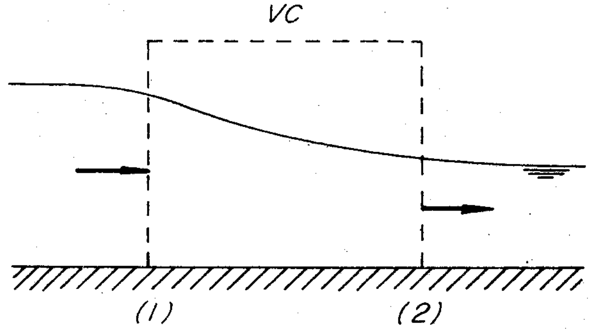
$$\Sigma\, F_Z = \int_{SC} \rho\, \overline{v}_Z \, (\overline{v}\ .\ d\overline{A})$$

multiplicando cada componente por $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$, respectivamente, y sumándolas:

$$\Sigma\, F = \int_{SC} \rho\, \overline{v}\, (\overline{v}\ .\ d\overline{A}) \quad \ldots\ldots \qquad (30)$$

En tuberías y canales es posible elegir el volumen de control de modo que el flujo de cantidad de movimiento que sale y que entra sean normales a las secciones transversales.





Si además se considera que el líquido que circula es incompresible, que la velocidad media es representativa en cada sección, se tendrá, siempre para flujo permanente y en una direccion X,

$$\Sigma\, F_X = \rho\, V_{2X} \int_{A_2} V_2\, dA - \rho\, V_{1X} \int_{A_1} V_1 dA$$

$$\Sigma F_X = \rho A_2 V_2 V_{2X} - \rho A_1 V_1 V_{1X}$$

$$\Sigma F_X = \rho Q V_{2X} - \rho Q V_{1X}$$

como en cada sección hay una distribución de velocidades es necesario corregir los flujos de cantidad de movimiento, de un modo similar a cómo se corrigen las alturas de velocidad. Se usa el coeficiente de Boussinesq β, cuyo valor, como el de α, depende únicamente de la distribución de velocidades en la sección.

$$\Sigma F_X = \beta_2 \rho Q V_{2X} - \beta_1 \rho Q V_{1X} \quad .... \quad (31)$$

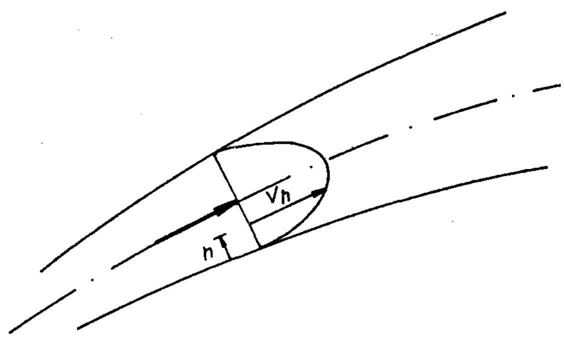
o también:

$$\beta_1 \rho Q V_{1X} + \Sigma F_X = \beta_2 \rho Q V_{2X} \quad .... \quad (32)$$

Expresión del coeficiente de Boussinesq (β)

* en una l.c.,
  cantidad de movimiento $= m\, v_h$
  $= \rho\, V_o\, v_h$

  cantidad de movimiento por unidad de tiempo, o flujo de cantidad de movimiento $= \dfrac{\rho V_o v_h}{t}$
  $= \rho\, dQ\, v_h$
  $= \rho\, v_h^2\, dA$



  flujo de cantidad de movimiento en toda la corriente $= \int_A \rho v_h^2\, dA$

* en toda la corriente,
  flujo de cantidad de movimiento utilizando la velocidad media $= \rho V^2 A$
  flujo real de cantidad de movimiento $= \beta \rho V^2 A$

* igualando las dos expresiones:

$$\beta \rho V^2 A = \int_A \rho v_h^2\, dA$$

$$\beta = \frac{1}{A} \int \left(\frac{v_h}{V}\right)^2 dA$$

Cuando en la práctica no se indica su valor, es porque se está suponiendo $\beta = 1$.

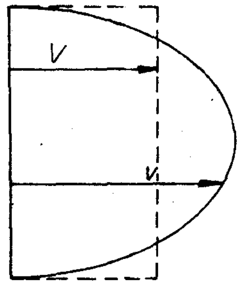
Relación entre los coeficiente α y β

Se parte de una distribución genérica de velocidades, y cada velocidad se expresa en función de la velocidad media.

$$v = V + kV = (1 + k)\, V \qquad -1 < K \leq 1$$

$v = V + kV = (1+k)V$

$-1 < k \leqslant 1$



$$\alpha = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{V}\right)^3 dA = \frac{1}{A}\int_A (1+k)^3\, dA = \frac{1}{A}\int_A (1 + 3k + 3k^2 + k^3)\, dA$$

$$= 1 + \frac{3}{A}\int_A k\, dA + \frac{3}{A}\int_A k^2\, dA + \frac{1}{A}\int k^3\, dA$$

pero $\quad A = \frac{Q}{V} = \frac{1}{V}\int_A v\, dA = \frac{1}{V}\int_A (1+k)\, V\, dA = \int_A dA + \int_A k\, dA$

$$= A + \int k\, dA$$

de donde se desprende que $\int_A k\, dA = 0$

además para $k < 1$ resulta $k^3 \simeq 0$

por lo que:

$$\alpha \simeq 1 + \frac{3}{A}\int_A k^2\, dA$$

De la misma manera:

$$\beta = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{V}\right)^2 dA = \frac{1}{A}\int_A (1+k)^2\, dA = \frac{1}{A}\int_A (1 + 2k + k^2)\, dA$$

$$\beta = 1 + \frac{1}{A}\int_A k^2\, dA$$

Combinando las expresiones de α y β:

$$(\beta - 1)\, 3 \simeq \alpha - 1$$

$$\beta \simeq 1 + \frac{\alpha - 1}{3}$$

La utilidad práctica de esta relación estriba en que sólo es necesario calcular uno de los coeficientes, generalmente α, para que el otro quede determinado.

4.4.2 Ejemplos de aplicación

Para aplicar correctamente las ecuaciones de energía y de cantidad de movimiento es necesario precisar ciertos conceptos.

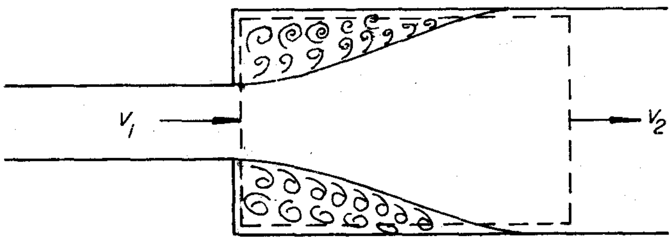
* La ecuación de la cantidad de movimiento es vectorial y engloba fuerzas totales y condiciones externas, sin tomar en cuenta los cambios internos de energía, la ecuación de la energía es escalar y toma en cuenta los

cambios internos de energía y no las fuerzas totales y condiciones externas.

* Muchos son los problemas que por su naturaleza se resuelven con una sola de las dos ecuaciones. La elección de la ecuación depende que sean las fuerzas totales o la energía del flujo la que se necesita en la solución. En otros casos la naturaleza del problema es tal que resulta necesario usar las dos ecuaciones.

* A menos que se indique lo contrario, en cada uno de los problemas que vienen se supone que se trata de flujo permanente, incompresible, con distribución uniforme de velocidades ($\alpha = \beta = 1$).

Ejemplo 46.- Determinar la pérdida de carga en un ensanche brusco (fórmula de Borda).



hipótesis: flujo permanente, incompresible,
fuerzas de rozamiento despreciables,
distribución uniforme de velocidades,
la presión p_1 actúa en la sección ensanchada.

ecuación de la cantidad de movimiento:

$$p_1 A_2 - p_2 A_2 = \frac{\gamma}{g} Q (V_2 - V_1) \quad .... \text{(m)}$$

ecuación de la energía:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} - hp = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad .... \text{(n)}$$

de (m):
$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = \frac{1}{g} \frac{Q}{A_2} (V_2 - V_1)$$
$$= \frac{V_2}{g} (V_2 - V_1)$$

de (n):
$$hp = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g}$$

reemplazando:
$$hp = \frac{V_2}{g} (V_2 - V_1) + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g}$$
$$= \frac{2 V_2^2 - 2 V_1 V_2 + V_1^2 - V_2^2}{2g}$$
$$= \frac{V_1^2 - 2 V_1 V_2 + V_2^2}{2g}$$

$$= \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} \quad \ldots \quad \text{fórmula de Borda}$$

ecuación de continuidad:

$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

$$V_1 = \frac{A_2}{A_1} V_2$$

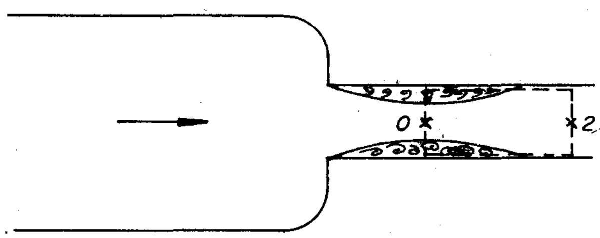
reemplazando: $$hp = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2 \frac{V_2^2}{2g}$$

o bien, $$hp = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{V_1^2}{2g}$$

La verificación experimental realizada indica que esta ecuación es aproximadamente válida tanto para tuberías como para canales. Se acostumbra expresar:

$$hp = K_{eb} \frac{V_1^2}{2g}$$

Ejemplo 47.- Determinar la pérdida de carga en una contracción brusca.



hipótesis: las mismas que en el ensanche brusco.

ecuación de la cantidad de movimiento:

$$p_o A_2 - p_2 A_2 = \frac{\gamma}{g} Q (V_2 - V_o) \quad \ldots\ldots \quad (m)$$

ecuación de la energía:

$$\frac{p_o}{\gamma} + \frac{V_o^2}{2g} - hp = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad \ldots\ldots \quad (n)$$

de (m): $$\frac{p_o}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = \frac{1}{g} \frac{Q}{A_2} (V_2 - V_o)$$

$$= \frac{V_2}{g} (V_2 - V_o)$$

de (n): $$hp = \frac{p_o}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_o^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g}$$

reemplazando: $$hp = \frac{V_2}{g} (V_2 - V_o) + \frac{V_o^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g}$$

$$= \frac{2\,V_2^2 - 2\,V_oV_2 + V_o^2 - V_2^2}{2g}$$

$$= \frac{V_o^2 - 2\,V_oV_2 + V_2^2}{2g}$$

$$= \frac{(V_o - V_2)^2}{2g}$$

ecuación de continuidad:

$$A_oV_o = A_2V_2$$

$$C_c\,A_2\,V_o = A_2V_2$$

$$C_c\,V_o = V_2$$

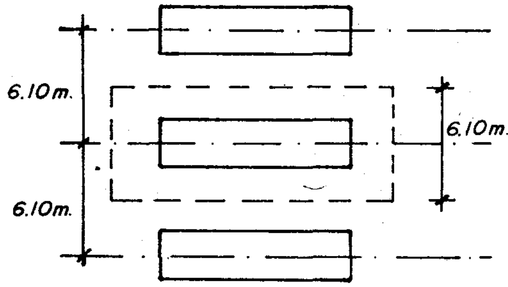
reemplazando: $hp = (1 - \frac{1}{C_c})^2 \frac{V_o^2}{2g}$

$$hp = (\frac{1}{C_c} - 1)^2 \frac{V_2^2}{2g}$$

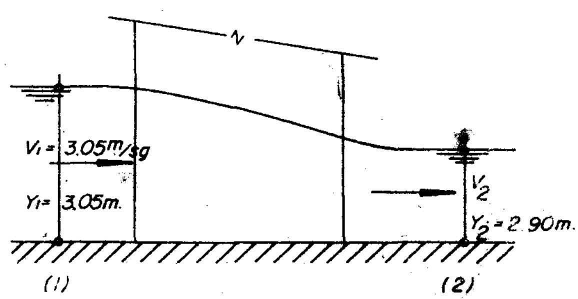
Se acostumbra expresar:

$$hp = K_{cb}\frac{V_2^2}{2g}$$

Ejemplo 48.- Los pilares de un puente están separados una distancia entre ejes de 6.10 m. Aguas arriba el tirante es 3.05 m y la velocidad media del agua 3.05 m/sg. Aguas abajo el tirante es 2.90 m. Despreciando la pendiente del río y las pérdidas por fricción, encontrar el empuje del agua sobre cada pilar.



Planta



Perfil

Se elige un volumen de control, como el indicado, de 6.10 m de ancho y limitado por las secciones (1) y (2).

$$Q = A_1V_1 = b\,Y_1 \cdot V_1 = 56.745\ m^3/sg$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{b\,Y_2} = 3.208 \text{ m/sg}$$

Suponiendo distribución hidrostática de presiones en las secciones 1 y 2, la ecuación de la cantidad de movimiento escrita en la dirección de la corriente es:

$$F_1 - F - F_2 = \frac{\gamma}{g} Q\,(V_2 - V_1)$$

asumiendo que sobre el agua actúa la fuerza F hacia la izquierda.

Despejando, $F = F_1 - F_2 - \frac{\gamma}{g} Q\,(V_2 - V_1)$

reemplazando $F_1 = \frac{1}{2}\gamma\, b\, Y_1^2 = 28{,}372.6$ kg

$F_2 = \frac{1}{2}\gamma\, b\, Y_2^2 = 25{,}650.5$ kg

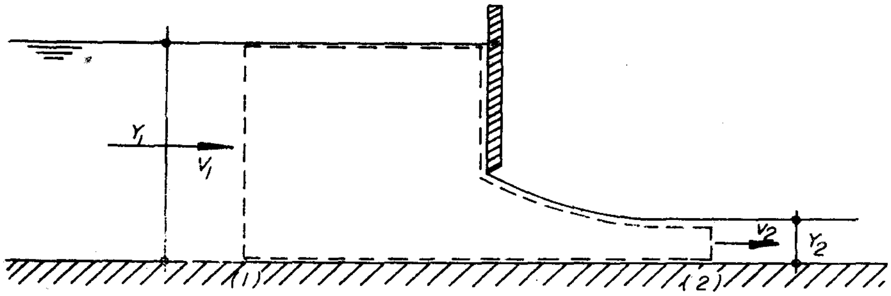
y los valores conocidos de Q, V_1 y V_2

se obtiene: $F = 1{,}807$ kg.

El signo positivo indica que el sentido asumido es el correcto. Naturalmente el agua ejerce una fuerza igual y contraria sobre el pilar, es decir F = 1,807 kg hacia la derecha.

Ejemplo 49.- En un canal rectangular de fondo horizontal y ancho 3 m se halla instalada una compuerta deslizante. Aguas arriba el tirante de agua es 2.40 m y aguas abajo 0.60 m. Despreciando las pérdidas, calcular:

a) el gasto en la compuerta
b) el empuje sobre la compuerta



a) ecuación de la energía:

$$Y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = Y_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

ecuación de continuidad: $b\,Y_1V_1 = b\,Y_2V_2$

resolviendo el sistema para V_1:

$$V_1 = 1.534 \text{ m/sg}$$

es decir, $Q = b\,Y_1V_1 = 11.04 \text{ m}^3\text{/sg}$

b) eligiendo un volumen de control como el indicado y suponiendo distribución hidrostática de presiones en las secciones (1) y (2), la ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección del flujo es:

$$F_1 - F - F_2 = \frac{\gamma}{g} Q (V_2 - V_1)$$

asumiendo que sobre el agua actúa la fuerza F hacia la izquierda.

Despejando: $F = F_1 - F_2 - \frac{\gamma}{g} Q (V_2 - V_1)$

reemplazando $F_1 = \frac{1}{2} \gamma b Y_1^2 = 8,640 \text{ kg}$

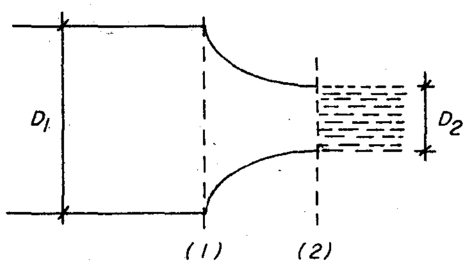
$F_2 = \frac{1}{2} \gamma b Y_2^2 = 540 \text{ kg}$

y los valores conocidos de Q, V_1 y V_2

se obtiene: $F = 2,919 \text{ kg}$

por lo que la respuesta es F = 2,919 kg. hacia la derecha.

Ejemplo 50.- ¿Qué fuerza ejerce la boquilla sobre la tubería?



Datos:

g.e. = 0.85
$p_1 = 6 \text{ kg/cm}^2$
$D_1 = 75 \text{ mm}$
$D_2 = 25 \text{ mm}$

despreciar las pérdidas.

Ecuación de la energía entre (1) y (2):

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = 0 + \frac{V_2^2}{2g}$$

ecuación de continuidad: $A_1V_1 = A_2V_2$

reemplazando valores y resolviendo para V_2:

$V_2 = 37.4 \text{ m/sg}$
$Q = A_2V_2 = 0.0184 \text{ m}^3/\text{sg}$

Suponiendo que sobre el líquido actúa la fuerza F hacia la izquierda, la ecuación de la cantidad de movimiento es:

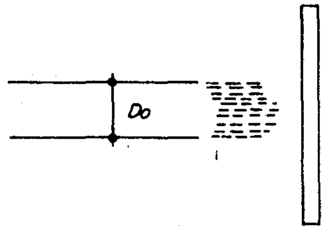
$$\rho Q V_1 + p_1 A_1 - F - p_2 A_2 = \rho Q V_2$$

reemplazando valores ($p_2 = 0$) se obtiene:

$$F = 212 \text{ kg}$$

es decir, sobre la boquilla actúa F = 212 kg hacia la derecha y ésta es la fuerza solicitada.

<u>Ejemplo 51</u>.- Un chorro horizontal de agua, de diámetro D_0 = 10 cm y velocidad V_0 = 20 m/sg incide sobre una placa normal al chorro; ¿qué fuerza se requiere para mantener la placa en equilibrio?



Suponiendo que sobre el líquido actúa F hacia la izquierda, la ecuación de la cantidad de movimiento es:

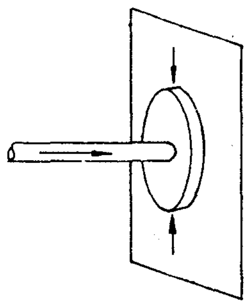
$$\frac{\gamma}{g} Q V_0 - F = 0$$, porque no hay flujo de cantidad de movimiento a través de la placa.

$$F = \frac{\gamma}{g} Q V_0 = \frac{\gamma}{g} A_0 V_0 V_0 = \frac{\gamma}{g} A_0 V_0^2$$

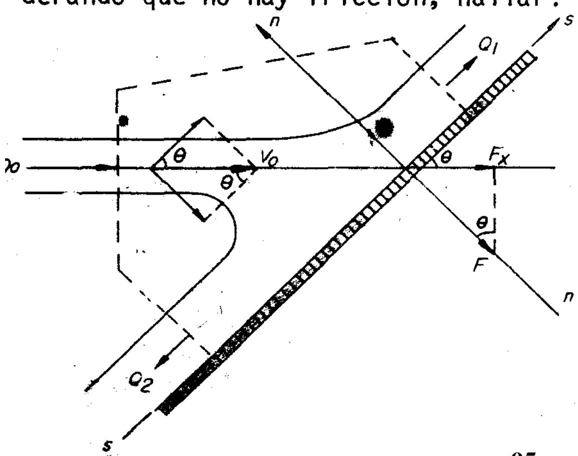
$$F = 320 \text{ kg}$$

sobre la placa actúa F = 320 kg hacia la derecha de modo que la respuesta es 320 kg hacia la izquierda.

NOTA: Sobre el líquido sólo actúa la fuerza horizontal F porque en cualquier otra dirección normal las fuerzas se compensan.



<u>Ejemplo 52</u>.- El líquido que sale de una larga ranura incide sobre una placa pulida, inclinada un ángulo θ con respecto a la dirección del chorro. Despreciando la pérdida de energía debida al impacto y considerando que no hay fricción, hallar:



a) la fuerza del líquido sobre la placa

b) la división del gasto incidente Q_0

Ecuación de la energía entre la sección o y la sección 1:

$$Z_o + \frac{p_o}{\gamma} + \frac{V_o^2}{2g} = Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g}$$

pero: $p_o = p_1$

$$Z_1 - Z_o \approx 0$$

luego, $V_1 = V_o$

de la misma manera, $V_2 = V_o$

a) ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección nn, suponiendo que sobre el líquido actúa F en el sentido positivo:

$$-\frac{\gamma}{g} Q_o V_o \text{ sen } \theta + F = 0$$

$$F = \frac{\gamma}{g} Q_o V_o \text{ sen } \theta$$

luego sobre la placa actúa esta fuerza en el sentido negativo de nn, y su valor en la dirección del chorro resulta:

$$F_X = F \text{ sen } \theta = \frac{\gamma}{g} Q_o V_o \text{ sen}^2 \theta = \frac{\gamma}{g} A_o V_o^2 \text{ sen}^2 \theta$$

b) ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección ss, habida cuenta que sobre el líquido no actúa ninguna fuerza:

$$\rho Q_o V_o \cos \theta = \rho Q_1 V_1 - \rho Q_2 V_2$$

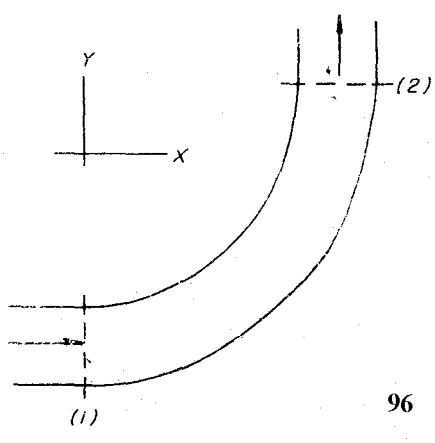
$$Q_o \cos \theta = Q_1 - Q_2$$

por continuidad: $Q_o = Q_1 + Q_2$

sumando miembro a miembro: $Q_1 = \frac{Q_o}{2}(1 + \cos \theta)$

restando miembro a miembro: $Q_2 = \frac{Q_o}{2}(1 - \cos \theta)$

Ejemplo 53.- Hallar la fuerza resultante ejercida por el líquido sobre la curva horizontal de la tubería.



Datos:

$D = 0.60$ m

$Q = 0.9\ m^3/sg$

g.e. = 0.85

pérdida = 1,10 m de líquido

$p_1 = 30{,}000\ kg/m^2$

Bernoulli entre 1 y 2:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^{\,2}}{2g} - hp_{1-2} = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^{\,2}}{2g}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} - hp_{1-2} = \frac{p_2}{\gamma}$$

resolviendo: $p_2 = 29{,}000\ kg/m^2$

Suponiendo que sobre el líquido actúa una fuerza F_X de sentido negativo, la ecuación de la c.m. es:

$$\frac{\gamma}{g} Q V_1 + p_1 A_1 - F_X = 0$$

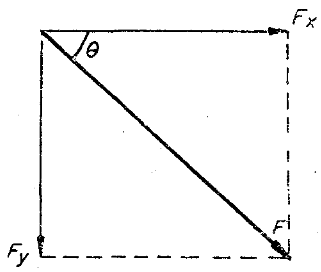
resolviendo, $F_X = 8{,}730$ kg (sentido asumido correcto)

y una fuerza F_Y en el sentido positivo, la ecuación de las c.m. es:

$$F_Y - p_2 A_2 = \frac{\gamma}{g} Q V_2$$

resolviendo, $F_Y = 8{,}270$ kg (sentido asumido correcto)

en consecuencia, sobre el codo actúan:



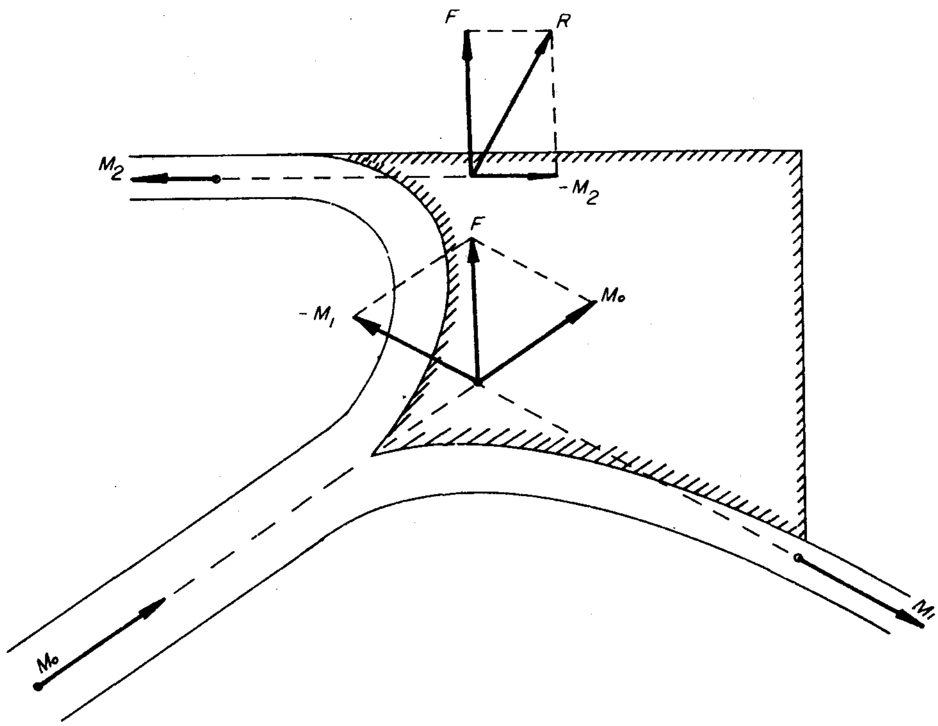
$$F = \sqrt{F_X^{\,2} + F_Y^{\,2}} = 12{,}025 \text{ kg}$$

$$\theta = \text{arc tg} \frac{F_Y}{F_X} = 43.4°$$

Solución vectorial.- Tratando los términos de flujo de cantidad de movimiento como vectores, y manteniendo cada vector en su línea de acción, se puede determinar el vector fuerza resultante en módulo, dirección y sentido y también su línea de acción.

$$\rho Q_o V_o + \Sigma F = \rho Q_1 V_1 + \rho Q_2 V_2$$

$$\rho Q_o V_o + p_o A_o + p_1 A_1 + p_2 A_2 + F = \rho Q_1 V_1 + \rho Q_2 V_2$$



$$F = (\rho\, Q_1\, V_1 - p_1\, A_1) + (\rho\, Q_2\, V_2 - p_2\, A_2\,) - (\rho \cdot Q_0\, V_0 + p_0\, A_0)$$

$$F = \qquad M_1 \qquad + \qquad M_2 \qquad - \qquad M_0$$

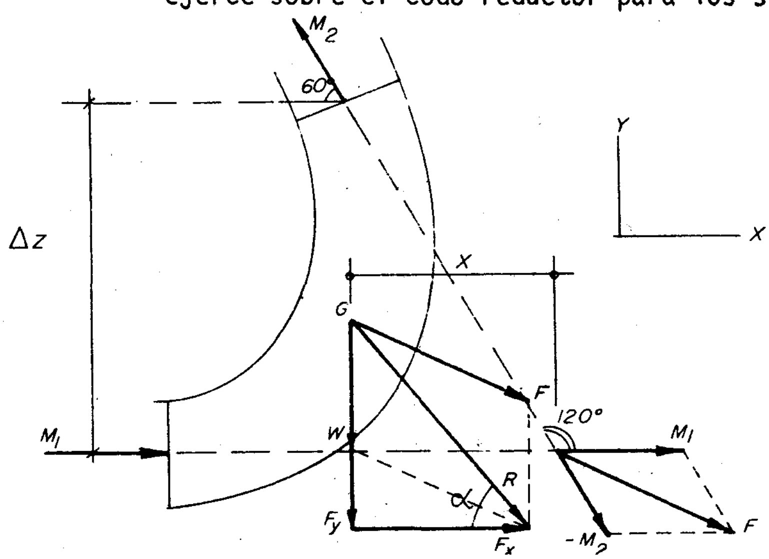
es decir, la fuerza que actúa sobre el líquido es la suma vectorial de M_1, M_2 y $-M_0$.

La fuerza que actúa sobre el bloque es una fuerza igual y contraria a ésta:

$$R = M_0 - M_1 - M_2$$

es decir, que para hallar vectorialmente la fuerza que el líquido ejerce sobre el bloque, los flujos entrantes se suman y los flujos salientes se restan.

Ejemplo 54.- Hallar, analítica y vectorialmente, la fuerza que el agua ejerce sobre el codo reductor para los siguientes datos:



codo reductor en un plano vertical

$W = 9{,}000$ kg (peso del agua)

$\Delta Z = 3$ m

$X = 1.80$ m

$hp = 0.15 \frac{V_2^2}{2g}$ m $D_1 = 1.80$ m

$p_1 = 28{,}000$ kg/m^2

$D_2 = 1.20$ m

$Q = 8.5$ m^3/sg

<u>Solución analítica</u>.- Asumiendo sobre el líquido una fuerza F_X negativa y una fuerza F_Y positiva:

$$\rho\, Q\, V_1 + p_1\, A_1 + p_2\, A_2 \cos 60° - F_X = -\rho\, Q\, V_2 \cos 60°$$

resolviendo $F_X = 90{,}000$ kg

$$0 + 0 - p_2\, A_2 \operatorname{sen} 60° - W + F_Y = \rho\, Q\, V_2 \operatorname{sen} 60°$$

resolviendo $F_Y = 37{,}200$ kg

Sobre el codo actúan estas mismas fuerzas con sentido contrario. La resultante pasa por el c. de gravedad y vale

$$R = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2} = 97{,}385 \text{ kg}$$

$$\alpha = \text{arc tg} \frac{F_Y}{F_X} = 22.5°$$

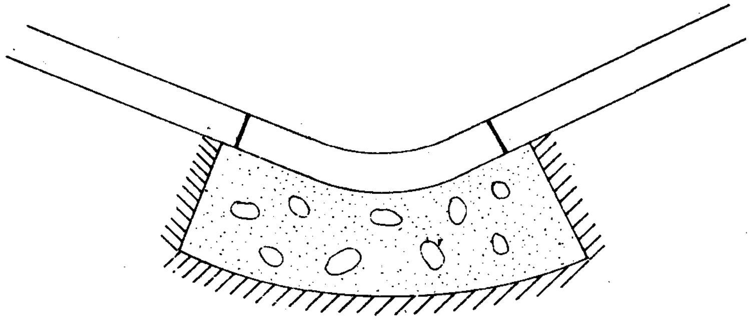
<u>Solución vectorial</u>.

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \rho\, Q\, V_1 + p_1\, A_1 \\ M_2 &= \rho\, Q\, V_2 - p_2\, A_2 \end{aligned}\right\} \text{ la suma vectorial da F}$$

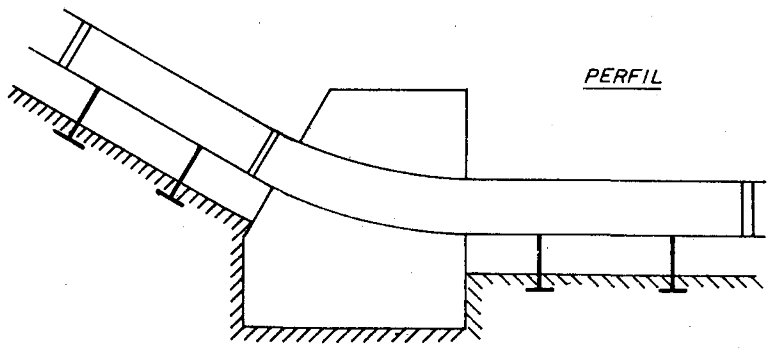
$R = F + W$, pasando por el c. de gravedad.

<u>Comentario</u>

1. De lo estudiado se desprende que un cambio en la dirección horizontal de la tubería hace que aparezca una fuerza dinámica en el macizo de apoyo. Esta fuerza es necesario determinarla para poder hacer el diseño del macizo.



2. En las tuberías importantes, de gran diámetro y extensa longitud, es usual el empleo de juntas de expansión, a fin de evitar las tensiones que aparecen en la dirección axial por efecto de los cambios de temperatura y también por efecto del empuje dinámico del agua en los cambios de dirección vertical. Las juntas permiten el deslizamiento libre de los tubos en la dirección axial, produciéndose fuerzas dinámicas en los apoyos y los anclajes que deben ser consideradas en el diseño de estos elementos.



3. En general se instalan apoyos a lo largo de la tubería y macizos de anclaje en los cambios de dirección vertical.

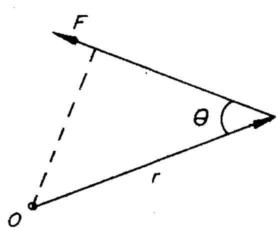
4.5 Ecuación del momento de la cantidad de movimiento

4.5.1 Formulación general

La ecuación de la cantidad de movimiento es:

$$\Sigma F = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, \overline{v}\, dV_o + \int_{SC} \rho\, \overline{v}\, (\overline{v} \cdot dA) \qquad \ldots \quad (29')$$

Recordemos que el momento de una fuerza F con respecto a un punto O es:



$$M_o F = \overline{r} \times F$$

un vector perpendicular al plano definido por los vectores F y r; de módulo F r sen θ; de sentido normal al plano, saliendo.

hallemos r x F para la (29'):

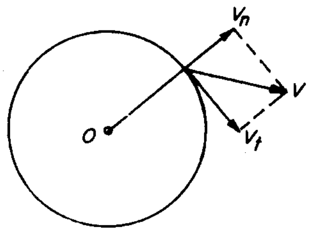
$$\overline{r} \times F = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, \overline{r} \times \overline{v}\, dV_o + \int_{VC} \rho\, \overline{r} \times (\overline{v}\,\overline{v} \cdot dA) \qquad \ldots \quad (33)$$

es decir, "el par ejercido por todas las fuerzas que actúan sobre el fluido dentro del VC, es igual a la suma de dos términos:

* la variación con el tiempo del momento de la cantidad de movimiento dentro del VC
* el flujo saliente neto del momento de la cantidad de movimiento a partir del VC".

Para flujo permanente: $$\overline{r} \times F = \int_{SC} \rho\, \overline{r} \times (\overline{v}\, \overline{v} \cdot dA) \qquad \ldots \quad (34)$$

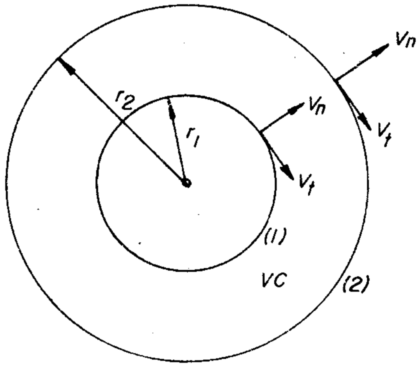
Para la aplicación de esta fórmula en el plano (sólo se emplean módulos) recuérdese:



sen 90° = 1

$$\Sigma F_t \cdot r = \int_{SC} \rho\, r\, v_t \cdot v_n\, dA$$

Para un flujo permanente, incompresible y un volumen de control anular, como es el caso de una bomba radial:



$$\Sigma F_t\, r = \Sigma T_z = \int_{A_2} \rho\, r_2\, v_{t2}\, v_{n2}\, dA_2 - \int_{A_1} \rho\, r_1\, v_{t1}\, v_{n1}\, dA_1$$

$$\Sigma T_z = \rho\, r_2\, v_{t2}\, Q - \rho\, r_1\, v_{t1}\, Q \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

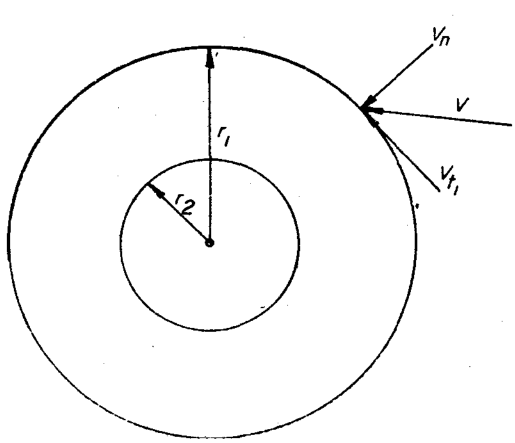
ó $$\rho \cdot r_1\, v_{t1}\, Q + \Sigma T_z = \rho\, r_2\, v_{t2}\, Q \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

es decir: "el flujo de momento de cantidad de movimiento que entra más la suma de los pares que actúan sobre el fluido, es igual al flujo del momento de cantidad de movimiento que sale".

4.5.2 Ejemplos de aplicación

Ejemplo 55.- Se va a diseñar una turbina hidráulica de modo que para $Q = 10.8\ m^3/sg$ se ejerza un par de 1500 kg-m sobre el rodete que gira a 200 RPM y absorbe todo el momento de la cantidad de movimiento. Si en la periferia exterior del rodete el radio es 0.90 m, - ¿cuál debe ser la componente tangencial de la velocidad en este lugar?

en las turbinas el agua entra por la periferia y sale por el centro.



Luego, si ΣT_z representa lo que el agua recibe:

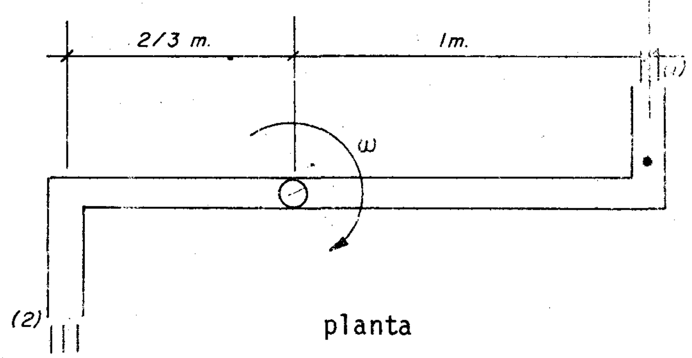
$$\rho r_1 v_{t1} Q + \Sigma T_z = 0$$

pero en este caso el agua entrega ΣT_z, por lo que:

$$\rho r_1 v_{t1} Q - \Sigma T_z = 0$$

de donde: $$v_{t1} = \frac{\Sigma T_z}{\rho r_1 Q} = 1.51 \text{ m/sg}$$

Ejemplo 56.- El aspersor de la figura descarga 0.01 m^3/sg por cada boquilla. Si el área de salida de cada boquilla es 0.001 m^2, hallar la velocidad de giro (ω) en RPM.



planta

El agua asciende por $\overset{x}{o}$, normalmente al papel, por lo que no recibe ni da momento de cantidad de movimiento.

$$\rho r_o v_{to} Q_o + \Sigma T_z = \rho r_1 v_{t1} Q_1 + \rho r_2 v_{t2} Q_2 = 0$$

$$r_1 v_{t1} + r_2 v_{t2} = 0$$

v_{t1}, v_{t2} son velocidades absolutas con respecto a $\overset{x}{o}$, por lo que:

$$v_{t1} = v_1 - \omega r_1 = \frac{Q}{A} - \omega r_1 = 10 - \omega$$

$$v_{t2} = v_2 - \omega r_2 = \frac{Q}{A} - \omega r_2 = 10 - \frac{2}{3}\omega$$

reemplazando: $$1\,(10 - \omega) + \frac{2}{3}\left(10 - \frac{2}{3}\omega\right) = 0$$

y resolviendo: $$\omega = 11.5 \text{ rad/sg}$$

$$\omega = 110 \text{ RPM}$$