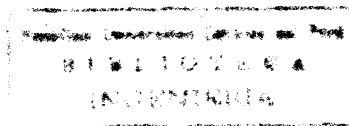






# MECANICA DE FLUIDOS I

CURSO SEMESTRAL PARA ESTUDIANTES  
DE INGENIERIA CIVIL



AUTOR : WENDOR CHEREQUE MORAN  
INGENIERO CIVIL CIP 4222  
PROFESOR PRINCIPAL DE LA  
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU

LIMA - PERU

1,987



## P R E S E N T A C I O N

Hay algunos hechos evidentes respecto de la Hidráulica en el país que quisiera reseñar. Uno es la presencia de un grupo importante de ingenieros civiles y afines, dedicados a la Hidráulica, que son de la mayor competencia tanto docente como profesional. Otro es la ausencia casi completa de publicaciones sobre Hidráulica por autores peruanos. El tercero es que existen sobre Mecánica de Fluidos numerosos libros extranjeros en nuestras librerías y bibliotecas que en cierto modo pueden confundir un poco a los estudiantes.

Con la intención de llenar en parte el vacío de publicaciones nacionales y motivar a los ingenieros peruanos para que se animen a publicar, es que sale a luz este texto de Mecánica de Fluidos 1. Está orientado a estudiantes de ingeniería civil y carreras afines. Lo pongo a consideración especialmente de los profesores para que se sirvan tomarlo como una primera posibilidad de lo que podría ser un libro de texto. El libro está desarrollado de manera objetiva y clara y cubre los primeros aspectos de la Hidráulica hasta flujo en conductos a presión inclusive, en la idea que Mecánica de Fluidos 2 se dedique al estudio completo del flujo en canales.

Despertar y mantener el interés de los estudiantes no es tarea fácil para ningún profesor. Con el tiempo uno llega a comprender que debe evitar los ejercicios y problemas sofisticados para plantear más bien situaciones reales. También que la seriedad profesional no se contradice con el entusiasmo con que deben ser transmitidos los conocimientos a los que se inician en este hermoso campo, mezcla de ciencia y arte, que es la Hidráulica.

Quizá convenga contar a los estudiantes que:

1. en este curso de Mecánica de Fluidos 1 se estudia el comportamiento de los líquidos en reposo y en movimiento en general;
2. en este estudio se emplean los principios básicos de la Física y los métodos ordinarios del Análisis Matemático;
3. las formulaciones a que se llega son susceptibles de verificación y ajuste experimental en el laboratorio;
4. las formulaciones corregidas son herramientas efectivas en la solución de problemas reales a que se enfrenta el ingeniero (Hidráulica o Hidrotecnia);
5. en ocasiones no es posible prescindir del estudio en modelos físicos construidos a escala en el laboratorio.

Seguramente y pese a las revisiones realizadas es posible que se hayan deslizado algunos errores. De ser así, apelo a la benevolencia del lector para que se sirva ser tolerante y eventualmente hacerme llegar sus observaciones. Para terminar, quisiera hacer presente mi agradecimiento personal al Ing. Manuel García Naranjo por sus valiosas sugerencias, también a la Srta. Martha Calderón y al bachiller Sr. Miguel Chiriboga por su encomiable contribución en la preparación del original.

El autor

---

A:  
**JORGE MARCUS**  
Ingeniero, Profesor, Amigo

## CONTENIDO

### CAPITULO 1: LOS FLUIDOS Y SUS PROPIEDADES (3 h)

1.1	Sistemas de unidades.	1
1.2	Los fluidos.	1
1.3	Fuerzas en el interior de un fluido. Presión.	2
1.4	Densidad. Peso específico. Gravedad específica.	3
1.5	Viscosidad.	4
1.6	Compresibilidad.	6
1.7	Presión de vapor. Cavitación.	7
1.8	Tensión superficial. Capilaridad.	8
1.9	Los gases.	9
1.10	Mecánica de fluidos y ciencias afines.	10
1.11	Ejemplos de aplicación.	11

### CAPITULO 2: HIDROSTATICA (4 h)

2.1	Variación de la presión.	17
2.2	Presión atmosférica local.	17
2.3	Transmisión de presiones.	18
2.4	Dispositivos para medir presiones estáticas.	20
2.5	Fuerzas sobre superficies planas.	21
2.6	Fuerzas sobre superficies curvas.	26
2.7	Cuerpos sumergidos.	30
2.8	Equilibrio relativo de los líquidos..	34
2.9	Ejemplos de aplicación.	37

### CAPITULO 3: HIDROCINEMATICA (3 h)

3.1	El campo de velocidades.	47
3.2	El campo de aceleraciones.	48
3.3	El campo rotacional.	50
3.4	Clasificación de los flujos.	51
3.5	Descripción del movimiento.	54
3.6	Línea de corriente. Trayectoria. Tubo de flujo.	54
3.7	Caudal o gasto.	56
3.8	Ejemplos de aplicación.	57

### CAPITULO 4: ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA MECANICA DE FLUIDOS (8 h)

4.1	Concepto de sistema y volumen de control.	61
4.2	Ecuación de continuidad.	61
	4.2.1 Formulación general.	61
	4.2.2 Ejemplos de aplicación.	63
4.3	Ecuación de la energía.	64

4.3.1	Ecuación del movimiento a lo largo de una l.c.	64
4.3.2	Ecuación de Bernoulli.	65
4.3.3	Formulación general.	67
4.3.4	Dispositivos para medir velocidades y caudales.	73
4.3.5	Ejemplos de aplicación.	80
4.4	Ecuación de la cantidad de movimiento.	86
4.4.1	Formulación general.	86
4.4.2	Ejemplos de aplicación.	89
4.5	Ecuación del momento de la cantidad de movimiento.	100
4.5.1	Formulación general.	100
4.5.2	Ejemplos de aplicación.	101

## CAPITULO 5: FLUJO BIDIMENSIONAL DEL LIQUIDO IDEAL (5 h)

5.1	Introducción.	103
5.2	La función de corriente.	104
5.3	La función potencial.	106
5.4	La red de corriente.	107
5.5	Trazado gráfico de la red de corriente.	110
5.6	Otros métodos de estudio del flujo plano.	117
5.7	Ejemplos de aplicación.	122

## CAPITULO 6: ANALISIS DIMENSIONAL Y SEMEJANZA HIDRAULICA (4 h)

6.1	Introducción.	125
6.2	Análisis dimensional. Ejemplos de aplicación.	125
6.3	El teorema $\pi$ de Buckingham. Ejemplos de aplicación.	128
6.4	Semejanza hidráulica.	132
6.4.1	Semejanza geométrica.	132
6.4.2	Semejanza cinemática.	132
6.4.3	Semejanza dinámica.	133
6.5	Aplicaciones.	134
6.5.1	En sistemas a presión.	134
6.5.2	En sistemas a superficie libre.	135
6.5.3	Asuntos conexos.	136
6.6	Ejemplos de aplicación.	137

## CAPITULO 7: EMPUJE DINAMICO DE LOS FLUIDOS (3 h)

7.1	Introducción.	139
7.2	Teoría de la capa límite. Placas lisas.	139
7.2.1	Expresiones de $\delta$ , $\tau_0$ y $C_D$ para c.l. laminar.	141
7.2.2	Expresiones de $\delta$ , $\tau_0$ y $C_D$ para c.l. turbulenta.	145
7.3	Arrastre.	147
7.4	Sustentación.	148
7.5	Ejemplos de aplicación.	149

## CAPITULO 8: FLUJO PERMANENTE EN CONDUCTOS A PRESION (12 h)

8.1	Distribución del esfuerzo cortante.	153
8.2	Distribución de velocidades en el flujo laminar.	154
8.3	Distribución de velocidades en el flujo turbulento.	156
8.3.1	Contornos hidráulicamente lisos.	156
8.3.2	Contornos hidráulicamente rugosos.	158



8.4	Pérdida de carga por fricción en el flujo laminar.	160
8.5	Pérdida de carga por fricción en el flujo turbulento.	160
8.5.1	Fórmula de Colebrook-White.	160
8.5.2	Fórmula de Chezy.	164
8.5.3	Asuntos conexos.	165
8.6	Ejemplos de aplicación.	167
8.7	Fórmula empírica de Hazen-Williams.	171
8.8	Pérdidas locales. Ejemplos de aplicación	173
8.9	Aplicaciones.	185
8.9.1	Tuberías simples, en serie y en paralelo.	185
8.9.2	Análisis de redes abiertas y cerradas.	189
8.9.3	Tubería con servicio en camino.	203

APENDICE:

A1	Propiedades del agua y del aire.	207
A2	Coefficiente de resistencia.	209
A3	Valores de la rugosidad absoluta K.	211
A4	Diagrama de Moody.	213
A5	Diagrama de Johnson-Rouse.	215
A6	Programa en Pascal para resolver sistemas de ecuaciones lineales.	217

## BIBLIOGRAFIA

1. Mecánica de los Fluidos  
Víctor L. Streeter  
Cuarta edición  
Editorial Mc Graw-Hill.
2. Mecánica de los Fluidos e Hidráulica  
Ronald V. Giles  
Segunda edición  
Editorial Mc Graw-Hill.
3. Hidráulica General  
Gilberto Sotelo Avila  
Volumen 1  
Editorial Limusa.
4. Hidráulica de Tuberías y Canales  
Arturo Rocha  
LIBUNI.
5. Hidráulica  
Hunter Rouse  
Editorial Dossat.
6. Hidráulica  
Balloffet-Gotelli-Meoli  
Segunda edición  
Editorial Ediar.
7. Practical Hydraulics  
Andrew L. Simon  
Second edition  
Editorial John Wiley and Sons.
8. Civil Engineering Hydraulics  
Featherstone y Nalluri  
Granada Publishing Limited  
Gran Bretaña, 1982.

# CAPITULO 1: LOS FLUIDOS Y SUS PROPIEDADES

## 1.1 Sistemas de unidades

El cuadro que sigue resume los principales sistemas de unidades todavía en uso. Debajo del nombre de cada sistema se indican sus tres unidades fundamentales, de modo que todas las restantes son magnitudes derivadas que se pueden expresar en términos de las fundamentales.

Sistema	$F = m \cdot a$	$W = m \cdot g$
Técnico (LFT)	$1 \text{ kg} = 1 \text{ UTM} \times 1 \text{ m/sg}^2$	$1 \text{ kg} = 1 \text{ kg}_m \times 9.8 \text{ m/sg}^2$
MKS (LMT)	$1 \text{ N} = 1 \text{ kg}_m \times 9.8 \text{ m/sg}^2$	
cgs (LMT)	$1 \text{ d} = 1 \text{ gr}_m \times 1 \text{ cm/sg}^2$	$1 \text{ gr} = 1 \text{ gr}_m \times 980 \text{ cm/sg}^2$
Inglés (LFT)	$1 \text{ lb} = 1 \text{ slug} \times 1 \text{ pie/sg}^2$	$1 \text{ lb} = 1 \text{ lb}_m \times 32.2 \text{ pie/sg}^2$

es decir,

$1 \text{ UTM} = 9.8 \text{ kg}_m$
$1 \text{ kg} = 9.8 \text{ Newton}$
$1 \text{ gr} = 980 \text{ dinas}$
$1 \text{ kg} = 9.8 \times 10^5 \text{ dinas}$
$1 \text{ N} = 10^5 \text{ dinas}$
$1 \text{ slug} = 32.2 \text{ lb}_m$

## 1.2 Los fluidos

Los cuerpos de la naturaleza, atendiendo a su aspecto físico, pueden ser sólidos y fluidos, comprendiendo estos últimos a los líquidos y los gases. Cuando volcamos sobre una mesa un poco de agua o echamos una bocanada de humo apreciamos que tanto el agua como el humo fluyen con facilidad. Los fluidos, a diferencia de los sólidos, y debido a su constitución molecular, pueden cambiar continuamente las posiciones relativas de sus moléculas sin ofrecer resistencia apreciable a la deformación.

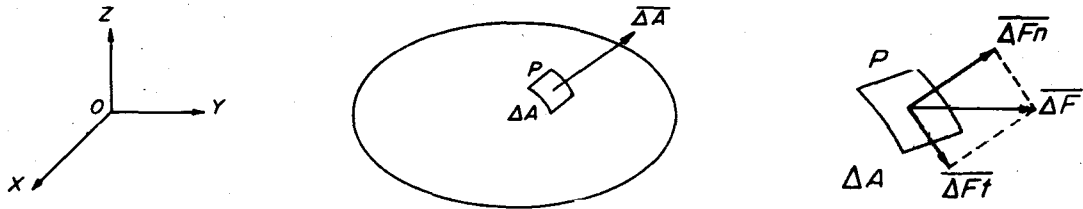
Pero entre los líquidos y los gases también hay diferencias. Considerando un mismo volumen de líquido y de gas, vertiéndolos en dos recipientes iguales se aprecia que el líquido adopta la forma del recipiente y permanece quieto con una superficie libre horizontal, mientras que el gas se expande hasta ocupar todo el recipiente para adquirir recién el equilibrio estático.

Los líquidos son prácticamente incompresibles mientras que los gases son muy compresibles; esta es la otra diferencia importante. En la práctica se considera que el agua es incompresible (salvo contados casos en que está sometida a grandes presiones) y que los gases son compresibles (salvo contados casos en que están sometidos a presiones muy pequeñas).

El continuo.- La estructura molecular real de los fluidos es tal que entre las moléculas hay espacios más o menos apreciables. Por "velocidad en un punto" se entendería la velocidad de la molécula que ocupa ese punto y en un medio así no sería aplicable el análisis matemático. Por esta razón se introduce la hipótesis de que el fluido es un medio continuo, en el cual por "velocidad en un punto" se entiende la velocidad media de las moléculas que rodean el punto, y en el cual varían también de modo continuo a través del fluido los parámetros de estudio: velocidad, densidad, presión, aceleración, etc. (o son constantes por supuesto). En un medio así, sin espacios vacíos, ya es aplicable el análisis matemático.

### 1.3 Fuerzas en el interior de un fluido

Supongamos que en un fluido en movimiento se aísla idealmente un cierto volumen limitado por la superficie  $S$ . El efecto de la masa fluida que rodea a la porción aislada es un conjunto de fuerzas desigualmente distribuidas sobre  $S$  denominadas fuerzas de superficie. Si se considera en  $S$  el elemento de área  $\Delta A$  correspondiente a un punto  $P$ , este elemento  $\Delta A$  puede representarse por el vector  $\overline{\Delta A}$ , normal al elemento  $\Delta A$ . Este vector se considera positivo hacia afuera de la porción aislada.



Si en el punto  $P$  actúa la fuerza de superficie  $\overline{\Delta F}$ , se define esfuerzo, en general, en el punto  $P$  a la expresión:

$$s = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta F}}{\Delta A} = \frac{d\overline{F}}{dA}$$

La fuerza  $\overline{\Delta F}$  en el punto  $P$  puede descomponerse en dos direcciones, una normal al elemento de área ( $\overline{\Delta F}_n$ ) y otra tangencial ( $\overline{\Delta F}_t$ ), que generan respectivamente los esfuerzos: normal ( $\sigma$ ) y cortante ( $\tau$ ). Se considera que el esfuerzo normal es positivo cuando se trata de una tensión (como en la figura) y negativo cuando se trata de una compresión. Si uno lo desea cada esfuerzo puede descomponerse en las direcciones  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

Además de las fuerzas de superficie, en cada punto del volumen aislado actúan las fuerzas de cuerpo. Estas fuerzas se expresan por unidad de masa y su expresión cartesiana es:

$$\overline{M} = X\overline{i} + Y\overline{j} + Z\overline{k}$$

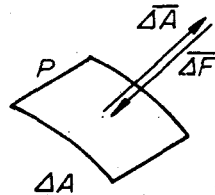
El eje  $Z$  se hace coincidir con la vertical terrestre, de modo que si la única fuerza de cuerpo es el peso:

$$X = 0 \quad Y = 0 \quad Z = -g$$

Presión.- Hay dos circunstancias en que sobre el elemento de área  $\Delta A$  la fuerza de superficie  $\Delta F$  es normal al elemento:

- \* cuando el fluido está en reposo
- \* cuando estando el fluido en movimiento se asume que la componente tangencial  $\Delta F_t$  es nula (hipótesis de líquido ideal).

La primera situación es real, la segunda hipotética.



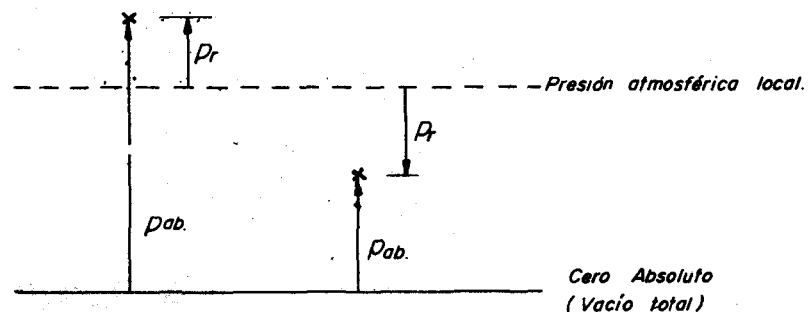
En estas condiciones se define presión en el punto P a la expresión:

$$-p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

obedeciendo el signo menos a que la fuerza  $\overline{\Delta F}$  produce un esfuerzo de compresión.

Nótese que la presión queda definida como el cociente de dos escalares y que por lo tanto ella misma es un escalar. Al actuar la presión sobre un elemento de área genera sí una fuerza.

Para referirse al valor numérico de la presión hay necesidad de distinguir entre presión relativa y presión absoluta. La primera se mide por encima (positiva) o por debajo (negativa) de la presión atmosférica local y la segunda (siempre positiva) a partir del cero absoluto que corresponde al vacío completo.



Las presiones relativas son medidas con instrumentos llamados manómetros y por eso se denominan también presiones manométricas.

#### 1.4 Densidad. Peso específico. Gravedad específica

Se define densidad ( $\rho$ ) a la masa de fluido contenida en la unidad de volumen:

$$\rho = \frac{M}{V_0}$$

y peso específico ( $\gamma$ ) al peso de fluido contenido en la unidad de volumen:

$$\gamma = \frac{W}{V_0}$$

Se verifica que  $\gamma = \rho g$

Se define gravedad específica (g.e.) a la relación entre la masa (o el peso) de un cierto volumen del fluido y la masa (o el peso) del mismo volumen de agua.

Se verifica:

$$\text{g.e.} = \frac{\rho}{\rho_{\text{agua}}} = \frac{\gamma}{\gamma_{\text{agua}}}$$

Otro concepto relacionado es el de volumen específico ( $v_s$ ), definido como el volumen ocupado por la unidad de masa. Viene a ser la inversa de la densidad:

$$v_s = \frac{1}{\rho}$$

La densidad y el peso específico de los líquidos dependen sólo de la temperatura y sus valores disminuyen al aumentar ésta. Los valores estándar para el agua son los que corresponden a la temperatura de 4°C:

$$\rho \approx 102 \frac{\text{kg } \text{sg}^2}{\text{m}^4}$$

$$\gamma = 1,000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

La densidad y el peso específico de los gases varían con la temperatura y la presión, según la ecuación de estado de los gases perfectos. Los valores estándar para el aire son los que corresponden a 15°C y la presión atmosférica al nivel del mar:

$$\rho \approx 0.125 \frac{\text{kg } \text{sg}^2}{\text{m}^4}$$

$$\gamma \approx 1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

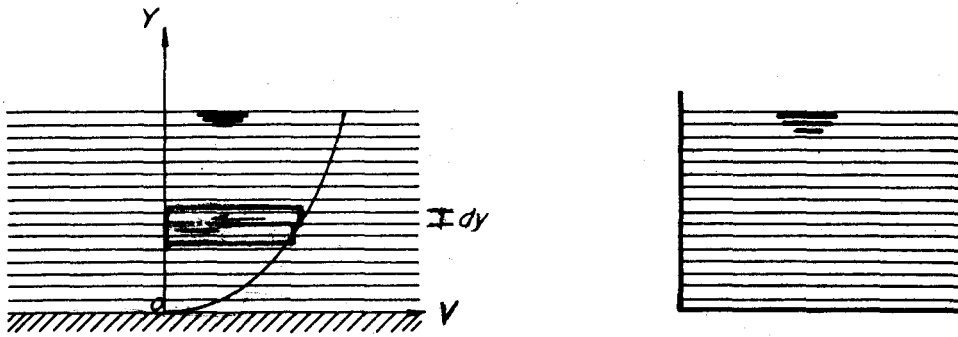
## 1.5 Viscosidad

Cuando volcamos sobre una superficie plana agua y un aceite lubricante observamos que el agua se deforma con más facilidad que el aceite. Decimos entonces que el aceite es más viscoso que el agua.

La viscosidad de los fluidos es una medida de la resistencia que estos oponen a ser deformados. Es una propiedad que la ejercitan los fluidos sólo cuando son obligados al movimiento.

Los líquidos son más viscosos que los gases.

Si en un canal rectangular inclinado se mueve un líquido con velocidad relativamente pequeña, se verifica que el flujo se produce en forma de capas o láminas (movimiento laminar) de espesor diferencial y con velocidades variando según una ley parabólica:



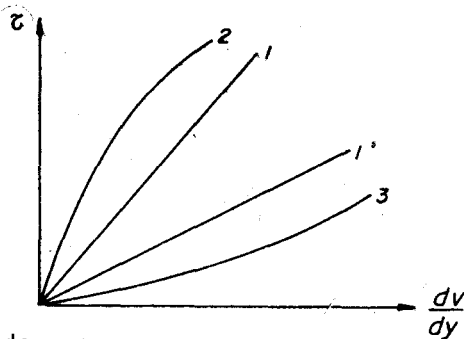
La ley de Newton de la viscosidad establece que el esfuerzo tangencial que se produce entre dos láminas separadas una distancia  $dy$ , que se desplazan con velocidades  $v$  y  $v + dv$  es proporcional al gradiente de velocidad:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

La constante de proporcionalidad  $\mu$  es diferente para cada fluido, y es una magnitud que mide la viscosidad del fluido; se llama viscosidad dinámica.

Nótese en el dibujo cómo en el fondo el gradiente es más grande y por lo tanto el esfuerzo de corte ahí ( $\tau_0$ ) es mayor y va disminuyendo hacia arriba.

Los fluidos que se comportan según esta ley son denominados newtonianos los que tienen comportamiento diferentes no newtonianos.



1 ..... newtonianos

2, 3 ... no newtonianos

Las dimensiones de  $\mu$  son:

$$|\mu| = \frac{|\tau|}{\left|\frac{dv}{dy}\right|} = \frac{FL^{-2}}{T^{-1}} = \frac{FT}{L^2} = \frac{MLT^{-2} \cdot T}{L^2} = \frac{M}{LT}$$

La unidad de viscosidad dinámica en el sistema c.g.s. se llama poise y vale:

$$1 \text{ poise} = \frac{1 \text{ dina} \cdot \text{sg}}{\text{cm}^2} = \frac{1 \text{ gr}_m}{\text{cm} \cdot \text{sg}}$$

Para presiones ordinarias la viscosidad de los fluidos es independiente de la presión y depende únicamente de la temperatura.

En los líquidos al aumentar la temperatura disminuye la viscosidad; en los gases es al revés, es decir al aumentar la temperatura aumenta la viscosidad.

Muchas veces es más cómodo trabajar con la viscosidad cinemática, definida como:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

y cuyas unidades resultan:

$$|\nu| = \frac{|\mu|}{|\rho|} = \frac{ML^{-1}T^{-1}}{ML^{-3}} = \frac{L^2}{T}$$

La unidad de viscosidad cinemática en el sistema c.g.s. se llama stoke y vale:

$$1 \text{ stoke} = \frac{1 \text{ cm}^2}{\text{sg}}$$

Comentario.- De acuerdo a la ley de Newton,

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

el esfuerzo de corte es nulo en cualquiera de los siguientes casos:

- \* cuando el fluido está en reposo ( $\frac{dv}{dy} = 0$ );
- \* cuando el fluido que está en movimiento se supone no viscoso (hipótesis de líquido ideal  $\mu = 0$ );
- \* cuando el líquido real, viscoso, se mueve con una velocidad relativamente grande de manera que se produce una buena mezcla del líquido y la distribución de velocidades se uniformiza acercándose a un rectángulo ( $\nu$  constante y  $\frac{dv}{dy} = 0$ ).

## 1.6 Compresibilidad

Cuando a un fluido en reposo se aplica un incremento de presión ( $\Delta p$ ), experimenta una disminución unitaria de volumen ( $-\frac{\Delta V_0}{V_0}$ ). Se define módulo de elasticidad volumétrica del fluido (E) como la relación:

$$E = \frac{\Delta p}{-\frac{\Delta V_0}{V_0}}$$

Según las experiencias realizadas, en condiciones normales el agua experimenta una pequeña disminución unitaria de volumen de 0.00005 por cada incremento de presión de una atmósfera ( $1.033 \text{ kg/cm}^2$ ). Por eso su valor estándar de E es:

$$E \approx 21,000 \text{ kg/cm}^2$$

Desde el punto de vista práctico esto conduce a considerar el agua como incompresible (densidad constante), salvo en aquellos casos de excepción en



que está sometida a presiones muy grandes como ocurre en el fenómeno del golpe de ariete.

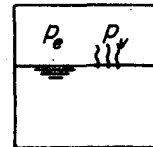
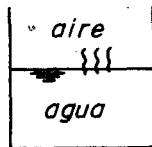
Los gases por el contrario son altamente compresibles por lo que su densidad es variable, salvo en aquellos casos de excepción en que el aire está sometido a presiones muy pequeñas como ocurre en los ventiladores y ductos de ventilación.

Perturbación de la presión.- Cualquier perturbación en la presión del agua en una tubería se propaga en forma de onda, cuya velocidad (celeridad) es igual a la velocidad de propagación del sonido a través del líquido:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

### 1.7 Presión de vapor. Cavitación

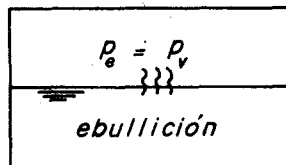
Los líquidos tienden a evaporarse. Las moléculas liberadas en forma de vapor humedecen el aire seco de encima de la superficie.



En un recipiente cerrado las moléculas de vapor ejercen una presión parcial ( $p_v$ ) llamada presión de vapor, independientemente de la presión existente ( $p_e$ ).

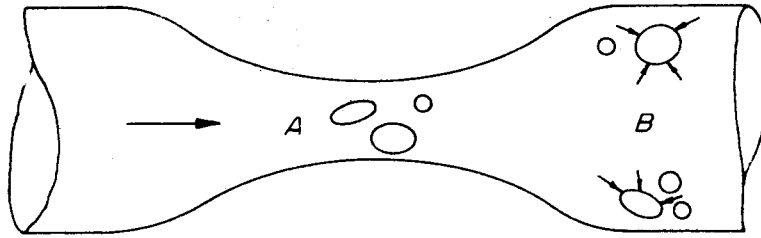
La presión de vapor de un líquido dado depende de su temperatura y aumenta con ella.

Cuando la presión existente ( $p_e$ ) se iguala a la presión de vapor del líquido ( $p_v$ ), éste hierve. La temperatura de este momento se llama temperatura de ebullición y se produce un intercambio equilibrado de moléculas del líquido y del aire. Si la presión  $p_e$  es muy pequeña el líquido hierve a baja temperatura.



En el caso del agua en contacto con el aire, como al nivel del mar la  $p_e$  es  $1.033 \text{ kg/cm}^2$  el agua hierve a  $100^\circ\text{C}$  porque para esta temperatura  $p_v = 1.033 \text{ kg/cm}^2$ . Conforme se asciende la  $p_e$  disminuye y el agua hierve a menores temperaturas:

Cavitación.- En la práctica de la hidráulica hay situaciones en que el agua resulta con presiones muy pequeñas ( $p_e$ ) y si los valores son tan bajos que se acercan a la presión de vapor ( $p_v$ ), parte del agua entra en ebullición con desprendimiento de burbujas de vapor, Véase zona A.



tubería con estrechamiento

Estas bolsas de vapor son arrastradas a la zona B donde la presión del líquido es mayor y entonces se produce una "implosión" de las burbujas con el siguiente efecto:

- \* aparición de ruidos molestos
- \* daños en las paredes en forma de picaduras.

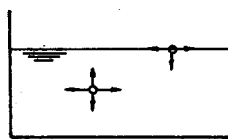
A este fenómeno se denomina cavitación.

Situación similar a la expuesta se presenta con frecuencia en el cuerpo de las bombas y de las turbinas hidráulicas. Cuando estas máquinas son desmontadas se aprecian de manera impresionante los efectos perniciosos de la cavitación.

Comentario.- En la práctica existen numerosas circunstancias en que se puede producir el fenómeno de la cavitación. Afortunadamente existen pautas para prevenirlo.

### 1.8 Tensión superficial. Capilaridad

Una molécula en el interior de un líquido en reposo está sometida a la acción de fuerzas moleculares de cohesión en todas las direcciones. Estas fuerzas se compensan y dan resultante nula.



No ocurre lo mismo en una molécula de la superficie libre donde sí hay una fuerza de cohesión no equilibrada en dirección hacia el líquido. Se define tensión superficial de un líquido ( $\sigma$ ) al trabajo que debe realizarse para elevar moléculas en número suficiente del interior hasta la superficie libre para crear una nueva unidad de área. Sus unidades son:

$$|\sigma| = \left| \frac{\text{kg-m}}{\text{m}^2} \right| = \left| \frac{\text{kg}}{\text{m}} \right|$$

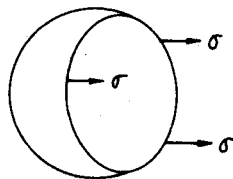
También se puede definir como la fuerza necesaria para mantener en equilibrio la unidad de longitud de la película superficial. Numéricamente y dimensionalmente es lo mismo. La tensión superficial del agua a 20°C vale:

$$\sigma = 0.0074 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

y este valor disminuye conforme aumenta la temperatura.

Los efectos de la tensión superficial que son de interés del ingeniero son dos:

- \* debido a la tensión superficial la presión dentro de una gota de agua, o de un chorro delgado, es mayor que la exterior:

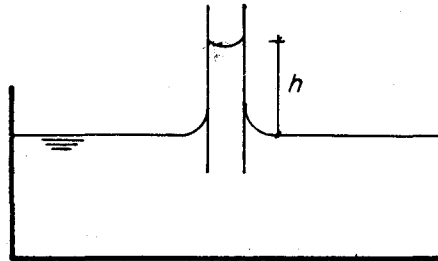


$$p \cdot \pi r^2 = \sigma \cdot 2 \pi r$$

$$p = \frac{2 \sigma}{r}$$

Nótese cómo si la presión exterior es la atmosférica, entonces  $p$  es una presión relativa positiva; también cómo cuanto menor es el radio mayor es la presión.

- \* debido a la tensión superficial, cuando un tubo de pequeño diámetro se sumerge en el agua, 1º) el agua moja el tubo porque la adhesión agua-tubo es mayor que la cohesión del agua y 2º) el agua asciende una pequeña altura ( $h$ ). A este fenómeno se llama ascenso capilar y tiene lugar en tubos de diámetro reducido y también en los suelos.



### 1.9 Los gases

El comportamiento de los gases es diferente al de los líquidos y su estudio requiere de consideraciones termodinámicas. El estudio de los gases se simplifica bastante si es que aproximadamente se comportan como los llamados gases perfectos. Afortunadamente en muchos casos es así.

La ecuación de estado de un gas perfecto relaciona el número mínimo de parámetros que son necesarios para definir el estado del gas. Se expresa:

$$p = \gamma R_0 T = \rho g R_0 T = \rho R T$$

$p$  .. presión absoluta en  $\text{kg}/\text{m}^2$

$g$  ..  $9.8 \text{ m}/\text{sg}^2$

$T$  .. temperatura en ° Kelvin

$R_0$  .. constante para cada gas. Para el aire su valor es:

$$= 29.3 \frac{\text{m}}{\text{°K}}$$

$R$  ..  $g R_0$

$\gamma$  .. peso específico del gas en  $\text{kg}/\text{m}^3$

$\rho$  .. densidad del gas en  $\frac{\text{kg}\cdot\text{sg}^2}{\text{m}^4}$

En los gases perfectos se supone que ante la adición de una pequeña cantidad de calor el proceso de cambio de las propiedades del gas es muy lento, que los cambios de temperatura y presión son muy pequeños, que el sistema se conserva siempre en equilibrio y que por lo tanto puede ser considerado homogéneo.

## Procesos termodinámicos

- a) proceso a volumen constante: cuando los cambios de temperatura o de presión tienen lugar sin cambiar el volumen específico del gas.

$$v_{s1} = v_{s2} = \text{constante}$$

- b) proceso isobárico o a presión constante: si es que durante el proceso no cambia la presión del gas.

$$p_1 = p_2 = \text{constante}$$

$$\rho_1 R T_1 = \rho_2 R T_2 = \text{cte.}$$

$$\rho_1 T_1 = \rho_2 T_2 = \text{cte.}$$

$$\frac{1}{\rho_1 T_1} = \frac{1}{\rho_2 T_2} = \text{cte.}$$

$$\frac{v_s}{T} = \text{cte.}$$

- c) proceso isotérmico o a temperatura constante: si es que durante el proceso no cambia el producto RT,

$$R_1 T_1 = R_2 T_2 = \text{constante}$$

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_2}{\rho_2} = \text{cte.}$$

$$p_1 v_{s1} = p_2 v_{s2} = \text{cte.}$$

- d) proceso adiabático o sin adición de calor: si además el proceso es reversible, es decir si no se produce fricción se denomina isentrópico y se cumple:

$$\frac{p_1}{\rho_1^K} = \frac{p_2}{\rho_2^K} = \text{cte.}$$

K ... constante de cada gas. Para el aire vale 1.4

Ecuación politrópica. Es una ecuación general que rige para cada uno de los procesos precedentes.

$$p v_s^n = \frac{p}{\rho^n} = \text{cte.}$$

n = 0 en los procesos isobáricos

n = 1 en los procesos isotérmicos

n = K en los procesos isentrópicos

### 1.10 Mecánica de fluidos y ciencias afines

La mecánica de fluidos viene a ser la mecánica general aplicada al estudio de los fluidos en reposo y en movimiento, por lo que se emplean los mismos principios generales:

- conservación de la masa,
- conservación de la energía,

- leyes del movimiento de Newton;

para el estudio de los fluidos compresibles o gases se emplean además algunos principios de la termodinámica.

La hidromecánica es la mecánica de fluidos orientada al estudio preferente del agua.

La hidrodinámica es la ciencia que se ocupa del estudio de los fluidos ignorando su viscosidad. Como en la práctica se dan situaciones en las que el efecto de la viscosidad del agua resulta insignificante, se aprovecha el avance logrado por esta ciencia.

La hidráulica o hidrotecnia no es sino la hidromecánica orientada a la solución de problemas específicos de ingeniería relacionados con el agua.

### 1.11 Ejemplos de aplicación

Ejemplo 1.- Deducir el valor de la gravedad en unidades inglesas.

$$g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{sg}^2} = 9.81 \times 3.28 \frac{\text{pie}}{\text{sg}^2} = 32.2 \frac{\text{pie}}{\text{sg}^2}$$

Ejemplo 2.- Deducir las relaciones entre las unidades HP, CV y Kw.

$$1 \text{ HP} = 76 \frac{\text{kg-m}}{\text{sg}}$$

$$1 \text{ CV} = 75 \frac{\text{kg-m}}{\text{sg}}$$

$$1 \text{ Kw} = 1,000 \text{ W} = 1,000 \frac{\text{N-m}}{\text{sg}} = 102 \frac{\text{kg-m}}{\text{sg}}$$

$$\text{es decir: } 1 \text{ Kw} = 1.34 \text{ HP} = 1.36 \text{ Kw}$$

Ejemplo 3.- Obtener el valor de la presión atmosférica al nivel del mar en  $\text{lb/pie}^2$  y en  $\text{lb/pg}^2$ .

$$p = 1.033 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 10,330 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} = 10,330 \times \frac{2.2}{(3.28)^2} = 2,112 \frac{\text{lb}}{\text{pie}^2}$$
$$= 14.7 \frac{\text{lb}}{\text{pg}^2}$$

Ejemplo 4.- Expresar la presión atmosférica al nivel del mar en altura equivalente de agua y de mercurio.

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{10,330}{1,000} = 10.33 \text{ m} = 34 \text{ pies}$$

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{10,330}{13.6 \times 1,000} = 0.760 \text{ m}$$

Ejemplo 5.- Expresar el peso específico del agua en  $\text{lb/pie}^3$ .

$$\gamma = 1,000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1,000 \times \frac{2,203}{(3.28)^3} = 62.4 \text{ lb/pie}^3$$

Ejemplo 6.- ¿Cuál es la gravedad específica del mercurio en unidades inglesas?

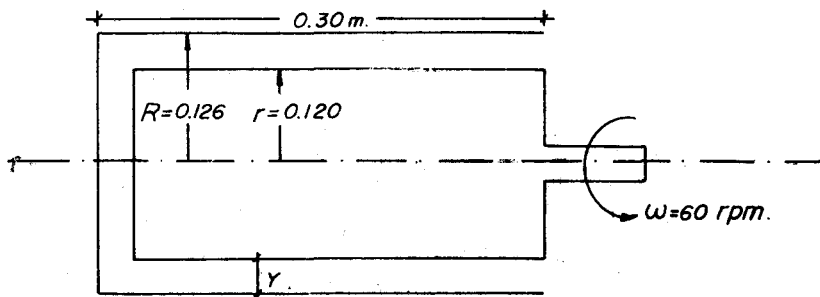
g.e. = 13.6 , independientemente del sistema de unidades.

Ejemplo 7.- Si la viscosidad aproximada del agua a 20°C es  $10^{-4} \frac{\text{kg-sg}}{\text{m}^2}$  expresar este valor en poises.

$$1 \text{ poise} = 1 \frac{\text{dina-sg}}{\text{cm}^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore 10^{-4} \frac{\text{kg-sg}}{\text{m}^2} &= 10^{-4} \times \frac{9.8 \times 10^5 \text{ dina-sg}}{10^4 \text{ cm}^2} \approx 0.01 \text{ poises} \\ &= 1 \text{ centipoise} \end{aligned}$$

Ejemplo 8.- Un cilindro de 12 cm de radio gira coaxialmente en el interior de un cilindro fijo de 12.6 cm de radio. Ambos cilindros tienen una longitud de 30 cm. Determinar la viscosidad del líquido que llena el espacio entre los dos cilindros si se necesita un par de 9 kg-cm para mantener una velocidad angular uniforme de 60 RPM.



Como la distancia "y" es muy pequeña se puede suponer una distribución lineal de velocidades



$$\begin{aligned} v = \text{velocidad tangencial} &= \omega r = \left(\frac{60}{60} \times 2\pi\right) \frac{\text{rad}}{\text{sg}} \times (0.12) \text{ m} \\ &= 0.754 \text{ m/sg} \end{aligned}$$

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} = \mu \frac{v}{y} = \mu \frac{0.754}{0.006} = 125.7 \mu$$

como el sistema está en equilibrio:

par aplicado = par resistente

$$0.09 \text{ kg-m} = \tau \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right) \cdot A(\text{m}^2) \text{ brazo (m)}$$

$$0.09 = (125.7 \mu)(2\pi \cdot 0.123 \times 0.30)(0.123)$$

$$\text{de aquí: } \mu = 0.0251 \frac{\text{kg-sg}}{\text{m}^2}$$

Ejemplo 9.- Encontrar la expresión del módulo de elasticidad volumétrico de los líquidos en términos de la densidad.

$$\text{por definición: } E = \frac{\Delta p}{-\frac{\Delta V_0}{V_0}}$$

cuando el líquido es comprimido la masa no cambia:

$$m = \text{cte}$$

$$\rho V_0 = \text{cte}$$

diferenciando:  $d(\rho V_0) = 0$

$$\rho dV_0 + V_0 d\rho = 0 \rightarrow -\frac{dV_0}{V_0} = \frac{d\rho}{\rho}$$

es decir:  $E = \frac{\Delta p}{\frac{\Delta \rho}{\rho}}$

Ejemplo 10.- Encontrar el valor del peso específico del agua cuando es so metida a una presión de 700 kg/cm<sup>2</sup>.

$$E = \frac{\Delta p}{\frac{\Delta \rho}{\rho}} = \frac{\Delta p}{\frac{\Delta \gamma}{\gamma}}$$

despejando:  $\frac{\Delta \gamma}{\gamma} = \frac{\Delta p}{E} = \frac{700}{21,000} = 0.033$

$$\Delta \gamma = 0.033 \gamma = .33 \text{ kg/m}^3$$

es decir,  $\gamma = 1,000 + 33 = 1,033 \text{ kg/m}^3$

Ejemplo 11.- Calcular la presión a 1,500 m de profundidad en el mar,

- a) considerando el agua incompresible ( $\gamma = 1,025 \text{ kg/m}^3$ )  
 b) considerando el agua compresible ( $E = 21,000 \text{ kg/cm}^2$ )

a)  $p = \gamma h = 1,025 \times 1,500 \text{ kg/m}^2 = 153.75 \text{ kg/cm}^2$

b)  $E = \frac{dp}{\frac{d\gamma}{\gamma}} \dots\dots (a)$

$$dp = E \frac{d\gamma}{\gamma}$$

$$\int_0^d dp = E \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d\gamma}{\gamma}$$

$$p = E \ln \frac{\gamma}{\gamma_0} \dots\dots (b)$$

escribiendo en (a)  $dp = \gamma dh$  :

$$E = \frac{\gamma dh}{\frac{d\gamma}{\gamma}} = \frac{\gamma^2 dh}{d\gamma}$$

$$dh = E \gamma^{-2} d\gamma$$

$$\int_0^h dh = E \int_{\gamma_0}^{\gamma} \gamma^{-2} d\gamma$$

$$(h)_0^n = \left(\frac{-E}{\gamma}\right) \gamma_0$$

$$h = \frac{E}{\gamma_0} - \frac{E}{\gamma}$$

$$\gamma = \frac{E \gamma_0}{E - \gamma_0 h} = 1,032.6 \text{ kg/m}^3$$

reemplazando en ( $\beta$ ):

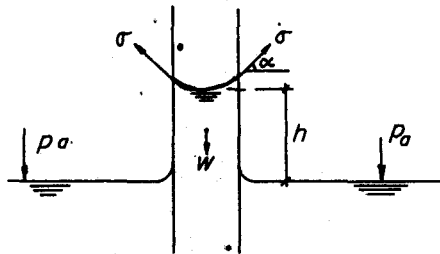
$$p = 21,000 \text{ kg} \times \frac{1,032.6}{1,025}$$

$$= 154.76 \text{ kg/cm}^2$$

**Ejemplo 12.-** Si la presión de vapor del agua a 20°C es aproximadamente 0.024 kg/cm<sup>2</sup>, expresarla en altura equivalente de agua.

$$\frac{p_v}{\gamma} = \frac{240}{1,000} = 0.24 \text{ m}$$

**Ejemplo 13.-** Calcular la altura aproximada a la que asciende el agua en un tubo capilar de 1 mm de diámetro en contacto con la atmósfera.



Condición de equilibrio estático:  $\sum F_v = 0$

$$\sigma \text{ sen } \alpha \cdot 2 \pi r = \gamma \cdot \pi r^2 h$$

$$h = \frac{2 \pi r \sigma \text{ sen } \alpha}{\gamma \pi r^2}$$

$$h = \frac{2 \sigma \text{ sen } \alpha}{\gamma r}$$

para el agua a 20°C el valor de la tensión superficial agua-aire ( $\sigma$ ) es de aproximadamente 0.074 gr/cm y el ángulo de contacto ( $\alpha$ ) para tubo limpio se puede suponer igual a 90°.

Reemplazando:

$$\sigma = 0.074 \text{ gr/cm}$$

$$\alpha = 90^\circ$$

$$\gamma = 1 \text{ gr/cm}^3$$

$$r = 0.05 \text{ cm}$$

$$h = \frac{2 \times 0.074}{1 \times 0.05} = 2.96 \approx 3 \text{ cm}$$



Ejemplo 14.- Hallar el valor del peso específico ( $\gamma$ ) del aire a la presión atmosférica, al nivel del mar, a 15°C.

ecuación de estado de los gases perfectos:  $p = \gamma R_0 T$

es decir,  $\gamma = \frac{p}{R_0 T}$

reemplazando:  $p = 10,330 \text{ kg/m}^2$

$$R_0 = 29.3 \frac{\text{m}}{\text{°K}}$$

$$T = 15 + 273 = 288^\circ\text{K}$$

$$\gamma = \frac{10.330}{29.3 \times 288} \approx 1.225 \text{ kg/m}^3$$

Ejemplo 15.- Deducir una fórmula aproximada que permita obtener la presión atmosférica de un lugar conocida su altura sobre el nivel del mar.

$$dp = -\gamma dh$$

se puede suponer que la temperatura de la atmósfera no cambia, es decir,

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma_0}$$

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{p_0} \cdot p$$

reemplazando:  $dp = -\frac{\gamma_0}{p_0} p dh$

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\int_0^h \frac{\gamma_0}{p_0} dh$$

$$\ln \frac{p_0}{p} = -\frac{\gamma_0}{p_0} h$$

$$\frac{p_0}{p} = e^{-\frac{\gamma_0}{p_0} h}$$

despejando:  $p = p_0 e^{-\frac{\gamma_0}{p_0} h}$

para  $\gamma_0 = 1.225 \text{ kg/m}^3$

$p_0 = 10,330 \text{ kg/m}^2$

$$p = 10,330 e^{-0.00012 h}$$

por ejemplo, para  $h = 1,000 \text{ m.s.n.m.}$

$$p = 9,162 \text{ kg/m}^2 = 0.92 \text{ kg/cm}^2$$

LA ASOCIACION INTERNACIONAL DE INVESTIGACIONES HIDRAULICAS  
(tomado de la referencia 4)

La Asociación Internacional de Investigaciones Hidráulicas (A.I.I.H.) es el organismo de más alto nivel que agrupa a los investigadores hidráulicos de diferentes partes del mundo.

Como parte de esta Asociación funciona el Comité Regional Latinoamericano, que ha surgido como una necesidad frente a los problemas especiales que presenta Latinoamérica. Estos problemas, vistos en su relación con la naturaleza y la socioeconomía, ofrecen características no comunes con los que se presentan en otras partes del mundo.

Nuestros problemas hidráulicos son casi propios y sus soluciones demandan metodologías exclusivas. Por ejemplo, mientras que en los países ricos se opera con extensos registros de observación de campo nosotros debemos recurrir a artificios, especulaciones y mucha imaginación para obtener, a base de unos pocos datos, los registros sustitutorios de la información de carácter histórico.

Estas razones, entre otras, explican la existencia del Comité Regional Latinoamericano de la Asociación Internacional de Investigaciones Hidráulicas.

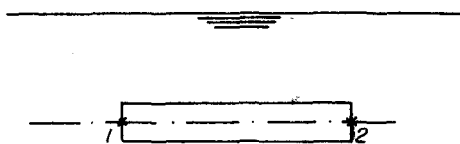
Los Congresos Latinoamericanos realizados son: Porto Alegre (1964), Caracas (1966), Buenos Aires (1968), México (1970), Lima (1972), Bogotá (1974), Santiago de Chile (1976).

## CAPITULO 2: HIDROSTATICA

El estudio de los líquidos en reposo es relativamente sencillo. No interviene la viscosidad, por cuanto esta es una propiedad que la ejercitan los fluidos cuando son obligados a moverse.

### 2.1 Variación de la presión

- a) A lo largo de una línea horizontal. Se usa como cuerpo libre un cilindro de sección  $\Delta A$  cuyo eje coincide con la línea horizontal:



$$\Sigma F_x = 0$$

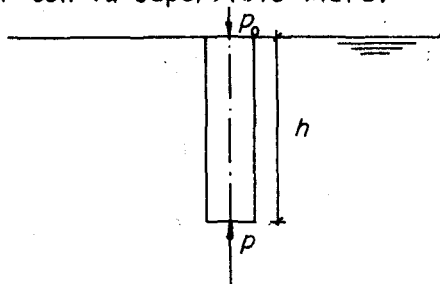
$$p_1 \cdot \Delta A - p_2 \cdot \Delta A = 0$$

$$p_1 \cdot \Delta A = p_2 \cdot \Delta A$$

$$p_1 = p_2$$

es decir, "en todos los puntos de un plano horizontal la presión es la misma".

- b) A lo largo de una línea vertical. Se usa como cuerpo libre un cilindro de sección  $\Delta A$  cuyo eje coincide con la línea vertical y su cara superior con la superficie libre.



$$\Sigma F_y = 0$$

$$p_0 \cdot \Delta A + \Delta W = p \cdot \Delta A$$

$$p_0 \cdot \Delta A + \gamma \cdot \Delta A h = p \cdot \Delta A$$

$$p = p_0 + \gamma h$$

si  $p_0$  es la presión atmosférica:  $p = p_a + \gamma h$ , es la presión absoluta a la profundidad  $h$ .

Si sólo se requiere la presión en exceso de la atmosférica:  $p = \gamma h$ , es la presión relativa a la profundidad  $h$ .

### 2.2 Presión atmosférica local

Se define presión atmosférica estándar a la presión atmosférica al nivel del mar bajo las condiciones estándar. Su valor es  $p_0 = 1.033 \text{ kg/cm}^2$ .

La presión atmosférica local ( $p_a$ ) a una altura genérica ( $h$ ) sobre el nivel del mar se puede evaluar con la fórmula:

$$p = 10,330 e^{-0.00012 h} \dots \text{ (ejemplo 15)}$$

en la que si  $h$  está en metros  $p$  resulta en  $\text{kg/m}^2$ .

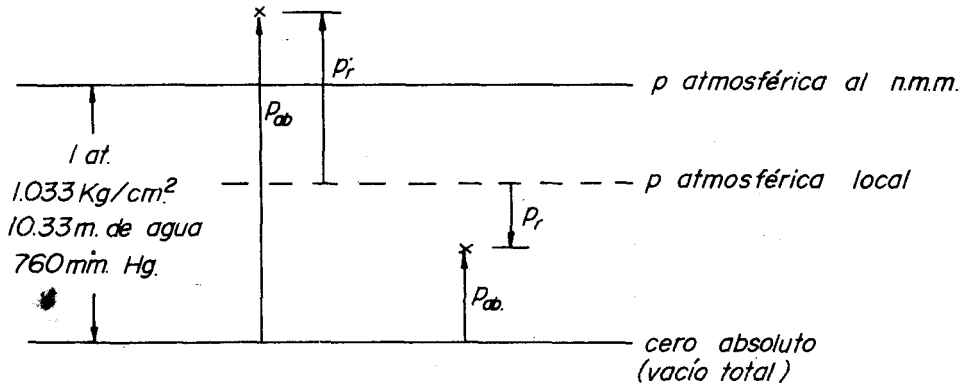
Altura de presión.- Se define altura de presión a la altura de la columna

líquida equivalente, es decir:

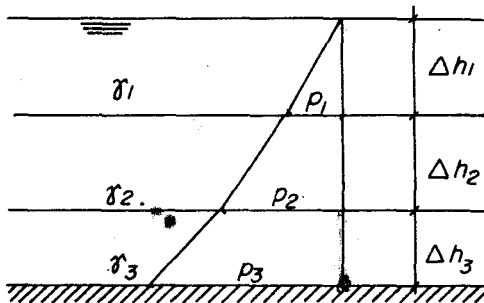
$$h = \frac{p}{\gamma}$$

Al valor de la presión atmosférica estándar ( $10,330 \text{ kg/m}^2$ ) se llama también "una atmósfera" y es equivalente a una columna de agua de 10.33 m y a una columna de mercurio (g.e. = 13.6) de 760 mm.

La figura que sigue compendia los diferentes aspectos relacionados con la presión.



Líquidos no homogéneos.- En los líquidos no homogéneos ( $\gamma$  variable) el método práctico para evaluar la presión a cualquier profundidad consiste en dividir el líquido en capas de  $\gamma$  constante.

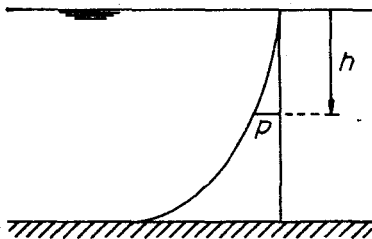


$$p_1 = \gamma_1 \cdot \Delta h_1$$

$$p_2 - p_1 = \gamma_2 \cdot \Delta h_2$$

$$p_3 - p_2 = \gamma_3 \cdot \Delta h_3$$

El método analítico consiste en escribir:  $dp = \gamma \cdot dh$



para valores positivos de  $h$  medidos hacia abajo, y reemplazar  $\gamma$  por su ley de variación para proceder a integrar:

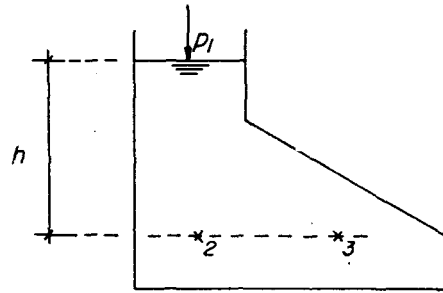
### 2.3 Transmisión de presiones

En el recipiente de la figura se puede escribir:

$$p_2 = p_3$$

$$p_2 = p_1 + \gamma h$$

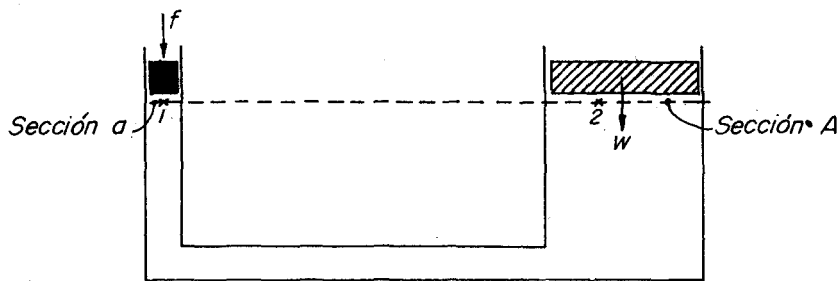
$$\therefore p_3 = p_1 + \gamma h$$



lo cual se enuncia diciendo que "la presión  $p_1$  aplicada en la superficie libre del líquido se transmite íntegramente en todas las direcciones".

Esta propiedad de los líquidos en reposo tiene en la práctica múltiples aplicaciones como la prensa hidráulica y los sistemas de transmisión hidráulica en general.

La prensa hidráulica es una máquina sencilla que permite elevar grandes pesos  $W$  aplicando pequeñas fuerzas  $f$ .



$$p_1 = p_2$$

$$\frac{f}{a} = \frac{W}{A}$$

$$f = \frac{a}{A} \cdot W$$

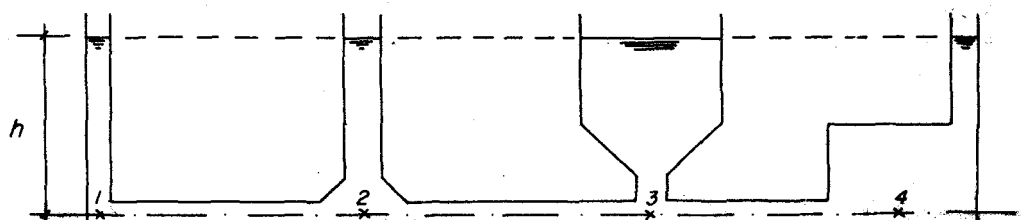
Esta propiedad de los líquidos de transmitir presiones proporciona una explicación:

- 1º) a la paradoja hidrostática de que la fuerza de presión ejercida en el fondo de los recipientes ( $F$ ) es independiente del volumen líquido y es la misma si todos los recipientes tienen la misma área de fondo ( $A$ )



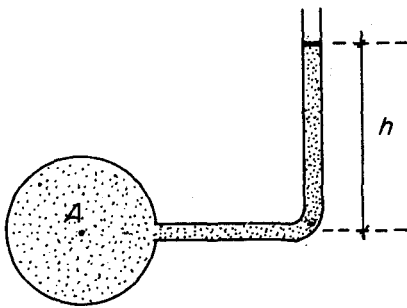
$$F = p \cdot A = \gamma h \cdot A$$

- 2º) al principio de los vasos comunicantes, según el cual el líquido alcanza el mismo nivel en todos los recipientes independientemente de la forma o el volumen.



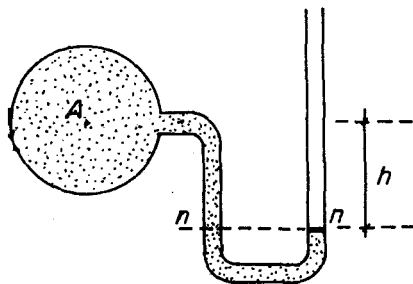
## 2.4 Dispositivos para medir presiones estáticas

**Piezómetros.**- Son tubos simples que se conectan a un depósito o a una tubería. Hay dos tipos.



Se usa cuando la presión en A es positiva y de pequeño valor, porque si no se necesitaría un tubo demasiado largo.

$$p_A = \gamma h$$



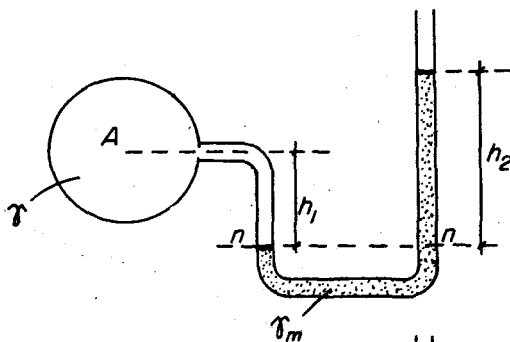
También permite medir presiones negativas de pequeño valor.

Igualando presiones en el nivel n-n :

$$p_A + \gamma h = 0$$

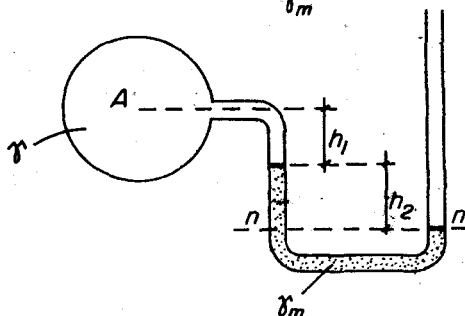
$$p_A = -\gamma h$$

**Manómetros.**- Son tubos en forma de U que contienen un líquido propio, generalmente mercurio, llamado líquido manométrico ( $\gamma_m$ ). Sirven para medir presiones positivas y negativas.



$$p_A + \gamma h_1 = \gamma_m h_2$$

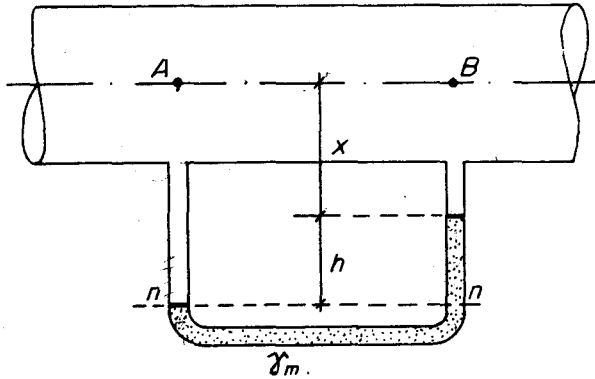
$$p_A = \gamma_m h_2 - \gamma h_1$$



$$p_A + \gamma h_1 + \gamma_m h_2 = 0$$

$$p_A = -\gamma_m h_2 - \gamma h_1$$

**Manómetro diferencial.**- Es un tubo en forma de U que sirve para averiguar la diferencia de presiones entre dos puntos.



$$p_A + \gamma x + \gamma h = p_B + \gamma x + \gamma_m h$$

$$p_A - p_B = (\gamma_m - \gamma) h$$

esta diferencia de presiones se puede también expresar en altura de líquido de la tubería:

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \left( \frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right) h$$

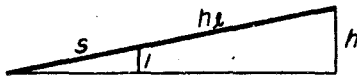
**Manómetro diferencial inclinado.**- Se usa cuando la diferencia de presiones que se va a medir es pequeña. Con este manómetro se consigue mejor precisión en la obtención de la diferencia de presiones.

El valor h de las fórmulas anteriores se refiere a una longitud vertical. Habrá que reemplazarla ahora por una longitud inclinada  $h_l$ .

Si la inclinación del tubo es 1:s se puede plantear la siguiente relación por semejanza de triángulos:

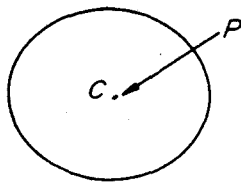
$$\frac{h_l}{h} = \frac{s}{1}$$

$$h = \frac{h_l}{s}$$



## 2.5 Fuerzas sobre superficies planas

La fuerza de presión sobre una superficie recibe el nombre de empuje hidrostático o simplemente empuje (P).



El empuje P es la resultante de un conjunto de fuerzas paralelas elementales p.dA. Para que el empuje quede completamente definido, es necesario conocer su magnitud, dirección, sentido y punto de aplicación.

a) **Superficies planas horizontales.**- En todos los puntos de la superficie plana la presión es la misma e igual a  $\gamma h$ .

magnitud :  $P = \int p \cdot dA = p \int dA = pA$

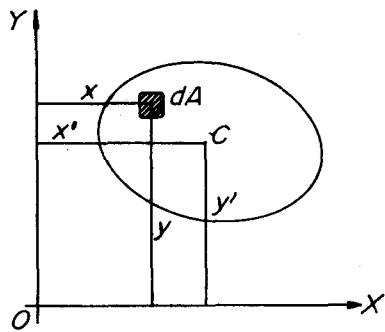
dirección : P es perpendicular a la superficie plana

sentido : P está dirigido hacia la superficie plana

punto de aplicación : el punto C llamado centro de presiones.

Considérese que la superficie horizontal está contenida en el plano XY.

Como P es resultante de un conjunto de fuerzas paralelas se verifica que "el momento de la resultante es igual a la suma de los momentos de las componentes".



$$P \cdot X' = \int_A p \, dA \cdot X$$

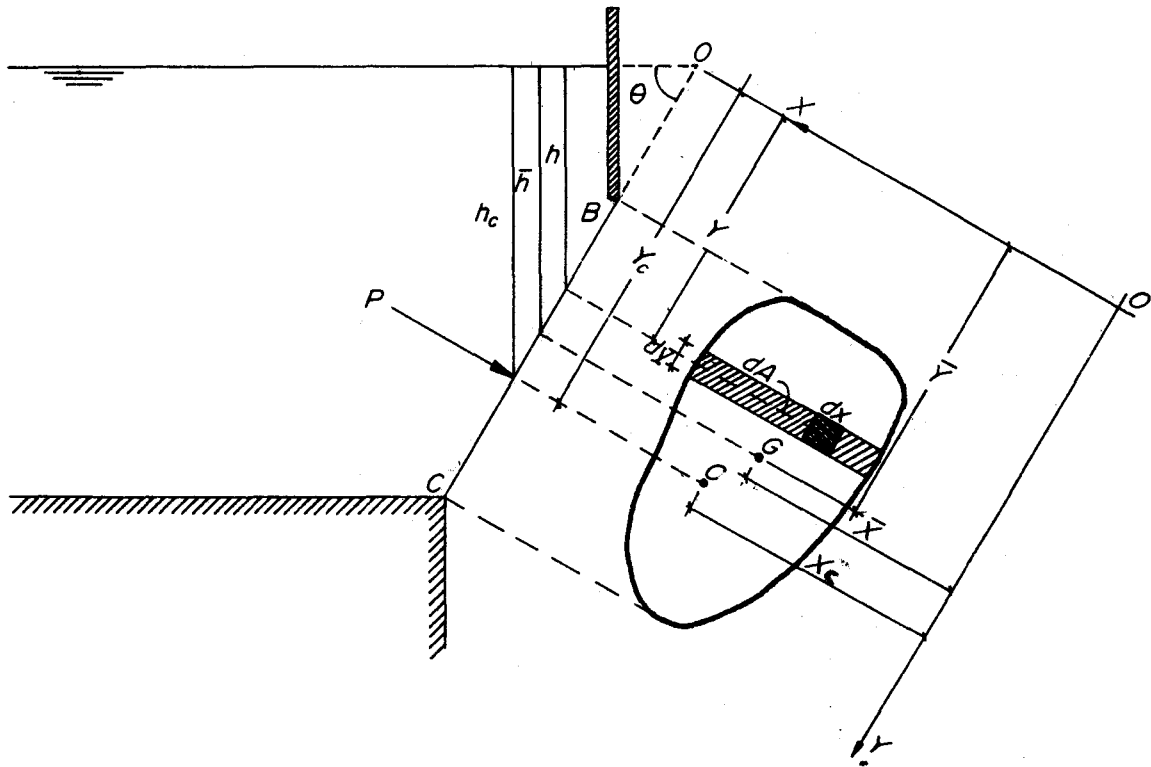
$$pA X' = p \int_A dA \cdot X$$

$$X' = \frac{1}{A} \int_A dA \cdot X$$

$$\text{análogamente: } Y' = \frac{1}{A} \int_A dA \cdot Y$$

es decir, el centro de presiones coincide con el centroide del área de la superficie plana horizontal.

- b) Superficies planas inclinadas.- En la figura, BC es la traza de la superficie plana inclinada. Se toma como eje X la intersección de los planos de la superficie libre y de la superficie inclinada. El eje Y es tomado en el plano de la superficie inclinada con el origen en la superficie libre. De esta manera el plano XY contiene a la superficie dada.



magnitud: considérese un elemento horizontal de área,  $dA$ .

$$dP = p \cdot dA = \gamma h \, dA$$

$$P = \int dP = \int \gamma h \cdot dA = \int \gamma \cdot Y \, \text{sen } \theta \cdot dA = \gamma \, \text{sen } \theta \int Y \, dA$$

$$= \gamma \, \text{sen } \theta \cdot \bar{Y} A = \gamma \cdot \bar{Y} \, \text{sen } \theta \cdot A = \gamma \bar{h} \cdot A$$

es decir, la magnitud es igual a la presión en el centroide de la superficie inclinada multiplicada por el área de la superficie inclinada.

dirección: perpendicular a la superficie plana inclinada.



sentido: hacia la superficie plana.

aplicación: el centro de presiones C.

En superficies horizontales el C coincidía con el G, ahora veremos que en superficies inclinadas el C cae siempre por debajo del G.

Valor  $Y_C$ . Se usa el mismo elemento horizontal de área  $dA$  y se toma momentos con respecto al eje X.

$$P \cdot Y_C = \int dP \cdot Y$$

$$\gamma \bar{h} A \cdot Y_C = \int \gamma h dA Y$$

$$\gamma \bar{Y} \text{ sen } \theta \cdot A Y_C = \int \gamma Y \text{ sen } \theta dA \cdot Y$$

$$A \bar{Y} Y_C = \int Y^2 \cdot dA$$

la integral es el momento de inercia del área A respecto del eje X:

$$A \bar{Y} Y_C = I_X$$

$$Y_C = \frac{I_X}{A \bar{Y}}$$

de acuerdo al teorema del eje paralelo:

$$Y_C = \frac{I_{\bar{X}} + A \bar{Y}^2}{A \bar{Y}}$$

$$Y_C = \bar{Y} + \frac{I_{\bar{X}}}{A \bar{Y}}$$

el segundo término del segundo miembro es siempre positivo de manera que el C queda por debajo del G. Obsérvese cómo la separación entre estos dos puntos es tanto menor cuanto mayor es la profundidad.

$$Y_C = \bar{Y} + \frac{K_{\bar{X}}^2 \cdot A}{A \bar{Y}}$$

$$Y_C = \bar{Y} + \frac{K_{\bar{X}}^2}{\bar{Y}}$$

Valor  $X_C$ . Se usa un nuevo elemento de área  $dX \cdot dY$  y se toma momentos con respecto al eje Y.

$$P \cdot X_C = \int dP \cdot X$$

$$\gamma \bar{h} A \cdot X_C = \int p dX dY \cdot X$$

$$\gamma \bar{Y} \text{ sen } \theta A X_C = \int \gamma Y \text{ sen } \theta dX dY \cdot X$$

$$A \bar{Y} X_C = \int XY \cdot dX dY$$

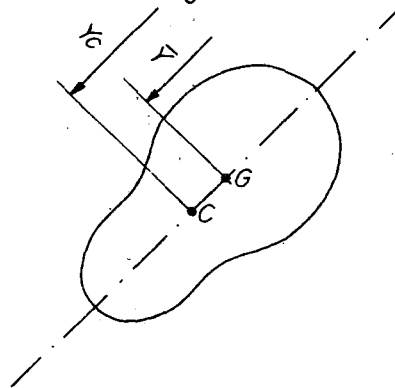
la integral es el producto de inercia del área A.

$$\begin{aligned}
 A \bar{Y} X_C &= I_{XY} \\
 X_C &= \frac{I_{XY}}{A \cdot \bar{Y}} \\
 X_C &= \frac{I_{\bar{X}\bar{Y}} + A \bar{X} \bar{Y}}{A \bar{Y}} \\
 &= \bar{X} + \frac{I_{\bar{X}\bar{Y}}}{A \bar{Y}}
 \end{aligned}$$

el valor  $I_{\bar{X}\bar{Y}}$  puede ser positivo o negativo de modo que el C puede encontrarse a uno u otro lado del G. Basta que la superficie plana inclinada tenga un eje de simetría para que  $I_{\bar{X}\bar{Y}} = 0$ , en cuyo caso:

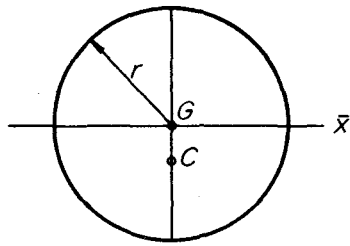
$$X_C = \bar{X}$$

Comentario.- Por lo general, las situaciones de interés se relacionan con superficies planas que tienen uno o dos ejes de simetría, de modo que sólo se trata de determinar el valor  $Y_C$ .



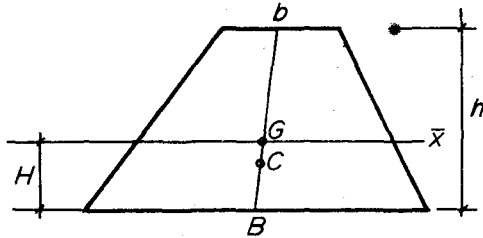
Centro de gravedad, momento de inercia y radio de giro de figuras usuales

	$I_{\bar{X}}$	$K_{\bar{X}}^2$
	$\frac{b h^3}{12}$	$\frac{h^2}{12}$
	$\frac{b h^3}{36}$	$\frac{h^2}{18}$



$$\frac{\pi r^4}{4}$$

$$\frac{r^2}{4}$$



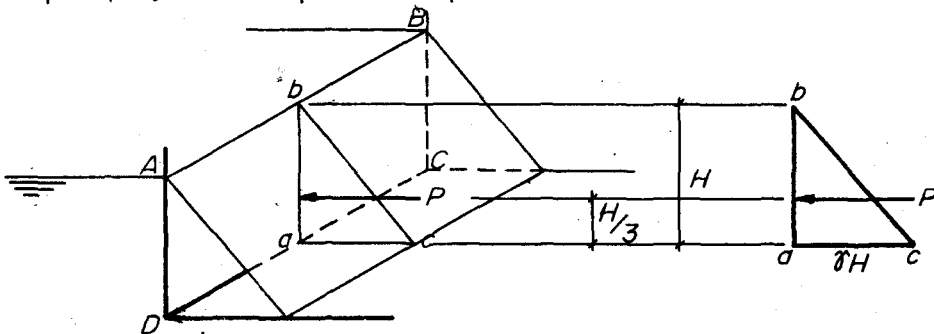
$$\frac{h^3}{36} \cdot \frac{B^2 + 4Bb + b^2}{B + b}$$

$$\frac{I_{\bar{x}}}{A}$$

$$H = \frac{h}{3} \cdot \frac{B + 2b}{B + b}$$

$$A = \frac{B + b}{2} \cdot h$$

El diagrama de presiones..- Es la representación gráfica de la expresión  $p = \gamma h$ , sobre superficies planas.

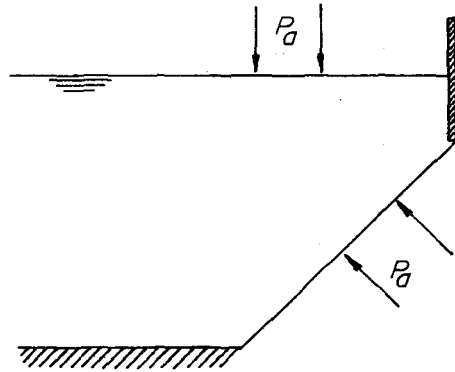


Sobre la superficie plana rectangular ABCD el diagrama espacial de presiones es un prisma recto de base triangular y el diagrama en el plano de simetría es un triángulo. En la práctica basta dibujar este triángulo de presiones.

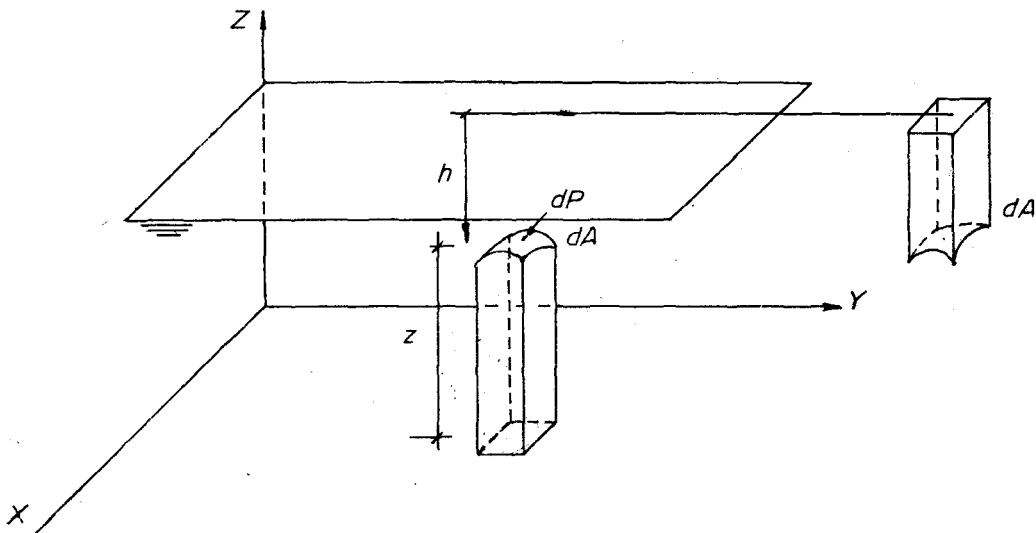
$$P = \int_0^H dP = \int_0^H p \, dA = \int_0^H \gamma h \cdot b \, dh = \gamma b \int_0^H h \, dh = \frac{1}{2} \gamma b H^2$$

Como se puede ver el empuje resulta numéricamente igual al volumen del diagrama espacial de presiones. Su punto de aplicación es el centroide de este diagrama espacial o bien el centroide del triángulo de presiones.

Comentario..- En el estudio del empuje hidrostático se han empleado presiones relativas, es decir no se ha considerado la presión atmosférica. La razón de esto es que al actuar la presión atmosférica a uno y otro lado de la superficie plana su efecto se cancela y al ignorarla no se afecta ni la magnitud ni la posición de la fuerza resultante.



## 2.6 Fuerzas sobre superficies curvas



Se puede considerar la superficie curva como dividida en elementos de área  $dA$ , sobre cada uno de los cuales actúa perpendicularmente un empuje elemental  $dP$ . De este modo el empuje hidrostático en toda la superficie curva viene a ser la resultante de las fuerzas elementales  $dP$ .

Sean  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , los ángulos que la fuerza  $dP$  forma con los ejes coordenados  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , respectivamente.

Las componentes de  $dP$  según estos tres ejes son:

$$dP = p \, dA \begin{cases} dP_X = p \, dA \cdot \cos \alpha = \gamma h \cdot dA \cos \alpha = \gamma h \cdot dA_{YZ} \\ dP_Y = p \, dA \cdot \cos \beta = \gamma h \cdot dA \cos \beta = \gamma h \cdot dA_{XZ} \\ dP_Z = p \, dA \cdot \cos \gamma = \gamma h \cdot dA \cos \gamma = \gamma h \cdot dA_{XY} \end{cases}$$

Las integrales correspondientes podrían resolverse conociendo la ecuación de la superficie curva, sin embargo es mucho más práctico seguir el siguiente razonamiento.

1º)  $dA \cos \gamma$  es la proyección del elemento de área sobre el plano  $XY$ , por lo que viene a ser la sección recta del prisma vertical líquido que queda encima de  $dA$ .

$$dP_Z = \gamma h \cdot dA_{XY} = \gamma \cdot h \, dA_{XY} \dots \text{peso de dicho prisma}$$

$$P_Z = \int_V \gamma \cdot h \, dA_{XY} \quad \dots \text{ peso del volumen líquido que gravita encima de toda la superficie curva.}$$

Su punto de aplicación será el centro de gravedad de dicho volumen líquido.

2º)  $dA \cos \alpha$  es la proyección del elemento de área  $dA$  sobre el plano  $YZ$ .

$$dP_X = \gamma h \cdot dA_{YZ} \quad \dots \text{ empuje sobre el elemento de área proyectado sobre el plano } YZ.$$

$$P_X = \int \gamma h \cdot dA_{YZ} \quad \dots \text{ empuje sobre la superficie plana que resulta de proyectar la superficie curva en el plano } YZ.$$

Su punto de aplicación será el centro de presiones de la superficie plana.

3º) Por analogía:

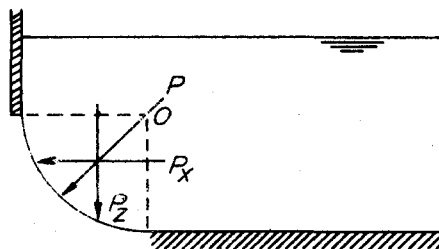
$$P_Y = \int \gamma h \cdot dA_{XZ} \quad \dots \text{ empuje sobre la superficie plana que resulta de proyectar la superficie curva en el plano } XZ.$$

Su punto de aplicación será el centro de presiones de la superficie plana.

Comentario.- Las superficies curvas de verdadero interés para el ingeniero son las superficies de revolución de generatriz horizontal o vertical. En tales casos es nula la componente del empuje en la dirección de la generatriz por cuanto es nula la proyección correspondiente de la superficie curva.

El problema se reduce entonces a encontrar dos componentes del empuje y luego por composición vectorial el empuje total.

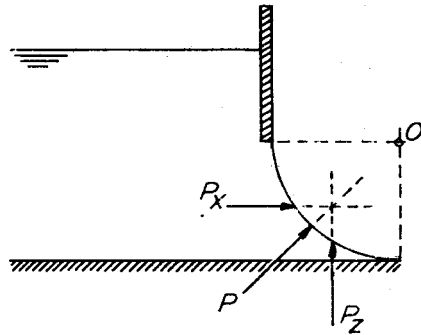
Por comodidad se va a designar -de aquí en adelante- con la letra  $X$  la dirección horizontal.



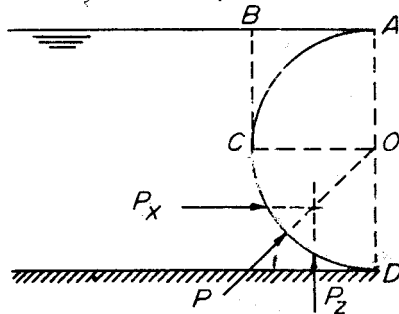
El esquema que antecede se refiere a una superficie cilíndrica de generatriz horizontal, habiéndose dibujado tan solo la curva que corresponde al plano vertical de simetría. Puesto que el empuje total  $P$  es resultante de un conjunto de fuerzas todas ellas radiales, dicho empuje  $P$  debe pasar por el centro  $O$  del cuarto de círculo.

El esquema que sigue se refiere al caso en que el líquido está por debajo de la superficie curva.

En tal situación la componente vertical del empuje es el peso del líquido imaginario por encima de la superficie curva, dirigido ahora hacia arriba pero aplicado siempre en el centro de gravedad del volumen líquido imaginario. El empuje total sigue pasando por el punto  $O$ .

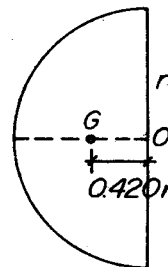
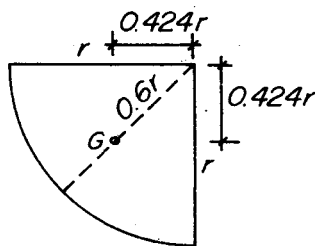


Para el caso en que la traza de la superficie curva es un medio círculo cabe el siguiente raciocinio para hallar  $P_z$ .



- \* sobre CD actúa un empuje hacia arriba de magnitud igual al peso del volumen líquido ABCD;
- \* sobre AC actúa un empuje hacia abajo de magnitud igual al peso del volumen líquido ABC;
- \*  $P_z$  será la diferencia, es decir el peso del volumen líquido ACDA, - aplicado en el centroide de este volumen y dirigido hacia arriba.
- \* la resultante P debe pasar siempre por el punto O.

#### Centroide del cuarto de círculo y del medio círculo

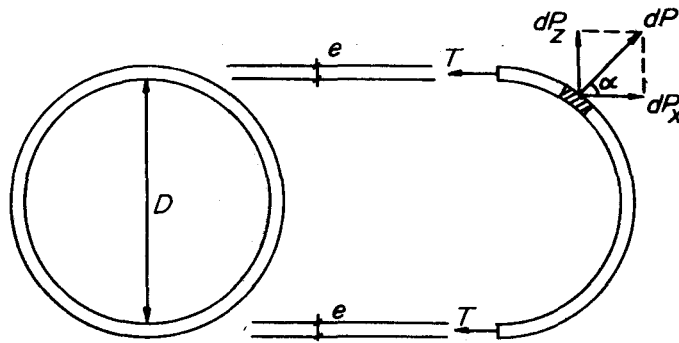


Esfuerzos en las paredes de superficies cilíndricas.- Los esfuerzos en las paredes de superficies cilíndricas sometidas interior o exteriormente a presión hidrostática pueden ser encontrados aplicando los mismos principios de las superficies curvas en general. Si la presión es interior los esfuerzos serán de tensión, si es exterior serán de compresión.

hipótesis: la presión es relativamente grande, de magnitud tal que la altura de presión correspondiente es igual a varias veces el diámetro, por lo que puede suponerse uniforme en toda la sección transversal.

Sea una tubería de longitud  $l$  sometida a una presión interior uniforme  $p$ .

Si se supone la tubería cortada longitudinalmente en dos partes iguales, - cada mitad estará en equilibrio por efecto de dos fuerzas tangenciales  $T$  en sus extremos.



$$dP_Z = p \, dA \cdot \sin \alpha, \quad P_Z = \int_A p \, dA \sin \alpha = 0 \quad \text{por razones de simetría}$$

$$dP_X = p \, dA \cdot \cos \alpha, \quad P_X = \int_A p \cdot dA \cos \alpha = p \int_A dA_{YZ} = p \cdot D \ell$$

$$\text{es decir, } 2 T = p D \ell$$

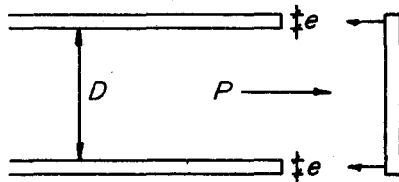
$$T = \frac{p D \ell}{2}$$

llamando  $e$  al espesor de la pared y  $f_s$  al esfuerzo de tensión:

$$f_s \cdot \ell \cdot e = \frac{p D \ell}{2}$$

$$f_s = \frac{p D}{2e}$$

Comentario.- Los esfuerzos en el extremo del tubo cilíndrico pueden obtenerse de un modo similar.



$$f_s \cdot \pi D e = p \cdot \pi \frac{D^2}{4}$$

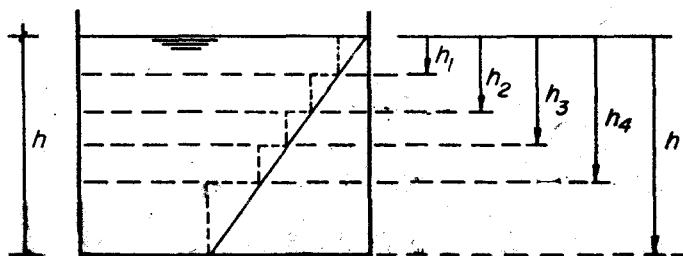
$$f_s = \frac{p D}{4e}$$

La primera de las fórmulas puede utilizarse para dimensionar el espesor  $e$  de la tubería, admitiendo un esfuerzo de trabajo a la tensión  $f'_s$ :

$$e = \frac{p D}{2 f'_s}$$

En la práctica se considera un valor adicional  $\Delta e$  para prevenir los efectos de la oxidación. En tuberías expuestas al fenómeno del golpe de ariete se acostumbra considerar una presión adicional  $\Delta p$ .

Caso de depósitos cilíndricos de eje vertical.- La presión en las paredes ya no es uniforme sino que aumenta linealmente hacia abajo. La determinación del espesor puede hacerse por tramos.



$$e_1 = \frac{\gamma h_1 \cdot D}{2 f'_s}$$

$$e_2 = \frac{\gamma h_2 \cdot D}{2 f'_s}$$

⋮  
etc.

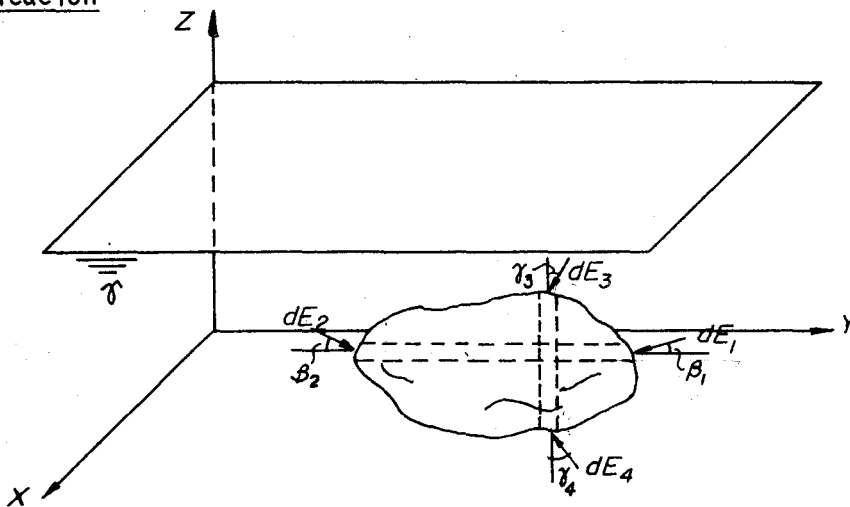
lo cual equivale a sustituir el diagrama triangular de presiones por un diagrama escalonado.

En tanques de pequeña altura no hay necesidad de este refinamiento y las paredes se construyen de espesor uniforme determinado con la presión mayor.

## 2.7 Cuerpos sumergidos

De acuerdo al principio de Arquímedes, un cuerpo sumergido total o parcialmente en un fluido en reposo sufre un empuje vertical (E), de abajo hacia arriba, de magnitud igual al peso del líquido desalojado y aplicado en el centro de gravedad del volumen de líquido desalojado.

### Verificación



Si se considera un prisma elemental horizontal, paralelo al eje Y, de sección recta uniforme  $dA$ , sobre sus caras actuarán las fuerzas elementales:

$$dE_1 = p \cdot dA_1 = \gamma h \cdot dA_1$$

$$dE_2 = p \cdot dA_2 = \gamma h \cdot dA_2$$

cuyas proyecciones en la dirección Y son:

$$dE_{1Y} = \gamma h \cdot dA_1 \cdot \cos \beta_1 = \gamma h \cdot dA_1 \cos \beta_1 = \gamma h \cdot dA$$

$$dE_{2Y} = \gamma h \cdot dA_2 \cdot \cos \beta_2 = \gamma h \cdot dA_2 \cos \beta_2 = \gamma h \cdot dA$$

por lo que: 
$$E_Y = \int_A dE_Y = 0$$



Análogamente:  $E_X = \int_A dE_X = 0$

En la dirección Z:

$$dE_3 = p_3 \cdot dA_3 = \gamma h_3 \cdot dA_3$$

$$dE_4 = p_4 \cdot dA_4 = \gamma h_4 \cdot dA_4$$

cuyas proyecciones son:

$$dE_{3Z} = \gamma h_3 dA_3 \cdot \cos \gamma_3 = \gamma h_3 \cdot dA_3 \cos \gamma_3 = \gamma h_3 dA$$

$$dE_{4Z} = \gamma h_4 dA_4 \cdot \cos \gamma_4 = \gamma h_4 \cdot dA_4 \cos \gamma_4 = \gamma h_4 dA$$

que dan por resultante:

$$dE_Z = dE_{4Z} - dE_{3Z} = \gamma dA (h_4 - h_3) = \gamma dV_0$$

es decir:  $E_Z = \int_{V_0} dE_Z = \gamma V_0$

Se desprende que si un cuerpo se sumerge totalmente:

- si peso del cuerpo < empuje ... el cuerpo flota
- si peso del cuerpo > empuje ... el cuerpo se hunde
- si peso del cuerpo = empuje ... el cuerpo está en equilibrio (estable, inestable o indiferente).

El punto de aplicación del empuje coincide con el centro de gravedad del volumen desalojado y se llama en general centro de empuje. En los cuerpos flotantes el centro de empuje recibe el nombre de centro de carena, la parte sumergida se llama carena y al empuje mismo se le llama desplazamiento.

Aplicaciones.- El principio de Arquímedes puede ser utilizado en:

- a) determinación del peso específico de sólidos más pesados que el agua y del volumen de cuerpos irregulares.

Un cuerpo de forma irregular se pesa en el aire ( $W$ ) y sumergido ( $W_s$ ) - en un líquido conocido ( $\gamma$ ). Hallar su volumen y su peso específico.

$$W - W_s = E = \gamma V_{oc}$$

$$V_{oc} = \frac{W - W_s}{\gamma}$$

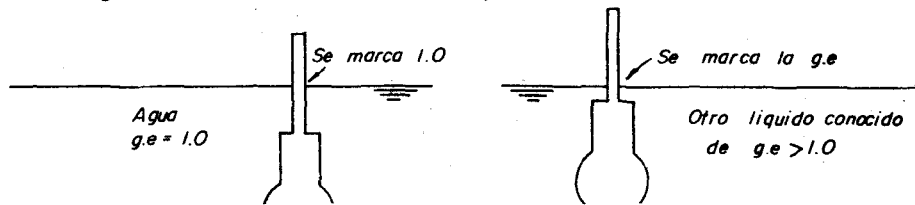
$$\gamma_c = \frac{W}{V_{oc}} = \frac{W}{\frac{W - W_s}{\gamma}} = \gamma \cdot \frac{W}{W - W_s}$$

- b) determinación de la gravedad específica (g.e.) de los líquidos mediante un aparato llamado hidrómetro.

La calibración se realiza del modo que sigue:

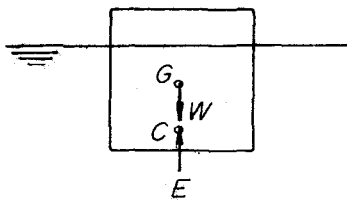
- 1º se sumerge el hidrómetro en agua de g.e. = 1.0;
- 2º se sumerge el hidrómetro en otro líquido de g.e. conocida y se anota en el vástago la marca correspondiente

3º se prosigue la calibración con otro líquidos de g.e. conocida, después de lo cual queda listo para ser utilizado en la determinación de la g.e. desconocida de un líquido cualquiera.



c) problemas generales de flotación y arquitectura naval.

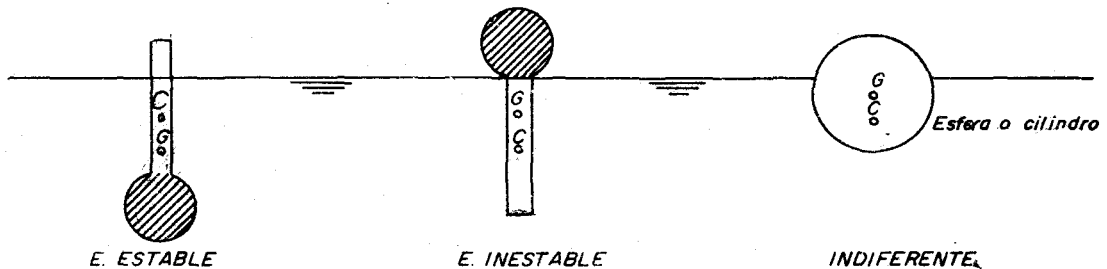
Análisis de estabilidad.- Un cuerpo parcialmente sumergido está en equilibrio si el peso y el empuje son iguales y los puntos de aplicación de las dos fuerzas quedan en la misma vertical.



Sin embargo, para distinguir la clase de equilibrio hace falta todavía producir un cambio de posición del cuerpo y observar su comportamiento. Si el cuerpo vuelve a su posición primitiva el equilibrio es estable y si sigue alejándose de su primera posición el equilibrio era inestable.

En los cuerpos parcialmente sumergidos el cambio de posición para distinguir el tipo de equilibrio tiene que hacerse con una rotación en torno a un eje horizontal.

Si provocamos dicha rotación en los cuerpos siguientes:



encontraremos que un cuerpo flotante está en equilibrio estable si su centro de gravedad cae por debajo de su centro de empuje.

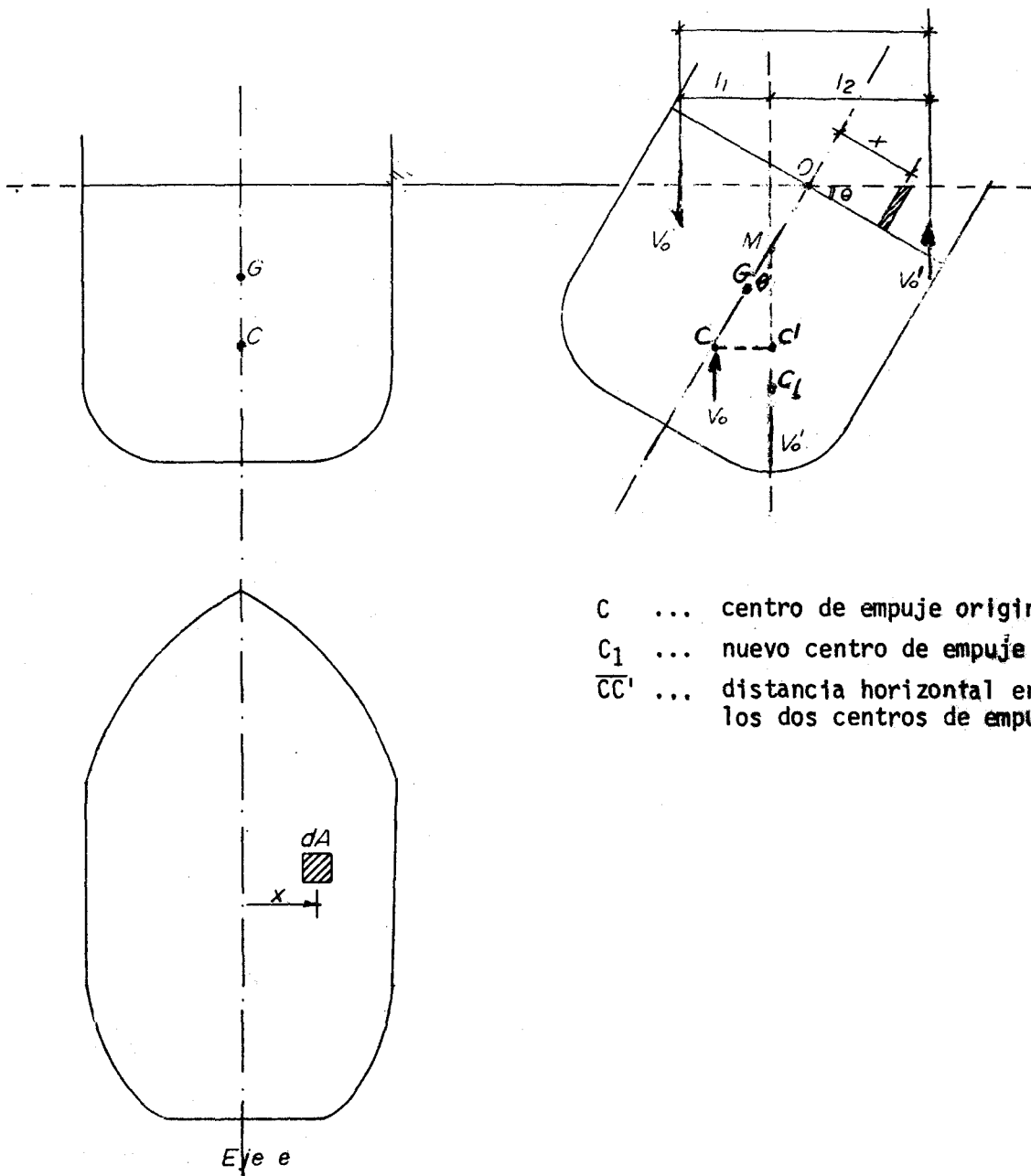
Sin embargo ciertos cuerpos flotantes están en equilibrio estable aún teniendo su centro de gravedad por encima del centro de empuje. Tal es el caso de los barcos.

Por simplicidad sólo se va a estudiar la estabilidad de los barcos o cuerpos similares que tienen un plano longitudinal vertical de simetría.

Se define metacentro (M) al punto de intersección de las líneas de acción del empuje antes y después de la rotación.

Si M cae por encima de G el momento es restablecedor y el equilibrio estable; si M cae por debajo de G el momento es de volteo y el equilibrio inestable.

$\overline{GM}$  ... altura metacéntrica



- C ... centro de empuje original
- C<sub>1</sub> ... nuevo centro de empuje
- $\overline{CC'}$  ... distancia horizontal entre los dos centros de empuje.

Se observa que la estabilidad del cuerpo es tanto mayor cuanto más grande es  $\overline{GM}$ , lo que quiere decir que el valor de la altura metacéntrica nos da una idea de la estabilidad del cuerpo flotante. Derivemos una expresión para ella.

$$\overline{GM} = \overline{CM} - \overline{CG}$$

$$\overline{CM} = \frac{\overline{CC'}}{\theta}, \text{ con el ángulo } \theta \text{ en radianes}$$

$\overline{CC'}$ , es el corrimiento horizontal del centro de carena.

Se verifica que el volumen sumergido después de la rotación ( $V_{01}$ ) es igual al volumen sumergido antes de la rotación ( $V_0$ ) más el volumen de la cuña derecha ( $V'_0$ ) menos la otra cuña (también  $V'_0$ ).

Se pueden aplicar vectores verticales proporcionales a los volúmenes mencionados y tomar momentos con respecto a C'.

$$V_0 \cdot \overline{CC'} - V'_0 \cdot \ell_1 - V'_0 \cdot \ell_2 = V_{01} \cdot 0 = 0$$

$$V_0 \cdot \overline{CC'} = V'_0 (\ell_1 + \ell_2) = V'_0 \cdot \ell$$

pero:  $V'_0 \ell = \int X \theta \, dA \cdot X = \theta \int X^2 \, dA = \theta I_0$

$I_0$  ... momento de inercia de la sección de flotación con respecto al eje e.

$$V_0 \cdot \overline{CC'} = \theta I_0$$

$$\overline{CC'} = \frac{\theta I_0}{V_0}$$

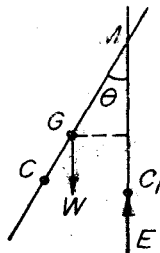
es decir,  $\overline{CM} = \frac{I_0}{V_0}$

con lo que:  $\overline{GM} = \frac{I_0}{V_0} - \overline{CG}$

En cuerpos homogéneos G queda siempre por encima de C (el volumen sumergido es siempre menor que el volumen total del cuerpo). En este caso M puede caer por encima o por debajo de G. Si cae por encima ( $\overline{CM} > \overline{CG}$ ) el equilibrio es estable; caso contrario el equilibrio es inestable.

En cuerpos no homogéneos es posible bajar el G por debajo de C, con lo que se consigue que el equilibrio sea siempre estable.

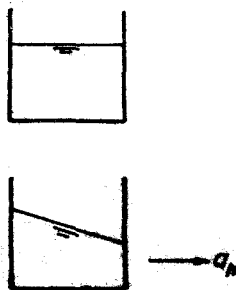
El momento restablecedor en el equilibrio estable tiene un valor distinto para cada posición del cuerpo.



$$M_0 = W \cdot \overline{GM} \sin \theta = \gamma V_0 \cdot \overline{GM} \sin \theta$$

## 2:8 Equilibrio relativo de los líquidos

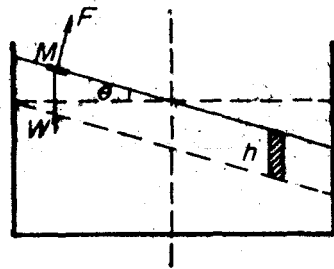
Considérese un líquido contenido en un recipiente y que este recipiente se desplaza con una aceleración horizontal constante. En tales circunstancias la superficie libre se inclina; una partícula líquida continúa en reposo con respecto a otra y con respecto a las paredes del recipiente, de modo que no hay rozamiento entre ellas y el estudio de la repartición de presiones puede hacerse con los principios hidrostáticos.



Se presentan tres casos de interés:

- aceleración horizontal constante;
- aceleración vertical constante;
- rotación alrededor de un eje vertical, a velocidad angular constante.

a) Aceleración horizontal constante.- Averiguemos el valor del ángulo de inclinación  $\theta$ .



Sobre una partícula M de la superficie libre inclinada actúan las dos fuerzas siguientes:



- \* el peso  $W$ , vertical;
- \* la fuerza  $F$  ejercida por las partículas adyacentes, perpendicular a la superficie libre desde que no hay fricción;

puesto que la resultante de estas dos fuerzas debe ser horizontal se forma un triángulo rectángulo:

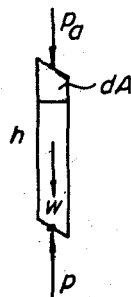
$$R = W \operatorname{tg} \theta$$

$$m \cdot a_h = m \cdot g \operatorname{tg} \theta$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a_h}{g}$$

La inclinación es pues constante y su valor en un lugar sólo depende de la aceleración que se da al recipiente.

En cuanto a la distribución de presiones, el prisma elemental líquido sombreado está en equilibrio:



$$\Sigma F_y = 0$$

$$p \, dA = p_a \, dA + W$$

$$p \, dA = p_a \, dA + \gamma \cdot h \, dA$$

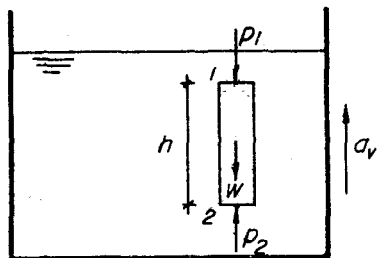
$$p = p_a + \gamma h$$

es decir, las superficies de igual presión son paralelas a la superficie libre como la hidrostática.

La superficie libre inclinada representa el diagrama de presiones en el fondo del recipiente y las caras frontal y posterior sufren fuerzas diferentes.

b) Aceleración vertical constante.- La aceleración vertical puede ser ascendente o descendente.

En un prisma elemental vertical cualquiera en el interior del líquido se verifica:



$$p_2 \cdot dA - p_1 \cdot dA - W = m \cdot a_v$$

$$p_2 \cdot dA - p_1 \cdot dA - W = \frac{W}{g} \cdot a_v$$

$$p_2 \cdot dA - p_1 \cdot dA - \gamma \cdot h \, dA = \frac{\gamma h \, dA}{g} \cdot a_v$$

$$p_2 = p_1 + \gamma h + \frac{a_v}{g} \cdot \gamma h$$

es decir, por efecto del movimiento ascendente del recipiente la presión en todos los puntos del líquido aumenta con relación a la presión con el recipiente en reposo. Este efecto es el mismo que experimenta el pasajero de un ascensor durante la subida.

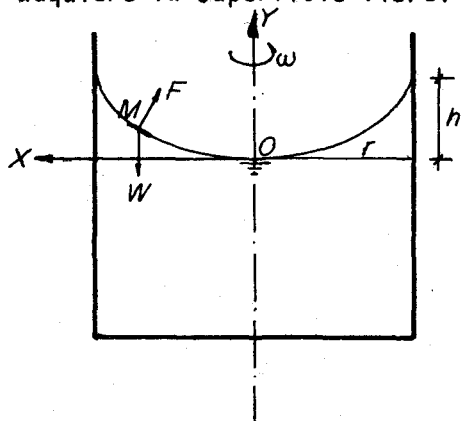
Para la aceleración vertical descendente se obtiene:

$$p_2 = p_1 + \gamma h - \frac{a_v}{g} \gamma h$$

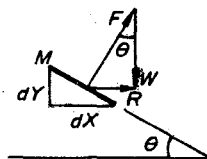
es decir, si se deja caer el recipiente no hay variación en la presión:  $p_2 = p_1$ .

En ambos casos de aceleración vertical las superficies de igual presión resultan horizontales y por eso paralelas entre sí.

- c) Rotación alrededor de un eje vertical, a velocidad angular constante.  
Se supone un depósito cilíndrico y se trata de averiguar la forma que adquiere la superficie libre.



Sobre una partícula M de la superficie libre actúan las dos fuerzas siguientes:



- \* el peso W, vertical;
- \* la fuerza F, normal a la superficie libre;

La resultante de estas dos fuerzas debe tener la dirección de la aceleración que es hacia el eje de rotación, de modo que se forma un triángulo rectángulo:

$$R = W \operatorname{tg} \theta$$

$$m \cdot a = m \cdot g \operatorname{tg} \theta$$

$$\omega^2 X = g \operatorname{tg} \theta$$

$$g \frac{dY}{dX} = \omega^2 X$$

$$g \, dY = \omega^2 X \, dX$$

$$g \quad Y = \omega^2 \frac{X^2}{2} + C \quad \left\{ \begin{array}{l} X = 0 \\ Y = 0 \\ C = 0 \end{array} \right.$$

$$Y = \frac{\omega^2 X^2}{2g}$$

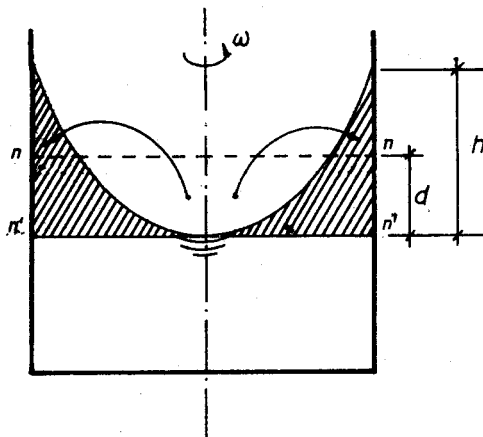
es decir, la superficie libre adopta la forma de un paraboloides de revolución.

$$\text{Cuando } \left. \begin{array}{l} X = r \\ Y = h \end{array} \right\} h = \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \frac{V^2}{2g}$$

siendo V la velocidad tangencial del cilindro.

En ingeniería hidráulica se conoce a este fenómeno como vórtice forzado, que se resume en la expresión  $V = \omega r$ .

Comentario.- ¿Cuánto desciende el líquido en el eje del cilindro?



El paraboloides posee una propiedad conocida, fácil de demostrar, que se refiere a que el volumen del paraboloides es la mitad del volumen del cilindro circunscrito.

Si nn representa el nivel del líquido antes de la rotación, puesto que no se pierde líquido:

$$\begin{aligned} \text{volumen } nn'n' &= \text{volumen sombreado} \\ &= \frac{1}{2} \text{ volumen cilindro.} \end{aligned}$$

$$\text{es decir, } d = \frac{h}{2}$$

lo que baja el líquido en el centro es igual a lo que sube en las paredes.

Sobre la base de esta información resulta muy fácil estudiar la distribución de presiones en el fondo y en las paredes del recipiente cilíndrico.

## 2.9 Ejemplos de aplicación

Ejemplo 16.- Determinar cuánto desciende aproximadamente la presión atmosférica por cada 100 m de ascenso sobre el nivel del mar, en mm de mercurio y en centímetros de agua.

Basta emplear la fórmula del ejemplo 15,

$$p = 10,330 e^{-0.00012 h}$$

para  $h = 100$  m:

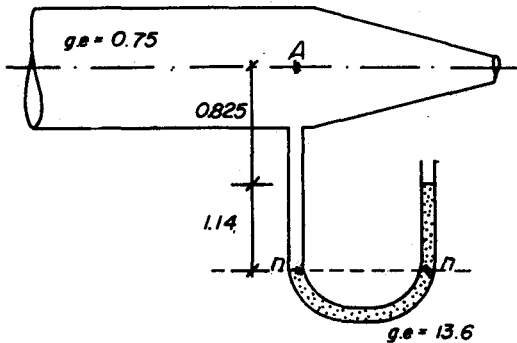
$$p = 10,206.78 \text{ kg/m}^2$$

$$\Delta p = 10,330 - 10,206.78 = 123.22 \text{ kg/m}^2$$

$$a) \quad \frac{\Delta p}{\gamma_m} = \frac{123.22}{13,600} = 0.009 \text{ m} \rightarrow 9 \text{ mm de Hg}$$

b)  $\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{123.22}{1,000} = 0.123 \text{ m} \rightarrow 12 \text{ cm de agua.}$

**Ejemplo 17.-** Una tubería que remata en una boquilla conduce un aceite (g.e. 0.75) que desequilibra la columna de mercurio (g.e. = 13.6) en 1.14 m. Determinar la presión manométrica del aceite en el punto A.



igualando presiones en el nivel nn:

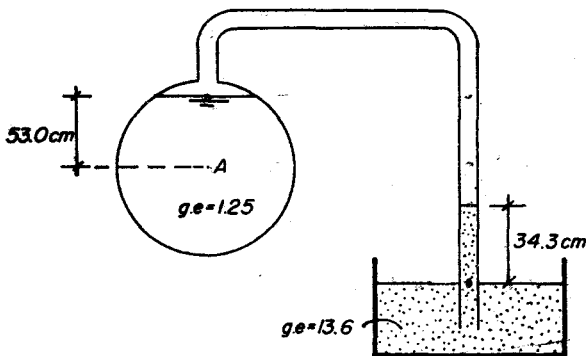
$$p_A + 0.75 \gamma (0.825 + 1.14) = 13.6 \gamma (1.14)$$

$$p_A = 13,600 (1.14) - 750 (1.965)$$

$$p_A = 14,030 \text{ kg/m}^2$$

$$p_A = 1.4 \text{ kg/cm}^2$$

**Ejemplo 18.-** Con referencia a la figura, el punto A está 53 cm por debajo de la superficie libre del líquido de g.e. = 1.25. ¿Cuál es la presión relativa en A si el mercurio asciende 34.3 cm en el tubo?



ecuación de equilibrio en términos de alturas de agua:

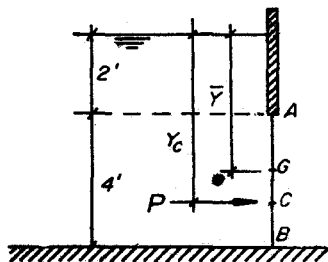
$$\frac{p_A}{\gamma} - \frac{1.25 \gamma (0.53)}{\gamma} + \frac{13.6 \gamma (0.343)}{\gamma} = 0$$

$$\frac{p_A}{\gamma} = -4.0023 \text{ m}$$

$$p_A = -4,002.3 \text{ kg/m}^2$$

$$p_A = -0.40 \text{ kg/cm}^2$$

**Ejemplo 19.-** Hallar la fuerza que ejerce el agua sobre la compuerta rectangular AB de 2' de ancho.



$$P = \gamma \bar{h} \cdot A = 62.4 \times 4 \times 8 = 1997 \text{ lb}$$

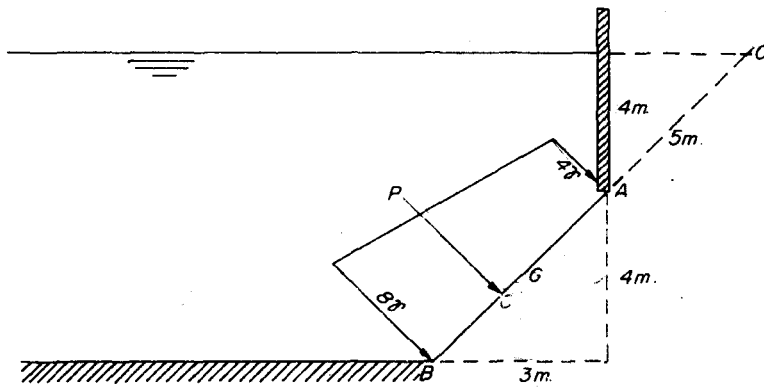
$$Y_C = \bar{Y} + \frac{K_X^2}{\bar{Y}} = 4 + \frac{16}{4} = 4.33 \text{ pies}$$

**Ejemplo 20.-** Hallar la fuerza que ejerce el agua sobre la compuerta AB de 1 m de ancho: a) usando las fórmulas, b) empleando el diagrama de presiones.

a)  $P = \gamma \bar{h} \cdot A = 1,000 \times 6 \times 5 = 30,000 \text{ kg}$

$$Y_C = \bar{Y} + \frac{K_X^2}{\bar{Y}} = 7.50 + \frac{25}{7.50} = 7.78 \text{ m}$$

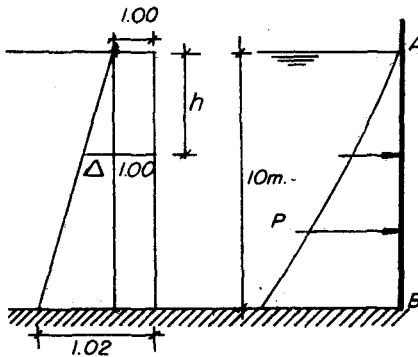




$$b) P = \frac{8\gamma + 4\gamma}{2} \times 5 = 30,000 \text{ kg}$$

$$\gamma_C = 10.00 - \frac{5}{3} \frac{8\gamma + 8\gamma}{8\gamma + 4\gamma} = 7.78 \text{ m}$$

**Ejemplo 21.-** Determinar la fuerza en toneladas sobre AB, por metro de ancho, si la gravedad específica del agua varía linealmente de un valor 1.00 en la superficie a un valor 1.02 en el fondo.



a una profundidad genérica h:

$$g.e. = 1 + \Delta$$

$$\frac{\Delta}{h} = \frac{0.02}{10}$$

$$\Delta = 0.002 h$$

es decir,  $g.e. = 1 + 0.002 h$

$$\gamma = 1 + 0.002 h \text{ ton/m}^3$$

$$dp = \gamma \cdot dh$$

$$dp = (1 + 0.002 h) dh$$

$$\int dp = \int dh + \int 0.002 h \cdot dh$$

$$p = h + 0.001 h^2$$

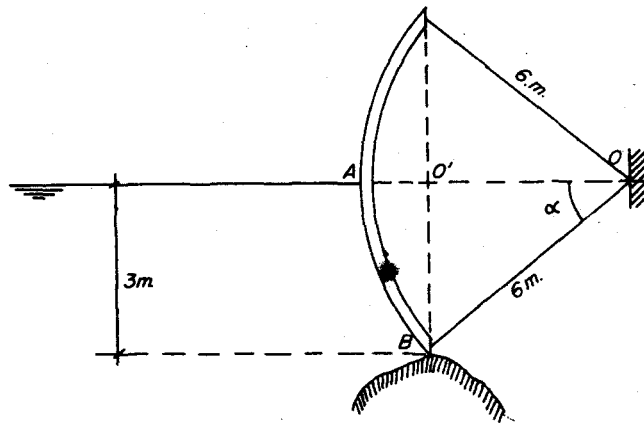
$$dP = p \cdot dA = p dh = (h + 0.001 h^2) dh$$

$$\int dP = \int_0^{10} h dh + \int_0^{10} 0.001 h^2 dh$$

$$P = \left(\frac{h^2}{2}\right)_0^{10} + 0.001 \left(\frac{1}{3}\right) (h^3)_0^{10}$$

$$P = 50 + 0.33 = 50.33 \text{ Ton.}$$

**Ejemplo 22.-** Determinar las componentes por metro de longitud, de la fuerza debida a la presión del agua sobre la compuerta del tipo tainter mostrada en la figura.



$$P_X = \gamma \bar{h} \cdot A = 1,000 \times 1.50 \times 3.00 = 4,500 \text{ kg}$$

$$P_Z = \gamma V_{O' O' AB}$$

$$O'O = \sqrt{36 - 9} = 5.20 \text{ m}$$

$$\alpha = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$\frac{\text{Sector OAB}}{30^\circ} = \frac{\pi r^2}{360^\circ}$$

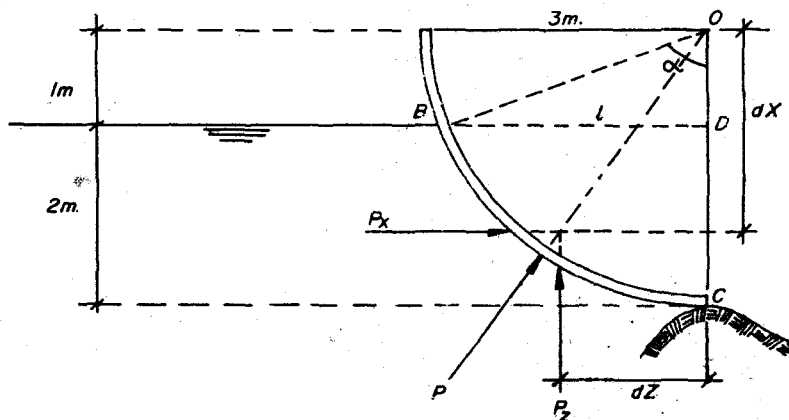
$$\text{Sector OAB} = 9.42 \text{ m}^2$$

$$\text{Area } OO'B = \frac{1}{2} \times 5.20 \times 3 = 7.80 \text{ m}^2$$

$$\text{Area } O'AB = 9.42 - 7.80 = 1.62 \text{ m}^2$$

$$P_Z = 1,000 \times 1.62 = 1,620 \text{ kg.}$$

**Ejemplo 23.-** La compuerta de la figura tiene 6 m de longitud (perpendicularmente al papel). Determinar, a) el valor de las componentes del empuje sobre la compuerta, b) la posición de cada componente.



$$a) P_X = \gamma \bar{h} \cdot A = (1,000)(1,000)(2 \times 6) = 12,000 \text{ kg}$$

$$r = \sqrt{8} = 2,828$$

$$\alpha = \text{arc sen } \frac{r}{3} = 70.53^\circ$$

$$\frac{\text{sector}}{\alpha^\circ} = \frac{\pi r^2}{360^\circ}$$

$$\text{Sector OBC} = 5.54 \text{ m}^2$$

$$\text{Area OBD} = 1,414 \text{ m}^2$$

$$\text{Area DBC} = 5.54 - 1.41 = 4,13 \text{ m}^2$$

$$P_Z = \gamma \cdot V_{\text{OBC}} = 1,000 \times 4,13 \times 6 = 24,780 \text{ kg}$$

$$b) d_X = 1 + \frac{2}{3} \times 2 = 2,33 \text{ m}$$

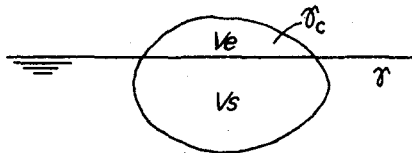
momentos con respecto a  $\bar{O}$  :

$$P_Z \cdot d_Z - P_X \cdot d_X = 0$$

$$d_Z = \frac{P_X \cdot d_X}{P_Z} = \frac{12,000 \times 2,33}{24,780}$$

$$d_Z = 1.13 \text{ m}$$

Ejemplo 24.- Si un cierto cuerpo ( $\gamma_c$ ) flota en un líquido ( $\gamma$ ), ¿qué porción del volumen quedará por encima del nivel del líquido?



$$W = E$$

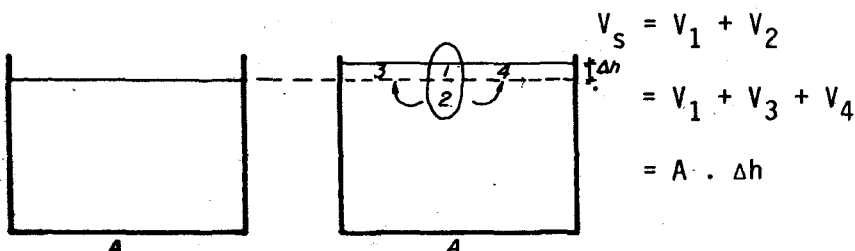
$$\gamma_c V_c = \gamma V_s$$

$$V_s = \frac{\gamma_c V_c}{\gamma}$$

$$V_e = V_c - V_s = V_c - \frac{\gamma_c V_c}{\gamma} = V_c \left(1 - \frac{\gamma_c}{\gamma}\right)$$

$$\frac{V_e}{V_c} = 1 - \frac{\gamma_c}{\gamma}$$

Ejemplo 25.- Demostrar que si en el líquido contenido en un recipiente prismático de área  $A$  flota un cuerpo, el volumen sumergido es sólo función de  $A$  y el incremento de nivel del líquido ( $\Delta h$ ).

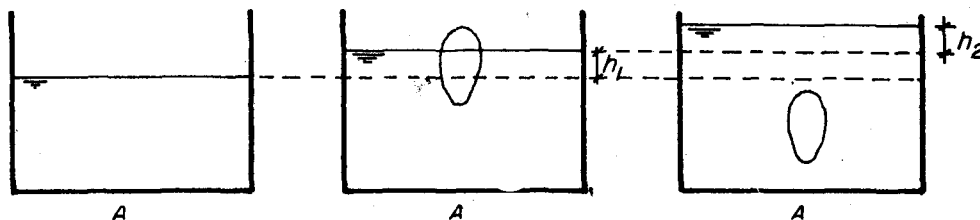


$$V_s = V_1 + V_2$$

$$= V_1 + V_3 + V_4$$

$$= A \cdot \Delta h$$

**Ejemplo 26.-** En un líquido conocido ( $\gamma$ ) contenido en un recipiente prismático de área  $A$  se hace flotar un cuerpo de peso específico  $\gamma_c$  desconocido y se mide el incremento en el nivel del líquido ( $\Delta h_1$ ). Luego se sumerge íntegramente el cuerpo y se mide el incremento adicional de nivel ( $\Delta h_2$ ). Determinar el peso específico del cuerpo.



$$V_s = A \cdot \Delta h_1$$

$$V_c = A (\Delta h_1 + \Delta h_2)$$

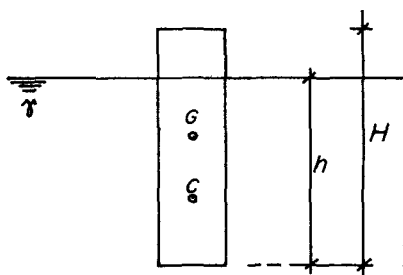
$$W = E$$

$$\gamma_c V_c = \gamma V_s$$

$$\gamma_c A (\Delta h_1 + \Delta h_2) = \gamma A (\Delta h_1)$$

$$\gamma_c = \frac{\Delta h_1}{\Delta h_1 + \Delta h_2} \cdot \gamma$$

**Ejemplo 27.-** Encontrar la relación que debe haber entre el diámetro ( $D$ ) y la altura ( $H$ ) de un cilindro homogéneo ( $\gamma_c$ ) para que flote con su eje vertical en equilibrio estable en un fluido  $\gamma$ .



profundidad de inmersión:

$$W = E$$

$$\gamma_c \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot H = \gamma \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot h$$

$$h = \frac{\gamma_c}{\gamma} \cdot H$$

Condición de equilibrio estable:

$$\overline{CM} > \overline{CG}$$

$$\overline{CM} = \frac{I_o}{V_o} = \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{\frac{\pi D^2}{4} \cdot h} = \frac{4 \pi D^4}{64 \pi D^2 h} = \frac{D^2}{16 h} = \frac{\gamma D^2}{16 \gamma_c H}$$

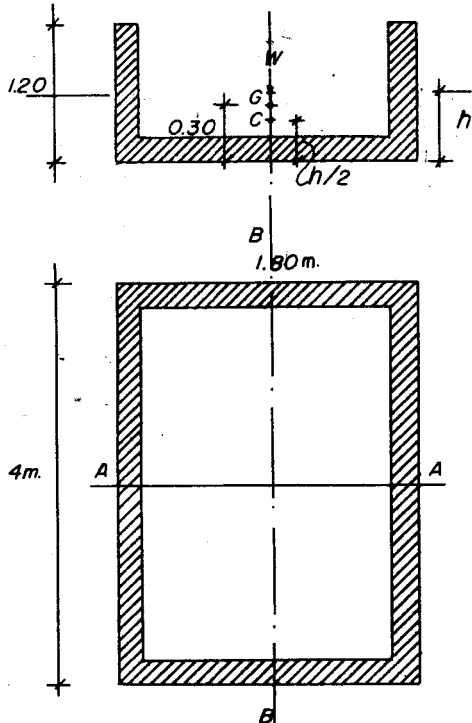
$$\overline{CG} = \frac{H}{2} - \frac{h}{2} = \frac{H}{2} - \frac{\gamma_c H}{\gamma 2} = \frac{H}{2} \left(1 - \frac{\gamma_c}{\gamma}\right)$$

es decir, 
$$\frac{\gamma D^2}{16 \gamma_c H} > \frac{H}{2} \left(1 - \frac{\gamma_c}{\gamma}\right)$$

$$D^2 > \frac{8 \gamma_c H^2}{\gamma} \left(1 - \frac{\gamma_c}{\gamma}\right)$$

$$D > 2 \sqrt{2} \sqrt{\frac{\gamma_c}{\gamma} \left(1 - \frac{\gamma_c}{\gamma}\right)} \cdot H$$

**Ejemplo 28.-** Estudiar la estabilidad del cajón cuyas dimensiones se indican en la figura y cuyo peso es de 2.88 toneladas.



ecuación de equilibrio:

$$W = E$$

$$2.88 = 1 \times 1.80 \times 4 \times h$$

$$h = 0.40 \text{ m}$$

estabilidad respecto del eje BB:

$$\overline{CM} = \frac{I_o}{V_o}$$

$$I_o = \frac{4 \times 1.8^3}{12} = 1.94 \text{ m}^4$$

$$V_o = 1.80 \times 4 \times 0.40 = 2.88 \text{ m}^3$$

$$\overline{CM} = \frac{1.94}{2.88} = 0.67 \text{ m}$$

$$\overline{CG} = 0.30 - 0.20 = 0.10$$

es decir,  $\overline{CM} > \overline{CG}$  ... cajón estable.

estabilidad respecto del eje AA:

$$\overline{CM} = \frac{I_o}{V_o}$$

$$I_o = \frac{1.80 \times 4^3}{12} = 9.60 \text{ m}^4$$

$$V_o = 2.88 \text{ m}^3$$

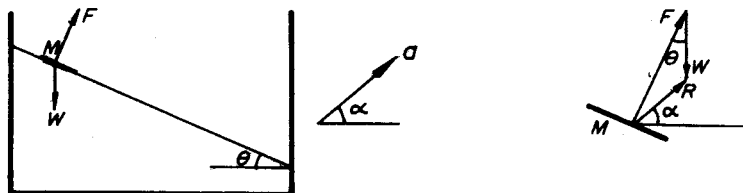
$$\overline{CM} = \frac{9.60}{2.88} = 3.33 \text{ m}$$

$$\overline{CG} = 0.10 \text{ m}$$

es decir,  $\overline{CM} \gg \overline{CG}$  ... el cajón es más estable aún.

**Ejemplo 29.-** Si a un recipiente abierto que contiene un líquido ( $\gamma$ ) en reposo se le aplica una aceleración inclinada  $\bar{a}$ , ¿cuál es la

inclinación de la superficie libre?



en una partícula M de la superficie libre actúan las fuerzas F y W que dan una resultante en la dirección de a.

$$R = m \cdot a = \frac{W}{g} \cdot a$$

$$\bar{R} = \bar{F} + \bar{W} \quad \left\{ \begin{array}{l} R_X = F_X + W_X \dots R \cos \alpha = F \sin \theta + 0 \\ R_Y = F_Y + W_Y \dots R \sin \alpha = F \cos \theta - W \end{array} \right.$$

es decir,  $\sin \theta = \frac{R \cdot \cos \alpha}{F}$

$$\cos \theta = \frac{R \sin \alpha + W}{F}$$

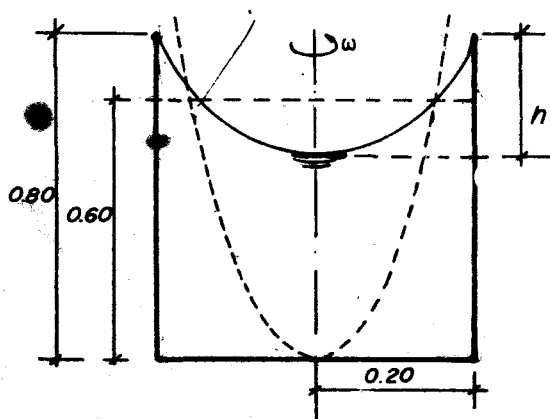
y .....  $\tan \theta = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \frac{g}{a}}$

Nótese como  $\tan \theta = \frac{a \cos \alpha}{a \sin \alpha + g} = \frac{ax}{ay + g}$

para  $\alpha = 0$

$\tan \theta = \frac{a}{g}$ , expresión para aceleración horizontal.

**Ejemplo 30.-** Un recipiente cilíndrico abierto, de 0.20 m de radio y 0.80 m de altura, contiene 0.60 m de agua.



- ¿a qué velocidad angular máxima puede rotar sin que se derrame el agua?
- ¿cuáles son las presiones máxima y mínima en el fondo?
- ¿a qué velocidad angular la presión relativa en el centro del fondo será nula?

a)  $h = 2 (0.80 - 0.60) = 0.40 \text{ m}$

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \quad \dots \quad \omega = \frac{1}{r} \sqrt{2gh} = 14 \text{ rad/s}$$

b)  $p_M = \gamma \cdot h_M = 1,000 (0.80) = 800 \text{ kg/m}^2$

$$p_m = \gamma \cdot h_m = 1,000 (0.80 - 0.40) = 400 \text{ kg/m}^2$$

c)  $h = 2 \times 0.60 = 1.20 \text{ m}$

$$\omega = \frac{1}{r} \sqrt{2gh} = 24.3 \text{ rad/s}$$

ACERCA DE LA HISTORIA DE LA HIDRAULICA  
(tomado de la referencia 4)

**BERNOULLI, Daniel (1700-1782)**

Es una de las figuras más destacadas y que contribuyó más ampliamente al desarrollo de la Hidráulica en el siglo XVIII.

Ganó y/o participó con otros diez científicos premios otorgados por la Academia de Ciencias de París. La naturaleza de estos premios nos da una idea de los diferentes campos en los que desarrolló su actividad: mareas, astronomía, corrientes marinas, etc.

Mientras se desempeñaba como profesor de matemáticas en San Petersburgo escribió su Hidrodinámica, publicada en 1738, y más tarde su Hidráulica.

Daniel Bernoulli fue el primero en usar la palabra Hidrodinámica.

Cuando apareció la Hidrodinámica de Bernoulli, el célebre matemático D'Alambert hizo el siguiente comentario: "Bernoulli parece ser el primero que ha reducido las leyes del movimiento de los fluidos a principios seguros y no arbitrarios, lo que no había sido hecho hasta ahora por ningún autor de Hidráulica".

Es famoso por el teorema que lleva su nombre y que él estableció.

**REYNOLDS, Osborne (1842-1912)**

Nació en Belfast. Estudió ciencias en Cambridge e ingeniería civil en Londres. Luego se dedicó a la docencia y a la investigación. Publicó alrededor de 90 trabajos.

Realizó los famosos experimentos para distinguir entre flujo laminar y turbulento, según la viscosidad.

Fue profesor en Manchester. Fue el primero en demostrar el fenómeno de la cavitación.

Estableció el parámetro adimensional que lleva su nombre y las ecuaciones para el flujo turbulento, que también llevan su nombre.



## CAPITULO 3: HIDROKINEMATICA

En un punto de la masa líquida en movimiento existen por definir cantidades escalares y cantidades vectoriales. Ejemplos de las primeras son presión, densidad, temperatura; ejemplos de las segundas son velocidad, aceleración, fuerza. Mientras que una cantidad escalar queda definida por su magnitud, para que una cantidad vectorial quede definida se requiere conocer además de su magnitud, la dirección y el sentido.

Las características físicas en el seno líquido, tanto escalares como vectoriales, pueden variar de un punto a otro del líquido y en un mismo punto de un instante a otro. Esto se expresa diciendo que tanto las cantidades escalares como las vectoriales son funciones de punto y de tiempo.

Se dice también que la región ocupada por el líquido en movimiento determina un campo de flujo, dentro del cual es posible distinguir campos escalares y campos vectoriales.

La cinemática de los líquidos estudia el movimiento puro de las partículas, sin considerar la masa ni las fuerzas que lo producen. La descripción del movimiento se hace utilizando únicamente la velocidad, la aceleración y la rotación.

### 3.1 El campo de velocidades

Una partícula del líquido recorre una línea usualmente curva que se llama trayectoria. El estudio del movimiento de la partícula puede hacerse:

- \* utilizando el vector posición  $\vec{r}$ , como una función vectorial del tiempo.

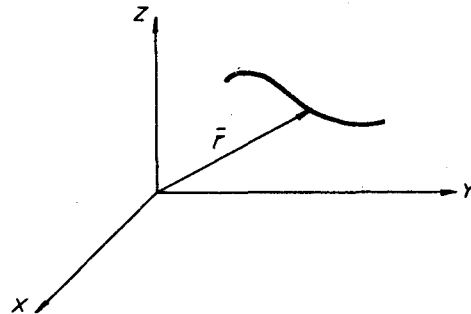
$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$$\vec{r} = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k}$$

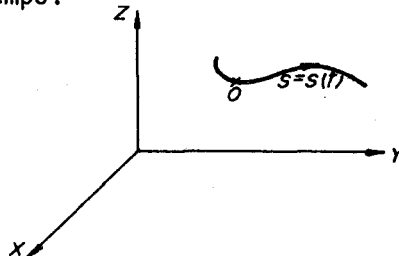
$$X = x(t)$$

$$Y = y(t)$$

$$Z = z(t)$$

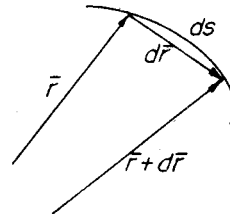


- \* utilizando la trayectoria y el camino recorrido, como una función escalar del tiempo.



El vector velocidad de la partícula ( $\vec{v}$ ) se define como la rapidez de cambio de su posición:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} \quad \dots (1)$$



$\bar{v}$  resulta ser un vector tangente a la trayectoria en cada punto, que depende de la posición de la partícula y del tiempo:

$$\bar{v} = \bar{v}(\bar{r}, t)$$

$$\bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}$$

$$v_x = v_x(x, y, z, t) = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = v_y(x, y, z, t) = \frac{dy}{dt}$$

$$v_z = v_z(x, y, z, t) = \frac{dz}{dt}$$

Se cumple:

$$|d\bar{r}| = \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| dt = ds$$

de modo que:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

Si  $\bar{s}$  es un vector unitario tangente en cada punto a la trayectoria se cumple:

$$d\bar{s} = ds \cdot \bar{s}$$

es decir, 
$$\bar{v} = v \bar{s} = \frac{ds}{dt} \bar{s} = \frac{d\bar{s}}{dt} \quad \dots (2)$$

### 3.2 El campo de aceleraciones

Es un campo que se deriva del campo de velocidades. El vector aceleración de la partícula en un punto ( $\bar{a}$ ) se define como la rapidez de cambio de su velocidad en ese punto:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} \quad \dots (3)$$

Sus componentes son:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} \quad \dots (4)$$

Desarrollando estas derivadas se aprecia que las componentes de la aceleración son funciones de punto y de tiempo.

La aceleración en coordenadas intrínsecas. - En la práctica se dan situa-

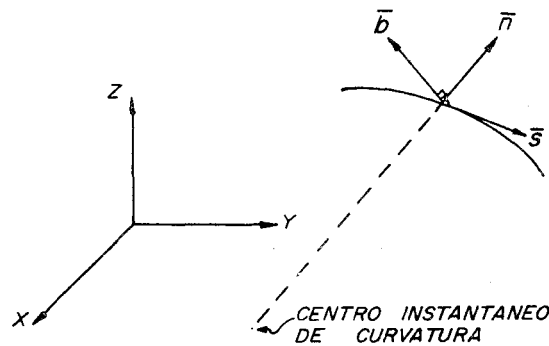
ciones en las que el movimiento se supone unidimensional. El estudio del flujo unidimensional se simplifica bastante con el empleo de un sistema de coordenadas con su origen en cada punto de la trayectoria; se denomina sistema intrínseco de coordenadas y cualquier vector puede expresarse según sus componentes en este sistema.

En cada punto de la trayectoria es posible distinguir tres vectores unitarios  $\bar{s}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{b}$  tales que:

$\bar{s}$  ... tangente a la curva (vector tangencial)

$\bar{n}$  ... normal a la tangente y colineal con el radio de curvatura, saliendo de la curva (vector normal)

$\bar{b}$  ... perpendicular al plano  $\bar{s}$ ,  $\bar{n}$  (vector binormal)



Los nombres de los planos respectivos son:

$\bar{s}$ ,  $\bar{n}$  ... plano osculador

$\bar{n}$ ,  $\bar{b}$  ... plano normal

$\bar{b}$ ,  $\bar{s}$  ... plano rectificador

En este sistema:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (v\bar{s}) = \frac{dv}{dt} \bar{s} + v \frac{d\bar{s}}{dt} \\ &= \frac{dv}{dt} \bar{s} + v \left( \frac{d\bar{s}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \right) \\ &= \frac{dv}{dt} \bar{s} + v^2 \frac{d\bar{s}}{ds} \quad \dots \quad (5) \end{aligned}$$

prestemos atención al término  $\frac{d\bar{s}}{ds}$ .

Puesto que P y P' son dos puntos muy próximos entre sí:

$d\bar{s}$  tiene la dirección de  $\bar{n}$  y sentido negativo;

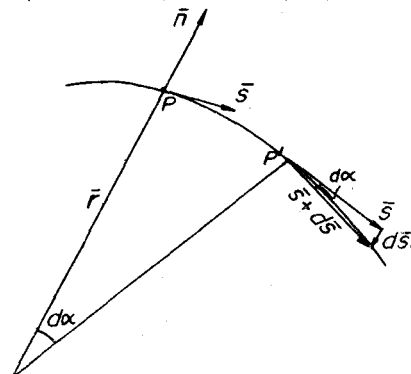
$\bar{s}$  y  $\bar{s} + d\bar{s}$  tienen prácticamente el mismo módulo unitario:

$$|d\bar{s}| = d\alpha$$

también  $ds = r d\alpha$

$$\text{dividiendo } \frac{|d\bar{s}|}{ds} = \frac{1}{r}$$

$$\left| \frac{d\bar{s}}{ds} \right| = \frac{1}{r}$$



reemplazando en (5):

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \bar{a}_s + \bar{a}_n \\ \bar{a} &= \frac{dv}{dt} \bar{s} - \frac{v^2}{r} \bar{n} \quad \dots\dots (6)\end{aligned}$$

lo que quiere decir que el vector aceleración se encuentra contenido en el plano osculador. Averiguemos las componentes:

$$\begin{aligned}a_s &= \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} \\ &= \frac{\partial v}{\partial s} v + \frac{\partial v}{\partial t} \quad \dots(6') \text{ el primer término representa aceleración convectiva, el segundo aceleración local.} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t}\end{aligned}$$

es decir: 
$$\bar{a}_s = \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \bar{s} \right] \quad \dots\dots (7)$$

$$\bar{a}_n = - \frac{v^2}{r} \bar{n} \quad \dots\dots\dots (8)$$

### 3.3 El campo rotacional

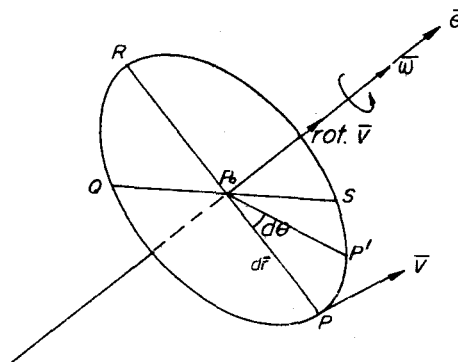
Además de los campos de velocidades y aceleraciones, existe en el seno líquido otro campo llamado campo rotacional que se deriva de las velocidades. Se llama rotor de  $\bar{v}$  o rotacional de  $\bar{v}$  al vector:

$$\text{rot } \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$\text{rot } \bar{v} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \bar{i} - \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \bar{k} \quad \dots (9)$$

que también es función de punto y de tiempo.

Significado físico del vector rot  $\bar{v}$ .- Como en el cuerpo rígido, además de la traslación una partícula puede experimentar una rotación. Sea  $P_0$  el centro de gravedad de la partícula y  $\bar{e}$  el eje instantáneo correspondiente.



En un plano perpendicular a  $\bar{e}$  considerar dos líneas ortogonales que servirán para estudiar la rotación pura de la partícula.

El punto P se halla muy próximo al punto  $P_0$ ; la velocidad  $\bar{v}$  es tangente a la trayectoria circular de radio  $dr$  y corresponde a la traslación pura del punto P.

Al producirse la rotación la velocidad angular vale:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Por comodidad se puede tomar el eje  $e$  como eje  $z$  y el plano en que se mueve P como plano  $XY$ . Entonces el vector velocidad angular es:

$$\bar{\omega} = \omega \bar{k}$$

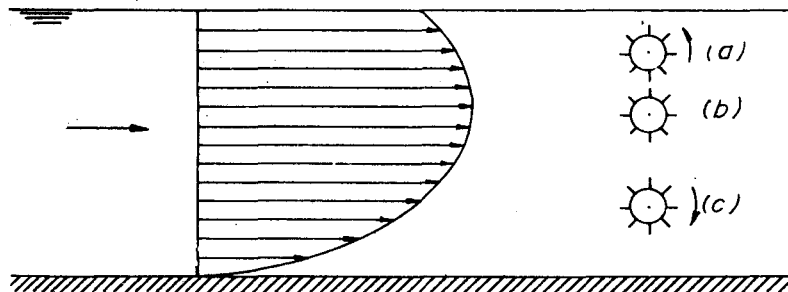
La velocidad  $\bar{v}$  puede definirse como  $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{dr}$ ; el vector  $\bar{dr}$  tiene la forma  $\bar{dr} = dx \bar{i} + dy \bar{j}$ ; entonces:

$$\bar{\omega} \times \bar{dr} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ dx & dy & 0 \end{vmatrix} = -\omega dy \bar{i} + \omega dx \bar{j}$$

$$\text{rot } \bar{v} = \text{rot } \bar{\omega} \times \bar{dr} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega dy & \omega dx & 0 \end{vmatrix} = 2 \omega \bar{k} = 2 \bar{\omega} \quad \dots (10)$$

lo cual significa que el rotor de la velocidad en un movimiento de rotación alrededor de un eje es igual al doble del vector velocidad angular.

La figura muestra de manera aproximada la forma en que varía la velocidad del agua en un canal:



Si se coloca una ruedecita que puede girar libremente en su plano, alrededor de su eje, se observará que:

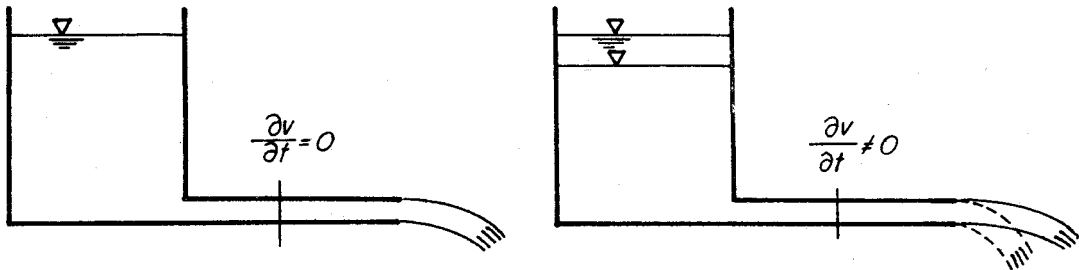
- \* en la zona (a) gira en sentido antihorario, indicando con ello que  $\text{rot } \bar{v} \neq 0$  (vector normal al papel, saltando).
- \* en la zona (b) casi no se mueve ( $\text{rot } \bar{v} \approx 0$ ).
- \* en la zona (c) gira en sentido horario, indicando con ello que  $\text{rot } \bar{v} \neq 0$  (vector normal al papel, penetrando).

### 3.4 Clasificación de los flujos

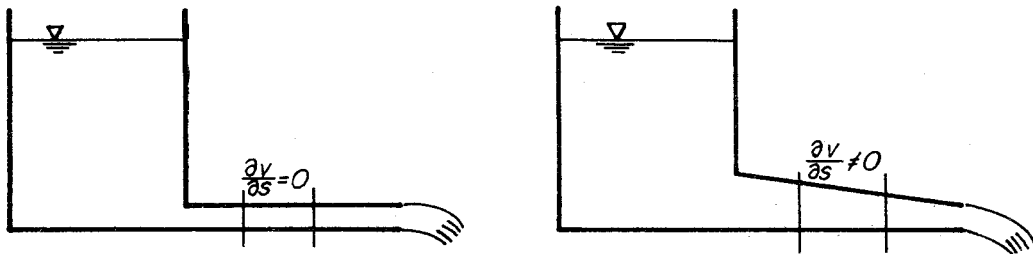
En la práctica se presentan diversos tipos de flujo. En vista de que el

interés se centra en las conducciones por tubería y por canal, las descripciones que siguen se ilustran con esquemas de estas conducciones.

Flujo permanente y no permanente.- En el primero, en una sección de la conducción permanecen constantes en el tiempo las variables hidráulicas del flujo (velocidad, presión, densidad, etc). En el segundo los valores de estas variables cambian de un instante a otro.

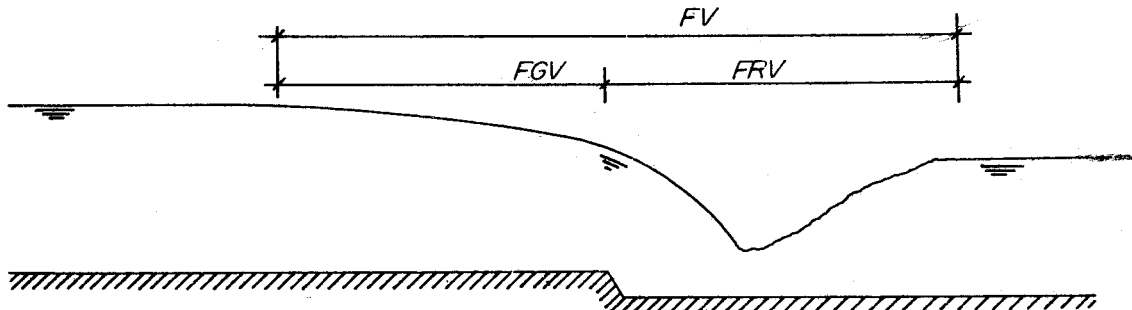


Flujo uniforme y no uniforme.- Considérese un flujo permanente en dos situaciones distintas: una con tubería de diámetro constante y la otra con tubería de diámetro decreciente.



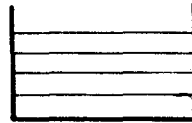
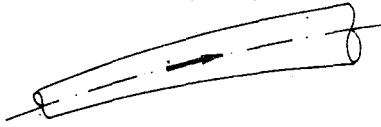
En el flujo uniforme permanecen constantes a lo largo de la conducción las variables hidráulicas del flujo (velocidad, presión, densidad, etc). En el flujo no uniforme los valores de estas variables cambian de un punto a otro de la conducción; se le denomina también flujo variado.

Flujo gradualmente variado y rápidamente variado.- El esquema corresponde a un canal que tiene una grada en el fondo, y es de por sí explicativo. El flujo variado (FV) puede serlo gradualmente (FGV) o bruscamente (FRV). A la izquierda y a la derecha del flujo variado se desarrolla flujo uniforme.

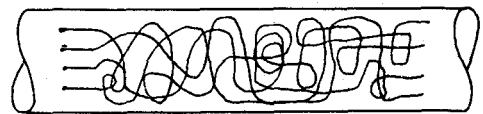
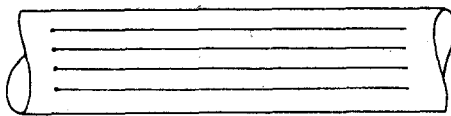


Flujo unidimensional y bidimensional.- Estrictamente hablando el flujo es siempre tridimensional. Sin embargo cuando en el flujo prevalece una dirección es considerado unidimensional, como ocurre con las tuberías y los canales. En el caso de los canales hay circunstancias en las cuales no se puede prescindir de una segunda dimensión para describir el flujo, debien-

do hacerse el estudio del flujo plano o bidimensional.



Flujo laminar y turbulento.- Considérese una tubería de vidrio por la que se hace pasar agua en movimiento permanente, uniforme y unidimensional. Si se inyecta un colorante se apreciará que, si la velocidad del escurrimiento es muy baja, el colorante sigue unas trayectorias ordenadas, rectilíneas y paralelas, características del flujo laminar. Si la velocidad del agua, en cambio, tiene los valores ordinarios, se observará que el colorante se mezcla por efecto de las trayectorias desordenadas y erráticas, características del flujo turbulento.



En la práctica, para las velocidades ordinarias, el flujo del agua es turbulento en tuberías y canales y laminar en el subsuelo.

Existe un parámetro que es función de la viscosidad del líquido y cuyo valor permite discernir sobre si el flujo es laminar o turbulento. Se llama número de reynolds ( $R_e$ ):

$$R_e = \frac{V L}{\nu}$$

$V$  ... velocidad media del escurrimiento

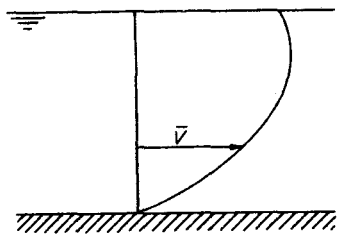
$\nu$  ... viscosidad cinemática

$L$  ... una longitud característica que en tuberías es generalmente el diámetro.

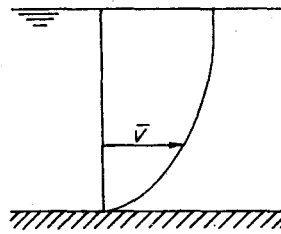
Para valores de  $R_e$  de hasta 2,300 se verifica que el flujo es laminar y para valores mayores que 4,000 se verifica que es turbulento. Valores intermedios corresponden al período de transición. Nótese que el  $R_e$  es adimensional.

Flujo compresible e incompresible.- Lo ordinario es que el agua se considere incompresible y el aire compresible. Sólo en aquellas situaciones en que el agua resulta sometida a grandes presiones (como en el fenómeno del golpe de ariete) es necesario tratarla como compresible. De manera análoga, cuando el aire soporta presiones muy pequeñas durante su conducción (como en los ductos de ventilación) puede ser considerado incompresible.

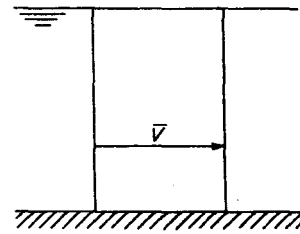
Flujo rotacional e irrotacional.- Un flujo es rotacional si en su seno el campo de vectores  $\text{rot } \vec{v}$  adquiere valores distintos de cero, y es irrotacional si en todo punto y en todo instante  $\text{rot } \vec{v} = 0$ . En la práctica, para las velocidades ordinarias el movimiento del agua es rotacional; para velocidades altas puede ser considerado irrotacional y para la hipótesis de líquido perfecto (sin viscosidad) el movimiento es de hecho irrotacional. El esquema muestra el diagrama de velocidades en un canal, para cada situación.



velocidad ordinaria

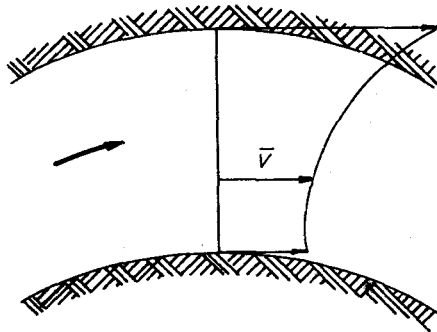


velocidad alta

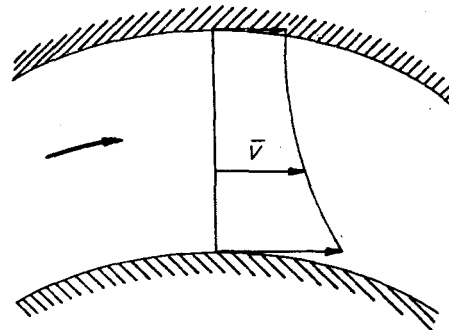


líquido perfecto

La misma idea pero graficada para un canal en curva, visto en planta:



flujo rotacional  
(esquema real)



flujo irrotacional  
(esquema ideal)

### 3.5 Descripción del movimiento

El movimiento de un fluido queda descrito cuando se está en condiciones de conocer:

- \* el cambio de posición de una partícula
- \* la variación de la velocidad en un punto.

Hay dos formas clásicas de describir el movimiento de un fluido.

Método de Euler.- Consiste en elegir un punto y determinar las variables cinemáticas en ese punto, en cada instante, sin considerar el camino que después siga cada partícula individual. Se usa:

$$\bar{v} = \bar{v}(\bar{r}, t)$$

Método de Lagrange.- Consiste en elegir una partícula y determinar las variables cinemáticas de esa partícula siguiendo su recorrido. Se usa:

$$\bar{r} = \bar{r}(r_0, t)$$

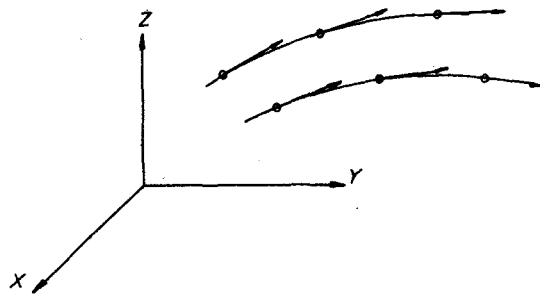
De los dos métodos se prefiere el primero porque su manejo analítico es más simple. Es el que normalmente se emplea en los libros de mecánica de fluidos.

### 3.6 Línea de corriente. Trayectoria. Tubo de flujo

En el flujo no permanente las variables cinemáticas varían en un mismo punto de un instante a otro. Supongamos que en un instante se conoce el cam-



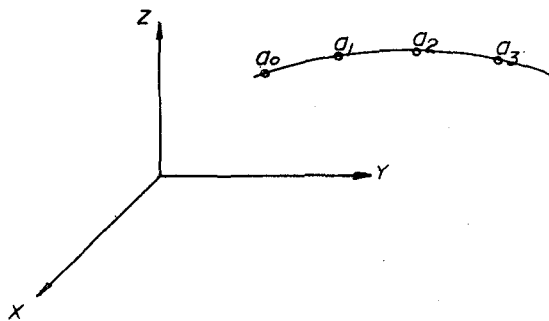
po de velocidades  $\bar{v}$ . Se define línea de corriente toda línea trazada idealmente en el seno líquido de modo que la tangente en cada uno de sus puntos proporcione la dirección del vector velocidad correspondiente. No existe posibilidad de que dos líneas de corriente tengan un punto común.



líneas de corriente para el instante t.

Si el flujo es no permanente para otro instante t, la configuración de las l.c. es otra. Si el flujo es permanente la configuración de las l.c. es la misma en cualquier momento.

Se define trayectoria la curva que marca el camino que sigue una partícula con el transcurrir del tiempo.

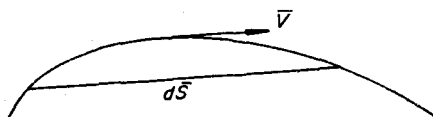


trayectoria para la partícula "a".

Si el flujo es no permanente l.c. y trayectoria son líneas distintas, pero si el flujo es permanente significan lo mismo. La razón está en que en el flujo permanente el campo de velocidades no cambia con el tiempo:

- \* toda partícula que pasa por  $a_0$  sigue la misma trayectoria.
- \* en cada punto  $a_0, a_1, \dots, a_n$  el vector velocidad permanece igual.

### Ecuaciones de la línea de corriente



de la definición de l.c.:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{s}}{dt}$$

$$d\bar{s} = \bar{v} dt$$

ecuación diferencial de la T.c.

En términos de las componentes:

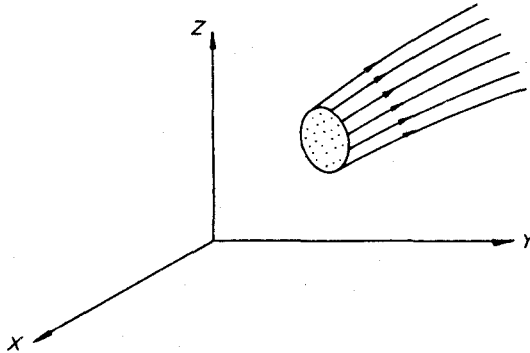
$$\begin{aligned} dx &= v_x dt \\ dy &= v_y dt \end{aligned}$$

$$dz = v_z dt$$

o bien, para un instante  $t_0$  :

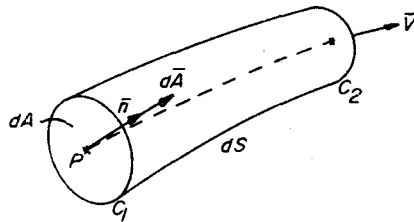
$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad \dots \quad (11)$$

Tubo de flujo.- Si se considera en el seno líquido una curva cerrada y las l.c. que pasan por cada uno de sus puntos, la totalidad de estas l.c. definen una superficie que se denomina tubo de flujo o tubo de corriente, y que no puede ser atravesada por el fluido. El volumen encerrado se conoce como vena líquida.



### 3.7 Caudal o gasto

Considérese el tubo de flujo elemental, definido en las curvas cerradas  $C_1$ ,  $C_2$  muy próximas entre sí.



En el punto P se pueden considerar dos vectores:  $d\bar{A} = dA \cdot \bar{n}$  y  $\bar{v}$ . El vector  $\bar{v} \cdot \bar{n}$  es un vector unitario normal a la superficie  $dA$  y cuyo sentido positivo se establece por convenio (ahora no interesa).

En un intervalo  $dt$  el volumen de líquido que atraviesa el elemento de superficie es igual al producto escalar:

$$dV_0 = d\bar{s} \cdot d\bar{A}$$

pero  $d\bar{s} = \bar{v} dt$

$$dV_0 = \bar{v} \cdot d\bar{A} dt$$

se define caudal o gasto a la relación:

$$dQ = \frac{dV_0}{dt} = \bar{v} \cdot d\bar{A}$$

Si  $dA$  es un elemento de una superficie finita  $A$ , entonces:

$$Q = \int dQ = \int_A \bar{v} \cdot d\bar{A} \quad \dots \quad (12)$$

Y si, como es costumbre, se escoge la superficie A de modo que las l.c. sean normales a ella:

$$Q = \int_A v \, dA \quad \dots (13)$$

Se llama velocidad media del flujo a través de la superficie A al cociente:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\int v \cdot dA}{A} \quad \dots (14)$$

o, como es costumbre:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\int v \, dA}{A} \quad \dots (15)$$

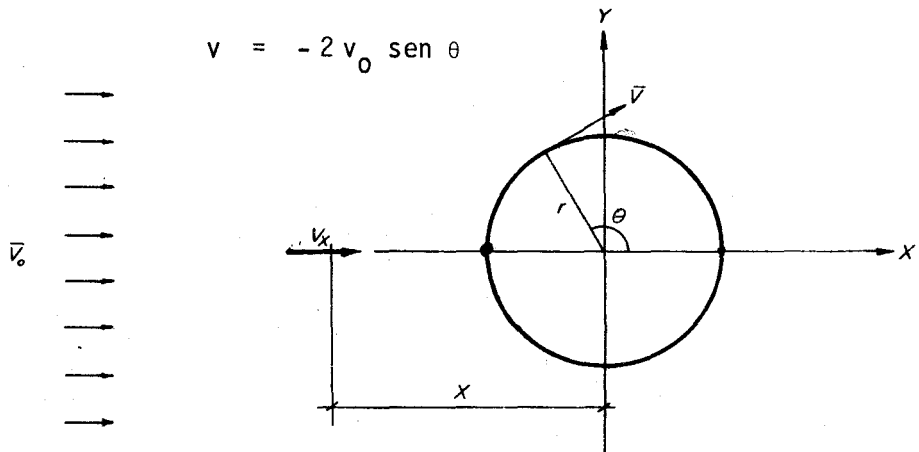
### 3.8 Ejemplos de aplicación

**Ejemplo 31.-** El viento sopla horizontalmente con velocidad uniforme  $v_0 = 1.8 \text{ m/sg}$  contra una chimenea vertical de radio  $r = 0.25 \text{ m}$ . Supuesto el flujo irrotacional, la velocidad sobre el eje X va disminuyendo hacia el punto de estancamiento según la ley

$$v_x = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{x^2}\right)$$

y la velocidad  $v$  alrededor del cilindro es

$$v = -2 v_0 \operatorname{sen} \theta$$



Averiguar:

- la aceleración del aire en el punto  $x = -0.50 \text{ m}$
- las componentes tangencial y normal de la aceleración para  $\theta = \frac{3}{4} \pi$

Según (4):

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

al primer sumando, entre paréntesis, se le conoce como aceleración convectiva y al segundo como aceleración local.

en este caso: 
$$a_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$v_x = v_0 - v_0 \cdot r^2 x^{-2}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 2 v_0 r^2 x^{-3}$$

$$\begin{aligned} a_x &= (v_0 - v_0 r^2 x^{-2})(2 v_0 r^2 x^{-3}) \\ &= 2 v_0^2 r^2 x^{-3} - 2 v_0 r^4 x^{-5} \\ &= 2 v_0^2 \left( \frac{r^2}{x^3} - \frac{r^4}{x^5} \right) \end{aligned}$$

reemplazando:  $a_x = -2.43 \text{ m/sg}^2$

Según (7) y (8):

$$\begin{aligned} a_s &= \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \right] \bar{s} \\ a_n &= -\frac{v^2}{r} \end{aligned}$$

En el caso presente:

$$\begin{aligned} a_s &= \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} (-2 v_0 \sin \theta)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} (4 v_0^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{2} (4 v_0^2 \cdot 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial s}) \\ &= 4 v_0^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial s} \end{aligned}$$

pero  $ds = r d\theta$

es decir,  $\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{1}{r}$  ro

$$a_s = 4 v_0^2 \sin \theta \cos \theta \frac{1}{r} = \frac{4 v_0^2}{r} \sin \theta \cos \theta$$

reemplazando:  $a_s = -25.92 \text{ m/sg}^2$

$$a_n = -\frac{4 v_0^2 \sin^2 \theta}{r}$$

reemplazando:  $a_n = 25.92 \text{ m/sg}^2$

Ejemplo 32.- Encontrar el vector rotacional para el flujo permanente, plano, cuyo campo de velocidades es:

$$\begin{aligned} v_x &= A(x + y) \\ v_y &= -A(x + y) \end{aligned}$$

Según (9):

$$\text{rot } \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = 0 \bar{i} + 0 \bar{j} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \bar{k}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = -A$$

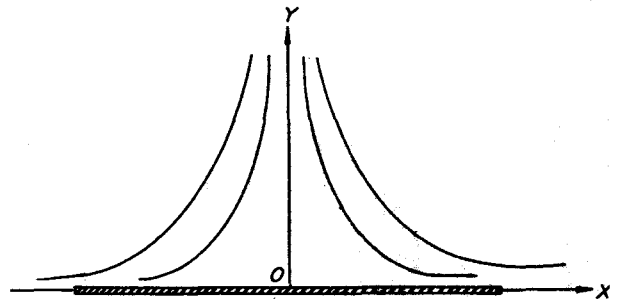
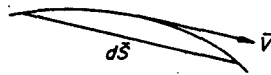
$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = A$$

reemplazando:  $\text{rot } \bar{v} = -2A \bar{k}$

**Ejemplo 33.-** Determinar la ecuación de las l.c. de un flujo permanente, plano, simétrico respecto del eje Y, dirigido hacia abajo, que choca contra una placa horizontal, cuyo campo de velocidades está definido por las componentes:

$$\begin{aligned} v_x &= 3x \\ v_y &= -3y \end{aligned}$$

Por definición:



$$\bar{v} = \frac{d\bar{s}}{dt} \quad \dots \quad d\bar{s} = \bar{v} dt$$

$$\begin{cases} dx = v_x dt \\ dy = v_y dt \end{cases}$$

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \quad \dots \quad \text{ecuación diferencial de las l.c. igual que (11).}$$

$$\frac{dx}{3x} = \frac{dy}{-3y}$$

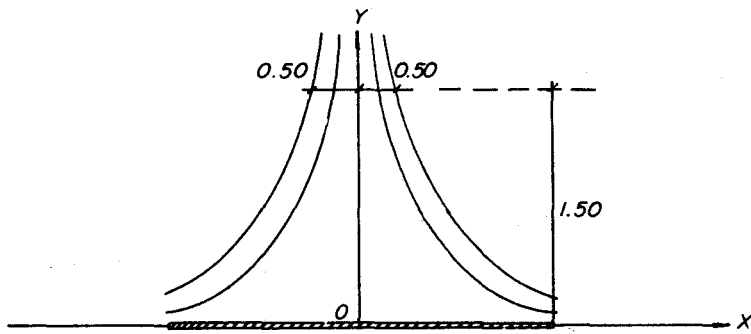
$$\frac{1}{3} \frac{dx}{x} = -\frac{1}{3} \frac{dy}{y}$$

$$\ln x = -\ln y + C$$

$$\ln x + \ln y = C$$

$xy = C_e$ , ecuación de las l.c. que corresponde a una familia de hipérbolas asintóticas a los ejes X, Y.

**Ejemplo 34.-** En el problema del ejemplo 33 determinar el gasto por unidad de ancho del chorro que incide sobre la placa y limitado en la forma que a continuación se indica:



El vector velocidad es:  $\vec{v} = 3x \vec{i} - 3y \vec{j}$   
 y el vector diferencial de área:  $d\vec{A} = (-dx) \cdot 1 \cdot \vec{j}$

$$Q = \int \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad \dots \quad (12)$$

pero  $\vec{v} \cdot d\vec{A} = 3y dx$

$$Q = \int_{-0.50}^{0.50} 3y dx = 3y \times \frac{0.50}{-0.50} = 3y$$

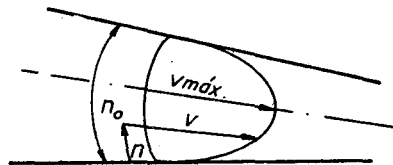
reemplazando:  $Q = 4.5 \text{ m}^3/\text{seg}$  por metro de ancho perpendicular al papel.

Ejemplo 35.- Si la velocidad del aceite que fluye entre dos placas convergentes varía en una sección normal según la ecuación:

$$v = v_{\text{máx}} \frac{4n}{n_0} (n_0 - n)$$

y si  $v_{\text{máx}} = 15 \text{ cm/sg.}$

$$n_0 = 2 \text{ cm}$$



determinar:

- el caudal, si el contorno tiene un ancho constante de 23 cm.
- la velocidad media.

a) Según (13):

$$Q = \int_A v dA = b \int_0^{n_0} v dn$$

$$Q = b \cdot 4 \frac{v_{\text{máx}}}{n_0} \int_0^{n_0} n (n_0 - n) dn = \frac{3}{2} v_{\text{máx}} \cdot n_0$$

reemplazando:  $Q = 460 \text{ cm}^3/\text{sg.}$

b) Según (15):

$$V = \frac{Q}{A}$$

$$V = \frac{460}{23 \times 2} = 10 \text{ cm/sg.}$$

## CAPITULO 4: ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA MECANICA DE FLUIDOS

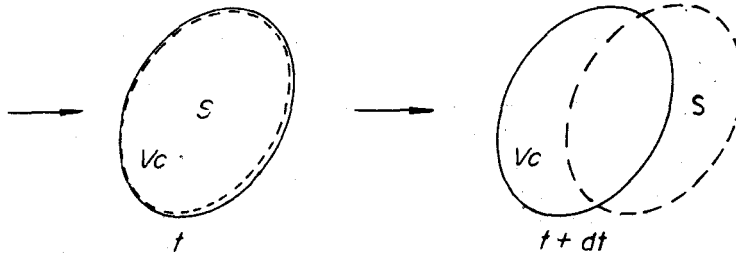
Las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos y que sirven para resolver numerosos problemas que se presentan en la práctica son:

- \* la ecuación de continuidad
- \* la ecuación de la energía
- \* la ecuación de cantidad de movimiento
- \* la ecuación del momento de la cantidad de movimiento.

### 4.1 Concepto de sistema y volumen de control

El método que se emplea para deducir estas ecuaciones es el método de Euler, que consiste en lo siguiente:

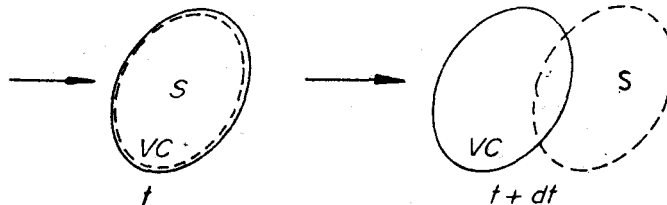
- 1º adoptar una porción fija del espacio dentro del seno fluido de forma y tamaño constantes. Esta porción de espacio se llama volumen de control y su delimitación superficie de control;
- 2º escoger una porción de masa fluida de modo que en un instante dado coincida con el volumen de control. Esta porción de masa se llama sistema y su delimitación contorno.
- 3º considerar la coincidencia en un instante  $t$ , el sistema desplazado un  $dt$  después y aplicarle los principios de la mecánica.



Las ecuaciones que se deducen en este capítulo son aplicables a los fluidos reales, de manera que rigen tanto para flujo laminar como para flujo turbulento y tanto para flujo rotacional como irrotacional.

### 4.2 Ecuación de continuidad

#### 4.2.1 Formulación general



$m_{VC t}$  ... masa en el volumen de control en el momento  $t$ .

$m_{VC(t+dt)}$  ... masa en el volumen de control en el momento  $t+dt$

$dm_s$  ... masa que ha salido del VC en el intervalo  $dt$ .

$dm_e$  ... masa que ha entrado en el VC en el intervalo  $dt$ .

la masa en el sistema permanece invariable:

$$m_{VC} t = m_{VC}(t + dt) + dm_s - dm_e$$

dividiendo entre  $dt$  y ordenando:

$$\frac{m_{VC}(t + dt) - m_{VC} t}{dt} = \frac{dm_e - dm_s}{dt} \dots (16)$$

es decir, "la rapidez de variación de la masa en el volumen de control es igual al caudal neto de masa entrante".

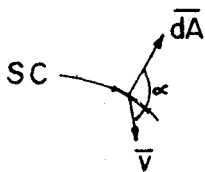
El primer miembro es igual a:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV_o = \int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV_o$$

En el segundo miembro:



$$\frac{dm_s}{dt} = \int_{A_s} \rho v \cos \alpha dA_s$$



$$\frac{dm_e}{dt} = - \int_{A_e} \rho v \cos \alpha dA_e$$

El caudal neto de masa entrante es  $\frac{dm_e - dm_s}{dt} = - \int_{SC} \rho \bar{v} \cdot d\bar{A}$

Reemplazando en (16):

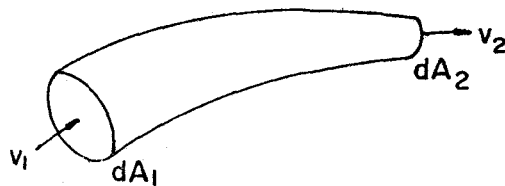
$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV_o = - \int_{SC} \rho \bar{v} \cdot d\bar{A} \dots (17)$$

que es la expresión más amplia de la ecuación de continuidad para un volumen de control.

Para movimiento permanente se anula el primer miembro de la (17):

$$\int_{SC} \rho \bar{v} \cdot d\bar{A} = 0 \dots (18)$$

para un tubo de flujo, como el fluido no atraviesa las paredes sólo quedan las áreas extremas,

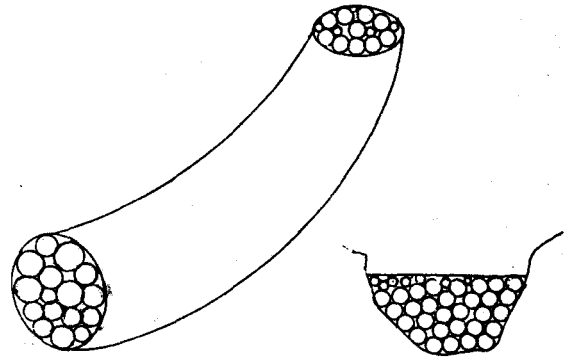


$$\rho_2 v_2 dA_2 - \rho_1 v_1 dA_1 = 0$$

es decir:  $\rho_1 v_1 dA_1 = \rho_2 v_2 dA_2 \dots (19)$



para una tubería o un canal se puede considerar que el flujo está conformado por un conjunto de tubos de flujo, de modo que se puede usar en cada sección una  $\rho$  constante y una velocidad media también constante.



$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \dots \quad (20)$$

por definición de caudal:  $\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 \dots \quad (21)$

es decir, el caudal en masa se mantiene constante.

Si además el fluido es incompresible:

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 = \text{cte} \dots \quad (22)$$

que es la forma más simple de la ecuación de continuidad en flujo unidimensional, muy útil en problemas de tuberías y canales.

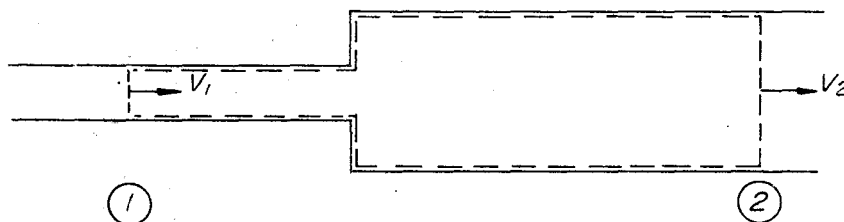
Comentario.- Para un fluido incompresible ( $\rho$  constante), la ecuación de continuidad del movimiento permanente y no permanente es, según la (17):

$$\int_{SC} \bar{v} \cdot d\bar{A} = 0 \dots \quad (23)$$

de manera que de aquí se puede también derivar la (22).

#### 4.2.2 Ejemplos de aplicación

Ejemplo 36.- Una tubería de 60 cm de diámetro está seguida de otra de 90 cm de diámetro. Si en la sección 1 la velocidad media del agua es de 1 m/sg, hallar el caudal y también la velocidad en la sección 2.



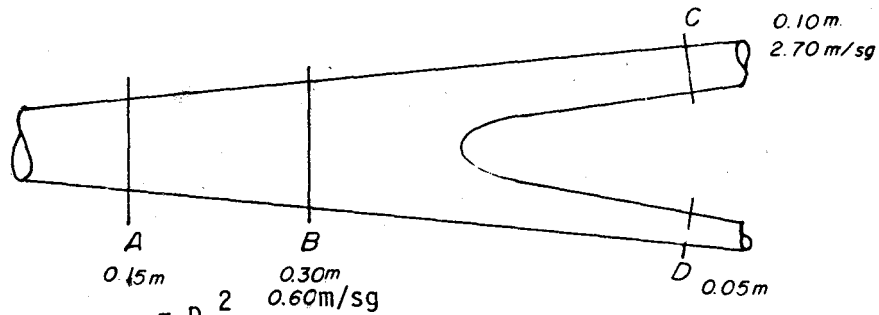
según la (22):  $Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 = \text{constante}$

es decir,  $Q = A_1 V_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} V_1 = 0.283 \text{ m}^3/\text{sg}$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = 0.44 \text{ m/sg.}$$

Ejemplo 37.- La figura muestra la bifurcación de una tubería según los diámetros indicados. El agua escurre de izquierda a derecha

Si la velocidad media en B es de 0.60 m/sg y en C es de 2.70 m/sg, calcular las velocidades medias en A y D y el gasto en cada ramal.



$$Q_B = A_B V_B = \frac{\pi D_B^2}{4} \times V_B = 0.042 \text{ m}^3/\text{sg}$$

$$V_A = \frac{Q_B}{A_A} = 2.38 \text{ m/sg}$$

$$Q_C = A_C V_C = 0.021 \text{ m}^3/\text{sg}$$

$$Q_D = Q_B - Q_C = 0.021 \text{ m}^3/\text{sg}$$

$$V_D = \frac{Q_D}{A_D} = 10.70 \text{ m/sg}$$

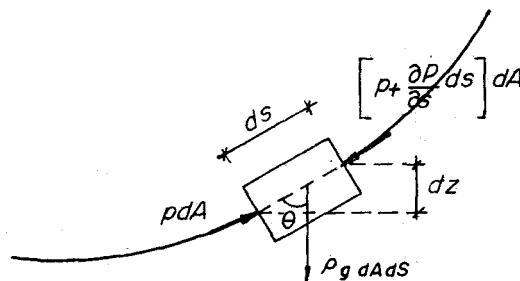
### 4.3 Ecuación de la energía

#### 4.3.1 Ecuación del movimiento a lo largo de una l.c.

En la figura una partícula de fluido de forma prismática se está moviendo a lo largo de una l.c. en la dirección +s y su masa es  $\rho \cdot dA \cdot ds$ . Para simplificar se supone líquido perfecto, es decir sin viscosidad, por lo que no hay fuerzas de rozamiento. La fuerza de cuerpo es  $\rho g \cdot dA \cdot ds$ . Las fuerzas de superficie son:

$$p \, dA \text{ y } \left[ p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right] dA$$

ya que cualquier otra fuerza en la superficie del elemento es normal a s.



Segunda ley de Newton:  $\Sigma F_s = dm \cdot a_s$

reemplazando:

$$p \, dA - \left[ p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right] dA - \rho g \, dA \, ds \cos \theta = \rho \, dA \, ds \cdot a_s$$

dividiendo entre la masa de la partícula y simplificando:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \cos \theta + a_s = 0$$

de la figura:  $\cos \theta = \frac{dz}{ds}$

según la (7):  $a_s = v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t}$

reemplazando:  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$

Para flujo permanente:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial s} = 0$$

ahora p, z y v son sólo funciones de s:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} + g \frac{dz}{ds} + v \frac{dv}{ds} = 0$$

$$\frac{dp}{\rho} + g dz + v dv = 0 \quad \dots \quad (24)$$

que es la ecuación de Euler del movimiento a lo largo de una l.c. para:

- \* líquido perfecto, sin viscosidad
- \* flujo permanente.

#### 4.3.2 Ecuación de Bernoulli

Se obtiene integrando la (24) para fluido incompresible ( $\rho$  constante):

$$gz + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{constante}$$

dividiendo entre g:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{constante}$$

es decir, 
$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \quad \dots \quad (25)$$

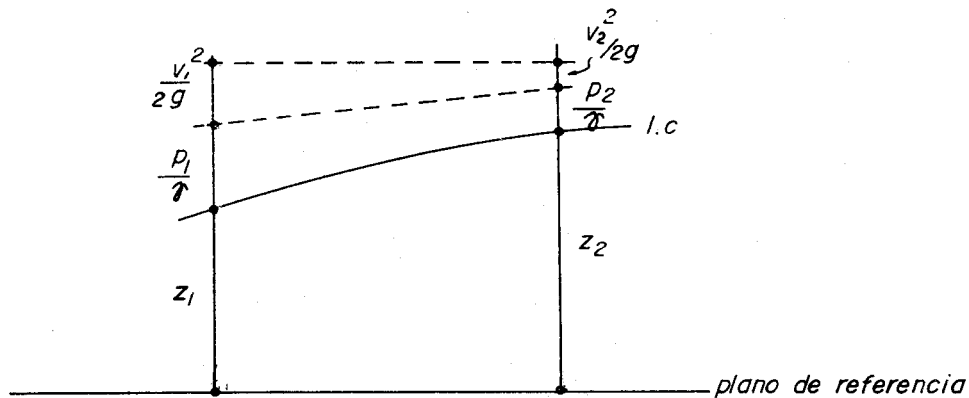
que es la ecuación de Bernoulli para una línea de corriente, en el flujo permanente del líquido perfecto e incompresible. Cada término tiene unidades de energía por unidad de peso, es decir kg-m/kg. Los tres términos se consideran como energía utilizable,

z ... energía potencial del fluido por unidad de peso medida a partir de un nivel arbitrario llamado plano de referencia;

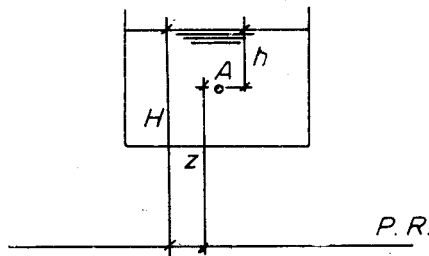
$\frac{v^2}{2g}$  ... energía cinética del fluido por unidad de peso;

$\frac{p}{\gamma}$  ... energía de presión del fluido por unidad de peso.

La representación gráfica es:



Por resultar de interés práctico se va a demostrar que en un depósito lleno de líquido la energía por unidad de peso es la misma en todos los puntos.



para un punto cualquiera  $\overset{x}{A}$  :

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{cte.}$$

$$z + h + 0 = \text{cte.}$$

$$H = \text{cte.}$$

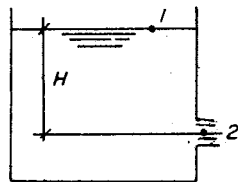
es decir, para todos los puntos la suma de las tres energías por unidad de peso es H.

Otra observación importante se desprende de la (25):

$$(z_1 - z_2) + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = 0$$

es decir, en realidad lo que interesa son las diferencias de energía por unidad de peso entre dos puntos, de tal manera que no importa la ubicación del plano de referencia ni tampoco el origen de medición de las presiones.

Comentario.- Cuando se trata de la aplicación de la ecuación de Bernoulli en un depósito, los puntos 1 y 2 pueden elegirse arbitrariamente sin necesidad de que estén en una misma l.c.

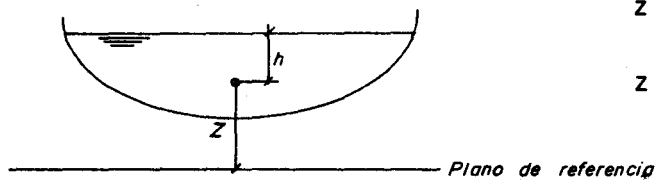


Quando se trata de gases sometidos a muy escasa presión puede aplicarse todavía la ecuación de Bernoulli con el valor medio del peso específico  $\gamma$ .

Para flujo no permanente con un cambio muy lento de las variables hidráulicas, tal como en el vaciado de un gran depósito, puede aplicarse la ecuación de Bernoulli sin error apreciable.

También, la ecuación de Bernoulli puede utilizarse en el estudio de problemas de líquidos viscosos reales, ignorando en un primer momento la viscosidad para corregir después la formulación teórica obtenida mediante un coeficiente determinado experimentalmente.

Por último, así como se ha obtenido en 4.3.1 la ecuación del movimiento en la dirección tangencial  $s$ , se puede también obtener la ecuación del movimiento en la dirección normal  $n$ . Cuando se hace esto se llega a la importante conclusión de que no obstante estar el líquido en movimiento, la presión en una vertical se distribuye de manera hidrostática.



$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{constante}$$

$$z + h = \text{constante}$$

#### 4.3.3 Formulación general

La ecuación de Bernoulli es:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$

válida para una l.c., en flujo permanente, de un fluido ideal incompresible. Cada término tiene unidades de energía por unidad de peso y los tres términos se refieren a energía utilizable.

De considerarse la viscosidad en el análisis de 4.3.1 y 4.3.2, aparecería un término adicional en función del esfuerzo de corte  $\tau$  que representaría la energía por unidad de peso empleada para vencer las fuerzas de fricción. Este término, por razones de orden práctico se puede expresar e interpretar del modo que sigue:

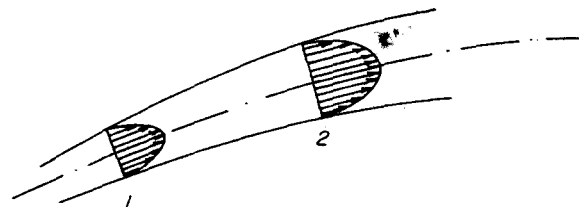
$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} - h p_{1-2} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \quad \dots (26)$$

$h p_{1-2}$  ... pérdida de energía por unidad de peso ( $\frac{\text{kg-m}}{\text{kg}}$ ).

La (26) viene a resultar así la ecuación de la energía para una l.c. Se lee "la energía total por unidad de peso en 1 menos la pérdida de energía es igual a la energía total por unidad de peso en 2".

Para una tubería se puede considerar:

- \* una l.c. coincidente con su eje;
- \* que los valores de  $z$ ,  $p$  y  $\gamma$  son representativos de cada sección;
- \* que el valor de  $v$  en esta l.c. no es representativo de las velocidades en la sección;
- \* que conviene utilizar como valor representativo de estas velocidades el valor medio  $V$  (velocidad media), debiendo en consecuencia reemplazarse:



$$\frac{v^2}{2g} \quad \text{por} \quad \alpha \cdot \frac{V^2}{2g}$$

reemplazando en la (26):

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} - \sum_1^2 hp = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} \dots \quad (27)$$

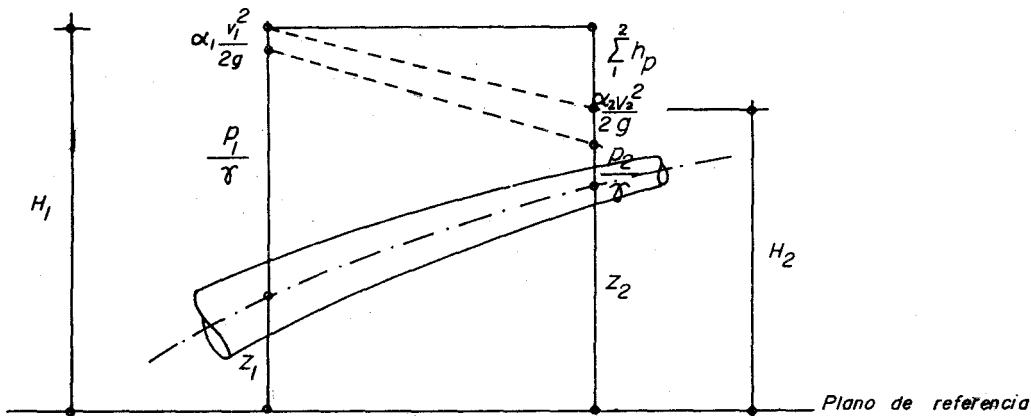
que es la ecuación de la energía para una tubería, en flujo permanente de un fluido real viscoso, incompresible. El factor  $\alpha$  se llama coeficiente de Coriolis y su valor depende de la distribución de velocidades en la sección. Cuando no aparece al lado de la altura de velocidad media es porque se supone igual a la unidad.

Es costumbre referirse a los términos de la (27) indistintamente como alturas, cargas o energías:

- $z$  ... carga o energía potencial
- $\frac{p}{\gamma}$  ... carga o energía de presión
- $\alpha \frac{v^2}{2g}$  ... carga o energía cinética
- $\sum_1^2 hp$  ... pérdida de carga o energía

Es costumbre también referirse a la ecuación (27) como la ecuación de Bernoulli.

La representación gráfica de la ecuación (27) es:



La forma simplificada de la ecuación (27) es:

$$H_1 - \sum_1^2 hp = H_2$$

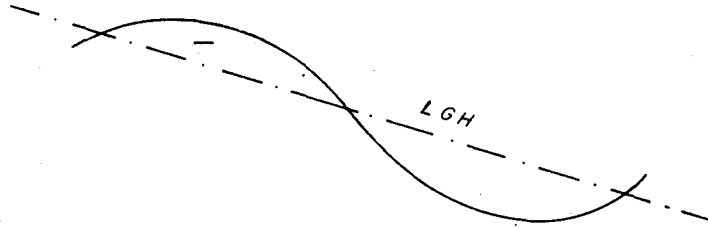
$H$  ... carga o energía total

al término  $z + \frac{p}{\gamma}$  se llama altura piezométrica; la línea de puntos superior es la línea de altura totales o línea de energía (LE) y la inferior la línea de altura piezométrica o línea de gradiente hidráulico (LGH); la distancia entre ambas líneas es la altura de velocidad.

(estrictamente ni la LE ni la LGH son rectas, pero es común suponerlas como tales, sobre todo tratándose de conducciones largas y tendidas sin ondulaciones fuertes en su perfil longitudinal)

La distancia vertical del eje de la tubería a la LGH representa la altura

de presión. De modo que si como ocurre a veces, la LGH queda en algún tramo por debajo de la tubería, en ese tramo la presión relativa es negativa, existe un vacío parcial y se puede presentar el fenómeno de cavitación (apartado 1.7). En la práctica se toman medidas precautorias.



La pérdida de energía que se produce en una conducción (tubería o canal) y que en las fórmulas se indica como:

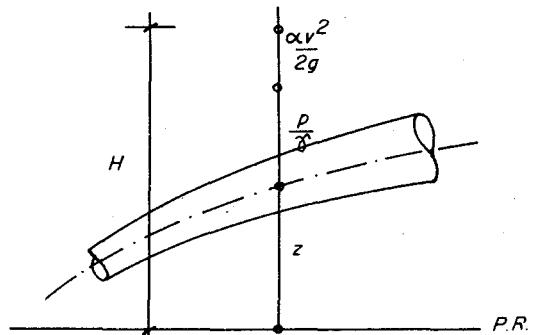
$$\sum_{1}^{2} h_p$$

puede deberse sólo al efecto de la fricción o también a pérdidas localizadas en algunas singularidades de la conducción (cambio en la sección, cambio en la dirección, válvulas y compuertas, etc). Estas pérdidas se llaman locales y en tuberías se acostumbra expresarlas en la forma  $K \frac{V^2}{2g}$ , donde el coeficiente K depende de las características de cada singularidad. - No conviene darles a estas pérdidas el nombre de menores con que aparecen en algunos libros, porque a veces son tanto o más significativas que las motivadas por la fricción.

#### Potencia de una corriente

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{v^2}{2g}$$

representa la carga total o energía total por unidad de peso en una sección, con respecto a un plano de referencia (m,  $\frac{\text{kg-m}}{\text{kg}}$ ).



$\gamma Q$ , representa el peso de líquido que pasa por la sección en la unidad de tiempo ( $\frac{\text{kg}}{\text{sg}}$ ).

$\gamma QH$ , representará la energía por unidad de tiempo, es decir la potencia de la corriente con respecto al plano de referencia ( $\frac{\text{kg-m}}{\text{sg}}$ )

por eso:  $\text{Pot} = \gamma Q H$

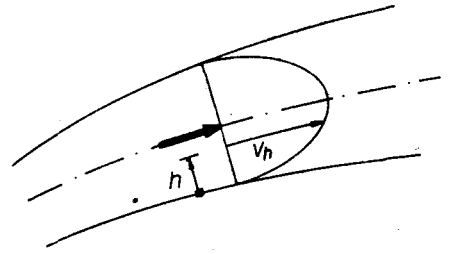
#### Expresión del coeficiente de Coriolis ( $\alpha$ )

En una l.c.,

$$\text{energía cinética por unidad de peso} = \frac{v_h^2}{2g}$$

$$\begin{aligned} \text{potencia que le corresponde} &= \gamma d Q \cdot \frac{v_h^2}{2g} \\ &= \gamma v_h dA \cdot \frac{v_h^2}{2g} \end{aligned}$$

$$\text{potencia de toda la corriente} = \int_A \frac{\gamma}{2g} v_h^3 dA$$



En toda la corriente,

$$\begin{aligned} \text{energía cinética por unidad de peso utilizando} \\ \text{la velocidad media} &= \frac{V^2}{2g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{potencia que le corresponde} &= \gamma Q \frac{V^2}{2g} \\ &= \gamma A V \cdot \frac{V^2}{2g} \\ &= \frac{\gamma}{2g} A V^3 \end{aligned}$$

$$\text{potencia real} = \text{potencia corregida} = \alpha \frac{\gamma}{2g} A V^3$$

Igualando las dos expresiones:

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\gamma}{2g} A V^3 &= \int_A \frac{\gamma}{2g} v_h^3 dA \\ \alpha &= \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v_h}{V}\right)^3 dA \end{aligned}$$

el valor de  $\alpha$  depende, como se ve, de la distribución de velocidades en la sección. Cuando no se indica su valor, como ocurre en muchas situaciones prácticas, es que se está suponiendo  $\alpha = 1$ .

LE y LGH confundidas.- En ocasiones, sobre todo en tuberías de gran extensión o "tuberías largas", el valor de la carga de velocidad

$$\alpha \frac{V^2}{2g}$$

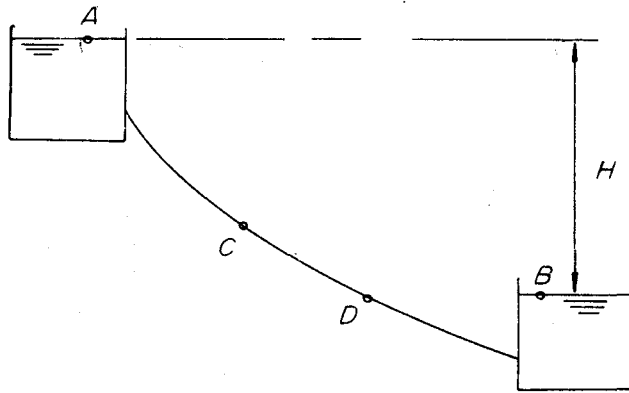
es muy pequeño al lado de las otras cargas.

En tal caso la carga de velocidad puede ignorarse y resultan confundiendo-se la LE y la LGH.

Descarga entre dos depósitos.- En el esquema, H es el desnivel entre los depósitos; L y D son datos de la tubería en la cual suponemos instaladas dos válvulas C y D.

Escribiendo la ecuación de la energía desde A hasta B tendremos:





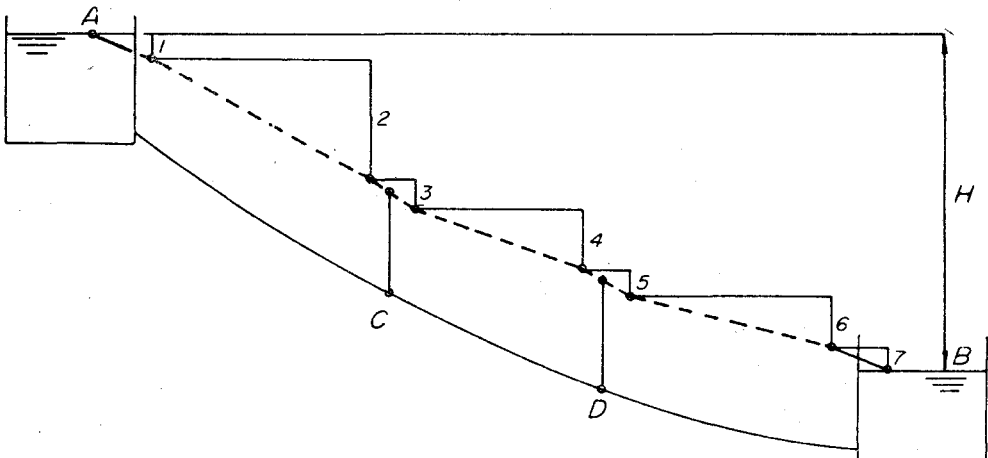
$$\left( Z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \alpha_A \frac{V_A^2}{2g} \right) - \sum_A^B hp = Z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \alpha_B \frac{V_B^2}{2g}$$

$$Z_A + 0 + 0 - \sum_A^B hp = Z_B + 0 + 0$$

$$Z_A - Z_B = \sum_A^B hp$$

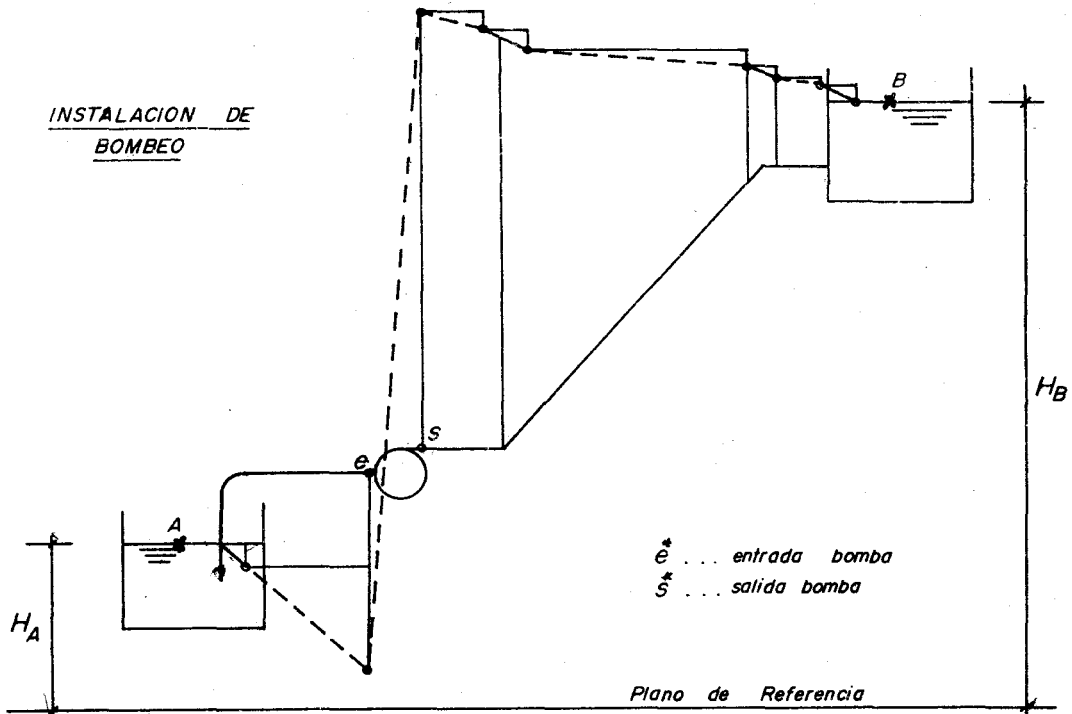
$$H = \sum_A^B hp$$

decir, el flujo se acomoda y se produce una descarga Q de tal magnitud que la carga disponible H resulta igual a la suma de todas las pérdidas (entrada tanque-tubería, fricción, válvula C, válvula D y salida tubería-tanque). H es la carga que produce la descarga Q. El esquema detallado de la LE es:



- 1 ... pérdida tanque-tubería
- 3 ... pérdida válvula C
- 5 ... pérdida válvula D
- 7 ... pérdida tubería-tanque
- 2, 4, 6 ... pérdida por fricción

Instalación de bombeo.- El esquema es autoexplicativo.

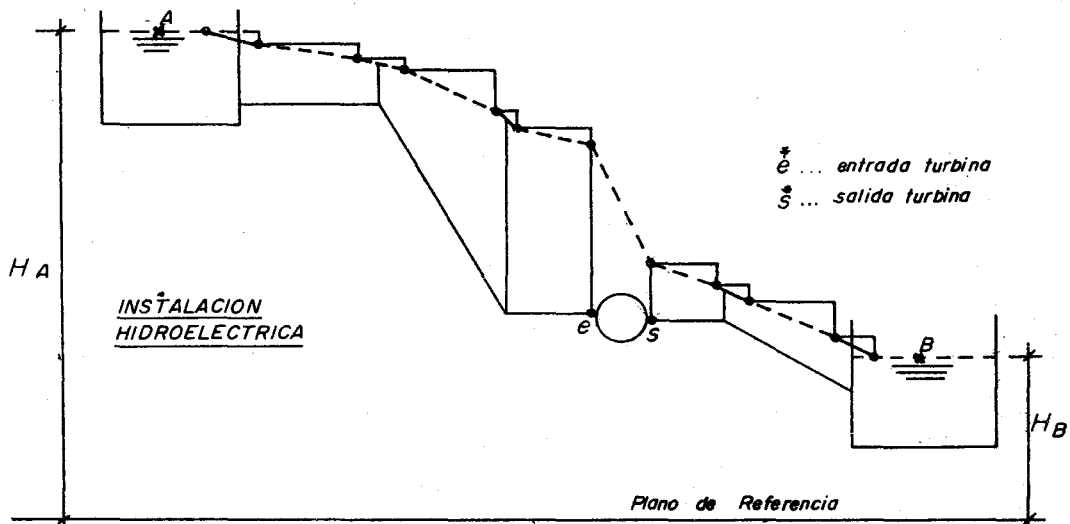


La ecuación de la energía, escrita entre A y B, resulta:

$$H_A - \sum_A^e hp + H_{es} - \sum_s^B hp = H_B$$

en la que :  $H_{es}$  = carga neta que el agua recibe de la bomba  
 por lo tanto:  $Pot = \gamma Q H_{es}$  = potencia neta que recibe el agua.

Instalación hidroeléctrica.- El esquema es autoexplicativo.



La ecuación de la energía, escrita entre A y B, resulta:

$$H_A - \sum_A^e hp - H_{es} - \sum_s^B hp = H_B$$

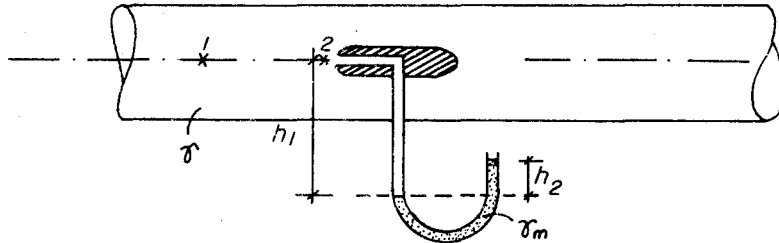
en la que:  $H_{es}$  = carga neta que la turbina recibe del agua.

por lo tanto:  $Pot = \gamma Q H_{es} =$  potencia neta que recibe la turbina.

#### 4.3.4 Dispositivos para medir velocidades y caudales.

Para medir velocidades:

Previamente veremos qué es el tubo de presión total.



El tubo de presión total (sombreado) debe ser de pequeño diámetro a fin de que la perturbación de la corriente sea mínima. Se considera la parte de una l.c. de 1 a 2; la pérdida de energía es pequeña y puede despreciarse. La ecuación de Bernoulli resulta:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} \quad \dots \text{el 2 se llama punto de estancamiento y en él } v_2 = 0.$$

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = p_2 \quad \dots (m)$$

$p_1$  ... presión estática

$\rho \frac{v_1^2}{2}$  ... presión dinámica

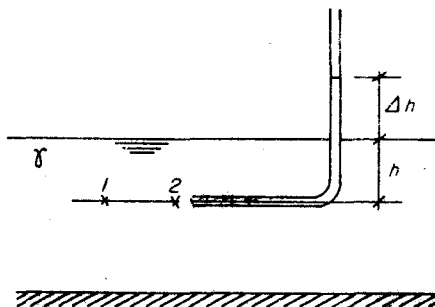
$p_2$  ... presión total

La presión total puede obtenerse por medio de un manómetro en U:

$$p_2 + \gamma h_1 = \gamma_m h_2$$

$$p_2 = \gamma_m h_2 - \gamma h_1$$

Tubo pitot simple.- Sirve para medir la velocidad local del líquido ( $v_1$ ) en un canal. La ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2 (punto de estancamiento):

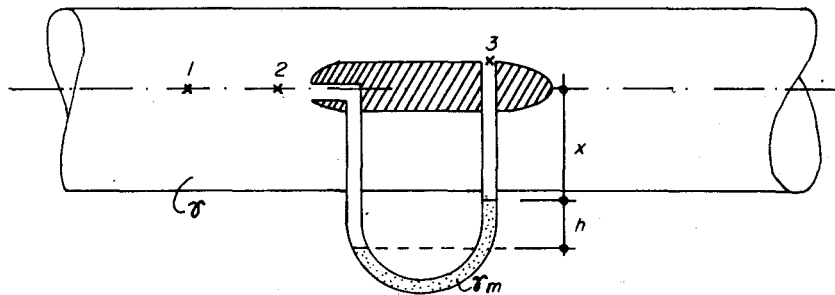


$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma}$$

$$h + \frac{v_1^2}{2g} = \Delta h + h$$

$$v_1 = \sqrt{2g \Delta h}$$

Tubo pitot tipo Prandtl.- Sirve para medir la velocidad local del fluido ( $v_1$ ) en una tubería:



como la perturbación del flujo es pequeña, se puede suponer que las condiciones en el punto 1 ( $v_1, p_1$ ) se restablecen en el punto 3, despreciándose la pérdida de energía.

En el manómetro diferencial:

$$p_2 + \gamma X + \gamma h = p_3 + \gamma X + \gamma_m \cdot h$$

$$p_2 - p_3 = \gamma_m h - \gamma h$$

$$= (\gamma_m - \gamma) h$$

como  $p_3 = p_1$

$$p_2 - p_1 = (\gamma_m - \gamma) h \quad \dots (n)$$

como  $p_2 - p_1 = \rho \frac{v_1^2}{2}$ , según ecuación (m)

$$\rho \frac{v_1^2}{2} = (\gamma_m - \gamma) h$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 (\gamma_m - \gamma) h}{\rho}}$$

se puede escribir:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}}$$

$v_1$  ... velocidad del fluido en el punto 1.

$\Delta p$  ... presión total - presión estática; se obtiene con el manómetro diferencial (ecuación n)

$\rho$  ... densidad del fluido

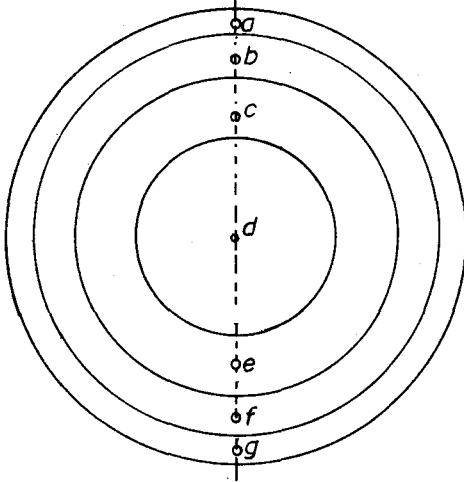
Caso particular: cuando por la tubería escurre un gas (por ejemplo aire)  $\gamma$  resulta bastante menor que  $\gamma_m$  y se puede ignorar. Es decir:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}}$$

con  $\Delta p = \gamma_m \cdot h$

Para medir caudales:

Con un tubo pitot tipo Prandtl.- Se divide la sección transversal de la tubería en un cierto número de superficies concéntricas de igual área (cuatro por ejemplo).



midiendo las velocidades en los puntos a, b, c, ... g se puede escribir:

$$v_1 = \frac{v_a + v_g}{2}$$

$$v_2 = \frac{v_b + v_f}{2}$$

$$v_3 = \frac{v_c + v_e}{2}$$

$$v_4 = v_d$$

por otro lado:  $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A$

$$Q_1 = A_1 v_1 = A v_1$$

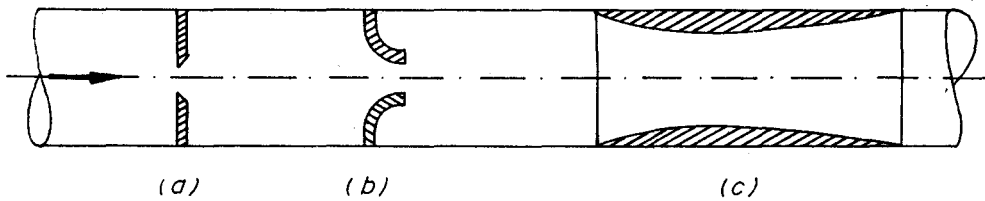
$$Q_2 = A_2 v_2 = A v_2$$

$$Q_3 = A_3 v_3 = A v_3$$

$$Q_4 = A_4 v_4 = A v_4$$

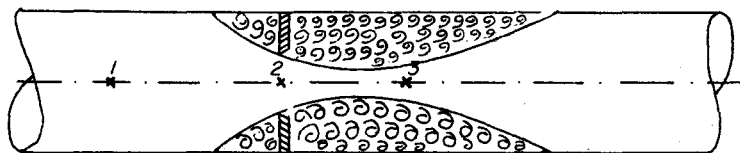
$$Q = \sum Q = A (v_1 + v_2 + v_3 + v_4)$$

Utilizando bridas (a), tubos de medida (b) y venturímetros (c)



El principio de la medición es el mismo en los tres dispositivos. Se refiere al hecho de que un estrechamiento en una tubería provoca un cambio de velocidad, que da por resultado un cambio mensurable de la presión estática. En base a la relación existente entre presión estática y velocidad puede calcularse ésta y con ella el caudal.

Sea una brida:



son hechos comprobados que la brida produce una contracción del chorro (3) y que se presentan zonas muertas en las que la presión estática es la misma que la del líquido circundante.

La ecuación de Bernoulli entre 1 y 3 considerando distribuciones uniformes de velocidad y que no hay pérdidas es:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_3}{\gamma} = \frac{V_3^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}$$

pero  $A_1 V_1 = A_3 V_3$

$$V_1 = \frac{A_3}{A_1} V_3$$

artificio:  $V_1 = \frac{A_3}{A_2} \cdot \frac{A_2}{A_1} V_3$

es decir,  $\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_3}{\gamma} = \frac{V_3^2}{2g} - \left( \frac{A_3}{A_2} \cdot \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \frac{V_3^2}{2g}$

$$\frac{p_1 - p_3}{\gamma} = \frac{V_3^2}{2g} \left[ 1 - \left( \frac{A_3}{A_2} \cdot \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]$$

llamando:  $u$  al coeficiente de contracción  $\frac{A_3}{A_2}$

$m$  a la relación de áreas  $\frac{A_2}{A_1}$

$$\frac{p_1 - p_3}{\gamma} = \frac{V_3^2}{2g} \left[ 1 - u^2 m^2 \right]$$

$$V_3 = \sqrt{\frac{2g \cdot \frac{p_1 - p_3}{\gamma}}{1 - u^2 m^2}} = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_3)}{\frac{\rho}{\gamma} (1 - u^2 m^2)}}$$

Para encontrar el caudal escribimos:

$$Q = A_2 V_2$$

$$A_2 V_2 = A_3 V_3$$

$$V_2 = \frac{A_3}{A_2} V_3$$

$$V_2 = u V_3$$

$$Q = A_2 u V_3$$

$$Q = A_2 u \sqrt{\frac{2 (p_1 - p_3)}{\rho (1 - u^2 m^2)}}$$

en vez de medir  $p_1 - p_3$  se prefiere medir  $\Delta p$  muy cerca de la brida por lo que habrá que introducir un coeficiente de corrección. Se estila:

$$p_1 - p_3 = \xi^2 \cdot \Delta p$$

$$Q = A_2 u \sqrt{\frac{2 \Delta p \cdot \xi^2}{\rho (1 - u^2 m^2)}}$$

$$Q = A_2 u \cdot \frac{\xi}{\sqrt{1 - u^2 m^2}} \cdot \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}}$$

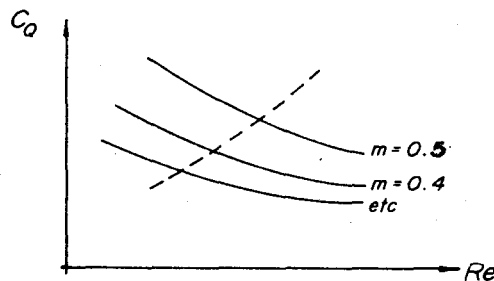
cuando el valor  $\frac{\Delta p}{p_1}$  es relativamente grande se corrige esta ecuación con un factor  $\epsilon$  llamado coeficiente de expansión y que para los fluidos incompresibles vale la unidad.

$$Q = \epsilon A_2 C_Q \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}} \dots\dots (q)$$

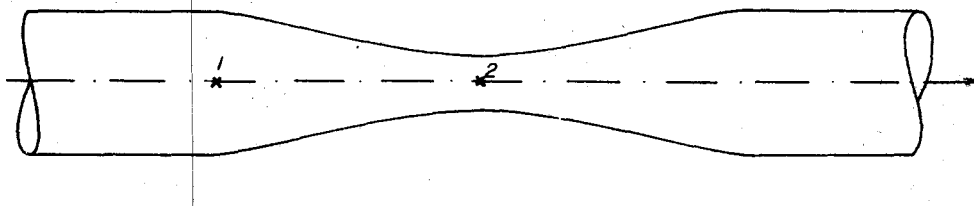
$$C_Q = \frac{u \xi}{\sqrt{1 - u^2 m^2}} \dots\dots (r) \dots \text{coeficiente de fluidez.}$$

La fórmula (q) es válida para bridas, tubos y venturímetros, variando para cada caso tan sólo la expresión de  $C_Q$  que para las bridas se ha encontrado es la (r).

Por experiencias realizadas se sabe que  $C_Q$  se mantiene constante a partir de un cierto número de Reynolds ( $Re$ ) llamado Reynolds límite para cada valor de  $m$ .



Para medidores venturi:

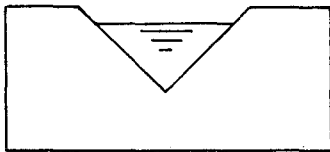


$$Q = \epsilon A_2 C_Q \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}} \quad \dots \quad \Delta p \text{ es ahora } p_1 - p_2$$

$m = \frac{A_2}{A_1}$	$C_Q$	$R_e$ lfmite
0.05	0.987	$6.0 \times 10^4$
0.10	0.989	$6.5 \times 10^4$
0.15	0.997	$7.5 \times 10^4$
0.20	0.999	$9.0 \times 10^4$
0.25	1.007	$11.0 \times 10^4$
0.30	1.017	$12.5 \times 10^4$
0.35	1.029	$14.5 \times 10^4$
0.40	1.043	$16.5 \times 10^4$
0.45	1.060	$18.0 \times 10^4$
0.50	1.081	$19.0 \times 10^4$
0.55	1.108	$20.0 \times 10^4$
0.60	1.142	$20.0 \times 10^4$

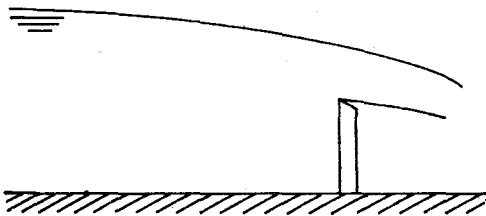
$$R_e = \frac{V_1 D_1}{\nu}$$

**Vertedero triangular.** - Sirve para medir caudales en canales. Consiste de una placa delgada, generalmente metálica, que se instala perpendicularmente a la dirección del flujo y que tiene una escotadura en forma de V por donde pasa el agua.



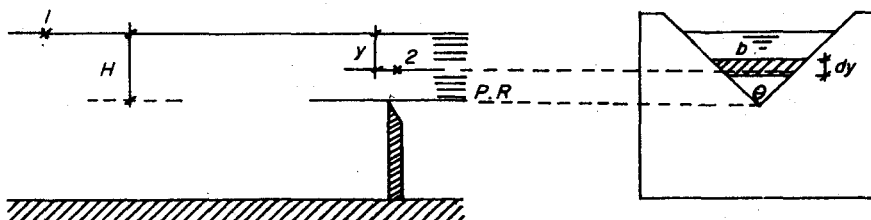
Antes del vertedero se produce un remanso, la velocidad con la que se aproxima el agua disminuye bastante, razón por la cual se ignora en el análisis.

Esquema del escurrimiento real:



Se produce una contracción vertical importante de la vena líquida y existen pérdidas de energía por fricción.

Esquema del escurrimiento teórico:





se asume que no se produce contracción vertical, ni pérdida de energía, que la distribución de velocidades es uniforme y que dentro del chorro actúa la presión atmosférica.

Se deduce la expresión del caudal teórico y luego se corrige con un coeficiente determinado experimentalmente.

Bernoulli entre 1 y 2:

$$H = (H - y) + 0 + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$v_2 = \sqrt{2g y}$$

$$d Q_t = v_2 \cdot dA = \sqrt{2g y} \cdot b dy$$

por semejanza de triángulos:  $\frac{b}{B} = \frac{H - y}{H}$

$$b = \frac{H - y}{H} \cdot B$$

$$\begin{aligned} d Q_t &= \frac{H - y}{H} B \sqrt{2g y} dy \\ &= \sqrt{2g} \frac{B}{H} (H - y) \sqrt{y} dy \\ &= \sqrt{2g} \frac{B}{H} (H y^{1/2} - y^{3/2}) dy \end{aligned}$$

$$Q_t = \int d Q_t = \sqrt{2g} \frac{B}{H} \left( H y^{3/2} \cdot \frac{2}{3} - y^{5/2} \cdot \frac{2}{5} \right) \Big|_0^H$$

$$Q_t = \sqrt{2g} \frac{B}{H} \left( \frac{2}{3} H^{5/2} - \frac{2}{5} H^{5/2} \right)$$

$$= \frac{4}{15} \sqrt{2g} \frac{B}{H} H^{5/2}$$

$$= \frac{8}{15} \sqrt{2g} \frac{B}{H} H^{5/2}$$

$$= \frac{8}{15} \sqrt{2g} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} H^{5/2}$$

$$Q_r = c' \frac{8}{15} \sqrt{2g} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} H^{5/2}$$

es un coeficiente de corrección por pérdidas y contracción vertical.

$$Q = C \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} H^{5/2}$$

se comprueba experimentalmente que  $c'$  no es constante sino que varía con  $H$ . Naturalmente  $C$  también varía con  $H$ .

#### 4.3.5 Ejemplos de aplicación

Ejemplo 36.- Una tubería que transporta aceite de g.e. = 0.877 pasa de 15 cm de diámetro en la sección 1 a 45 cm en la sección 2. La sección 1 está 3.60 m por debajo de la 2 y las presiones respectivas son 0.930 kg/cm<sup>2</sup> y 0.615 kg/cm<sup>2</sup>. Si el caudal es 146 lps, determinar la pérdida de carga y la dirección del flujo.

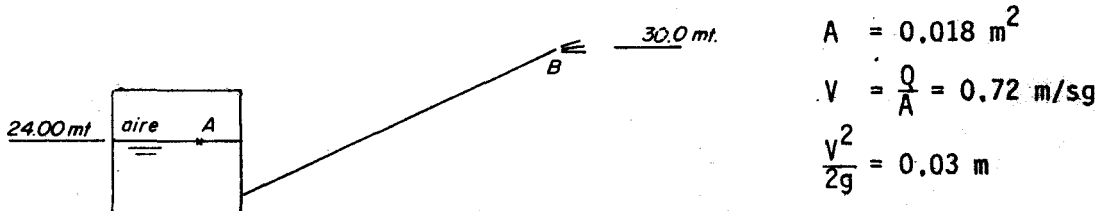
$$\begin{aligned} \gamma &= 877 \text{ kg/m}^3 \\ A_1 &= 0.018 \text{ m}^2 \\ A_2 &= 0.159 \text{ m}^2 \\ V_1 &= \frac{Q}{A_1} = 8.11 \text{ m/sg} \quad \dots \quad \frac{V_1^2}{2g} = 3.36 \text{ m} \\ V_2 &= \frac{Q}{A_2} = 0.92 \text{ m/sg} \quad \dots \quad \frac{V_2^2}{2g} = 0.04 \text{ m} \\ \frac{P_1}{\gamma} &= \frac{9300}{877} = 10.60 \text{ m} \\ \frac{P_2}{\gamma} &= \frac{6150}{877} = 7.01 \text{ m} \end{aligned}$$

$$H_1 = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = 0 + 10.60 + 3.36 = 13.96 \text{ m}$$

$$H_2 = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} = 3.60 + 7.01 + 0.04 = 10.65 \text{ m}$$

$$\Delta H = H_1 - H_2 = 3.31 \text{ m, y el flujo es de 1 a 2.}$$

Ejemplo 37.- Está fluyendo un aceite (g.e. = 0.84) desde el depósito A a través de una tubería de 15 cm de diámetro y hasta el punto B. ¿Qué presión en kg/cm<sup>2</sup> tendrá que actuar sobre A para que circulen 13 lps de aceite, si por fricción se pierde una carga igual a 23.5  $\frac{V^2}{2g}$  y en la entrada a la tubería se pierde 0.5  $\frac{V^2}{2g}$ ?



Ecuación de la energía entre A y B:

$$Z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} - \sum_A^B hp = Z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g}$$

$$24.0 + \frac{P_A}{\gamma} + 0 - (0.5 + 23.5) \frac{V^2}{2g} = 30.0 + 0 + \frac{V^2}{2g}$$

$$\frac{p_A}{\gamma} = (30.0 - 24.0) + 25 \frac{v^2}{2g} = 6.75 \text{ m de aceite}$$

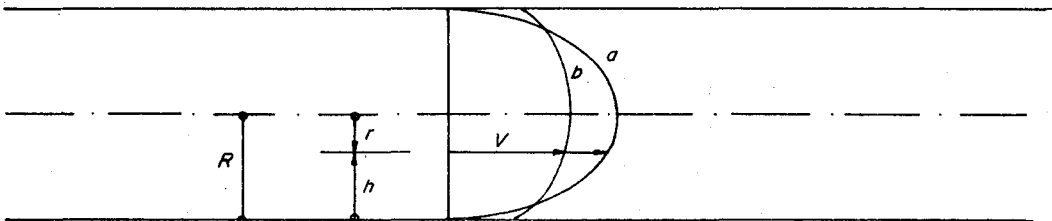
$$p_A = 840 \times 6.75 = 5,670 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} = 0.57 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

**Ejemplo 38.-** En la sección transversal de una tubería la distribución de velocidades sigue la ley:

a)  $v = v_{\text{máx}} \left[ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]$ , si el flujo es laminar

b)  $v = v_{\text{máx}} \left( 1 - \frac{r}{R} \right)^{1/7} = v_{\text{máx}} \left(\frac{h}{R}\right)^{1/7}$ , si el flujo es turbulento.

Determine el valor de  $\alpha$  en cada caso.



a)  $V = \frac{\int v \, dA}{A} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v_{\text{máx}} \left[ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] 2\pi r \, dr = \frac{v_{\text{máx}}}{2}$

$$\frac{v}{V} = 2 \left[ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]$$

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_0^R \left(\frac{v}{V}\right)^3 dA = \frac{8}{\pi R^2} \int_0^R \left[ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]^3 2\pi r \, dr = 2$$

b)  $V = \frac{\int v \, dA}{A} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v_{\text{máx}} \left(\frac{h}{R}\right)^{1/7} 2\pi (R-h) \, dh = \frac{49}{60} v_{\text{máx}}$

$$\frac{v}{V} = \frac{60}{49} \left(\frac{h}{R}\right)^{1/7}$$

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_0^R \left(\frac{v}{V}\right)^3 dA = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \left(\frac{60}{49}\right)^3 \left(\frac{h}{R}\right)^{3/7} 2\pi (R-h) \, dh = 1.06$$

**Ejemplo 39.-** En una tubería que une dos depósitos, la pérdida de carga por fricción se considera igual a  $200 \frac{V^2}{2g}$ . Determinar el caudal para un diámetro de tubería de:

a) 10 cm ( $A = 0.0079 \text{ m}^2$ )

b) 20 cm ( $A = 0.0314 \text{ m}^2$ )

si el desnivel entre los depósitos es de 10 m.

En ambos casos:

$$H = \sum_1^2 hp$$

$$10 = 200 \frac{v^2}{2g}$$

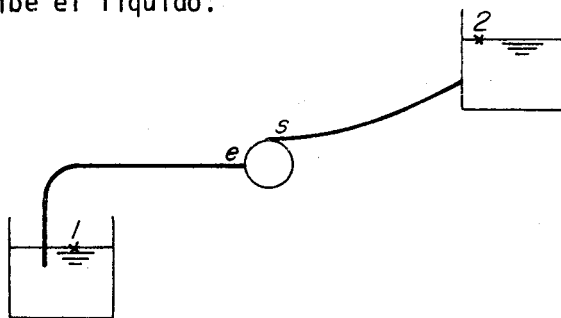
$$v = \sqrt{\frac{2g \cdot 10}{200}} = 0.99 \text{ m/sg}$$

a)  $Q = A v = 0.0078 \text{ m}^3/\text{sg} = 7.8 \text{ lps}$

b)  $Q = A v = 0.0311 \text{ m}^3/\text{sg} = 31.1 \text{ lps}$

La interpretación es que al aumentar el diámetro de la tubería el agua encuentra menor resistencia a su paso y fluye un caudal mayor.

Ejemplo 40.- En una instalación de bombeo el nivel del líquido (0.762) en el depósito inferior es 15 m y en el depósito superior - 60 m. Si el diámetro de la tubería es 30 cm, escurren 160 lps, la pérdida en la aspiración es 2.50 m y en la descarga 6.50 m, determinar la potencia en HP que recibe el líquido.



La ecuación de la energía entre 1 y 2 es:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} - \sum_1^e hp + H_{es} - \sum_s^2 hp = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g}$$

$$Z_1 + 0 + 0 - \sum_1^e hp + H_{es} - \sum_s^2 hp = Z_2 + 0 + 0$$

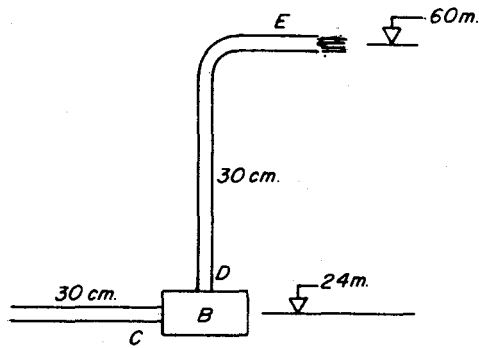
$$H_{es} = (Z_2 - Z_1) + \sum_1^e hp + \sum_s^2 hp$$

$$= 45 + 2.50 + 6.50$$

$$= 54.0 \text{ m}$$

$$HP_{es} = \frac{\gamma Q H_{es}}{76} = \frac{762 \times 0.160 \times 54.0}{76} = 87 \text{ HP}$$

Ejemplo 41.- La bomba comunica una carga de 42.20 m al agua que fluye hacia E como se indica. Si la presión en C es  $-0.15 \text{ kg/cm}^2$  y la pérdida de carga entre D y E es  $8 \frac{v^2}{2g}$ , ¿cuál es el caudal?



$$A = \frac{\pi D^2}{4} = 0.071 \text{ m}^2$$

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{Q^2}{2g A^2} = 10.121 Q^2 \text{ m}$$

$$hp_{DE} = 8 \frac{V^2}{2g} = 80.968 Q^2 \text{ m}$$

Ecuación de la energía entre C y E :

$$Z_C + \frac{p_C}{\gamma} + \frac{V_C^2}{2g} + H_{CD} - \sum_D hp = Z_E + \frac{p_E}{\gamma} + \frac{V_E^2}{2g}$$

$$\begin{aligned} \sum_D hp &= H_{CD} - (Z_E - Z_C) - \left( \frac{p_E}{\gamma} - \frac{p_C}{\gamma} \right) \\ &= 42.20 - (60 - 24) - (0 + 1.50) \\ &= 42.20 - 36.0 - 1.50 \end{aligned}$$

$$80.968 Q^2 = 4.70 \text{ m}$$

$$Q = 0.241 \text{ m}^3/\text{sg}$$

**Ejemplo 42.-** Un caudal de 220 lps de agua pasa por una turbina en las siguientes condiciones.

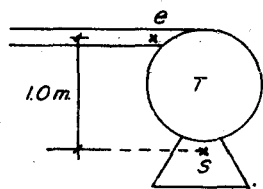
$$D_e = 30 \text{ cm}$$

$$D_s = 60 \text{ cm}$$

$$p_e = 1.5 \text{ kg/cm}^2$$

$$p_s = -0.35 \text{ kg/cm}^2$$

Si el desnivel entre las secciones de entrada y salida es de 1 m, determinar la potencia en HP que entrega el agua a la turbina.



$$A_e = 0.071 \text{ m}^2$$

$$A_s = 0.283 \text{ m}^2$$

$$V_e = \frac{Q}{A_e} = 3.11 \text{ m/sg}$$

$$V_s = 0.78 \text{ m/sg}$$

$$\frac{V_e^2}{2g} = 0.49 \text{ m}$$

$$\frac{V_s^2}{2g} = 0.03 \text{ m}$$

La ecuación de energía entre e y s resulta:

$$Z_e + \frac{p_e}{\gamma} + \frac{V_e^2}{2g} - H_{es} = Z_s + \frac{p_s}{\gamma} + \frac{V_s^2}{2g}$$

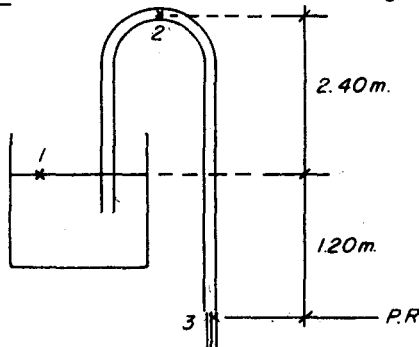
$$H_{es} = (Z_e - Z_s) + \left( \frac{p_e}{\gamma} - \frac{p_s}{\gamma} \right) + \left( \frac{V_e^2}{2g} - \frac{V_s^2}{2g} \right)$$

$$= 1.0 + 18.50 + 0.46$$

$$= 20 \text{ m}$$

$$HP_{es} = \frac{\gamma Q H}{76} = \frac{1,000 \times 0,220 \times 20}{76} = 58$$

**Ejemplo 43.-** Por el sifón de la figura fluye agua a razón de 100 lps.



a) calcular la pérdida de energía entre los puntos 1 y 3, si  $D = 20 \text{ cm}$ .

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = 0.031 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{Q}{A} = 3.18 \text{ m/sg}$$

$$\frac{V^2}{2g} = 0.52 \text{ m}$$

Ecuación de la energía entre 1 y 3:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} - \sum_1^3 hp = Z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g}$$

$$Z_1 + 0 + 0 - \sum_1^3 hp = 0 + 0 + \frac{V^2}{2g}$$

$$\sum_1^3 hp = Z_1 - \frac{V^2}{2g}$$

$$= 1.20 - 0.52$$

$$= 0.68 \frac{\text{kg-m}}{\text{kg}} \text{ ó m.}$$

b) Calcular la presión en el punto 2, suponiendo que entre 1 y 2 ocurren los  $\frac{2}{3}$  de la pérdida total de energía en el sifón.

Ecuación de la energía entre 1 y 2:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} - \sum_1^2 hp = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

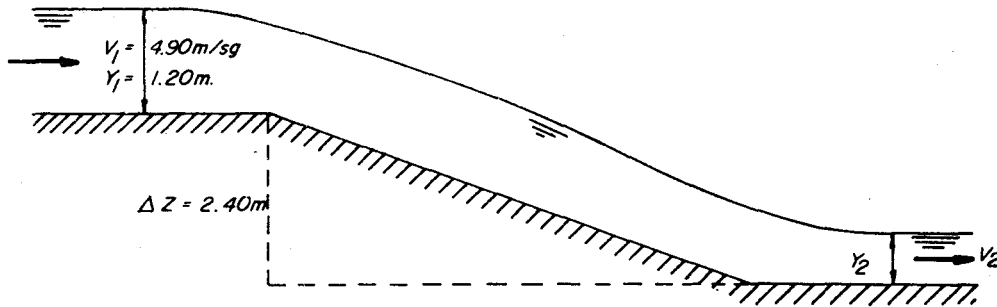
$$1.20 + 0 + 0 - \frac{2}{3} (0.68) = 3.60 + \frac{p_2}{\gamma} + 0.52$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = - 3.37 \text{ m de agua}$$

$$p_2 = - 0.337 \text{ kg/cm}^2 \dots \text{ existe vacío parcial.}$$

**Comentario.-** Para que el flujo quede establecido es necesario extraer previamente el aire de la tubería, de un modo similar a cuando se desea extraer gasolina del tanque de un vehículo. Por otro lado, la presión de vapor del agua a la temperatura ambiente es de  $0.024 \text{ kg/cm}^2$  en unidades absolutas ó  $-1.009 \text{ kg/cm}^2$  en unidades relativas, por lo que es de esperar un flujo normal sin formación de burbujas de aire ( $p_2 > p_v$ ).

**Ejemplo 44.-** Por un canal rectangular de 3 m de ancho fluye el agua con los datos de la figura.



Calcular el tirante en la sección 2, considerando despreciable la pérdida de energía.

$$Z_1 + Y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + Y_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$(Z_1 - Z_2) + Y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = Y_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$Z_1 - Z_2 = 2.40 \text{ m}$$

$$Y_1 = 1.20 \text{ m}$$

$$V_1 = 4.90 \text{ m/sg}$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{b Y_2} = \frac{Q}{3 Y_2}$$

$$Q = A_1 V_1 = b Y_1 \cdot V_1 = 17.64 \text{ m}^3/\text{sg}$$

después de reemplazar y ordenar se obtiene:

$$Y_2^3 - 4.83 Y_2^2 + 1.764 = 0$$

de las tres raíces de esta ecuación, dos son reales:

$$Y_2 = 0.65 \text{ m}$$

$$Y_2' = 4.75 \text{ m}$$

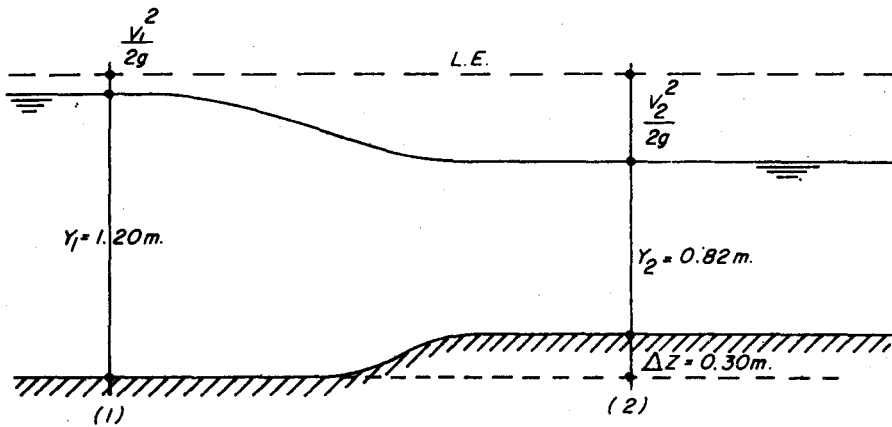
y puesto que el agua se acelera al pasar de la sección 1 a la 2, la respuesta es 0.65 m.

**Ejemplo 45.-** En un canal de sección rectangular, en un tramo en que el ancho se angosta de 1.80 m a 1.50 m, y el fondo se eleva 30 cm. se han hecho estas mediciones:  $Y_1 = 1.20 \text{ m}$ ,  $Y_2 = 0.82 \text{ m}$ .

Determinar el caudal de agua en el canal, asumiendo que la pérdida de energía que se produce es despreciable.

$$Z_1 + Y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + Y_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$Y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \Delta Z + Y_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$



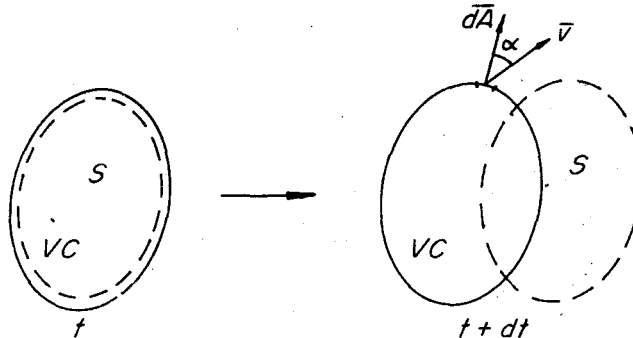
poniendo las velocidades en función de Q y resolviendo se obtiene:

$$Q = 1.874 \text{ m}^3/\text{sg.}$$

#### 4.4 Ecuación de la cantidad de movimiento

##### 4.4.1 Formulación general

Se sigue un procedimiento similar al utilizado para la ecuación de continuidad.



la cantidad de movimiento  $M$  en la dirección  $X$  en el instante  $t$  es la misma dentro del sistema que dentro del volumen de control,

$$M_{XtS} = M_{XtV}$$

asimismo, en el instante  $t + dt$  se verifica,

$$M_{X(t+dt)S} = M_{X(t+dt)V} + dM_{XS} - dM_{Xe}$$

restando miembro a miembro y dividiendo entre  $dt$ :

$$\frac{M_{X(t+dt)S} - M_{XtS}}{dt} = \frac{M_{X(t+dt)V} - M_{XtV}}{dt} + \frac{dM_{XS} - dM_{Xe}}{dt} \dots (28)$$

es decir, "para una dirección  $X$ , la rapidez de variación de la cantidad de movimiento en el sistema, es igual a la rapidez de variación de la cantidad de movimiento en el volumen de control más el flujo neto de cantidad de movimiento que sale del volumen de control".

El primer término se puede expresar:



$$dM_X \quad \delta \quad \frac{d(m v_X)}{dt}, \quad \delta \quad \Sigma F_X \quad \text{según la segunda ley de Newton.}$$

El segundo término se puede escribir:

$$\frac{\partial M_{XV}}{\partial t}, \quad \delta \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \bar{v}_X dV_0$$

El tercer término se puede expresar:

$$\int_{SC} (\rho v \cos \alpha dA) \bar{v}_X, \quad \delta \quad \int_{SC} \rho \bar{v}_X (\bar{v} \cdot d\bar{A})$$

reemplazando en (28):

$$\Sigma F_X = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \bar{v}_X dV_0 + \int_{SC} \rho \bar{v}_X (\bar{v} \cdot d\bar{A}) \dots \quad (29)$$

que es la expresión más amplia de la ecuación de la cantidad de movimiento para un volumen de control.

Para flujo permanente se anula el segundo término de la (29),

$$\Sigma F_X = \int_{SC} \rho \bar{v}_X (\bar{v} \cdot d\bar{A})$$

Por analogía:

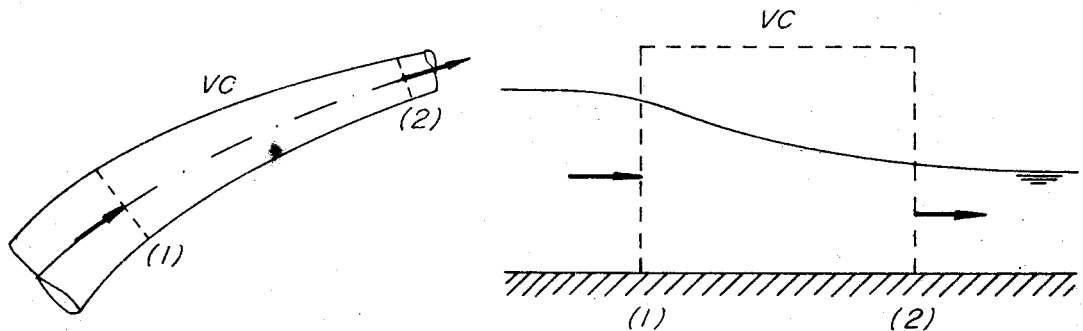
$$\Sigma F_Y = \int_{SC} \rho \bar{v}_Y (\bar{v} \cdot d\bar{A})$$

$$\Sigma F_Z = \int_{SC} \rho \bar{v}_Z (\bar{v} \cdot d\bar{A})$$

multiplicando cada componente por  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$ , respectivamente, y sumándolas:

$$\Sigma F = \int_{SC} \rho \bar{v} (\bar{v} \cdot d\bar{A}) \dots \dots \quad (30)$$

En tuberías y canales es posible elegir el volumen de control de modo que el flujo de cantidad de movimiento que sale y que entra sean normales a las secciones transversales.



Si además se considera que el líquido que circula es incompresible, que la velocidad media es representativa en cada sección, se tendrá, siempre para flujo permanente y en una dirección X,

$$\Sigma F_X = \rho V_{2X} \int_{A_2} V_2 dA - \rho V_{1X} \int_{A_1} V_1 dA$$

$$\Sigma F_X = \rho A_2 V_2 V_{2X} - \rho A_1 V_1 V_{1X}$$

$$\Sigma F_X = \rho Q V_{2X} - \rho Q V_{1X}$$

como en cada sección hay una distribución de velocidades es necesario corregir los flujos de cantidad de movimiento, de un modo similar a cómo se corrigen las alturas de velocidad. Se usa el coeficiente de Boussinesq  $\beta$ , cuyo valor, como el de  $\alpha$ , depende únicamente de la distribución de velocidades en la sección.

$$\Sigma F_X = \beta_2 \rho Q V_{2X} - \beta_1 \rho Q V_{1X} \quad \dots \quad (31)$$

o también:

$$\beta_1 \rho Q V_{1X} + \Sigma F_X = \beta_2 \rho Q V_{2X} \quad \dots \quad (32)$$

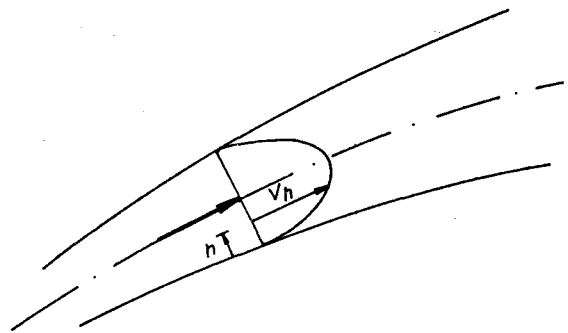
### Expresión del coeficiente de Boussinesq ( $\beta$ )

\* en una l.c.,

$$\begin{aligned} \text{cantidad de movimiento} &= m v_h \\ &= \rho V_o v_h \end{aligned}$$

cantidad de movimiento por unidad de tiempo, o flujo de cantidad de movimiento

$$\begin{aligned} &= \frac{\rho V_o v_h}{t} \\ &= \rho dQ v_h \\ &= \rho v_h^2 dA \end{aligned}$$



$$\text{flujo de cantidad de movimiento en toda la corriente} = \int_A \rho v_h^2 dA$$

\* en toda la corriente,

$$\text{flujo de cantidad de movimiento utilizando la velocidad media} = \rho V^2 A$$

$$\text{flujo real de cantidad de movimiento} = \beta \rho V^2 A$$

\* igualando las dos expresiones:

$$\begin{aligned} \beta \rho V^2 A &= \int_A \rho v_h^2 dA \\ \beta &= \frac{1}{A} \int \left(\frac{v_h}{V}\right)^2 dA \end{aligned}$$

Cuando en la práctica no se indica su valor, es porque se está suponiendo  $\beta = 1$ .

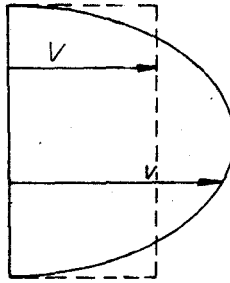
### Relación entre los coeficiente $\alpha$ y $\beta$

Se parte de una distribución genérica de velocidades, y cada velocidad se expresa en función de la velocidad media.

$$v = V + kV = (1 + k) V \quad - 1 < K \leq 1$$

$$v = V + kV = (1+k)V$$

$$-1 < k \leq 1$$



$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{V}\right)^3 dA = \frac{1}{A} \int_A (1+k)^3 dA = \frac{1}{A} \int_A (1+3k+3k^2+k^3) dA$$

$$= 1 + \frac{3}{A} \int_A k dA + \frac{3}{A} \int_A k^2 dA + \frac{1}{A} \int_A k^3 dA$$

pero  $A = \frac{Q}{V} = \frac{1}{V} \int_A v dA = \frac{1}{V} \int_A (1+k)V dA = \int_A dA + \int_A k dA$

$$= A + \int_A k dA$$

de donde se desprende que  $\int_A k dA = 0$

además para  $k < 1$  resulta  $k^3 \approx 0$

por lo que:

$$\alpha \approx 1 + \frac{3}{A} \int_A k^2 dA$$

De la misma manera:

$$\beta = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{V}\right)^2 dA = \frac{1}{A} \int_A (1+k)^2 dA = \frac{1}{A} \int_A (1+2k+k^2) dA$$

$$\beta = 1 + \frac{1}{A} \int_A k^2 dA$$

Combinando las expresiones de  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$(\beta - 1) 3 = \alpha - 1$$

$$\beta = 1 + \frac{\alpha - 1}{3}$$

La utilidad práctica de esta relación estriba en que sólo es necesario calcular uno de los coeficientes, generalmente  $\alpha$ , para que el otro quede determinado.

#### 4.4.2 Ejemplos de aplicación

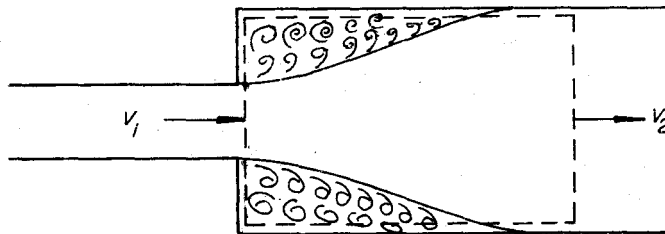
Para aplicar correctamente las ecuaciones de energía y de cantidad de movimiento es necesario precisar ciertos conceptos.

\* La ecuación de la cantidad de movimiento es vectorial y engloba fuerzas totales y condiciones externas, sin tomar en cuenta los cambios internos de energía; la ecuación de la energía es escalar y toma en cuenta los

cambios internos de energía y no las fuerzas totales y condiciones externas.

- \* Muchos son los problemas que por su naturaleza se resuelven con una sola de las dos ecuaciones. La elección de la ecuación depende que sean las fuerzas totales o la energía del flujo la que se necesita en la solución. En otros casos la naturaleza del problema es tal que resulta necesario usar las dos ecuaciones.
- \* A menos que se indique lo contrario, en cada uno de los problemas que vienen se supone que se trata de flujo permanente, incompresible, con distribución uniforme de velocidades ( $\alpha = \beta = 1$ ).

Ejemplo 46.- Determinar la pérdida de carga en un ensanche brusco (fórmula de Borda).



hipótesis: flujo permanente, incompresible,  
fuerzas de rozamiento despreciables,  
distribución uniforme de velocidades,  
la presión  $p_1$  actúa en la sección ensanchada.

ecuación de la cantidad de movimiento:

$$p_1 A_2 - p_2 A_2 = \frac{\gamma}{g} Q (V_2 - V_1) \quad \dots (m)$$

ecuación de la energía:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} - hp = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad \dots (n)$$

de (m):

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} &= \frac{1}{g} \frac{Q}{A_2} (V_2 - V_1) \\ &= \frac{V_2}{g} (V_2 - V_1) \end{aligned}$$

de (n):

$$hp = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g}$$

reemplazando:

$$\begin{aligned} hp &= \frac{V_2}{g} (V_2 - V_1) + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g} \\ &= \frac{2 V_2^2 - 2 V_1 V_2 + V_1^2 - V_2^2}{2g} \\ &= \frac{V_1^2 - 2 V_1 V_2 + V_2^2}{2g} \end{aligned}$$

$$= \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} \quad \dots \quad \text{f\u00f3rmula de Borda}$$

ecuaci\u00f3n de continuidad:

$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

$$V_1 = \frac{A_2}{A_1} V_2$$

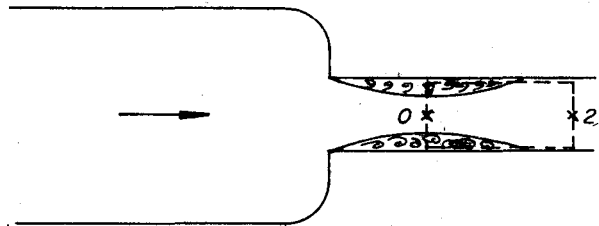
reemplazando:  $h_p = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2 \frac{V_2^2}{2g}$

o bien,  $h_p = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{V_1^2}{2g}$

La verificaci\u00f3n experimental realizada indica que esta ecuaci\u00f3n es aproximadamente v\u00e1lida tanto para tuber\u00edas como para canales. Se acostumbra expresar:

$$h_p = K_{eb} \frac{V_1^2}{2g}$$

Ejemplo 47.- Determinar la p\u00e9rdida de carga en una contracci\u00f3n brusca.



hip\u00f3tesis: las mismas que en el ensanche brusco.

ecuaci\u00f3n de la cantidad de movimiento:

$$p_0 A_2 - p_2 A_2 = \frac{\gamma}{g} Q (V_2 - V_0) \quad \dots \quad (m)$$

ecuaci\u00f3n de la energ\u00eda:

$$\frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} - h_p = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad \dots \quad (n)$$

de (m):  $\frac{p_0}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = \frac{1}{g} \frac{Q}{A_2} (V_2 - V_0)$

$$= \frac{V_2}{g} (V_2 - V_0)$$

de (n):  $h_p = \frac{p_0}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g}$

reemplazando:  $h_p = \frac{V_2}{g} (V_2 - V_0) + \frac{V_0^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2V_2^2 - 2V_0V_2 + V_0^2 - V_2^2}{2g} \\
 &= \frac{V_0^2 - 2V_0V_2 + V_2^2}{2g} \\
 &= \frac{(V_0 - V_2)^2}{2g}
 \end{aligned}$$

ecuación de continuidad:

$$A_0 V_0 = A_2 V_2$$

$$C_c A_2 V_0 = A_2 V_2$$

$$C_c V_0 = V_2$$

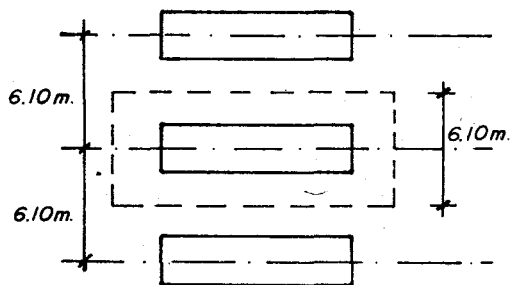
reemplazando:  $h_p = \left(1 - \frac{1}{C_c}\right)^2 \frac{V_0^2}{2g}$

$$h_p = \left(\frac{1}{C_c} - 1\right)^2 \frac{V_2^2}{2g}$$

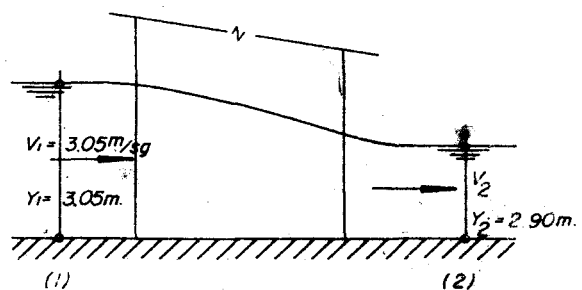
Se acostumbra expresar:

$$h_p = K_{cb} \frac{V_2^2}{2g}$$

**Ejemplo 48.-** Los pilares de un puente están separados una distancia entre ejes de 6.10 m. Aguas arriba el tirante es 3.05 m y la velocidad media del agua 3.05 m/sg. Aguas abajo el tirante es 2.90 m. Despreciando la pendiente del río y las pérdidas por fricción, encontrar el empuje del agua sobre cada pilar.



Planta



Perfil

Se elige un volumen de control, como el indicado, de 6.10 m de ancho y limitado por las secciones (1) y (2).

$$Q = A_1 V_1 = b Y_1 \cdot V_1 = 56.745 \text{ m}^3/\text{sg}$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{b Y_2} = 3.208 \text{ m/sg}$$

Suponiendo distribución hidrostática de presiones en las secciones 1 y 2, la ecuación de la cantidad de movimiento escrita en la dirección de la corriente es:

$$F_1 - F - F_2 = \frac{\gamma}{g} Q (V_2 - V_1)$$

asumiendo que sobre el agua actúa la fuerza  $F$  hacia la izquierda.

Despejando,  $F = F_1 - F_2 - \frac{\gamma}{g} Q (V_2 - V_1)$

reemplazando  $F_1 = \frac{1}{2} \gamma b Y_1^2 = 28,372.6 \text{ kg}$

$$F_2 = \frac{1}{2} \gamma b Y_2^2 = 25,650.5 \text{ kg}$$

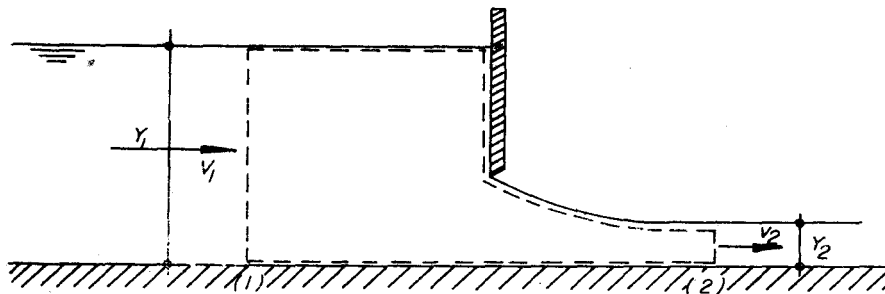
y los valores conocidos de  $Q$ ,  $V_1$  y  $V_2$

se obtiene:  $F = 1,807 \text{ kg}$ .

El signo positivo indica que el sentido asumido es el correcto. Naturalmente el agua ejerce una fuerza igual y contraria sobre el pilar, es decir  $F = 1,807 \text{ kg}$  hacia la derecha.

**Ejemplo 49.-** En un canal rectangular de fondo horizontal y ancho 3 m se halla instalada una compuerta deslizante. Aguas arriba el tirante de agua es 2.40 m y aguas abajo 0.60 m. Despreciando las pérdidas, calcular:

- el gasto en la compuerta
- el empuje sobre la compuerta



- ecuación de la energía:

$$Y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = Y_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

ecuación de continuidad:  $b Y_1 V_1 = b Y_2 V_2$

resolviendo el sistema para  $V_1$ :

$$V_1 = 1.534 \text{ m/sg}$$

es decir,  $Q = b Y_1 V_1 = 11.04 \text{ m}^3/\text{sg}$

- eligiendo un volumen de control como el indicado y suponiendo distribu

ción hidrostática de presiones en las secciones (1) y (2), la ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección del flujo es:

$$F_1 - F - F_2 = \frac{\gamma}{g} Q (V_2 - V_1)$$

asumiendo que sobre el agua actúa la fuerza F hacia la izquierda.

Despejando:  $F = F_1 - F_2 - \frac{\gamma}{g} Q (V_2 - V_1)$

reemplazando  $F_1 = \frac{1}{2} \gamma b Y_1^2 = 8,640 \text{ kg}$

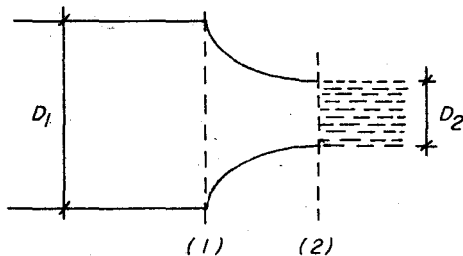
$$F_2 = \frac{1}{2} \gamma b Y_2^2 = 540 \text{ kg}$$

y los valores conocidos de Q, V<sub>1</sub> y V<sub>2</sub>

se obtiene:  $F = 2,919 \text{ kg}$

por lo que la respuesta es F = 2,919 kg. hacia la derecha.

**Ejemplo 50.-** ¿Qué fuerza ejerce la boquilla sobre la tubería?



Datos:

g.e. = 0.85

p<sub>1</sub> = 6 kg/cm<sup>2</sup>

D<sub>1</sub> = 75 mm

D<sub>2</sub> = 25 mm

despreciar las pérdidas.

Ecuación de la energía entre (1) y (2):

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = 0 + \frac{V_2^2}{2g}$$

ecuación de continuidad:  $A_1 V_1 = A_2 V_2$

reemplazando valores y resolviendo para V<sub>2</sub>:

$$V_2 = 37.4 \text{ m/sg}$$

$$Q = A_2 V_2 = 0.0184 \text{ m}^3/\text{sg}$$

Suponiendo que sobre el líquido actúa la fuerza F hacia la izquierda, la ecuación de la cantidad de movimiento es:

$$\rho Q V_1 + p_1 A_1 - F - p_2 A_2 = \rho Q V_2$$

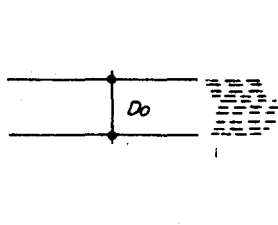
reemplazando valores (p<sub>2</sub> = 0) se obtiene:



$$F = 212 \text{ kg}$$

es decir, sobre la boquilla actúa  $F = 212 \text{ kg}$  hacia la derecha y ésta es la fuerza solicitada.

**Ejemplo 51.-** Un chorro horizontal de agua, de diámetro  $D_0 = 10 \text{ cm}$  y velocidad  $V_0 = 20 \text{ m/s}$  incide sobre una placa normal al chorro; ¿qué fuerza se requiere para mantener la placa en equilibrio?



Suponiendo que sobre el líquido actúa  $F$  hacia la izquierda, la ecuación de la cantidad de movimiento es:

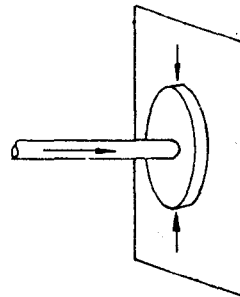
$$\frac{\gamma}{g} Q V_0 - F = 0, \text{ porque no hay flujo de cantidad de movimiento a través de la placa.}$$

$$F = \frac{\gamma}{g} Q V_0 = \frac{\gamma}{g} A_0 V_0 V_0 = \frac{\gamma}{g} A_0 V_0^2$$

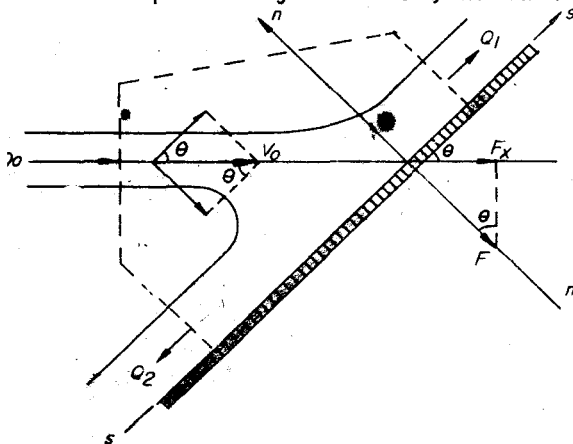
$$F = 320 \text{ kg}$$

sobre la placa actúa  $F = 320 \text{ kg}$  hacia la derecha de modo que la respuesta es  $320 \text{ kg}$  hacia la izquierda.

NOTA: Sobre el líquido sólo actúa la fuerza horizontal  $F$  porque en cualquier otra dirección normal las fuerzas se compensan.



**Ejemplo 52.-** El líquido que sale de una larga ranura incide sobre una placa pulida, inclinada un ángulo  $\theta$  con respecto a la dirección del chorro. Despreciando la pérdida de energía debida al impacto y considerando que no hay fricción, hallar:



a) la fuerza del líquido sobre la placa

b) la división del gasto incidente  $Q_0$

Ecuación de la energía entre la sección 0 y la sección 1:

$$Z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} = Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g}$$

pero:  $p_0 = p_1$

$$Z_1 - Z_0 = 0$$

luego,  $V_1 = V_0$

de la misma manera,  $V_2 = V_0$

a) ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección nn, suponiendo que sobre el líquido actúa F en el sentido positivo:

$$-\frac{\gamma}{g} Q_0 V_0 \sin \theta + F = 0$$

$$F = \frac{\gamma}{g} Q_0 V_0 \sin \theta$$

luego sobre la placa actúa esta fuerza en el sentido negativo de nn, y su valor en la dirección del chorro resulta:

$$F_X = F \sin \theta = \frac{\gamma}{g} Q_0 V_0 \sin^2 \theta = \frac{\gamma}{g} A_0 V_0^2 \sin^2 \theta$$

b) ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección ss, habida cuenta que sobre el líquido no actúa ninguna fuerza:

$$\rho Q_0 V_0 \cos \theta = \rho Q_1 V_1 - \rho Q_2 V_2$$

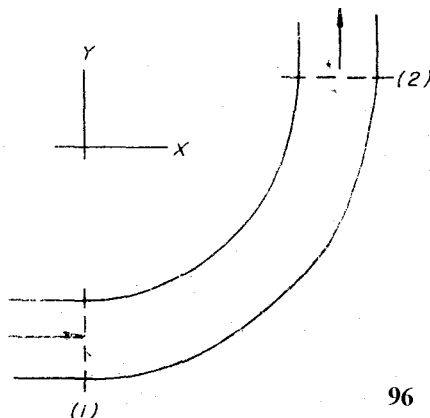
$$Q_0 \cos \theta = Q_1 - Q_2$$

por continuidad:  $Q_0 = Q_1 + Q_2$

sumando miembro a miembro:  $Q_1 = \frac{Q_0}{2} (1 + \cos \theta)$

restando miembro a miembro:  $Q_2 = \frac{Q_0}{2} (1 - \cos \theta)$

Ejemplo 53.- Hallar la fuerza resultante ejercida por el líquido sobre la curva horizontal de la tubería.



Datos:

$$D = 0.60 \text{ m}$$

$$Q = 0.9 \text{ m}^3/\text{sg}$$

$$\text{g.e.} = 0.85$$

pérdida = 1,10 m de líquido

$$p_1 = 30,000 \text{ kg/m}^2$$

Bernoulli entre 1 y 2:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} - hp_{1-2} = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} - hp_{1-2} = \frac{p_2}{\gamma}$$

resolviendo:  $p_2 = 29,000 \text{ kg/m}^2$

Suponiendo que sobre el líquido actúa una fuerza  $F_X$  de sentido negativo, la ecuación de la c.m. es:

$$\frac{\gamma}{g} Q V_1 + p_1 A_1 - F_X = 0$$

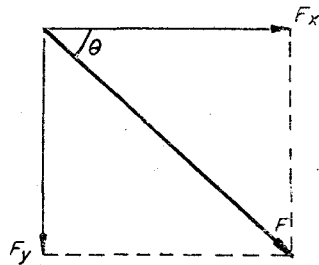
resolviendo,  $F_X = 8,730 \text{ kg}$  (sentido asumido correcto)

y una fuerza  $F_Y$  en el sentido positivo, la ecuación de las c.m. es:

$$F_Y - p_2 A_2 = \frac{\gamma}{g} Q V_2$$

resolviendo,  $F_Y = 8,270 \text{ kg}$  (sentido asumido correcto)

en consecuencia, sobre el codo actúan:



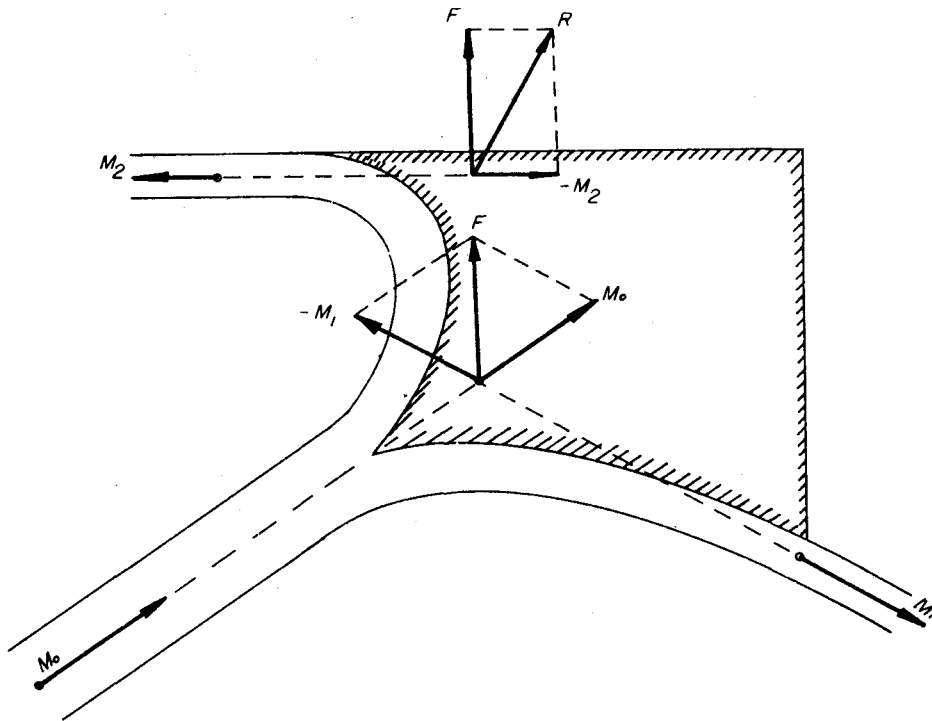
$$F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2} = 12,025 \text{ kg}$$

$$\theta = \text{arc tg } \frac{F_Y}{F_X} = 43.4^\circ$$

Solución vectorial.- Tratando los términos de flujo de cantidad de movimiento como vectores, y manteniendo cada vector en su línea de acción, se puede determinar el vector fuerza resultante en módulo, dirección y sentido y también su línea de acción.

$$\rho Q_0 V_0 + \Sigma F = \rho Q_1 V_1 + \rho Q_2 V_2$$

$$\rho Q_0 V_0 + p_0 A_0 + p_1 A_1 + p_2 A_2 + F = \rho Q_1 V_1 + \rho Q_2 V_2$$



$$F = (\rho Q_1 V_1 - p_1 A_1) + (\rho Q_2 V_2 - p_2 A_2) - (\rho Q_0 V_0 + p_0 A_0)$$

$$F = M_1 + M_2 - M_0$$

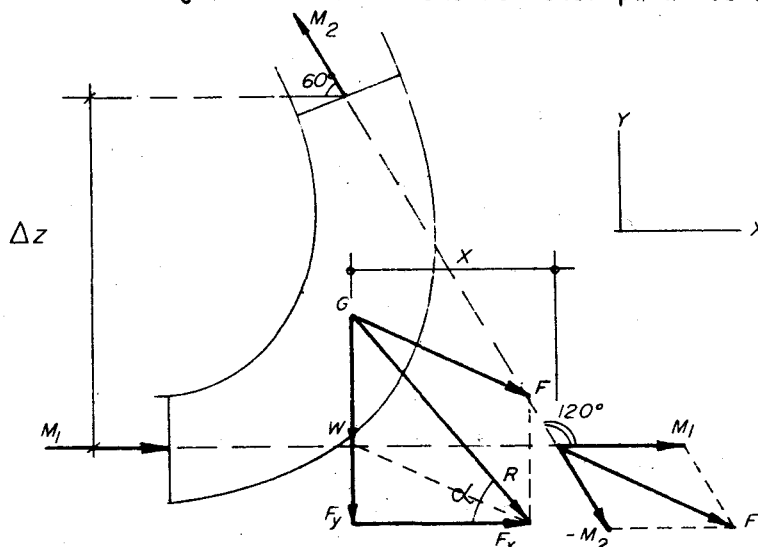
es decir, la fuerza que actúa sobre el líquido es la suma vectorial de  $M_1$ ,  $M_2$  y  $-M_0$ .

La fuerza que actúa sobre el bloque es una fuerza igual y contraria a ésta:

$$R = M_0 - M_1 - M_2$$

es decir, que para hallar vectorialmente la fuerza que el líquido ejerce sobre el bloque, los flujos entrantes se suman y los flujos salientes se restan.

**Ejemplo 54.-** Hallar, analítica y vectorialmente, la fuerza que el agua ejerce sobre el codo reductor para los siguientes datos:



codo reductor en un plano vertical

$W = 9,000 \text{ kg}$  (peso del agua)

$\Delta Z = 3 \text{ m}$

$X = 1.80 \text{ m}$

$$h_p = 0.15 \frac{V_2^2}{2g} \text{ m}$$

$Q = 8.5 \text{ m}^3/\text{sg}$

$D_1 = 1.80 \text{ m}$

$p_1 = 28,000 \text{ kg/m}^2$

$D_2 = 1.20 \text{ m}$

Solución analítica.- Asumiendo sobre el líquido una fuerza  $F_X$  negativa y una fuerza  $F_Y$  positiva:

$$\rho Q V_1 + p_1 A_1 + p_2 A_2 \cos 60^\circ - F_X = -\rho Q V_2 \cos 60^\circ$$

resolviendo  $F_X = 90,000 \text{ kg}$

$$0 + 0 - p_2 A_2 \sin 60^\circ - W + F_Y = \rho Q V_2 \sin 60^\circ$$

resolviendo  $F_Y = 37,200 \text{ kg}$

Sobre el codo actúan estas mismas fuerzas con sentido contrario. La resultante pasa por el c. de gravedad y vale

$$R = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2} = 97,385 \text{ kg}$$

$$\alpha = \text{arc tg } \frac{F_Y}{F_X} = 22.5^\circ$$

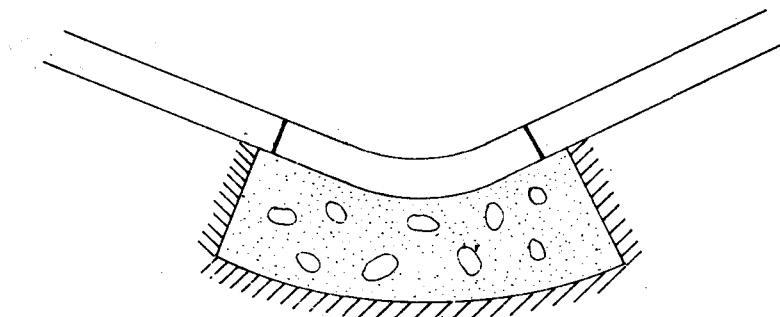
Solución vectorial.

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \rho Q V_1 + p_1 A_1 \\ M_2 &= \rho Q V_2 - p_2 A_2 \end{aligned} \right\} \text{ la suma vectorial da } F$$

$R = F + W$ , pasando por el c. de gravedad.

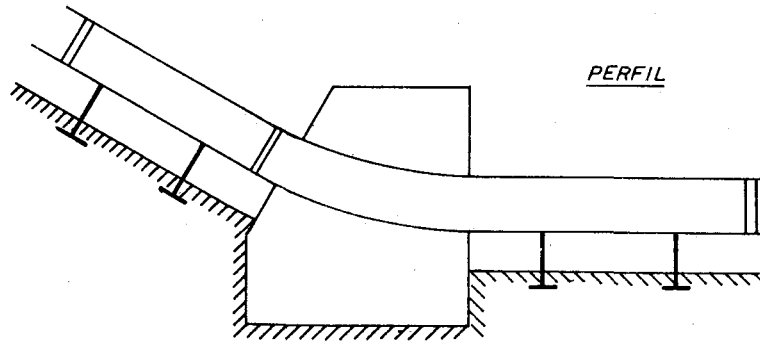
Comentario

1. De lo estudiado se desprende que un cambio en la dirección horizontal de la tubería hace que aparezca una fuerza dinámica en el macizo de apoyo. Esta fuerza es necesario determinarla para poder hacer el diseño del macizo.



planta

2. En las tuberías importantes, de gran diámetro y extensa longitud, es usual el empleo de juntas de expansión, a fin de evitar las tensiones que aparecen en la dirección axial por efecto de los cambios de temperatura y también por efecto del empuje dinámico del agua en los cambios de dirección vertical. Las juntas permiten el deslizamiento libre de los tubos en la dirección axial, produciéndose fuerzas dinámicas en los apoyos y los anclajes que deben ser consideradas en el diseño de estos elementos.



3. En general se instalan apoyos a lo largo de la tubería y macizos de anclaje en los cambios de dirección vertical.

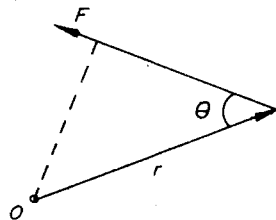
#### 4.5 Ecuación del momento de la cantidad de movimiento

##### 4.5.1 Formulación general

La ecuación de la cantidad de movimiento es:

$$\Sigma F = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \bar{v} dV_0 + \int_{SC} \rho \bar{v} (\bar{v} \cdot dA) \quad \dots (29')$$

Recordemos que el momento de una fuerza  $F$  con respecto a un punto  $O$  es:



$$M_O F = \bar{r} \times F$$

un vector perpendicular al plano definido por los vectores  $F$  y  $r$ ; - de módulo  $F r \sin \theta$ ; de sentido - normal al plano, saliendo.

hallemos  $\bar{r} \times F$  para la (29'):

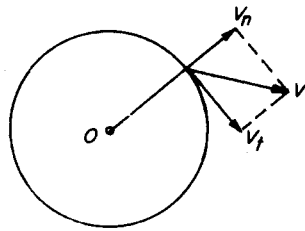
$$\bar{r} \times F = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \bar{r} \times \bar{v} dV_0 + \int_{VC} \rho \bar{r} \times (\bar{v} \bar{v} \cdot dA) \quad \dots (33)$$

es decir, "el par ejercido por todas las fuerzas que actúan sobre el fluido dentro del VC, es igual a la suma de dos términos:

- \* la variación con el tiempo del momento de la cantidad de movimiento dentro del VC
- \* el flujo saliente neto del momento de la cantidad de movimiento a partir del VC",

Para flujo permanente: 
$$\bar{r} \times F = \int_{SC} \rho \bar{r} \times (\bar{v} \bar{v} \cdot dA) \quad \dots (34)$$

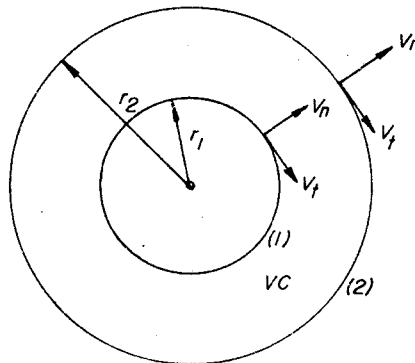
Para la aplicación de esta fórmula en el plano (sólo se emplean módulos) recuérdese:



$$\text{sen } 90^\circ = 1$$

$$\Sigma F_t \cdot r = \int_{SC} \rho r v_t \cdot v_n \, dA$$

Para un flujo permanente, incompresible y un volumen de control anular, como es el caso de una bomba radial:



$$\Sigma F_t r = \Sigma T_z = \int_{A_2} \rho r_2 v_{t2} v_{n2} \, dA_2 - \int_{A_1} \rho r_1 v_{t1} v_{n1} \, dA_1$$

$$\Sigma T_z = \rho r_2 v_{t2} Q - \rho r_1 v_{t1} Q \quad \dots \quad (35)$$

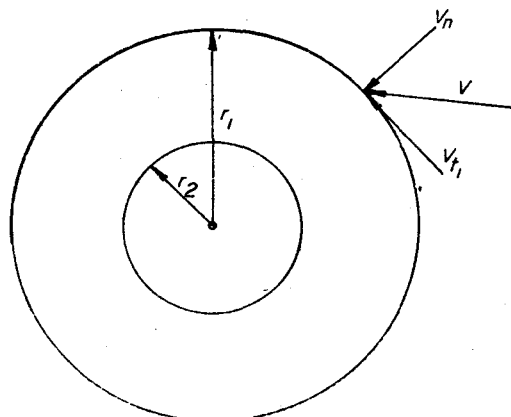
$$\text{o} \quad \rho r_1 v_{t1} Q + \Sigma T_z = \rho r_2 v_{t2} Q \quad \dots \quad (36)$$

es decir: "el flujo de momento de cantidad de movimiento que entra más la suma de los pares que actúan sobre el fluido, es igual al flujo del momento de cantidad de movimiento que sale".

#### 4.5.2 Ejemplos de aplicación

Ejemplo 55. - Se va a diseñar una turbina hidráulica de modo que para  $Q = 10.8 \, \text{m}^3/\text{sg}$  se ejerza un par de 1500 kg-m sobre el rodete que gira a 200 RPM y absorbe todo el momento de la cantidad de movimiento. Si en la periferia exterior del rodete el radio es 0.90 m, ¿cuál debe ser la componente tangencial de la velocidad en este lugar?

en las turbinas el agua entra por la periferia y sale por el centro.



Luego, si  $\Sigma T_z$  representa lo que el agua recibe:

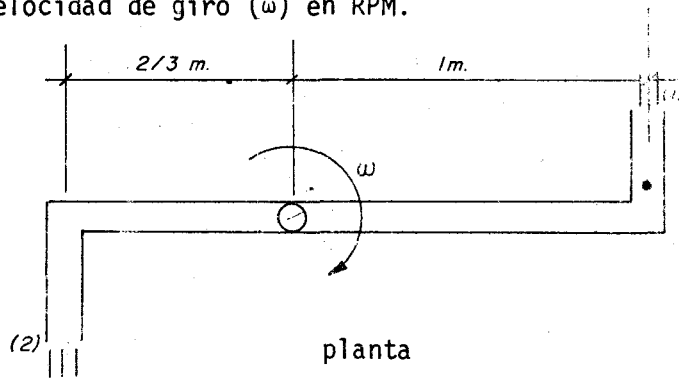
$$\rho r_1 v_{t1} Q + \Sigma T_z = 0$$

pero en este caso el agua entrega  $\Sigma T_z$ , por lo que:

$$\rho r_1 v_{t1} Q - \Sigma T_z = 0$$

de donde: 
$$v_{t1} = \frac{\Sigma T_z}{\rho r_1 Q} = 1.51 \text{ m/sg}$$

**Ejemplo 56.-** El aspersor de la figura descarga  $0.01 \text{ m}^3/\text{sg}$  por cada boquilla. Si el área de salida de cada boquilla es  $0.001 \text{ m}^2$ , hallar la velocidad de giro ( $\omega$ ) en RPM.



El agua asciende por  $O$ , normalmente al papel, por lo que no recibe ni da momento de cantidad de movimiento.

$$\rho r_0 v_{t0} Q_0 + \Sigma T_z = \rho r_1 v_{t1} Q_1 + \rho r_2 v_{t2} Q_2 = 0$$

$$r_1 v_{t1} + r_2 v_{t2} = 0$$

$v_{t1}$ ,  $v_{t2}$  son velocidades absolutas con respecto a  $O$ , por lo que:

$$v_{t1} = v_1 - \omega r_1 = \frac{Q}{A} - \omega r_1 = 10 - \omega$$

$$v_{t2} = v_2 - \omega r_2 = \frac{Q}{A} - \omega r_2 = 10 - \frac{2}{3} \omega$$

reemplazando: 
$$1 (10 - \omega) + \frac{2}{3} (10 - \frac{2}{3} \omega) = 0$$

y resolviendo: 
$$\omega = 11.5 \text{ rad/sg}$$

$$\omega = 110 \text{ RPM}$$



## CAPITULO 5: FLUJO BIDIMENSIONAL DEL LIQUIDO IDEAL

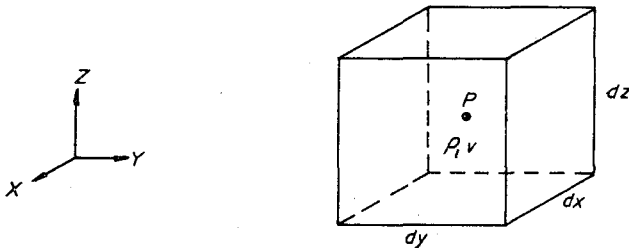
### 5.1 Introducción

La mayoría de problemas sobre conducción de agua en tuberías y canales se resuelven con la hipótesis de flujo unidimensional. Pero también hay un grupo importante de problemas en los que se hace imprescindible considerar el flujo en dos dimensiones (flujo plano), asumiendo que la descripción del flujo en planos paralelos es idéntica a la estudiada.

Parecería que solamente el líquido ideal (sin viscosidad y por ello irrotacional) puede ser objeto de estudio en lo que se refiere a movimiento plano, pero no es así. Como regla general, se puede producir un flujo casi irrotacional en líquidos reales si el efecto de la viscosidad en el movimiento es de poca importancia.

Un caso singular lo constituye el movimiento del agua en un medio poroso, como es el subsuelo o una presa de tierra, pues dicho movimiento se produce con predominio de la viscosidad (flujo laminar) pero resulta casi irrotacional. Esto hace que el estudio del flujo plano alcance también a este importante caso de flujo.

✓ Ecuación de continuidad.- En coordenadas cartesianas se considera el volumen de control elemental  $dX, dY, dZ$ , con centro en el punto  $P (X, Y, Z)$ .



En el punto  $P$  ocurren los valores  $\rho$  y  $v$  como funciones de punto y del tiempo.

Se puede aplicar la ecuación (17) :

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} dX dY dZ = \int_{SC} \rho \bar{v} \cdot d\bar{A}$$

el segundo miembro, en la dirección  $X$ :

$$\begin{aligned} &= [\rho v_X + \frac{\partial}{\partial X} (\rho v_X) \frac{dX}{2}] dY dZ - [\rho v_X - \frac{\partial}{\partial X} (\rho v_X) \frac{dX}{2}] dY dZ \\ &= \frac{\partial}{\partial X} (\rho v_X) dX dY dZ \end{aligned}$$

en las otras dos direcciones se obtienen expresiones análogas, por lo que el caudal neto de masa que sale es:

$$= \left[ \frac{\partial}{\partial X} (\rho v_X) + \frac{\partial}{\partial Y} (\rho v_Y) + \frac{\partial}{\partial Z} (\rho v_Z) \right] dX dY dZ$$

Reemplazando y simplificando:

$$\frac{\partial}{\partial X} (\rho v_X) + \frac{\partial}{\partial Y} (\rho v_Y) + \frac{\partial}{\partial Z} (\rho v_Z) = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\text{div. } \rho \bar{v} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \dots (37)$$

que es la expresión de la ecuación de continuidad para flujo compresible e incompresible, permanente y no permanente.

Para fluidos incompresibles, como es el caso del líquido ideal:

$$\text{div. } \bar{v} = 0 \dots \dots \dots (38)$$

### 5.2 La función de corriente

Como cuestión previa recordemos la definición del gradiente en el plano y sus propiedades.

Dada una función escalar en el plano X, Y, tal como  $\alpha(X, Y)$ , se llama gradiente de la misma el vector cuyas componentes son las derivadas parciales de  $\alpha$ :

$$\text{grad } \alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial X} \bar{i} + \frac{\partial \alpha}{\partial Y} \bar{j}$$

Sus propiedades son:

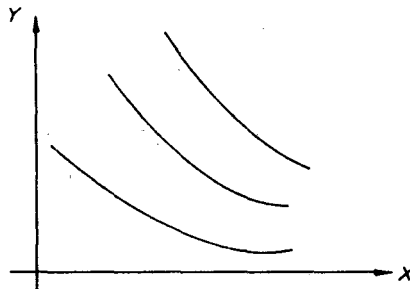
- 1) el grad.  $\alpha$  es normal a las líneas  $\alpha = \text{constante}$
- 2) el módulo de grad.  $\alpha$  es la derivada de  $\alpha$  según la normal a las líneas  $\alpha = \text{constante}$ .

$$|\text{grad } \alpha| = \frac{\partial \alpha}{\partial n}$$

- 3) el sentido de grad.  $\alpha$  es el que corresponde a las  $\alpha$  crecientes.

Se puede suponer un líquido incompresible en movimiento bidimensional, permanente, que se desarrolla en planos perpendiculares al eje Z, de modo que su estudio puede hacerse en el plano XY;

Se puede considerar luego una familia de l.c., las que no cambiarán con el tiempo por tratarse de un movimiento permanente.



La ecuación de estas l.c. según (11) es:

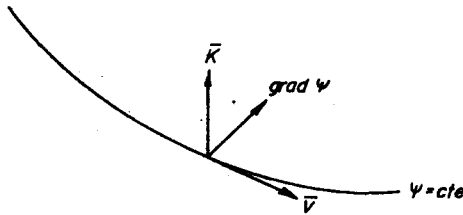
$$\frac{dX}{v_X} = \frac{dY}{v_Y}$$

y se puede considerar que la familia de l.c. viene definida por una cierta

función escalar  $\psi (X, Y)$  que se denomina función de corriente, con un valor constante diferente para cada l.c.

$$\psi (X, Y) = \text{cte.}$$

En el punto P, sobre una l.c., los tres vectores indicados en la figura son normales entre sí, de modo que se cumple:



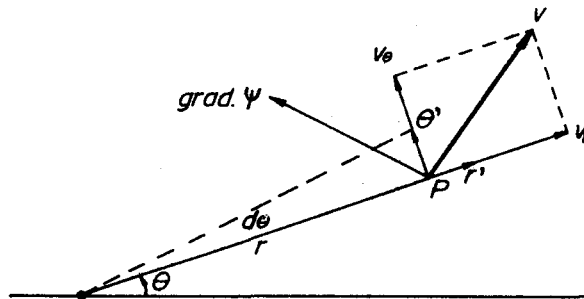
$$\bar{v} = \text{grad } \psi \times \bar{k} \dots (39)$$

siendo las componentes de  $\bar{v}$  :

$$v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial \psi}{\partial X} & \frac{\partial \psi}{\partial Y} & \frac{\partial \psi}{\partial Z} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \bar{i} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \bar{j}$$

$$\left. \begin{aligned} v_X &= \frac{\partial \psi}{\partial Y} \\ v_Y &= -\frac{\partial \psi}{\partial X} \end{aligned} \right\} \dots (40)$$

y en coordenadas polares:



$r', \theta'$  ... vectores unitarios.

$$v = \begin{vmatrix} \bar{r}' & \bar{\theta}' & \bar{k} \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} & \frac{\partial \psi}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \psi}{\partial Z} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta_n} \bar{r}' - \frac{\partial \psi}{\partial r} \bar{\theta}'$$

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \psi}{\partial \theta_n} = \frac{d\psi}{d\theta_n} = \frac{d\psi}{r d\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned} \right\} \dots (41)$$

Por otra parte, si  $n$  es la dirección normal a la l.c. genérica  $\psi$ ,

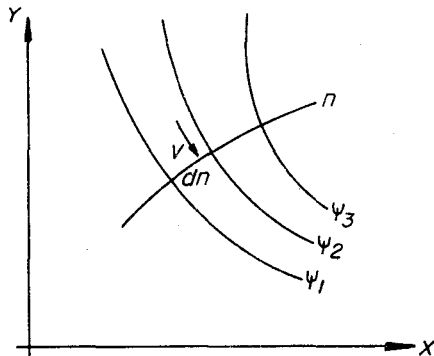
$$|\text{grad } \psi| = \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

y por la (39):  $|\text{grad } \psi| = v$

de modo que:  $\frac{\partial \psi}{\partial n} = v \dots \dots (42)$

$d\psi = v \, dn \dots$  gasto que pasa entre dos l.c.  $\psi$  y  $\psi + d\psi$ , por unidad de ancho perpendicular al papel.

es decir:



$$q = [\psi]_1^2 = \psi_2 - \psi_1 \dots (43)$$

### 5.3 La función potencial

El estudio del flujo plano es posible sólo si se cumple que el campo de velocidades es un campo potencial, es decir un campo en el que existe una función escalar  $\phi$ , llamada función potencia, tal que:

$$\bar{v} = - \text{grad } \phi$$

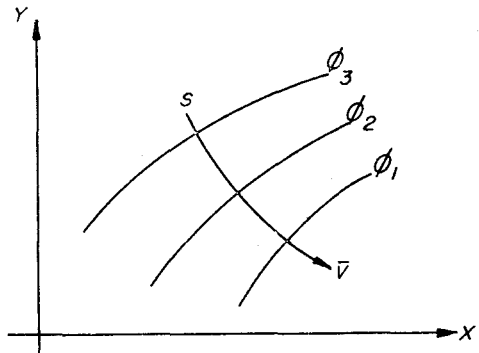
Se puede mostrar con facilidad que  $\text{rot } \bar{v} = 0$ , es decir que si el campo de velocidades es potencial es irrotacional, lo cual justifica que se pueda decir indistintamente campo potencial o campo irrotacional.

De la definición de función potencial se desprende que las componentes de  $\bar{v}$  son:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= - \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v_y &= - \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots (44)$$

y en coordenadas polares:

$$\left. \begin{aligned} v_r &= - \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ v_\theta &= - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \dots (45)$$



y también que se cumple:  $\frac{\partial \phi}{\partial s} = -v \dots (46)$

siendo  $s$  la dirección normal a las líneas  $\phi = \text{cte.}$ , llamadas líneas equipotenciales.

Puesto que las direcciones  $s$  y  $n$  son normales entre sí, las líneas de corriente y las líneas equipotenciales son ortogonales entre sí.

#### 5.4 La red de corriente

Agrupemos las ecuaciones (42) y (46) prescindiendo del signo.

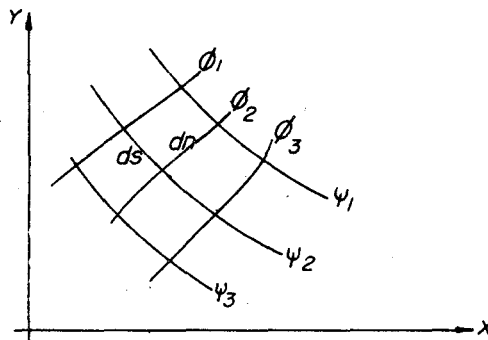
$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = v$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = v$$

De aquí: 
$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

o bien: 
$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{d\psi}{dn}$$

Como se puede ver, si se escogen incrementos iguales para  $\phi$  y  $\psi$  resulta  $ds = dn$ . Es decir, que las l.c. y las l.e. además de ser ortogonales formarían una malla de cuadrados. A esta malla se denomina red de flujo o red de corriente.



En última instancia, el estudio del flujo plano en un cierto contorno se refiere a la obtención de la red de corriente para ese contorno, y a partir de la RC, que es única en cada contorno, deducir la distribución de velocidades o la distribución de presiones en las zonas de interés.

El líquido ideal es incompresible por lo que satisface la ecuación de continuidad:

$$\text{div } \bar{v} = 0$$

$$\text{div} (-\text{grad } \phi) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial Y}\right) = 0$$

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} = 0$$

es decir,  $\phi$  cumple la ecuación de Laplace, indicando con ello que es una función armónica.

El líquido ideal es irrotacional, por lo que la componente según Z del vector  $\text{rot } \bar{v}$  es nula:

$$\frac{\partial v_Y}{\partial X} - \frac{\partial v_X}{\partial Y} = 0 \quad \dots\dots \text{(apartado 3.3)}$$

reemplazando según (40):

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = 0$$

es decir,  $\psi$  también cumple la ecuación de Laplace, indicando con ello que es una función armónica.

De los desarrollos anteriores se desprende que las funciones  $\phi$  y  $\psi$  no son independientes sino que están relacionados entre sí a través de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, en coordenadas cartesianas:

$$\left. \begin{aligned} v_X &= -\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \\ v_Y &= -\frac{\partial \phi}{\partial Y} = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

en coordenadas polares:

$$\left. \begin{aligned} v_r &= -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47')$$

Otras propiedades de la función potencial ( $\phi$ ) son:

- a) Si  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son dos funciones potenciales que satisfacen la ecuación de Laplace, las funciones  $(\phi_1 + \phi_2)$  ó  $(\phi_1 - \phi_2)$  también cumplen con la ecuación de Laplace,
- b) Una función potencial que satisface la ecuación de Laplace en un flujo determinado en un cierto contorno, representa la solución única del problema de dicho flujo.
- c) Considerando una curva AB cualquiera dentro de un flujo, la integral de línea a lo largo de esa curva desde A hasta B es:

$$\int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_A^B v_X dX + v_Y dY$$

donde  $ds$  es el vector diferencial de arco sobre la curva AB.

En el caso presente:

$$\int_A^B \left( -\frac{\partial \phi}{\partial X} dX - \frac{\partial \phi}{\partial Y} dY \right) = - \int_A^B d\phi = \int_B^A d\phi = \phi_A - \phi_B$$

de modo que si la curva es cerrada, la integral de línea que ahora recibe el nombre de circulación ( $\Gamma$ ), vale:

$$\Gamma = \int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_B^A d\phi = 0$$

es decir, en el flujo plano del líquido ideal la circulación vale cero.

Ecuaciones del movimiento.- Cuando se estudia la ecuación del movimiento a lo largo de una l.c., como en el apartado 4,3,1, se llega a la expresión:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) = 0$$

cuya integral conduce a la ecuación de Bernoulli:

$$Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = H = \text{cte}$$

válida para todos los puntos del flujo plano, no necesariamente sobre una l.c.

De modo similar, cuando se estudia la ecuación del movimiento a lo largo de una dirección normal a la l.c., cosa que aquí se ha omitido por simplicidad, se llega a la expresión:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( Z + \frac{p}{\gamma} \right) = \frac{v^2}{gr}$$

en la que r es el radio local de curvatura de la l.c.

Agregando a ambos miembros  $\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{v^2}{2g} \right) = \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial n}$  :

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) = \frac{v^2}{gr} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial n}$$

el primer miembro es cero, de modo que:

$$\frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial n} = 0$$

pero  $dn = dr$ ,

$$\therefore \frac{v}{r} + \frac{dv}{dr} = 0$$

$$\frac{v}{r} = - \frac{dv}{dr}$$

$$\frac{dr}{r} = - \frac{dv}{v}$$

$$\frac{dr}{r} + \frac{dv}{v} = 0$$

$$\ln r + \ln v = \ln k \quad \dots \quad K = \text{cte.}$$

$$\ln v = \ln k - \ln r$$

$$\ln v = \ln \frac{k}{r}$$

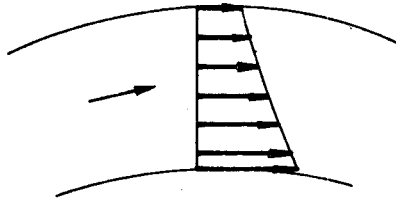
$$v = \frac{k}{r} \quad \dots \quad (48)$$

ecuación válida sólo para el flujo plano del líquido ideal, irrotacional, y que es distinta de la ecuación

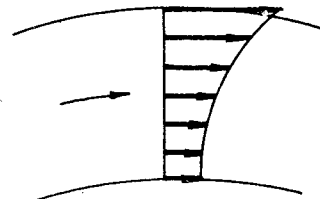
$$v = \omega r \quad \dots \quad (49)$$

que rige en el flujo rotacional.

La conclusión es importante: en una curva horizontal la distribución de velocidades es diferente en uno y otro caso.



flujo irrotacional



flujo rotacional

Coefficiente de presión.- Ecuación de Bernoulli entre un punto  $P_0$  y otro punto genérico  $P$ :

$$Z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} = Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

$$\gamma Z_0 + p_0 + \rho \frac{v_0^2}{2} = \gamma Z + p + \rho \frac{v^2}{2}$$

$$(p + \gamma Z) - (p_0 + \gamma Z_0) = \frac{1}{2} \rho v_0^2 - \frac{1}{2} \rho v^2$$

$$\frac{(p + \gamma Z) - (p_0 + \gamma Z_0)}{\frac{1}{2} \rho v_0^2} = 1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = C_p \quad \dots \quad (50)$$

La utilidad práctica del  $C_p$  es la siguiente. Dibujada la red de corriente es posible determinar la variación del  $C_p$  mediante la ecuación:

$$C_p = 1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2$$

y la variación del  $C_p$  es una medida de la variación de la presión según la ecuación:

$$C_p = \frac{(p + \gamma Z) - (p_0 + \gamma Z_0)}{\frac{1}{2} \rho v_0^2}$$

### 5.5 Trazado gráfico de la red de corriente

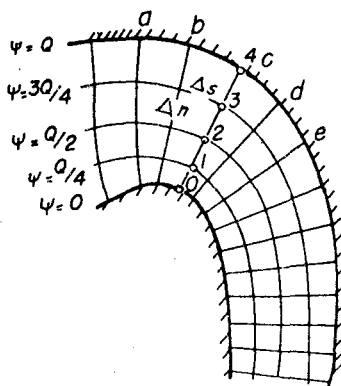
De lo estudiado hasta aquí se desprende que la red de corriente se dibuja para representar la configuración del flujo en los casos de flujo irrotacional. La red está formada por:



- a) una familia de l.c. espaciadas de tal forma que el caudal es el mismo entre cada dos pares de l.c., y
- b) otra familia de curvas ortogonales y espaciadas de tal forma que la separación entre ellas es igual a la separación entre las l.c. adyacentes.

Para describir completamente un flujo en condiciones de contorno dadas se requiere un número muy grande de l.c. No obstante el número de l.c. empleadas en la práctica es el mínimo necesario para obtener la precisión deseada. Cuando se ha obtenido la RC para una forma de los contornos que limitan el flujo, dicha red puede utilizarse para todos los flujos irrotacionales en tanto que los contornos sean geoméricamente semejantes.

El procedimiento para dibujar la RC entre los contornos de una curva horizontal es el siguiente.



1. en una sección entre contornos paralelos se divide el flujo en un cierto número de bandas de igual ancho  $\Delta n_0$ ;
2. para determinar la dirección de las l.c. se dibujan las l.e., espaciadas de forma que  $\Delta s_0 = \Delta n_0$  en la zona de contornos paralelos y  $\Delta s = \Delta n$  en el resto;
3. las l.e. son ortogonales a las l.c. en cada punto de intersección, y a los contornos ya que estos son l.c. De esta manera se obtiene un diagrama que se asemeja a una malla de cuadrados.
4. para comprobar la malla obtenida se dibujan las diagonales de todos los cuadrados. Las dos familias de diagonales deben formar también una red aproximada de cuadrados.

Obtenida la red se puede dibujar la variación de velocidades en los puntos 0, 1, 2, 3, 4, utilizando la relación:

$$\Delta q = v_0 \Delta n_0 = v \Delta n$$

$$\frac{v}{v_0} = \frac{\Delta n_0}{\Delta n}$$

También se puede dibujar la variación de velocidades en los puntos a, b, c, d, e, del contorno, utilizando la relación:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{\Delta s_0}{\Delta s}$$

$\Delta s$  ... medido en el contorno.

Por último, se puede dibujar la variación de la presión en los mismos puntos a, b, c, d, e, del contorno, utilizando la variación de velocidades recién encontrada:

$$C_p = 1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2$$

$$C_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho v_0^2}$$

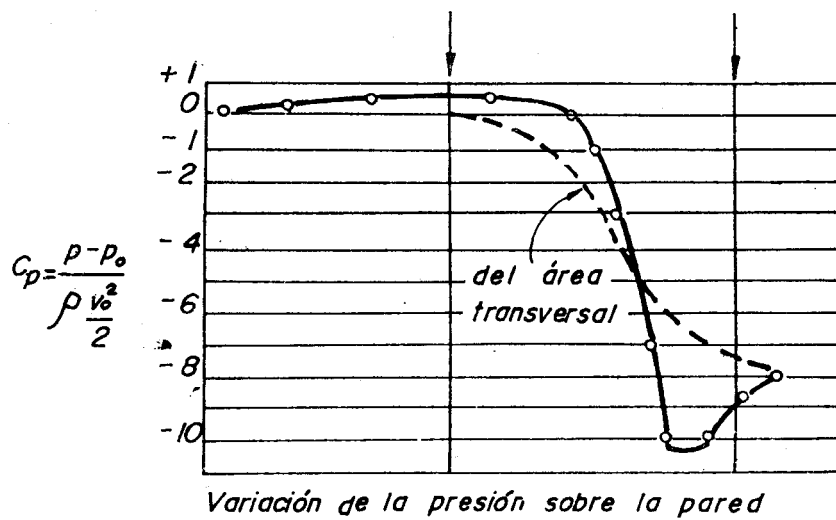
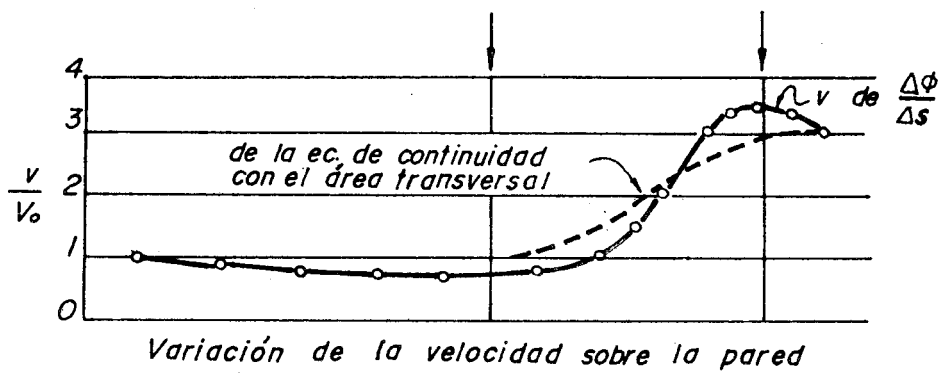
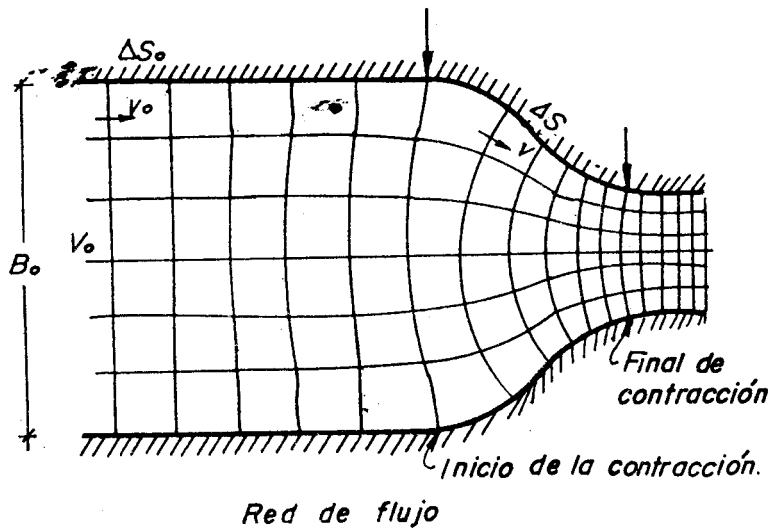
NOTA: La variación de velocidades en el contorno encontrada en la forma que se ha descrito es más real que la obtenida con la ecuación de continuidad:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{b_0}{b}$$

$b$  ... ancho medido sobre una l.e.

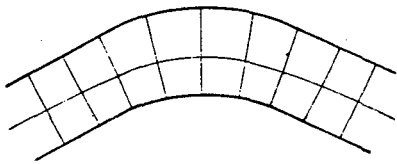
Igual comentario cabe hacer en torno de la variación de la presión.

A continuación se presenta la RC para una contracción gradual, la variación de velocidades en el contorno y la variación de la presión también en el contorno

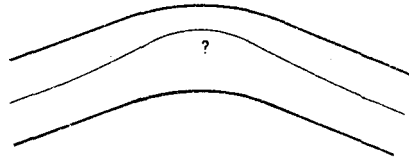


Los esquemas que siguen tienen por objeto dar una idea de la RC en cada caso y aclarar algunos conceptos.

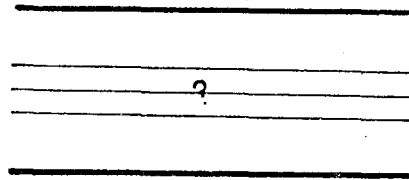
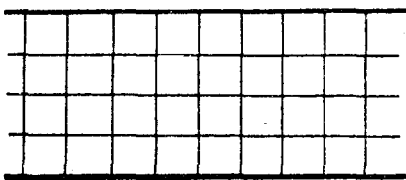
### Curva horizontal



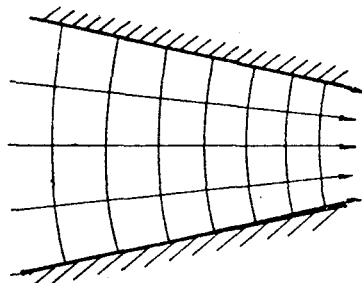
nótese cómo para el flujo rotacional no es posible dibujar la RC.



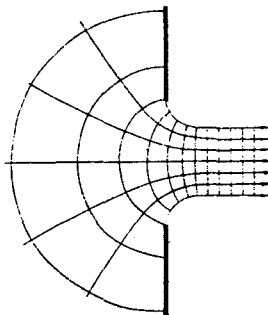
### Perfil vertical de contornos paralelos.



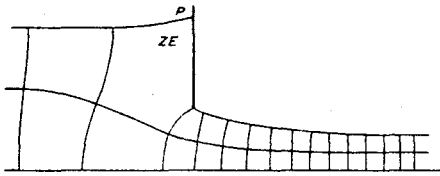
### Perfil vertical de contornos convergentes.



### Ranura en la pared vertical de un depósito.



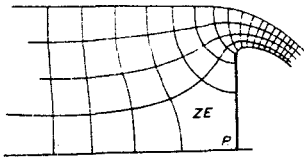
### Compuerta de fondo.



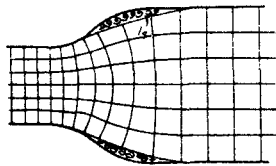
zona de estancamiento (ZE) es aquella zona de flujo en que la separación entre las l. c. es grande, indicando con ello que la velocidad del agua es casi cero.

El punto P se llama punto de estancamiento.

### Vertedero de pared delgada.

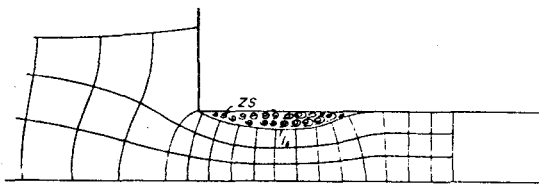


### Expansión brusca.



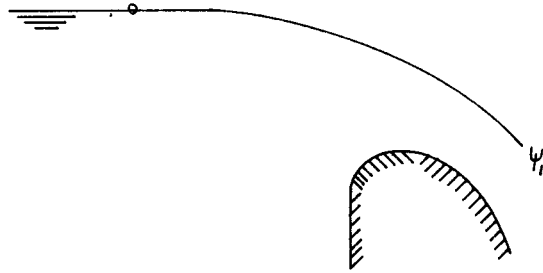
zona de separación (ZS) es aquella zona de flujo en que el líquido por la inercia del movimiento se separa del contorno. Dentro de ella no se cumple la RC pero fuera de ella sí. La línea de separación (ls) es una l.c.

### Toma de fondo con arista aguda.

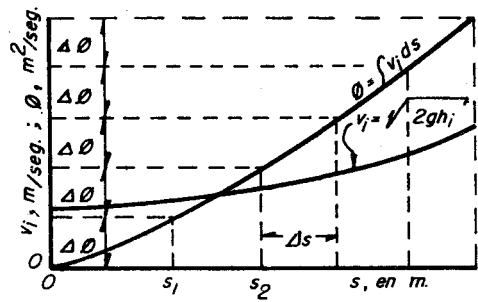
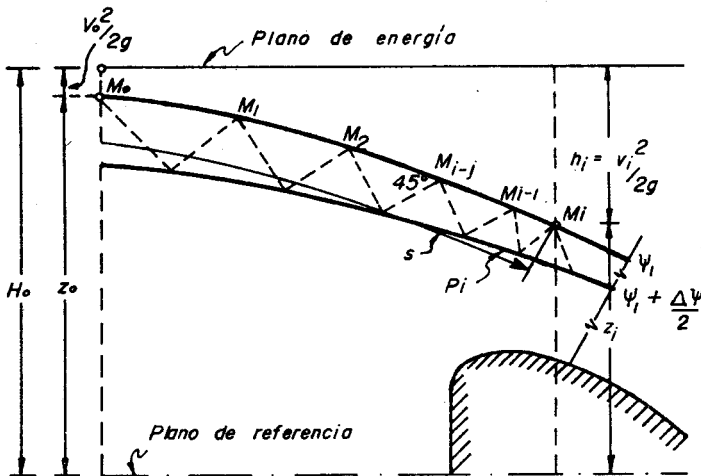


NOTA: El fenómeno de separación se presenta en contornos divergentes y en contornos con arista aguda.

**Método de Prasil.**- Es un método para dibujar la RC por encima de un aliviadero de contorno conocido y situaciones similares como el flujo bajo compuertas. El procedimiento consiste en suponer la l.c. superior a la que se le asigna el valor arbitrario  $\psi_1$ , trazar la RC siguiendo ciertas pautas y comprobar la l.c. inferior con la forma del contorno. El procedimiento se repite hasta que la l.c. inferior coincida con el contorno del aliviadero.



Para un punto genérico  $M_i$  se puede averiguar la velocidad  $v_i = \sqrt{2g h_i}$  - siendo  $h_i = H_0 - Z_i$ , donde  $H_0$  es la carga en la zona de acercamiento del agua. Se grafica  $v_i$  versus la distancia  $s_i$  medida como indica la figura.



Como se recordará:  $v_i = |\text{grad } \phi| = \frac{\partial \phi}{\partial s}$

luego,  $d\phi = v_i ds$

$\phi = \int v_i ds$

de manera que se puede graficar la curva  $\phi$  versus  $s$  como consta en la misma figura. En seguida se toman incrementos iguales  $\Delta\phi$  y se determinan los valores de  $s$  para los puntos  $M_1, M_2$ , etc. Estos puntos pueden ahora ser ubicados sobre la l.c.

Ayudados en los puntos contiguos  $M_{i-1}, M_i$ , se trazan dos rectas que formen  $45^\circ$  con la tangente a la l.c.  $\psi_1$ , las cuales se cortan en  $P_i$  que pertenecerá a la l.c.  $\psi_1 + \frac{\Delta\psi}{2}$ .

Repitiendo el procedimiento con los nuevos puntos encontrados se traza la RC completa.

En la reiteración del procedimiento la  $v_i$  en una l.c. interior se determina con la ecuación de continuidad:

$$v_o \Delta n_o = v_i \Delta n_i$$

$$v_i = \frac{v_o \Delta n_o}{\Delta n_i}$$

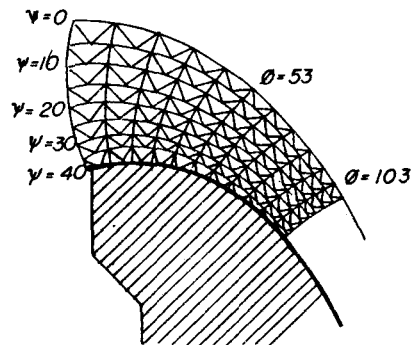
Una vez obtenida la RC definitiva, la presión en un punto cualquiera se de termina con la ecuación de Bernoulli:

$$H_o = Z_i + \frac{p_i}{\gamma} + \frac{v_i^2}{2g}$$

$$\frac{p_i}{\gamma} = (H_o - Z_i) - \frac{v_i^2}{2g}$$

$$\frac{p_i}{\gamma} = h_i - \frac{v_i^2}{2g}$$

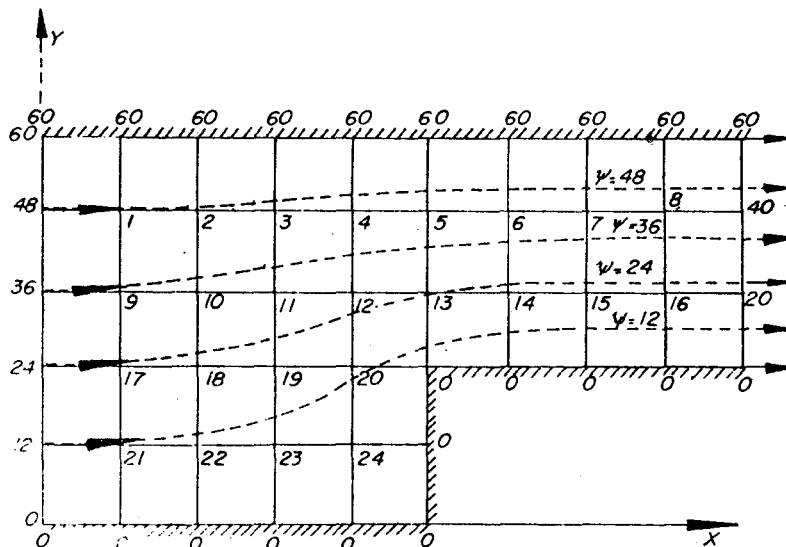
La figura siguiente muestra la RC definitiva.



## 5.6 Otros métodos de estudio del flujo plano

El contenido de este apartado es un compendio de lo que está tratado en el libro Hidráulica General, volumen 1, de Gilberto Sotelo Avila.

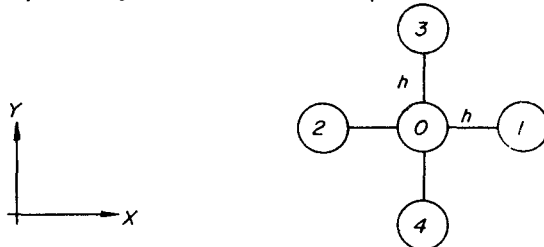
### 5.6.1 Trazado de la RC por métodos numéricos



Los métodos numéricos se basan en la solución de la ecuación de Laplace por diferencias finitas. La descripción se hará para la contracción que se muestra para un gasto de 60 lps.

1º El campo de flujo, incluyendo las fronteras, se cubre con una malla de cuadrados paralela a un sistema de ejes X, Y, con cualquier origen. El tamaño de los cuadrados (h) recibe el nombre de intervalo de la red y debe ser lo más pequeño posible para lograr mayor precisión.

2º A un punto genérico o corresponde la estrella regular:



La función  $\phi$  en los puntos 1 y 2 en términos del valor de la función en el punto o se obtiene por desarrollo de la serie de Taylor:

$$\phi_1 = \phi_o + h \left( \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_o + \frac{h^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right)_o + \frac{h^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \right)_o + \dots$$

$$\phi_2 = \phi_o - h \left( \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_o + \frac{h^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right)_o - \frac{h^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \right)_o + \dots$$

restando:  $\phi_1 - \phi_2 = 2 h \left( \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_o$

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_o = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2 h}$$

y sumando:  $\phi_1 + \phi_2 = 2 \phi_o + h^2 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right)_o$

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right)_o = \frac{\phi_1 + \phi_2 - 2 \phi_o}{h^2}$$

Un desarrollo análogo al anterior pero ahora en la dirección Y, conduce a:

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)_o = \frac{\phi_3 - \phi_4}{2 h}$$

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right)_o = \frac{\phi_3 + \phi_4 - 2 \phi_o}{h^2}$$

3º Para satisfacer la ecuación de Laplace en el punto o se debe cumplir:

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right)_o + \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right)_o = 0$$

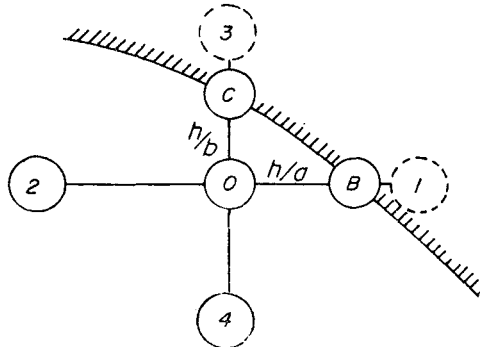


es decir,  $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - 4 \phi_0 = 0 \quad \dots (51)$

o bien,  $\phi_0 = \frac{1}{4} (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4)$

Análogamente :  $\psi_0 = \frac{1}{4} (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4)$

4º En general las fronteras son curvas por lo que aparecerán estrellas irregulares de la forma:



los brazos incompletos tienen las dimensiones indicadas y los valores de  $\phi$  en la frontera se conocen ( $\phi_B, \phi_C$ ).

Se demuestra que en este caso:

$$a \phi_B + b \phi_C + \phi_3 + \phi_4 - \phi_0 (2 + a + b) = 0 \quad \dots (52)$$

o bien,  $\phi_0 = \frac{1}{2 + a + b} (a \phi_B + b \phi_C + \phi_3 + \phi_4)$

Esta ecuación es igualmente aplicable en el caso de una estrella irregular de sólo un brazo incompleto.

5º Se sigue un proceso iterativo consistente en asignar valores iniciales de la función en los diferentes nudos de la malla; dichos valores sustituidos en las ecuaciones (51) de cada punto deben dar residuos cero siempre que los valores iniciales sean los correctos. Por relajación se entiende la técnica que consiste en hacer desaparecer dichos residuos.

En general en la ecuación (51) se tendrá:

$$R_0 = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - 4 \phi_0 \quad \dots (53)$$

si se efectúa un incremento  $\Delta \phi_0$  en  $\phi_0$  el nuevo residuo es:

$$R_0 + \Delta R_0 = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - 4 (\phi_0 + \Delta \phi_0)$$

de modo que:  $\Delta R_0 = - 4 \Delta \phi_0$

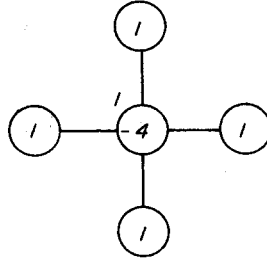
es decir; para liquidar el residuo original la función se debe incrementar en:

$$\Delta\phi_0 = \frac{1}{4} R_0 \quad \dots \quad (54)$$

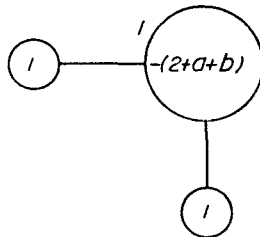
y dicho incremento en la función  $\phi_0$  impone cambios en los residuos de los cuatro puntos adyacentes de la malla, de valor:

$$\Delta R_1 = \Delta R_2 = \Delta R_3 = \Delta R_4 = \Delta\phi_0 \quad \dots \quad (55)$$

Esto es, si el valor de la función en un punto se relaja una cantidad igual a 1, su residuo cambia en -4 y el de los cuatro puntos adyacentes en -1:



por un razonamiento análogo se obtiene el esquema de relajación para una estrella irregular:



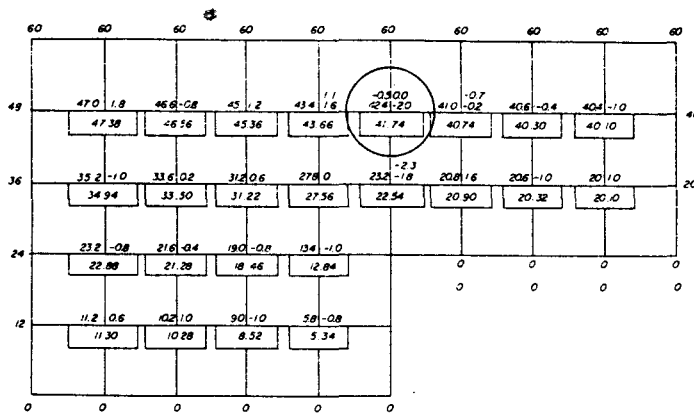
- 6º La relajación debe hacerse en el residuo de mayor valor absoluto. El valor final de la función en cada punto será la suma algebraica del valor inicial más todos los incrementos efectuados en la misma. El método se repite hasta que los valores finales de la función arrojen residuos cercanos a cero con la precisión deseada.

Una elección adecuada de los valores iniciales de la función puede reducir considerablemente el número de etapas de la relajación. Se puede uno ayudar con una construcción gráfica aproximada de la red de flujo.

- 7º En la contracción del ejemplo, la frontera inferior corresponde a la l.c.  $\psi = 0$  y la superior a la l.c.  $\psi = 60$ . Las fronteras verticales inicial y final son l.e. donde se supone que las perturbaciones ocasionadas por la contracción ya no tienen influencia por lo que el flujo es uniforme.

Con líneas de puntos se ha trazado a mano un juego de l.c. aproximadas con el objeto de interpolar los valores iniciales de la función  $\psi$ , que en este caso es más adecuada para integrar.

En cada punto de la malla de cuadrados se anota: en el ángulo correspondiente al segmento cuadrante los valores inicialmente asignados de la función  $\psi$  y en el primer cuadrante los residuos calculados con la ecuación (53). Debajo de cada punto y encerrados en un rectángulo aparecen los valores finales terminados de acuerdo con la precisión deseada, en este caso hasta la segunda cifra decimal.



8<sup>o</sup> En un círculo se indica el punto en el que resultó el residuo de máximo valor absoluto (-2) y que se obtuvo con la ecuación (53):

$$R_0 = 41.0 + 43.4 + 60.0 + 23.2 - 4(42.4) = -2.0$$

Según la ecuación (54) el incremento de la función es:

$$\Delta\psi = \frac{-2.0}{4} = -0.50$$

Dicho incremento se anota arriba del valor inicial de  $\psi$  y el residuo liquidado se tacha, el cual según la ecuación (55) establece cambios en los residuos de los puntos adyacentes; estos son idénticos al incremento de la función y sumados algebraicamente con los residuos propios del punto resultan los valores que se consignan en la figura. Se exceptúa el punto sobre la frontera porque ahí el valor de  $\psi$  es constante.

El proceso se reitera con el punto de máximo residuo, en este caso el inmediato superior al antes analizado.

9<sup>o</sup> Con los valores finales de  $\psi$  en cada punto es posible determinar los de  $\phi$  haciendo uso de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, ecuación (47), las que desarrolladas por incrementos finitos para una estrella regular resultan:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 - \phi_2 &= \psi_3 - \psi_4 \\ \phi_3 - \phi_4 &= \psi_2 - \psi_1 \end{aligned} \right\} \dots (56)$$

Para efectuar el cálculo se asignan a todos los puntos de la l.e. que coincide con el eje Y el mismo valor (cualquiera que se elija) a partir del cual se obtienen los restantes con ayuda de las ecuaciones últimas.

10<sup>o</sup> Para dibujar las l.c. y l.e. definitivas se realiza una interpolación con los valores finales de  $\phi$  y  $\psi$  y después se unen los puntos de  $\psi = \text{cte.}$  y  $\phi = \text{cte.}$ , conservando la condición de  $\Delta\psi = \Delta\phi$ .

Comentario.- Por simplicidad se ha descrito el método de la malla de cua-

drados. En la práctica existen otros dos métodos: el matricial y el del elemento finito, basados también en la solución de la ecuación de Laplace por diferencias finitas. Los tres se resuelven con computadora y de ellos el último de los nombrados es el de mayor versatilidad.

### 5.6.2 Solución analítica directa

Este método consiste en obtener las funciones  $\phi$  y  $\psi$  por integración analítica en aquellos casos especiales en que es suficiente especificar la forma cómo varía la velocidad. Por simplicidad se opta por emplear la representación escalar del vector velocidad.

Los casos de mayor interés se refieren a:

- \* flujo uniforme rectilíneo
- \* fuente
- \* sumidero
- \* vórtice libre y combinado.

### 5.6.3 Superposición de flujos

Este método se basa en la propiedad de superposición de la función potencial y consiste en combinar las soluciones conocidas de los flujos - simples antes enumerados para encontrar soluciones de otros flujos más complicados como:

- \* vórtice espiral
- \* flujo de una fuente a un sumidero
- \* doblete
- \* flujo en torno a un cilindro.

### 5.6.4 Método de transformación conforme (o de mapeo en el plano complejo)

Mediante este método las soluciones de flujos conocidas en un plano complejo se transforman en el flujo deseado en el plano también complejo  $Z = X + iY$ . En algunos casos se utilizan transformaciones conformes sucesivas hasta obtener el flujo deseado.

### 5.6.5 Analogía eléctrica

Es posible emplear la analogía eléctrica para obtener la solución aproximada de un problema de flujo potencial. El método se basa en la semejanza de la función potencial  $\phi$  con el potencial eléctrico  $E$  (voltaje), que también satisface la ecuación de Laplace, de tal manera que el vector grad  $E$  representa la intensidad eléctrica del campo y es proporcional al campo de velocidades de un flujo potencial.

## 5.7 Ejemplos de aplicación

Ejemplo 57.- Verificar si los siguientes campos de flujo incompresibles - satisfacen la ecuación de continuidad. Indicar en cada caso si el flujo es rotacional o irrotacional.

$$\begin{aligned} \text{a) } v_x &= (X - 2Y) t \\ v_y &= -(2X + Y) t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } v_x &= X^2 \cos Y \\ v_y &= -2X \sin Y \end{aligned}$$

La ecuación de continuidad es:  $\text{div. } \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial X} + \frac{\partial v_y}{\partial Y} = 0$

y la ecuación del rotacional de  $\bar{v}$  es:

$$\text{rot } \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial Z} \\ v_X & v_Y & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial v_X}{\partial Y} - \frac{\partial v_Y}{\partial X}$$

determinando valores, resulta:

- a)  $\text{div. } \bar{v} = 0$  ,  $\text{rot } \bar{v} = 0$  ... el flujo es irrotacional  
 b)  $\text{div. } \bar{v} = 0$  ,  $\text{rot } \bar{v} \neq 0$  ... el flujo es rotacional

Ejemplo 58.- Dada la función escalar  $\psi = X^3 - 2Y^2 + XZ - Z^2 + 1$ , hallar las componentes del vector  $\text{grad } \psi$  en el punto (1, 3, 2).

$$\text{grad } \psi = a \bar{i} + b \bar{j} + c \bar{k}$$

$$a_1 = \frac{\partial \psi}{\partial X} = 3X^2 + Z = 5$$

$$a_2 = \frac{\partial \psi}{\partial Y} = -4Y = -12$$

$$a_3 = \frac{\partial \psi}{\partial Z} = X - 2Z = -3$$

Ejemplo 59.- En el flujo del ejemplo 33, determinar la función de corriente y calcular el gasto por unidad de ancho que escurre entre las l.c. que pasan por los puntos A(1,1) y B(2,2).

$$\left. \begin{array}{l} v_X = \frac{\partial \psi}{\partial Y} = 3X \quad \dots \quad d\psi = 3X dY \quad \dots \quad \psi = 3XY + C \\ v_Y = -\frac{\partial \psi}{\partial X} = -3Y \quad \dots \quad d\psi = 3Y dX \quad \dots \quad \psi = 3XY + C \end{array} \right\} \psi = 3XY + C$$

que es la ecuación de la familia de l.c. (corresponde a una familia de hipérbolas  $XY = \text{cte.}$ ).

$$\text{l.c. que pasa por A(1,1) } \dots \quad \psi_A = 3 + C$$

$$\text{l.c. que pasa por B(2,2) } \dots \quad \psi_B = 12 + C$$

$$q = \psi_B - \psi_A = 9 \text{ m}^3/\text{sg} \text{ por m de ancho.}$$

Ejemplo 60.- Red de corriente en un vertedero de pared delgada. El vertedero de la figura se encuentra instalado en un canal rectangular muy ancho; la altura del vertedero es de 0.915 m y a 2.14 m aguas arriba el tirante es 1.373 m. Se trata de determinar el empuje total del agua sobre el vertedero por metro de ancho de éste, sabiendo que el caudal vale  $q = 0.591 \text{ m}^3/\text{sg}$  por metro de ancho, y también la distribución de presiones.

- 1º se dibuja la RC mediante un procedimiento de tanteos según el método de Prasil;
- 2º se dibuja la distribución de presiones sobre la placa del vertedero - usando la ecuación de Bernoulli. Para un plano de referencia coinci-

dente con el fondo del canal:

$$H = Z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} = d_0 + \frac{v_0^2}{2g}$$

$$d_0 = 1.373 \text{ m}$$

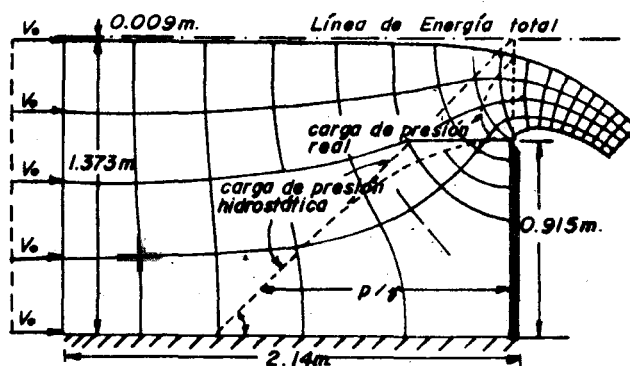
$$v_0 = \frac{0.591}{1.373} = 0.430 \text{ m/sg}$$

$$H = 1.3825 \text{ m}$$

para cada punto sobre la placa:

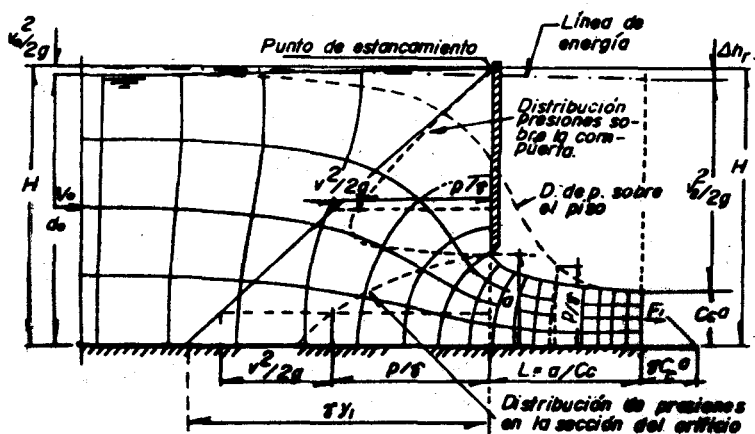
$$H = Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

de donde:  $\frac{p}{\gamma} = H - Z - \frac{v^2}{2g}$



- 3º la fuerza de presión total es igual al área encerrada en el diagrama de distribución de presiones; su valor es 820 kg.
- 4º utilizando el diagrama de distribución hidrostática de presiones se obtiene un valor del empuje mayor que el real (846 kg).

Ejemplo 61.- Red de corriente en una compuerta deslizante. Mediante un procedimiento similar al del ejemplo 60 se obtiene la RC y el diagrama real de presiones. La fuerza sobre la compuerta es igual al área de este diagrama. Cuando la fuerza se calcula con el diagrama hidrostático se obtiene un valor mayor.



## CAPITULO 6: ANALISIS DIMENSIONAL Y SEMEJANZA HIDRAULICA

### 6.1 Introducción

Si bien es cierto que algunos problemas en Hidráulica son resueltos sólo con el análisis (los problemas de la hidrostática por ejemplo), también lo es que hay numerosos casos en los que tiene que recurrirse a la experimentación. Además muchas estructuras hidráulicas son construidas sólo después que han sido estudiadas en modelos; en el modelo se reproducen naturalmente las características reales del prototipo.

Con el objeto de simplificar las experiencias se usan parámetros adimensionales, como el número de Reynolds por ejemplo. Estos parámetros facilitan también la comunicación entre los experimentadores e investigadores, lo que permite el intercambio de resultados y el avance consiguiente.

### 6.2 Análisis dimensional

Mediante la técnica del análisis dimensional se puede expresar cualquier magnitud física (velocidad, viscosidad, etc) en función de sólo tres dimensiones fundamentales (L, M, T o L, F, T), y con ello facilitar los aspectos antes enunciados.

#### Ejemplos de aplicación

Ejemplo 62.- Expresar en términos de las magnitudes fundamentales L, F, T las unidades de masa (m), densidad ( $\rho$ ) y viscosidad ( $\mu$ ).

$$|m| = \left| \frac{F}{a} \right| = \frac{F}{L T^{-2}} = F T^2 L^{-1}$$

$$|\rho| = \left| \frac{\gamma}{g} \right| = \frac{F L^{-3}}{L T^{-2}} = F L^{-4} T^2$$

$$|\mu| = \frac{\left| \frac{\tau}{dv} \right|}{\left| \frac{dy}{dv} \right|} = \frac{\left| \frac{\tau dy}{dv} \right|}{L T^{-1}} = F T L^{-2}$$

Procediendo de esta manera es como se ha confeccionado la tabla que se muestra en la página siguiente.

Ejemplo 63.- Encontrar una fórmula que dé la distancia recorrida por un cuerpo que cae libremente, suponiendo que la distancia S depende del peso del cuerpo W, de la gravedad g y del tiempo T.

$$S = f(W, g, T)$$

$$S = K W^a g^b T^c$$

K es un coeficiente adimensional que se puede determinar experimentalmente (vale 1/2).

Unidades de diferentes magnitudes en términos de las fundamentales

M a g n i t u d	U n i d a d e s	
	(F L T)	(M L T)
área	L <sup>2</sup>	L <sup>2</sup>
volumen	L <sup>3</sup>	L <sup>3</sup>
velocidad	L T <sup>-1</sup>	L T <sup>-1</sup>
aceleración	L T <sup>-2</sup>	L T <sup>-2</sup>
velocidad angular (rad/sg)	T <sup>-1</sup>	T <sup>-1</sup>
fuerza	F	M L T <sup>-2</sup>
masa	F T <sup>2</sup> L <sup>-1</sup>	M
peso específico	F L <sup>-3</sup>	M L <sup>-2</sup> T <sup>-2</sup>
densidad	F L <sup>-4</sup> T <sup>2</sup>	M L <sup>-3</sup>
presión	F L <sup>-2</sup>	M L <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>
viscosidad	F T L <sup>-2</sup>	M L <sup>-1</sup> T <sup>-1</sup>
viscosidad cinemática	L <sup>2</sup> T <sup>-1</sup>	L <sup>2</sup> T <sup>-1</sup>
módulo de elasticidad	F L <sup>-2</sup>	M L <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>
potencia	F L T <sup>-1</sup>	M L <sup>2</sup> T <sup>-3</sup>
par	F L	M L <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>
caudal	L <sup>3</sup> T <sup>-1</sup>	L <sup>3</sup> T <sup>-1</sup>
esfuerzo de corte	F L <sup>-2</sup>	M L <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>
tensión superficial	F L <sup>-1</sup>	M T <sup>-2</sup>
peso	F	M L T <sup>-2</sup>

La ecuación escrita debe ser dimensionalmente homogénea:

$$\begin{aligned}
 F^0 L^1 T^0 &= (F^a)(L^b T^{-2b})(T^c) \\
 &= (F^a)(L^b)(T^{-2b+c})
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
 0 &= a \\
 1 &= b \\
 0 &= -2b + c
 \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned}
 a &= 0 & S &= K W^0 g^1 T^2 \\
 b &= 1 & & \\
 c &= 2 & S &= K g T^2
 \end{aligned}$$

se observa que S no es función del peso del cuerpo W.



Ejemplo 64.- El número de Reynolds ( $R_e$ ) es una función de la densidad, viscosidad y velocidad del fluido, así como de una longitud característica. Establecer la expresión del  $R_e$  mediante el análisis dimensional.

$$R_e = f(\rho, \mu, V, L)$$

$$R_e = K \rho^a \mu^b V^c L^d$$

ecuación dimensional:

$$\begin{aligned} F^0 L^0 T^0 &= (F L^{-4} T^2)^a (F T L^{-2})^b (L T^{-1})^c (L)^d \\ &= (F^a L^{-4a} T^{2a})(F^b T^b L^{-2b})(L^c T^{-c})(L^d) \\ &= F^{a+b} L^{-4a-2b+c+d} T^{2a+b-c} \end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \\ -4a - 2b + c + d &= 0 \\ 2a + b - c &= 0 \end{aligned}$$

Como hay más incógnitas que ecuaciones, se expresan tres incógnitas en función de la cuarta:

$$\begin{aligned} a &= -b \\ d &= -b - c \\ c &= -b \end{aligned} \quad R_e = K \rho^{-b} \mu^b V^{-b} L^{-b}$$

$$R_e = K \left( \frac{\rho V L}{\mu} \right)^{-b}$$

los valores K y b tienen que hallarse experimentalmente (valen  $K = 1$ ,  $b = -1$ ).

Ejemplo 65.- Suponiendo que la fuerza de arrastre ejercida sobre un cuerpo sumergido en una corriente fluida es función de  $\rho$ ,  $\mu$ , V y una longitud característica del cuerpo L, hallar la ecuación general.

$$F = f(\rho, \mu, L, V)$$

$$F = K \rho^a \mu^b L^c V^d$$

ecuación dimensional:

$$\begin{aligned} F^1 L^0 T^0 &= (F^a T^{2a} L^{-4a})(F^b T^b L^{-2b})(L^c)(L^d T^{-d}) \\ &= (F^{a+b})(L^{-4a-2b+c+d})(T^{2a+b-d}) \end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ -4a - 2b + c + d &= 0 \\ 2a + b - d &= 0 \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} a &= 1-b \\ d &= 2-b \\ c &= 2-b \end{aligned}$$

$$F = K \rho^{1-b} \mu^b L^{2-b} V^{2-b}$$

$$\begin{aligned}
&= K \rho \left( \frac{\rho V L}{\mu} \right)^{-b} V^2 L^2 \\
&= 2 K \rho \left( \frac{\rho V L}{\mu} \right)^{-b} \frac{V^2}{2} L^2 \\
&= (2 K R_e^{-b}) \rho A \frac{V^2}{2} \\
F &= C_D \rho A \frac{V^2}{2}
\end{aligned}$$

### 6.3 El teorema $\pi$ de Buckingham

Es muy útil cuando las magnitudes físicas que intervienen en el fenómeno son 4 ó más de 4. No va a ser presentada aquí la teoría acerca de este teorema sino más bien la forma cómo se aplica en casos específicos.

Cuando en el fenómeno físico intervienen  $n$  magnitudes físicas  $q$ , de las cuales se escogen 3 como básicas, entonces:

$$f_1(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$$

que puede reemplazarse por:

$$\phi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-3}) = 0$$

donde cada  $\pi$  es un grupo adimensional que sólo depende de 4 magnitudes físicas  $q$ .

#### Ejemplos de aplicación

Ejemplo 66.- El mismo problema del ejemplo 63.

1º se escriben las 4 magnitudes físicas  $q$ ;

$$f_1(S, W, g, T) = 0$$

y sus dimensiones:

$$\begin{array}{l}
S \dots L \\
W \dots F \\
g \dots L T^{-2} \\
T \dots T
\end{array}$$

2º se escogen 3 de estas magnitudes como básicas:

- \* sin que haya ninguna sin dimensiones
- \* ni 2 que tengan las mismas dimensiones
- \* en las dimensiones de estas 3 magnitudes básicas deben estar comprendidas las 3 fundamentales (F, L, T).

se escogen aquí S, W, T. El número de grupos  $\pi$  es:  $4-3 = 1$ .

3º se escribe el primer grupo  $\pi$ :

$$\pi_1 = S^{a1} W^{b1} T^{c1} g$$

(en este caso es el único).

4º se determinan los exponentes desconocidos en cada  $\pi$  mediante el análisis dimensional.

$$\begin{aligned} F^0 L^0 T^0 &= (L^{a_1})(F^{b_1})(T^{c_1})(L T^{-2}) \\ &= (L^{a_1+1})(F^{b_1})(T^{c_1-2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= a_1+1 \\ 0 &= b_1 \\ 0 &= c_1-2 \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned} a_1 &= -1 \\ b_1 &= 0 \\ c_1 &= 2 \end{aligned}$$

$$\pi_1 = S^{-1} W^0 T^2 g = \frac{W^0 T^2 g}{S} = \frac{T^2 g}{S}$$

$$S = \frac{1}{\pi_1} T^2 g$$

$$S = K g T^2$$

Ejemplo 67.- El mismo problema del ejemplo 65.

1º  $f_1(F, \rho, \mu, L, V) = 0$

$$F \dots F$$

$$\rho \dots F T^2 L^{-4}$$

$$\mu \dots F T L^{-2}$$

$$L \dots L$$

$$V \dots L T^{-1}$$

2º se escogen como básicas  $L, V, \rho$ . Número de grupos  $\pi = 5-3 = 2$

3º  $\pi_1 = (L^{a_1})(V^{b_1})(\rho^{c_1})(F)$

$$F^0 L^0 T^0 = (L^{a_1})(L^{b_1} T^{-b_1})(F^{c_1} T^{2c_1} L^{-4c_1})(F)$$

$$= (L^{a_1+b_1-4c_1})(F^{c_1+1})(T^{-b_1+2c_1})$$

$$0 = a_1 + b_1 - 4c_1$$

$$0 = c_1 + 1$$

$$0 = -b_1 + 2c_1$$

de donde,

$$a_1 = -2$$

$$b_1 = -2$$

$$c_1 = -1$$

$$\pi_1 = L^{-2} V^{-2} \rho^{-1} F$$

$$\pi_1 = \frac{F}{L^2 V^2 \rho}$$

$$\pi_2 = (L^{a_2})(V^{b_2})(\rho^{c_2}) \mu$$

$$F^0 L^0 T^0 = (L^{a_2})(L^{b_2} T^{-b_2})(F^{c_2} T^{2c_2} L^{-4c_2})(F T L^{-2})$$

$$= (L^{a_2 + b_2 - 4c_2 - 2}) (F^{c_2 + 1}) (T^{-b_2 + 2c_2 + 1})$$

$$0 = a_2 + b_2 - 4c_2 - 2$$

$$0 = c_2 + 1$$

$$0 = -b_2 + 2c_2 + 1$$

de donde,  $a_2 = -1$

$$b_2 = -1$$

$$c_2 = -1$$

$$\pi_2 = L^{-1} V^{-1} \rho^{-1} \mu$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho V L}$$

regla: cualquier número  $\pi$  puede ser sustituido por una potencia del mismo, incluyendo -1.

$$\therefore \pi_2 = \frac{\rho V L}{\mu}$$

$$\pi_2 = R_e$$

$$4^{\circ} \quad \phi(\pi_1, \pi_2) = 0$$

$$\phi\left(\frac{F}{L^2 V^2 \rho}, R_e\right) = 0$$

regla: cualquier  $\pi$  puede expresarse como función de otros  $\pi$ .

$$\therefore \frac{F}{L^2 V^2 \rho} = f(R_e)$$

$$F = K R_e L^2 V^2 \rho$$

$$F = (2 K R_e) \rho L^2 \frac{V^2}{2}$$

$$F = C_D \cdot \rho A \frac{V^2}{2}$$

Comentario.- Conviene reseñar algunas reglas útiles del teorema.

- si una de las magnitudes  $q$  es adimensional constituyè un número  $\pi$  sin tener que seguir el camino ordinario.
- si 2 de las magnitudes  $q$  tienen las mismas dimensiones su cociente es un número  $\pi$ .
- cualquier número  $\pi$  puede ser sustituido por una potencia del mismo, incluyendo -1.
- cualquier número  $\pi$  puede sustituirse por su producto por una constante numérica,
- cualquier  $\pi$  puede expresarse como función de otros  $\pi$ .

Ejemplo 68.- Desarrollar una expresión que de la pérdida de carga en una tubería horizontal para un flujo permanente, turbulento, incompresible.

La pérdida de carga viene dada por una disminución de la presión ( $\Delta p$ ) y constituye una medida de la resistencia al flujo. Esta resistencia es función de  $D$ ,  $\mu$ ,  $\rho$ ,  $L$ ,  $V$  y  $k$ , siendo  $k = \epsilon/D$  la rugosidad relativa adimensional.

$$1^{\circ} \quad f_1 (\Delta p, D, \mu, \rho, L, V, k) = 0$$

$$\Delta p \dots F L^{-2}$$

$$D \dots L$$

$$\mu \dots F T L^{-2}$$

$$\rho \dots F T^2 L^{-4}$$

$$L \dots L$$

$$V \dots L T^{-1}$$

$$k \dots s/u$$

2<sup>o</sup> se escogen como básicas  $D$ ,  $V$ ,  $\rho$ . Número de grupos  $\pi = 7-3 = 4$ .

$$3^{\circ} \quad \pi_1 = (D^{a_1}) (V^{b_1}) (\rho^{c_1}) (\Delta p)$$

desarrollando:

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho V^2}$$

$$\pi_2 = (D^{a_2}) (V^{b_2}) (\rho^{c_2}) (\mu)$$

desarrollando:

$$\pi_2 = \frac{\rho V D}{\mu} = R_e$$

$$\pi_3 = (D^{a_3}) (V^{b_3}) (\rho^{c_3}) (L)$$

desarrollando:

$$\pi_3 = \frac{L}{D}$$

$$\pi_4 = k = \frac{\epsilon}{D}$$

$$4^{\circ} \quad \phi (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0$$

$$\phi \left( \frac{\Delta p}{\rho V^2}, R_e, \frac{L}{D}, \frac{\epsilon}{D} \right) = 0$$

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = f_2 \left( R_e, \frac{L}{D}, \frac{\epsilon}{D} \right)$$

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{V^2}{g} \cdot \frac{2}{2} \cdot f_2 \left( R_e, \frac{L}{D}, \frac{\epsilon}{D} \right)$$

Por experiencia se sabe que la caída de presión es proporcional a la prime

ra potencia de  $\frac{L}{D}$ , es decir:

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{V^2}{2g} \cdot \frac{L}{D} \cdot 2 f_3 \left( R_e, \frac{\epsilon}{D} \right)$$

el tercer factor se designa con  $f$  = coeficiente de fricción,

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

usualmente se expresa:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad \dots \text{ ecuación de Darcy-Weisbach}$$

$h_f$  ... pérdida de carga por fricción (m)

$f$  ... coeficiente de fricción (s/v) función de  $R_e$  y  $\frac{\epsilon}{D}$

$L$  ... longitud de la tubería (m)

$D$  ... diámetro (m)

$V$  ... velocidad media (m/sg)

$g$  ... gravedad (m/sg<sup>2</sup>)

## 6.4 Semejanza hidráulica

### 6.4.1 Semejanza geométrica

Existe semejanza geométrica entre modelo y prototipo cuando las relaciones entre las dimensiones homólogas son iguales:

$$\frac{L_m}{L_p} = L_r$$

$$\frac{A_m}{A_p} = \frac{L_m^2}{L_p^2} = L_r^2$$

### 6.4.2 Semejanza cinemática

Existe semejanza cinemática entre modelo y prototipo si:

- 1º las trayectorias de partículas homólogas son geoméricamente semejantes;
- 2º las relaciones entre las velocidades de las partículas homólogas son iguales.

Relaciones de velocidad:

$$\frac{V_m}{V_p} = \frac{\frac{L_m}{T_m}}{\frac{L_p}{T_p}} = \frac{L_m T_p}{L_p T_m} = \frac{L_r}{T_r}$$

de aceleración:

$$\frac{a_m}{a_p} = \frac{\frac{L_m}{T_m^2}}{\frac{L_p}{T_p^2}} = \frac{L_m \cdot T_p^2}{L_p \cdot T_m^2} = \frac{L_r}{T_r^2}$$

de caudal:

$$\frac{Q_m}{Q_p} = \frac{\frac{L_m^3}{T_m}}{\frac{L_p^3}{T_p}} = \frac{L_m^3 \cdot T_p}{L_p^3 \cdot T_m} = \frac{L_r^3}{T_r}$$

### 6.4.3 Semejanza dinámica

Entre modelo y prototipo, semejantes geométrica y cinemáticamente existe semejanza dinámica cuando las relaciones entre las fuerzas homólogas son iguales.

En general, las fuerzas existentes son las fuerzas viscosas, gravitatoria elástica, debidas a la presión y debidas a la tensión superficial.

El ingeniero que ensaya un modelo hidráulico estudia únicamente las fuerzas predominantes. Felizmente, en la mayoría de los problemas con líquidos llega a predominar sólo una fuerza de entre las mencionadas, aparte de la fuerza de inercia. Dicha fuerza puede ser la viscosa, la gravitatorias o la elástica.

La consideración de la fuerza predominante se hace a través de un parámetro adimensional. Estos parámetros son los que a continuación se deducen.

Número de Reynolds.- Encierra el efecto de la viscosidad y se obtiene planteando la relación entre las fuerzas de inercia y viscosidad.

$$R_e = \frac{m a}{\tau A} = \frac{m a}{\mu \frac{dv}{dy} \cdot A} = \frac{\rho L^2 v^2}{\mu \frac{v}{L} L^2} = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{v L}{\nu}$$

L es una longitud característica.

En tuberías se usa generalmente el diámetro (D).

Número de Froude.- Encierra el efecto de la gravedad y se obtiene planteando la relación entre las fuerzas de inercia y gravitatoria.

$$\frac{m a}{m g} = \frac{\rho L^2 v^2}{\rho L^3 g} = \frac{v^2}{gL}$$

a la raíz cuadrada de esta expresión se llama número de Froude:

$$F = \frac{v}{\sqrt{gL}}$$

L es una longitud característica.  
En canales se usa el tirante de agua (Y).

Número de Euler.- Encierra el efecto de la presión y se obtiene planteando la relación entre las fuerzas de inercia y presión.

$$E_{\mu} = \frac{m a}{\rho A} = \frac{\rho L^3 \cdot L T^{-2}}{\rho L^2} = \frac{\rho L^2 \cdot V^2}{\rho L^2} = \frac{\rho V^2}{\rho}$$

Número de Mach.- Encierra el efecto de la compresibilidad del fluido y se obtiene planteando la relación entre las fuerzas de inercia y elástica.

$$\frac{m a}{E A} = \frac{\rho L^2 V^2}{E L^2} = \frac{\rho V^2}{E}$$

a la raíz cuadrada de esta expresión y un arreglo se llama número de Mach:

$$M = \frac{V}{\sqrt{E/\rho}}$$

Número de Weber.- Encierra el efecto de la tensión superficial y se obtiene planteando la relación entre las fuerzas de inercia y tensión superficial.

$$W = \frac{m a}{\sigma L} = \frac{\rho L^2 V^2}{\sigma L} = \frac{\rho L V^2}{\sigma}$$

Comentario.- Como ya se insinuara, en los problemas de interés del ingeniero civil predomina por lo general una fuerza, siendo esta fuerza unas veces la viscosa otras la gravitatoria. Conviene entonces subrayar que deberá verificarse en el modelo y el prototipo el mismo  $Re$  si en el fenómeno que se estudia predomina la viscosidad, o el mismo  $F$  si predomina la gravedad.

## 6.5 Aplicaciones

### 6.5.1 En sistemas a presión

Se sabe que en los sistemas a presión predomina el efecto viscoso, por lo que deberá verificarse:

$$Re_m = Re_p$$

$$\frac{V_m L_m}{\nu_m} = \frac{V_p L_p}{\nu_p}$$

$$\frac{V_r L_r}{\nu_r} = 1$$

además:

$$V_r = \frac{\nu_r}{L_r}$$



$$T_r = \frac{L_r}{V_r} = \frac{L_r^2}{v_r}$$

$$a_r = \frac{L_r}{T_r^2} = \frac{L_r v_r^2}{L_r^4} = \frac{v_r^2}{L_r^3}$$

$$Q_r = A_r V_r = L_r^2 \frac{v_r}{L_r} = v_r L_r$$

$$F_r = m_r a_r = \rho_r L_r^3 \frac{v_r^2}{L_r^3} = v_r^2 \rho_r$$

$$p_r = \frac{F_r}{L_r^2} = \frac{v_r^2 \rho_r}{L_r^2}$$

El número de Reynolds se usa como el criterio de semejanza en la prueba de modelos de naves aéreas, cuerpos sumergidos, medidores de gasto, transiciones, etc, en los cuales las características del flujo están sujetas a efectos viscosos. Cuanto menor es el  $Re$  mayor es el efecto de la viscosidad.

#### 6.5.2 En sistemas a superficie libre

Se sabe que en los sistemas a superficie libre predomina la fuerza gravitatoria, por lo que deberá verificarse:

$$F_m = F_p$$

$$\frac{V_m}{\sqrt{g L_m}} = \frac{V_p}{\sqrt{g L_p}}$$

$$\frac{V_r}{\sqrt{g_r L_r}} = 1$$

En lo que sigue se supondrá que modelo y prototipo ocurren en el mismo lugar,  $g_r = 1$ .

además:

$$V_r = L_r^{1/2}$$

$$T_r = \frac{L_r}{V_r} = L_r^{1/2}$$

$$a_r = g_r = 1$$

$$Q_r = A_r V_r = L_r^2 L_r^{1/2} = L_r^{5/2}$$

$$F_r = m_r a_r = \rho_r L_r^3 g_r = \rho_r L_r^3$$

El número de Froude se usa como el criterio de semejanza en la prueba de

modelos de canales, vertederos, salto hidráulico, compuertas, ondas, etc, en los cuales el efecto viscoso es escaso y la fuerza de gravedad la más importante. Cuanto menor es el F mayor es el efecto de la gravedad.

### 6.5.3 Asuntos conexos

El número de Euler.- Ciertamente el número de Euler rige en aquellos fenómenos donde son preponderantes los cambios de presión  $\Delta p$  y las fuerzas viscosas y gravitacionales pierden importancia. Esto ocurre en problemas de flujo bidimensional, sobre todo.

Es decir, 
$$E_{\mu} = \frac{\rho v^2}{\Delta p}$$

Se llama coeficiente de presión (apartado 5.4) a la relación:

$$C_p = \frac{\Delta p}{\frac{\rho v^2}{2}}$$

de donde resulta que: 
$$C_p = \frac{2}{E_{\mu}}$$

Por otro lado, se denomina número de cavitación ( $\sigma$ ) a la forma que adopta el coeficiente de presión cuando se utiliza un origen de referencia para medir la presión ( $p_0$ ); es decir, 
$$\sigma = \frac{p - p_0}{\frac{\rho v^2}{2}} \dots (57)$$

unas veces se usa como presión de referencia la de vaporización:

$$\sigma = \frac{p - p_v}{\frac{\rho v^2}{2}}$$

otras veces la de cavitación,

$$\sigma_c = \frac{p - p_c}{\frac{\rho v^2}{2}}$$

El número de cavitación se emplea como parámetro adimensional para establecer la semejanza entre modelo y prototipo de las máquinas hidráulicas (bombas y turbinas).

El número de Mach.- Este parámetro toma en consideración la compresibilidad del fluido. En ingeniería hidráulica, el único fenómeno donde se producen valores muy altos de presión que obligan a considerar la compresibilidad del agua es el del golpe de ariete. Pero este fenómeno es mejor estudiado analíticamente, de modo que bien puede decirse que en la hidráulica no se emplea nunca el número de Mach, el que tiene su mejor aplicación en el estudio que se hace de naves aéreas en el túnel supersónico.

El número Weber.- Este parámetro se usa en ensayos de ondas capilares en canales pequeños y en el estudio del movimiento capilar del agua en los suelos por lo que bien puede decirse que no tiene mayor impor

tancia en los problemas de la hidráulica.

Modelaje.- En los proyectos hidráulicos hay a veces estructuras para diseñar las cuales no hay fórmulas ni gráficas disponibles, de modo que el único medio para el dimensionamiento apropiado de tales estructuras es su estudio en modelo.

Para la construcción del modelo de algunas estructuras hidráulicas se requiere de un espacio grande. La primera decisión a tomar se refiere entonces a la escala, siendo el costo y el espacio disponible los factores más importantes en la decisión.

En cuanto a la escala misma se procura siempre que la semejanza geométrica sea exacta, incluso en lo que se refiere al tamaño de las asperezas. Existen ocasiones sin embargo en las que procediendo así resultan en el modelo dimensiones demasiado pequeñas para resultados satisfactorios, de modo que en tales circunstancias se hace necesario recurrir a una escala vertical diferente a la escala horizontal, dando lugar a un modelo distorsionado. - Generalmente se recurre al modelo distorsionado en estructuras fluviales, en las que las dimensiones horizontales son muy grandes en proporción a las dimensiones verticales.

## 6.6 Ejemplos de aplicación

Ejemplo 69.- Se ha construido un modelo de torpedo a escala 1:4. Se espera que el prototipo se mueva a una velocidad de 6 m/sg en agua a 15°C. ¿Cuál debe ser la velocidad en el modelo, si

- el ensayo se hace en un canal de corriente a 15°C; y
- el ensayo se hace en un túnel de viento a 27°C y una presión de 20 atmósferas?.

Se trata de un cuerpo sumergido, predomina la fuerza viscosa, por lo tanto hay que usar el mismo  $Re$  en modelo y prototipo.

$$a) Re_m = Re_p$$

$$\frac{v_r L_r}{\nu_r} = 1$$

$$v_r = \frac{\nu_r}{L_r} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

$$v_m = 4 v_p = 24 \text{ m/sg.}$$

$$b) \nu_{\text{agua a } 15^\circ\text{C}} = 1.13 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sg}$$

$$\mu_{\text{aire a } 27^\circ\text{C}} = 1.88 \times 10^{-6} \frac{\text{kg sg}}{\text{m}^2}$$

$$\rho_{\text{aire a } 27^\circ\text{C}} = \frac{p}{g R_o T} = 2.41 \frac{\text{kg sg}}{\text{m}^3}$$

$$\nu_{\text{aire a } 27^\circ\text{C}} = \frac{\mu}{\rho} = 7.8 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{sg}$$

$$V_r = \frac{v_r}{L_r} = \frac{\frac{v_m}{v_p}}{\frac{L_m}{L_p}} = 2.75$$

$$V_m = 2.75 V_p = 16.5 \text{ m/sg}$$

Ejemplo 70.- Un barco cuyo casco tiene una longitud de 140 m ha de moverse a 7.50 m/sg. ¿A qué velocidad debe remolcarse en agua un modelo construido a una escala 1:30?

Se trata de un cuerpo en superficie libre, predomina la fuerza gravitatoria, por lo tanto hay que usar el mismo  $F$  en modelo y prototipo.

$$\frac{V_r}{\sqrt{g_r L_r}} = 1$$

$$V_r = \sqrt{g_r L_r} = \sqrt{1 \cdot \frac{1}{30}} = 0.18$$

$$V_m = 0.18 V_p = 1.37 \text{ m/sg.}$$

## CAPITULO 7: EMPUJE DINAMICO DE LOS FLUIDOS

### 7.1 Introducción

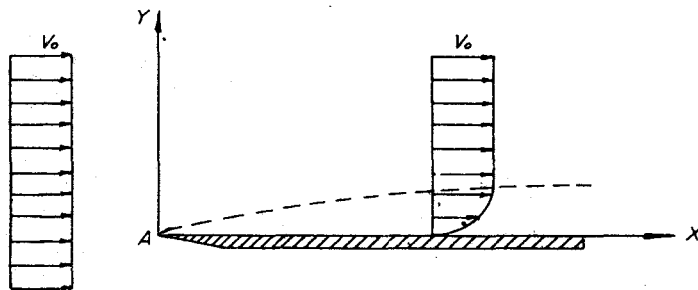
Los fluidos en movimiento ejercen fuerzas sobre los cuerpos que están de por medio. La ecuación de la cantidad de movimiento permite en muchos casos evaluar estas fuerzas. Sin embargo, es la teoría de la capa límite la que proporciona las bases para un análisis más minucioso y exacto, complementado con coeficientes que se determinan experimentalmente.

Para el ingeniero civil el interés se centra en poder averiguar el empuje dinámico del aire sobre estructuras como chimeneas, torres, edificios, puentes, etc. y el empuje dinámico del agua sobre pilares, rejillas, compuertas, etc. Los conceptos aquí estudiados pueden servir también para una explicación del fenómeno de arrastre de sólidos en los ríos.

### 7.2 Teoría de la capa límite. Placas lisas

Para introducirnos en el estudio de la capa límite se puede considerar un flujo plano, irrotacional, de velocidad uniforme  $v_0$ . Al interponerse una placa, como muestra la figura (sólo analizamos la cara superior que suponemos lisa), el fluido experimenta un ligero frenado en la región más próxima a la superficie de la placa.

Se interpreta como que aparecen esfuerzos de corte (esfuerzos viscosos) en esta región. A esta región muy próxima a la superficie de la placa, en que se manifiestan efectos viscosos resistentes, se denomina capa límite. Todas las pérdidas de carga por fricción tienen lugar dentro de la c.l. y el flujo exterior a ella puede considerarse como flujo potencial carente de viscosidad. Su espesor aumenta hacia la derecha a partir de un valor cero en A por la acción continuada de las tensiones de corte.

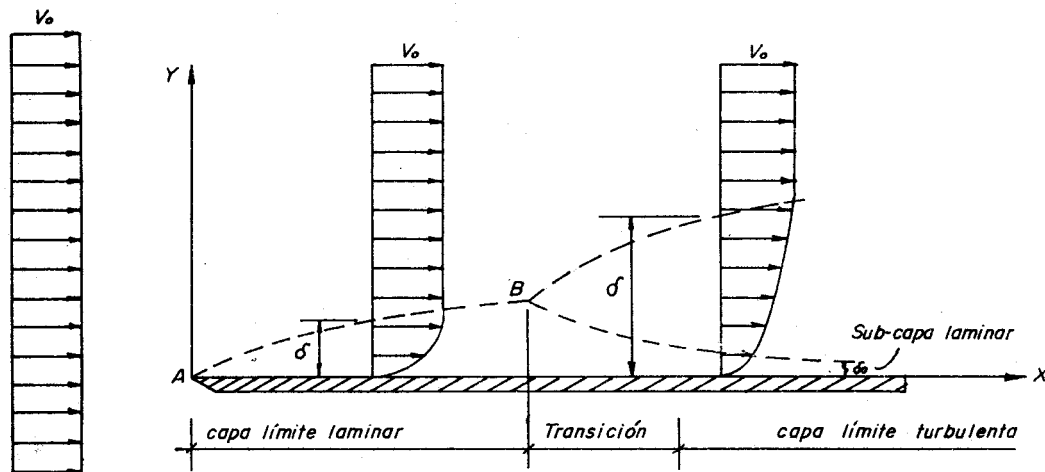


Hoy se sabe, después de los minuciosos estudios de Prandtl y otros investigadores que, para una placa lisa:

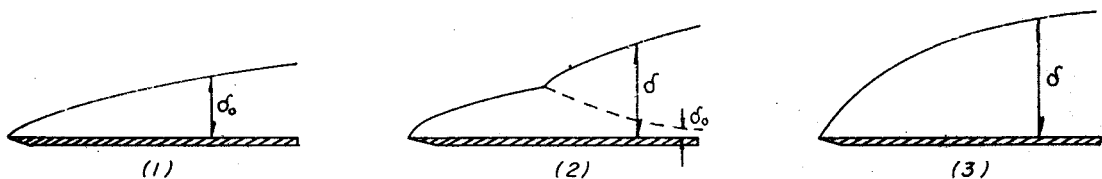
- la velocidad del fluido en el punto de contacto con la placa vale cero.
- el gradiente de velocidad  $\frac{dv}{dy}$  tiene valores máximos en la frontera, o lo que es lo mismo, el esfuerzo de corte es máximo en la pared ( $\tau_0$ ) y disminuye conforme nos alejamos de ella.
- fuera de la c.l., el efecto viscoso es nulo, o lo que es lo mismo, el esfuerzo de corte vale cero y el gradiente de velocidad también vale

cero. Fuera de la c.l. se restablece el flujo potencial, irrotacional, de velocidad uniforme  $v_0$ .

- d) debido a las pequeñas irregularidades de la superficie de la placa lisa, la c.l. cambia su comportamiento a lo largo de X. A partir del punto A y hasta una distancia  $X_0$  tiene lugar la c.l. laminar (dentro de ella el flujo es laminar). En el punto B el espesor de la c.l. aumenta más rápidamente; después de una zona de transición queda muy bien definida la c.l. turbulenta, pero como las irregularidades de la superficie son muy pequeñas, subsiste una delgada capa de flujo laminar que se conoce como subcapa laminar.



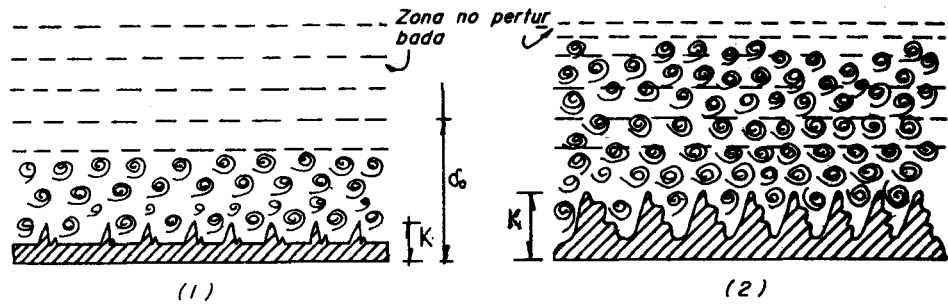
- e) el diagrama de velocidades dentro de la c.l. en general, es asintótico al valor  $v_0$ , por lo que se conviene en definir como espesor de la c.l. ( $\delta$ ) la distancia Y a la cual  $v = 0.99 v_0$ . La velocidad en la c.l. laminar y en la subcapa laminar varía según una parábola, y en la c.l. turbulenta según una ley logarítmica.
- f) para números de Reynolds bajos toda la c.l. resulta laminar (1); para números de Reynolds intermedios la c.l. es turbulenta pero subsiste una subcapa laminar (2); para números de Reynolds grandes la c.l. es totalmente turbulenta (3).



- g) se acostumbra comparar la altura media de las irregularidades de la superficie (rugosidad absoluta K) con el espesor de la subcapa laminar ( $\delta_0$ ) en la forma siguiente:

- \* si  $K \ll \delta_0$  la rugosidad no tiene efecto sobre la zona exterior a  $\delta_0$  y se dice que la pared tiene un comportamiento de pared lisa (1)
- \* si K tiene un valor comparativamente grande, la rugosidad extiende su efecto más allá de  $\delta_0$ , produciendo disturbios y se

dice que la pared tiene un comportamiento de pared rugosa (2).



### Resistencia de superficie

Debido al esfuerzo de corte en la pared de la placa ( $\tau_0$ ) el fluido experimenta una fuerza de resistencia que es igual a:

$\int \tau_0 dX$ , por metro lineal perpendicular al papel pero que se acostumbra expresar en la forma:

$$D_f = C_D \rho \frac{v_0^2}{2} A$$

$D_f$  ... resistencia de superficie

$C_D$  ... coeficiente de resistencia (adimensional)

$\rho$  ... densidad del fluido

$v_0$  ... velocidad del fluido en la zona no perturbada

$A$  ... área de la placa

#### 7.2.1 Expresiones de $\delta$ , $\tau_0$ y $C_D$ para capa límite laminar

Tratándose de placas lisas es fácil deducir analíticamente las expresiones de  $\delta$  (espesor de la c.l.),  $\tau_0$  (esfuerzo de corte en la pared) y  $C_D$  (coeficiente de resistencia), tanto para c.l. laminar como para c.l. turbulenta. Para c.l. laminar se parte de las siguientes hipótesis:

\* la distribución de velocidades es:

$$v = v_0 \left( \frac{2Y}{\delta} - \frac{Y^2}{\delta^2} \right)$$

\* el esfuerzo de corte  $\tau$  sigue la ley de Newton de la viscosidad

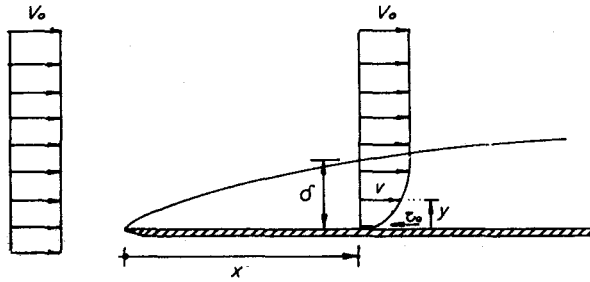
\* el flujo es permanente

\*  $\delta$  es muy pequeño respecto a  $X$

$$* \frac{dp}{dX} = \frac{dp}{dY} = 0$$

\*  $\delta$  es el valor de  $Y$  para el cual  $v = 0,99 v_0$ .

Expresión de  $S_x$ . - La ecuación de cantidad de movimiento para cualquier sección en la placa de ancho unitario es:



$$\int_0^{\delta} \rho v dY \cdot v_0 - \int_0^X \tau_0 dX = \int_0^{\delta} \rho v dY \cdot v$$

$$\int_0^X \tau_0 dX = \int_0^{\delta} \rho v dY (v_0 - v)$$

en el primer miembro:

$$\tau_0 = \mu \left( \frac{dv}{dY} \right)_0$$

$$\left( \frac{dv}{dY} \right)_0 = v_0 \left( \frac{2}{\delta} - \frac{2Y}{\delta^2} \right)_0 = \frac{2 v_0}{\delta} \left( 1 - \frac{Y}{\delta} \right)_0 = \frac{2 v_0}{\delta}$$

$$\int_0^X \tau_0 dX = \int_0^X \frac{2 v_0 \mu}{\delta} dX$$

en el segundo miembro:

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} \rho v dY (v_0 - v) &= \int_0^{\delta} \rho v dY \left( v_0 - \frac{2Y v_0}{\delta} + \frac{Y^2 v_0}{\delta^2} \right) \\ &= \int_0^{\delta} \rho v_0 \left( \frac{2Y}{\delta} - \frac{Y^2}{\delta^2} \right) v_0 \left( 1 - \frac{2Y}{\delta} + \frac{Y^2}{\delta^2} \right) dY \\ &\quad \dots\dots \\ &\quad \dots\dots \\ &= \frac{2}{15} \rho v_0^2 \delta \end{aligned}$$

quiere decir que:

$$\frac{2 v_0 \mu}{\delta} \cdot dX = \frac{2}{15} \rho v_0^2 \cdot d\delta$$

$$\delta \cdot d\delta = \frac{2 v_0 \mu 15}{2 \rho v_0^2} dX$$

$$\int_0^{\delta} \delta \cdot d\delta = \frac{15 \mu}{\rho v_0^2} \int_0^X dX$$



$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{15 \mu X}{\rho v_0}$$

$$\delta^2 = \frac{30 \mu X}{\rho v_0}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{30 \mu X}{\rho v_0}}$$

$$\frac{\delta}{X} = \sqrt{\frac{30 \mu}{\rho v_0 X}} = \sqrt{\frac{30}{\frac{v_0 X}{\nu}}} = \frac{5.48}{\sqrt{Re_x}}$$

Blasius, siguiendo un procedimiento más refinado y por eso más exacto obtuvo:

$$\frac{\delta}{X} = \frac{5.20}{\sqrt{Re_x}} \quad \dots \quad (58)$$

Expresión de  $\tau_0$ . - Según se acaba de ver:

$$\tau_0 = \mu \left( \frac{dv}{dy} \right)_0 = \mu \frac{2 v_0}{\delta}$$

reemplazando la expresión recién obtenida de  $\delta$ :

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{2 \mu v_0}{\sqrt{\frac{30 \mu X}{\rho v_0}}} = 0.365 \sqrt{\frac{\rho v_0^3 \mu}{X}} \\ &= 0.365 \sqrt{\frac{\rho^2 v_0^4}{\frac{v_0 X}{\nu}}} = 0.365 \frac{\rho v_0^2}{\sqrt{Re_x}} \end{aligned}$$

experimentalmente ha sido obtenido el valor más exacto:

$$\tau_0 = 0.33 \frac{\rho v_0^2}{\sqrt{Re_x}} \quad \dots \quad (59)$$

Expresión de  $C_{DX}$ . - Igualando las dos formas de expresar la resistencia:

$$\tau_0 A = C_{DX} \rho \frac{v^2}{2} A$$

$$C_{DX} = \frac{2 \tau_0}{\rho v_0^2} = \frac{0.66 \rho v_0^2}{\rho v_0^2 \sqrt{Re_x}} = \frac{0.66}{\sqrt{Re_x}}$$

la resistencia total sobre la cara de la placa es:

$$\int_0^L \tau_0 dx = \int_0^L 0,33 \sqrt{\rho v_0^3 \mu} x^{-1/2} dx = 0,33 (2 L^{1/2}) \sqrt{\rho v_0^3 \mu}$$

$$= 0,33 (2) \sqrt{\rho v_0^3 \mu} L$$

y también:

$$C_D \rho \frac{v_0^2}{2} L$$

por lo que, igualando las dos expresiones:

$$C_D \rho \frac{v_0^2}{2} L = 0,33 (2) \sqrt{\rho v_0^3 \mu} L$$

$$C_D = 1,32 \sqrt{\frac{\mu}{\rho v_0 L}} = \frac{1,32}{\sqrt{\frac{\rho v_0 L}{\mu}}} = \frac{1,32}{\sqrt{Re_x}}$$

otros trabajos han conducido al valor 1,328 que se considera más preciso:

$$C_D = \frac{1,328}{\sqrt{Re_x}} \quad \dots \quad (60)$$

### 7.2.2 Expresiones de $\delta$ , $\tau_0$ y $C_D$ para capa límite turbulenta

Para la c.l. turbulenta las únicas hipótesis que difieren son las dos primeras:

- \* la distribución de velocidades sigue la ley de Prandtl de la potencia 1/7 (por simplicidad, en vez de la ley logarítmica)

$$\frac{v}{v_0} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$$

- \* el esfuerzo de corte sigue una cierta ley, de tal manera que en la placa vale (Referencia 1):

$$\tau_0 = 0,0228 \rho v_0^2 \left(\frac{v}{v_0 \delta}\right)^{1/4}$$

Expresión de  $\delta$ . Siguiendo el mismo procedimiento que para la c.l. laminar se obtiene:

$$\delta = \frac{0,37 x}{Re_x^{1/5}} \quad \dots \quad (58')$$

(el espesor aumenta más rápidamente en la c.l. turbulenta, ya que varía con  $x^{4/5}$  mientras que en la c.l. laminar varía con  $x^{1/2}$ ).

Expresión de  $\tau_0$ .- Siguiendo el mismo procedimiento que para la c.l. laminar se obtiene:

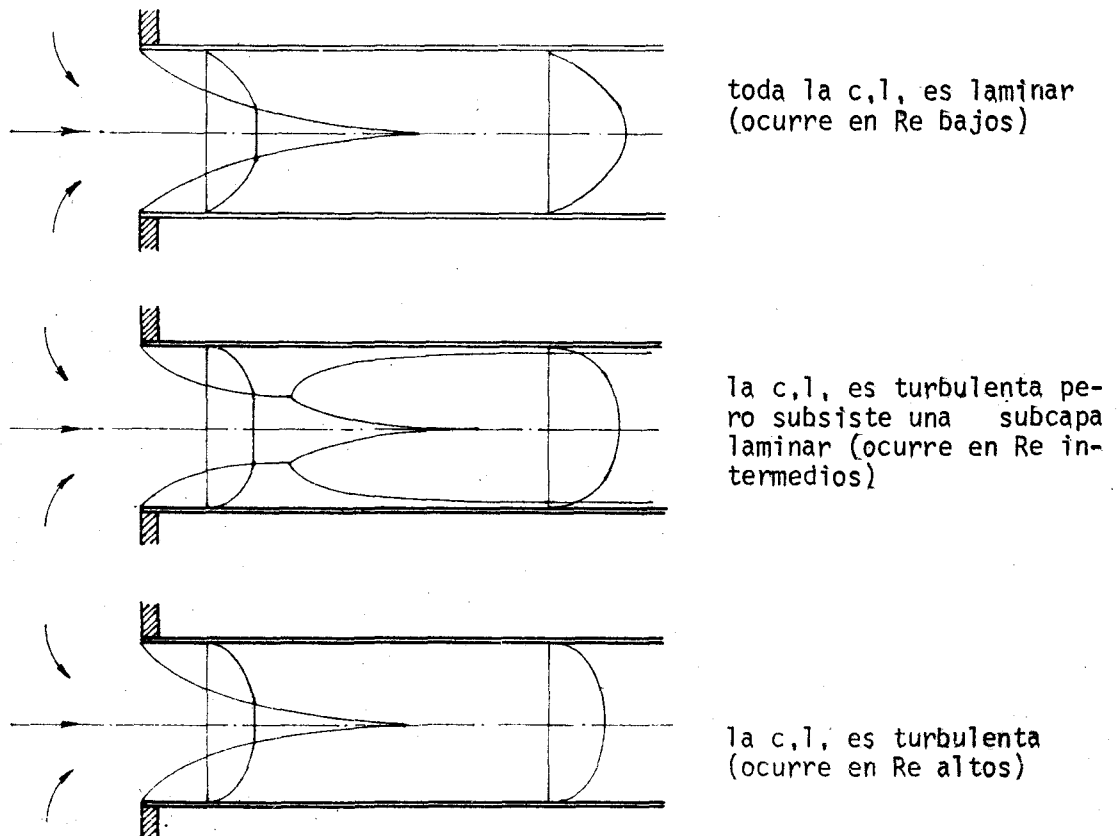
$$\tau_0 = 0,029 \frac{\rho v_0^2}{Re_x^{1/5}} \dots\dots (59')$$

Expresión de  $C_D$ .- Análogamente

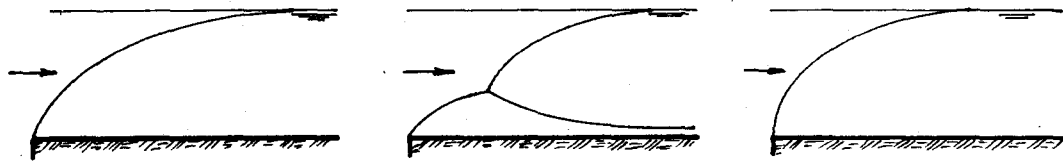
$$C_D = 0,036 \frac{\rho v_0^2 \ell}{Re_\ell^{1/5}} \dots\dots (60')$$

Comentarios

- 1.- El procedimiento descrito para obtener las expresiones de  $\delta$ ,  $\tau_0$  y  $C_D$  es el que usualmente se aplica en los textos de Mecánica de Fluidos. Pueden haber, sin embargo, diferencias en los coeficientes numéricos según la ley de velocidades que se elija dentro de la c.l.
- 2.- El estudio de la c.l. para placas rugosas es bastante más complejo que para placas lisas y no es tratado aquí.
- 3.- El desarrollo de la c.l. descrito en el apartado 7.2 (punto f) se refiere a una c.l. bidimensional, como la que tiene lugar en una placa plana. El desarrollo de la c.l. tridimensional, como la que tiene lugar en la entrada de una tubería es como sigue.



Análogamente, a la entrada de un canal el desarrollo de la c.l. es como se indica.



c.l. laminar

c.l. turbulenta  
con subcapa laminar

c.l. turbulenta

(la distancia en la cual se desarrolla la c.l. se denomina longitud de desarrollo de la c.l. y su valor depende del  $Re$ ),

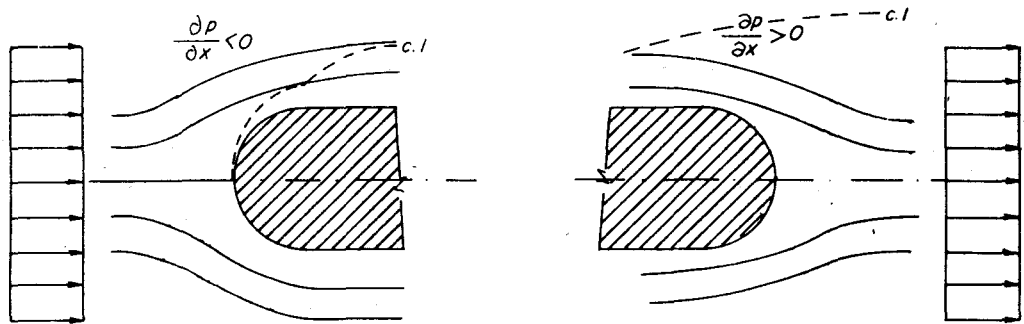
- 4.- Para una determinada tubería o canal el valor de la rugosidad absoluta es único ( $K$ ), pero el espesor de la subcapa laminar ( $\delta_0$ ) es variable con los parámetros del flujo, por lo que la pared de la tubería o canal puede tener uno de los tres comportamientos: de contorno liso, de contorno rugoso o de contorno en transición. Estos conceptos son utilizados en el apartado 8.3,

### Resistencia de presión

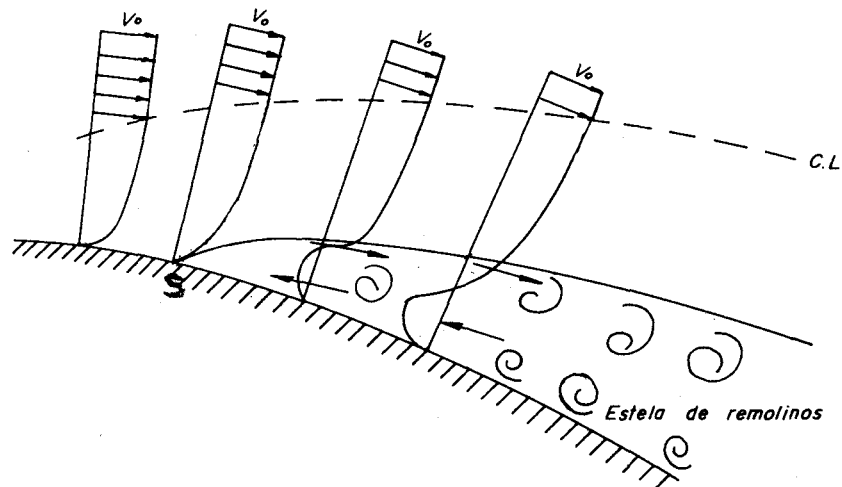
Supongamos nuevamente un flujo potencial de velocidad uniforme  $v_0$  pero ahora en un plano horizontal, y un cuerpo interpuesto en ese flujo. Refiramos el análisis siempre a la parte superior del cuerpo.

En la parte frontal y cerca al cuerpo las l.c. se juntan, la velocidad aumenta y la presión disminuye, es decir, hay un gradiente negativo de presión. La capa límite aumenta su espesor  $\delta$  lentamente,

En la parte posterior y siempre cerca al cuerpo las l.c. se separan, pues ha de restablecerse aguas abajo el flujo potencial uniforme; la velocidad disminuye y la presión aumenta, es decir, hay un gradiente positivo de presión. La capa límite aumenta su espesor  $\delta$  rápidamente).



Como dentro de la c.l. actúa sobre el fluido la fuerza de frenado  $\leftarrow$ , más esta nueva resistencia de presión o de forma, también  $\leftarrow$ , la consecuencia es que la cantidad de movimiento de la c.l. disminuye. Llega un momento (esto es lo que normalmente ocurre) que las partículas pegadas a la pared son impedidas de seguir avanzando. El punto en que esto ocurre (S) marca la separación de la c.l. que correspondía a la frontera del cuerpo. A este fenómeno se llama separación; S es el punto de separación y aguas abajo de él el fluido próximo a la pared es obligado a cambiar de dirección apareciendo una contracorriente.



La región por debajo de la l.c. que se separa se llama estela de remolinos.

La separación y la estela de remolinos son indeseables porque implican que el fluido está sufriendo una resistencia de presión importante.

Esta resistencia de presión en la parte posterior del cuerpo, es adicional a la resistencia de presión que encuentra el fluido en el frente del cuerpo.

### 7.3 Arrastre

Decir que el fluido sufre una resistencia de superficie y otra resistencia de presión, equivale a decir que el fluido ejerce fuerzas iguales y contrarias sobre el cuerpo.

Por lo tanto, ya sea que el cuerpo esté en reposo y el fluido en movimiento o que el cuerpo esté en movimiento y el fluido en reposo, en cualquiera

de las dos situaciones, se puede decir que el fluido ejerce sobre el cuerpo un empuje dinámico en la dirección del movimiento, que se llama arrastre, y que es la suma de dos componentes:

$$\text{arrastre} = \text{arrastre de superficie (por fricción)} + \text{arrastre de forma (por presión)}$$

$$D = D_f + D_p$$

Estas fuerzas pueden expresarse en la forma:

$$\left. \begin{aligned} D_f &= C_{Df} \rho \frac{v_0^2}{2} A_f \\ D_p &= C_{Dp} \rho \frac{v_0^2}{2} A_p \end{aligned} \right\} \dots (61)$$

$A_f$  ... área superficial sobre la que actúa la fricción

$A_p$  ... área transversal del cuerpo, normal a  $v_0$ .

En la práctica es muy raro que se presenten ambos efectos de manera significativa al mismo tiempo, siendo lo más común que uno de los efectos predomine sobre el otro. Así, en cuerpos de forma aerodinámica o hidrodinámica predomina el arrastre de superficie, y en cuerpos que no tienen esta forma (edificios, chimeneas, torres, etc) predomina el arrastre de presión.

Esto hace que en vez de usar las dos fórmulas por separado sea práctica común emplear una sola fórmula:

$$D = C_D \rho \frac{v_0^2}{2} A \quad \dots (62)$$

$D$  ... arrastre total o simplemente arrastre

$C_D$  ... coeficiente de arrastre, adimensional, determinado experimentalmente para diferentes formas de cuerpos

$\rho$  ... densidad del fluido

$v_0$  ... velocidad uniforme del fluido

$A$  ... área transversal del cuerpo, normal a  $v_0$ .

#### 7.4 Sustentación

Conforme se acaba de describir, los fluidos en movimiento ejercen sobre los cuerpos una fuerza de arrastre ( $D$ ) en la dirección y sentido de  $v_0$ .

Aparte de esta fuerza los fluidos ejercen en general otra fuerza llamada sustentación ( $L$ ) que es resultado del fenómeno de presión y que es normal a  $v_0$ . Se expresa en la forma:

$$L = C_L \rho \frac{v_0^2}{2} A \quad \dots (63)$$

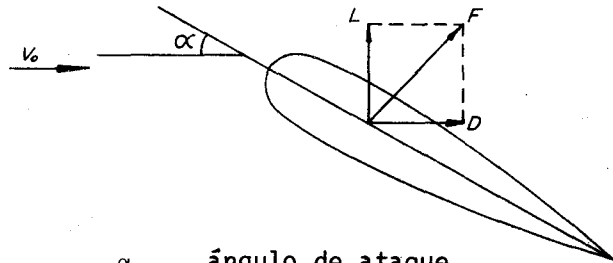
$L$  ... sustentación

$C_L$  ... coeficiente de sustentación, adimensional, determinado experimentalmente

$\rho$ ,  $v_0$ ,  $A$  ... el mismo significado anterior.

Conviene aclarar que la sustentación no incluye el empuje hidrostático que actúa de abajo hacia arriba en cualquier cuerpo sumergido en un líquido.

El esquema muestra las fuerzas de arrastre y sustentación en un perfil aerodinámico, tipo ala de avión.



$\alpha$  ... ángulo de ataque  
 $D$  ... arrastre  
 $L$  ... sustentación  
 $F$  ... fuerza total sobre el cuerpo

Valores de  $C_D$  y  $C_L$ .- Estos coeficientes son adimensionales, se determinan experimentalmente y dependen de la geometría del cuerpo y del número de Reynolds. Nótese que tienen la forma del coeficiente de presión definido en el apartado 5.4. Algunos valores de  $C_D$  aparecen en el Apéndice A2.

### 7.5 Ejemplos de aplicación

Ejemplo 71.- Una placa plana de 1.20 x 1.20 m se mueve a una velocidad de 6.5 m/sg en dirección normal a su plano. Determinar la resistencia que se opone al movimiento, cuando se mueve, a) a través del aire a 20°C y presión atmosférica normal, b) a través del agua a 15°C.

a) del Apéndice A2,  $C_D = 1.16$

$$D = C_D \rho \frac{v^2}{2} A = 1.16 \times \frac{1.200}{9.8} \times \frac{6.5^2}{2} \times 1.44 = 4.3 \text{ kg}$$

b)  $D = C_D \rho \frac{v^2}{2} A = 1.16 \times 102 \times \frac{6.5^2}{2} \times 1.44 = 3,600 \text{ kg}$

Ejemplo 72.- Un hilo de cobre de gran longitud y 12 mm de diámetro está tensado y expuesto a un viento de 27 m/sg, que incide normalmente al eje del hilo. Calcular la resistencia por metro de longitud.

$$\text{Para aire a } 20^\circ\text{C} \quad \rho = 0.1224 \frac{\text{kg-sg}^2}{\text{m}^4}$$

$$v = 1.488 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{sg}}$$

$$R_e = \frac{Vd}{\nu} = \frac{27 \times 0.012}{1.488 \times 10^{-5}} = 21,800$$

del Apéndice A2,  $C_D = 1.30$

$$D = C_D \rho \frac{V^2}{2} A = 1.30 \times 0.1224 \times \frac{27^2}{2} (1 \times 0.012)$$

$$= 0.696 \text{ kg.}$$

Ejemplo 73.- Una bola de acero de 3 mm de diámetro y peso específico 7.87 gr/cm<sup>3</sup> cae a través de una masa de aceite de gravedad específica 0.908 y viscosidad cinemática  $1.46 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sg}$ . ¿Cuál es la velocidad límite alcanzada por la bola?

Las fuerzas que actúan sobre la bola de acero son: el peso propio hacia abajo, el empuje hidrostático hacia arriba y la resistencia hacia arriba.

Cuando se alcance la velocidad constante:  $\Sigma F = 0$

peso = empuje + resistencia

$$\gamma_C V_0 = \gamma_{ac} \cdot V_0 + C_D \rho \frac{v^2}{2} \cdot A$$

$$\text{peso} = \gamma_C V_0 = 7,870 \times \frac{4}{3} \pi (0.0015)^3 = 0.000111 \text{ kg.}$$

$$\text{empuje} = \gamma_{ac} \cdot V_0 = 908 \times \frac{4}{3} \pi (0.0015)^3 = 0.000013 \text{ kg}$$

$$\text{resistencia} = C_D \rho \frac{v^2}{2} A = C_D \frac{908}{9.8} \frac{v^2}{2} \cdot \pi (0.0015)^2 = 0.000327 C_D \cdot v^2 \text{ kg.}$$

reemplazando:

$$0.000111 = 0.000013 + 0.000327 C_D v^2$$

$$111 = 13 + 327 C_D v^2$$

$$C_D \cdot v^2 = 0.30$$

Después de varios tanteos:

$$C_D = 8.5$$

$$v = \sqrt{\frac{0.30}{8.5}} = 0.188$$

$$R_e = \frac{vd}{\nu} = \frac{0.188 \times 0.003}{1.46 \times 10^{-4}} = 3.86$$

Apéndice A2 ...  $C_D = 8.5$  correcto.



por lo tanto la velocidad límite es 0.19 m/sg.

**Ejemplo 74.-** Deducir la ley de Stokes referente al problema de la sedimentación.

En su estudio de la sedimentación, Stokes asimiló las partículas sólidas - ( $\gamma_s$ ) a pequeñas esferitas de diámetro ( $d$ ), admitiendo además que caen con una velocidad uniforme ( $v$ ) con respecto al líquido en reposo ( $\gamma$ ). El problema consiste en deducir la fórmula que proporcione la velocidad con que sedimentan las partículas.

Cuando las partículas alcanzan la velocidad uniforme:  $\Sigma F = 0$

peso = empuje + resistencia

$$\text{peso} = \gamma_s V_0 = \gamma_s \frac{1}{6} \pi d^3$$

$$\text{empuje} = \gamma V_0 = \gamma \frac{1}{6} \pi d^3$$

$$\text{resistencia} = C_D \rho \frac{v^2}{2} A$$

la velocidad de sedimentación es sumamente pequeña, de tal manera que se puede suponer  $Re = \frac{vd}{\nu} < 0.6$  y en estas condiciones  $C_D = \frac{24}{Re}$  (ver Apéndice A2). De manera que:

$$\begin{aligned} \text{resistencia} &= \left(\frac{24}{Re}\right) (\rho) \left(\frac{v^2}{2}\right) \left(\pi \frac{d^2}{4}\right) = \frac{24 v}{vd} \cdot \rho \cdot \frac{v^2}{2} \cdot \pi \frac{d^2}{4} \\ &= 3 \pi d \mu v \end{aligned}$$

y reemplazando:

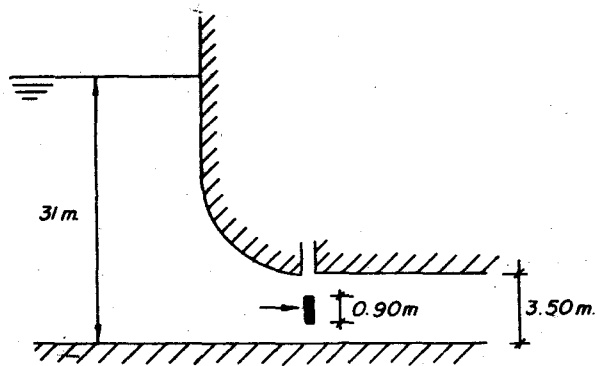
$$\gamma_s \frac{1}{6} \pi d^3 = \gamma \frac{1}{6} \pi d^3 + 3 \pi d \mu v$$

$$3 \pi d \mu v = \frac{1}{6} \pi d^3 (\gamma_s - \gamma)$$

$$v = \frac{1}{18} \frac{d^2}{\mu} (\gamma_s - \gamma) \quad \dots \quad (64)$$

**Ejemplo 75.-** El túnel de la figura descarga a la atmósfera bajo una carga de 31 m a través de una sección de forma rectangular de dimensiones 4.60 x 3.50. Para una obturación provisional del paso del agua se usan "agujas" construidas con secciones laminadas de acero con longitud igual al ancho de la sección y de 0.90 m de altura, las cuales se dejan caer sobre ranuras verticales en las paredes a los lados del túnel.

Determinar la fuerza de arrastre sobre una aguja localizada a la mitad de la altura de la sección de entrada y compararla con la producida por la presión hidrostática resultante una vez que el túnel quede completamente obturado.



Ecuación de Bernoulli:

$$31 = 1.75 + \frac{v_0^2}{2g}$$

$$v_0 = 23.94 \text{ m/s}$$

Para el agua a 15°C:

$$\rho = 101.88 \frac{\text{kg} \cdot \text{sg}^2}{\text{m}^4}$$

$$\nu = 1.142 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{sg}}$$

$$Re = \frac{v_0 Y}{\nu} = \frac{23.94 \times 0.90}{1.142 \times 10^{-6}} = 1.9 \times 10^7$$

del Apéndice A2:  $C_D \approx 1.25$  para  $\frac{X}{Y} = \frac{4.6}{0.9} = 5$

$$\begin{aligned} \text{fuerza de arrastre} &= C_D \rho \frac{v_0^2}{2} A \approx 1.25 \times 101.88 \times \frac{(23.94)^2}{2} \times 0.90 \times 4.60 \\ &\approx 151,084 \end{aligned}$$

La presión hidrostática media, una vez obturada la sección vale:

$$\bar{p} = \gamma \bar{h} = 1,000 \times 29,25 = 29,250 \text{ kg/m}^2$$

por lo que el empuje hidrostático resulta:

$$P = \bar{p} A = 29,250 \times 0.90 \times 4.60 = 121,095 \text{ kg.}$$

es decir, menor que el arrastre dinámico.

## CAPITULO 8: FLUJO PERMANENTE EN CONDUCTOS A PRESIÓN

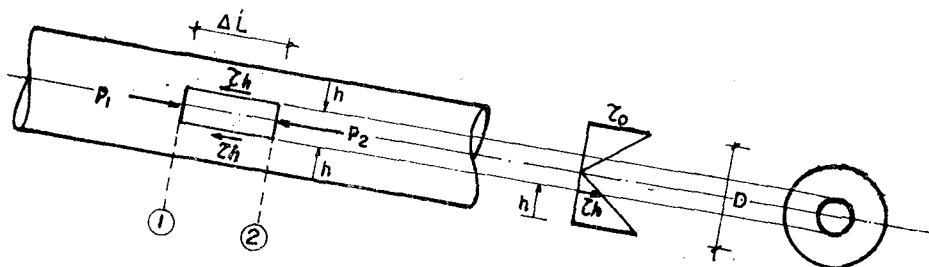
En este capítulo se deducen las fórmulas que gobiernan el flujo permanente en conductos a presión. Se describe también la manera de solucionar los problemas más comunes del flujo de líquidos en tuberías, especialmente el agua.

### 8.1 Distribución del esfuerzo cortante

En el esquema, para el cuerpo libre cilíndrico que se muestra, se cumple en la dirección del movimiento:

$$\Sigma F = m \cdot a = 0$$

porque siendo el flujo uniforme, la aceleración es nula.



Las fuerzas son:

$$\text{componente del peso} = \gamma \cdot \Delta V_0 = \gamma \pi \left(\frac{D}{2} - h\right)^2 \Delta L \sin \theta$$

$$\text{diferencia de empujes} = (p_1 - p_2) \pi \left(\frac{D}{2} - h\right)^2$$

$$\text{fuerza de corte} = \tau_h 2\pi \left(\frac{D}{2} - h\right) \Delta L$$

reemplazando:

$$\gamma \pi \left(\frac{D}{2} - h\right)^2 \Delta L \sin \theta + (p_1 - p_2) \pi \left(\frac{D}{2} - h\right)^2 - \tau_h 2\pi \left(\frac{D}{2} - h\right) \Delta L = 0$$

dividiendo entre  $\gamma \pi \left(\frac{D}{2} - h\right)$ :

$$\left(\frac{D}{2} - h\right) \Delta L \sin \theta + \left(\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma}\right) \left(\frac{D}{2} - h\right) = \frac{2 \tau_h \Delta L}{\gamma}$$

pero  $\Delta L \sin \theta = Z_1 - Z_2$ :

$$\left(\frac{D}{2} - h\right) \left[ (Z_1 - Z_2) + \left(\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma}\right) \left(\frac{D}{2} - h\right) \right] = \frac{2 \tau_h \Delta L}{\gamma}$$

$$\left(\frac{D}{2} - h\right) \left(Z_1 + \frac{P_1}{\gamma}\right) - \left(Z_2 + \frac{P_2}{\gamma}\right) = \frac{2 \tau_h \Delta L}{\gamma}$$

pero el corchete representa la caída de la línea de energía, de modo que si,

S = pérdida de energía por fricción por unidad de longitud  
 el corchete es: S . ΔL

$$\left(\frac{D}{2} - h\right) S \Delta L = \frac{2 \tau_h \Delta L}{\gamma}$$

$$\tau_h = \gamma \left(\frac{D}{4} - \frac{h}{2}\right) S \dots (65)$$

en la pared el esfuerzo de corte es máximo:

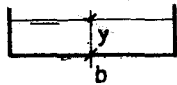
$$\tau_o = \gamma \frac{D}{4} S \dots (66)$$

Otra forma de escribir la (65) es:

$$\tau_h = \tau_o \left(1 - \frac{h}{r}\right) \quad r = \text{radio de la tubería}$$

que se usa para dibujar la variación del esfuerzo cortante en una sección de la tubería (ver figura última). Esta distribución es válida tanto para flujo laminar como para flujo turbulento, pues no se ha impuesto ninguna restricción al respecto.

Siguiendo un procedimiento similar se deduce la ley de distribución del esfuerzo cortante en la sección de un canal. Para ello es necesario introducir el concepto de radio hidráulico (R) definido como la relación entre el área mojada de la sección y el perímetro mojado. Para un canal muy ancho:



$$R = \frac{A}{P} = \frac{by}{b + 2y} \approx \frac{by}{b} = y$$

Se obtiene:

$$\tau_h = \gamma (y - h) S \dots (65')$$

$$\tau_o = \gamma R S \dots (66')$$

## 8.2 Distribución de velocidades en el flujo laminar

Si el flujo es laminar se cumple la ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau_h = \mu \frac{d v_h}{d h}$$

utilizando la (65):

$$\gamma \left( \frac{D}{4} - \frac{h}{2} \right) S = \nu \frac{d v_h}{dh}$$

dividiendo entre  $\rho$ :

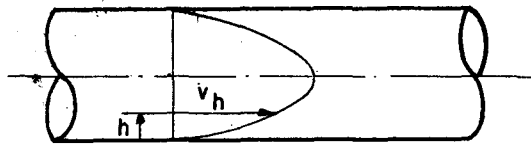
$$g \left( \frac{D}{4} - \frac{h}{2} \right) S = \nu \frac{d v_h}{dh}$$

$$d v_h = \frac{g S}{\nu} \left( \frac{D}{4} - \frac{h}{2} \right) dh$$

$$v_h = \frac{g S}{\nu} \left( \frac{Dh}{4} - \frac{h^2}{4} \right) + C \quad \left\{ \begin{array}{l} h = 0 \\ v_h = 0 \\ C = 0 \end{array} \right.$$

$$v_h = \frac{g S}{\nu} \left( \frac{Dh}{4} - \frac{h^2}{4} \right) \dots\dots (67)$$

es decir, en una sección del tubo la velocidad se distribuye según una parábola:



La velocidad es máxima en el centro:

$$v_c = \frac{g S}{\nu} \frac{D^2}{16}$$

y la velocidad media vale:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\int_0^{D/2} v_h \cdot dA}{A} = \frac{4}{\pi D^2} \int_0^{D/2} v_h \cdot 2\pi \left( \frac{D}{2} - h \right) dh$$

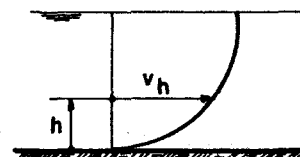
.....  
.....

$$V = \frac{g S D^2}{32 \nu} \dots\dots (68) \text{ es decir un medio de la velocidad en el centro,}$$

Siguiendo un procedimiento similar se deduce la ley de distribución de la velocidad en un canal muy ancho:

$$v_h = \frac{g S}{\nu} \left( yh - \frac{h^2}{2} \right) \dots (67')$$

$$y \quad V = \frac{g S R^2}{3 \nu} \dots\dots (68')$$



### 8.3 Distribución de velocidades en el flujo turbulento

Es necesario hacer el estudio por separado, para contornos lisos y contornos rugosos. Se hace notar que en los esquemas ilustrativos la escala vertical está bastante aumentada.

#### 8.3.1 Contornos hidráulicamente lisos

Se parte de las siguientes hipótesis:

- \* se forma en la pared una subcapa laminar de espesor  $\delta$  que cubre la rugosidad de la pared  $K$  (en el capítulo 7 el espesor de la subcapa laminar se designó con  $\delta_0$ ).



- \* fuera de la subcapa laminar el flujo es turbulento
- \* en el flujo turbulento la ley del esfuerzo cortante es, según los estudios sobre todo de Prandtl:

$$\tau_h = \rho L^2 \left( \frac{d v_h}{dh} \right)^2 \quad \dots \quad (69)$$

$L$  = longitud de mezcla, definida como la distancia media que tiene que recorrer una partícula para transferir su exceso de cantidad de movimiento.

$L = \chi h \left( 1 - \frac{h}{D/2} \right)^{1/2}$ , expresión que satisface la exigencia que  $L$  sea cero en la pared y en el eje del tubo.

$\chi$  = constante de Von Karman = 0,40

$h > \delta$  En la (69):

$$\sqrt{\tau_h / \rho} = \chi h \left( 1 - \frac{h}{D/2} \right)^{1/2} \frac{d v_h}{dh}$$

$\tau_h$  según (65):

$$\sqrt{\frac{\gamma \left( \frac{D}{4} - \frac{h}{2} \right) S}{\rho}} = \quad "$$

$$\sqrt{g \frac{D}{4} S \left( 1 - \frac{h}{D/2} \right)} = \quad "$$

$$\sqrt{g \frac{D}{4} S} = \chi h \frac{d v_h}{dh}$$

$$d v_h = \frac{\sqrt{g \frac{D}{4} S}}{\chi} \frac{dh}{h}$$

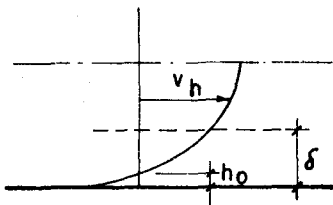
empleando la (66):

$$\sqrt{g \frac{D}{4} S} = \sqrt{\frac{\gamma \frac{D}{4} S}{\rho}} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = v_* \dots \text{velocidad de corte}$$

$$d v_h = \frac{v_*}{x} \frac{dh}{h}$$

$$v_h = \frac{v_*}{x} \ln h + C$$

esta ecuación no es válida en la pared pues para  $h = 0$   $\ln h = -\infty$ . Por eso, se designa con  $h_0$  la distancia hasta donde es válida:



$$\left. \begin{array}{l} h = h_0 \\ v_h = 0 \end{array} \right\} C = -\frac{v_*}{x} \ln h_0$$

$$v_h = \frac{v_*}{x} \ln \frac{h}{h_0} \dots (70)$$

$h \leq \delta$  Dentro de la subcapa laminar se cumple la ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau_h = \mu \frac{d v_h}{dh}$$

y se admite que  $\tau_h = \tau_0$

$$\frac{d v_h}{dh} = \frac{\tau_h}{\mu} = \frac{\tau_0}{\mu} = \frac{\tau_0/\rho}{\nu} = \frac{v_*^2}{\nu}$$

$$v_h = \frac{v_*^2}{\nu} h + C \quad \left\{ \begin{array}{l} h = 0 \\ v_h = 0 \\ C = 0 \end{array} \right.$$

$$v_h = \frac{v_*^2}{\nu} h \dots (71)$$

Para  $h = \delta$  son válidas las dos ecuaciones (70) y (71):

$$\left. \begin{array}{l} v_\delta = \frac{v_*}{x} \ln \frac{\delta}{h_0} \\ v_\delta = \frac{v_*^2}{\nu} \delta \end{array} \right\} \frac{v_*^2}{\nu} \delta = \frac{v_*}{x} \ln \frac{\delta}{h_0}$$

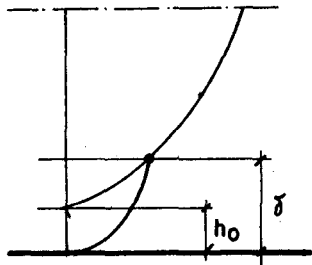
Prandtl demostró mediante el análisis y la experimentación que

$$\frac{v_* \delta}{\nu} = 11.6$$

... (72) Reynolds de corte referido a  $\delta$ .

reemplazando:

$$11.6 v_* = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{\delta}{h_0}$$



$$\ln \frac{\delta}{h_0} = 11.6 \chi = 11.6 \times 0.40 = 4.64$$

$$h_0 = \frac{\delta}{104}$$

reemplazando en la (70):

$$v_h = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{104 h}{\delta} \quad \dots (73)$$

La velocidad media vale:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\int_{\delta}^{D/2} v_h dA}{A} = \frac{4}{\pi D^2} \int_{\delta}^{D/2} v_h 2\pi \left(\frac{D}{2} - h\right) dh$$

.....  
.....

$$V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{11.6 D}{\delta} \quad \dots (74)$$

y en función del radio hidráulico:  $V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{46.4 R}{\delta} \quad \dots (75)$

(nótese cómo por simplicidad se desprecia en la integral el pequeño flujo de la subcapa laminar).

Siguiendo un procedimiento similar se deduce la distribución de la velocidad y la velocidad media en un canal muy ancho:

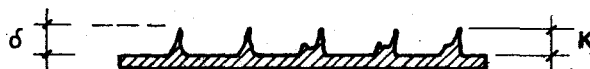
$$v_h = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{104 h}{\delta} \quad \dots (73')$$

$$V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{38.3 R}{\delta} \quad \dots (75')$$

### 8.3.2 Contornos hidráulicamente rugosos

Se parte de las siguientes hipótesis:

- \* la altura de las asperezas es tan grande que no permite que se forme la subcapa laminar,





\* siguen siendo aplicables las fórmulas sugeridas por Prandtl para el esfuerzo cortante.

Se puede entonces partir de la ecuación (70):

$$v_h = \frac{v_*}{X} \ln \frac{h}{h_0}$$

Nikuradse estudió con minuciosidad los conductos de paredes rugosas. Utilizó tubos con rugosidad artificial uniforme obtenida con granos de arena. Resultado de estos estudios es que la ecuación última es válida hasta

$$h_0 = \frac{K}{30} .$$

Reemplazando:

$$v_h = \frac{v_*}{X} \ln \frac{30 h}{K} \dots\dots (76)$$

La velocidad media vale:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\int_{h_0}^{D/2} v_h dA}{A} = \frac{4}{\pi D^2} \int_{h_0}^{D/2} v_h \cdot 2 \pi \left(\frac{D}{2} - h\right) dh$$

.....  
.....

$$V = \frac{v_*}{X} \ln \frac{3.35 D}{K} \dots\dots (77)$$

y en función del radio hidráulico:  $V = \frac{v_*}{X} \ln \frac{13.4 R}{K} \dots\dots (78)$

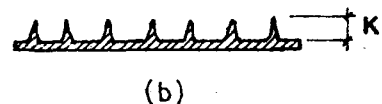
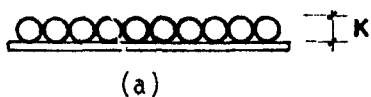
(aquí también se aprecia que por simplicidad se desprecia en la integral el pequeño flujo próximo a la pared).

Siguiendo un procedimiento similar se deduce la distribución de velocidades y la velocidad media en un canal muy ancho:

$$v_h = \frac{v_*}{X} \ln \frac{30 h}{K} \dots\dots (76')$$

$$V = \frac{v_*}{X} \ln \frac{11.0 R}{K} \dots\dots (78')$$

Los esquemas que siguen se refieren a la rugosidad artificial de Nikuradse (a) y a la rugosidad real de las tuberías comerciales (b).



en la rugosidad artificial K se refiere al diámetro de los granos de arena y en la rugosidad comercial a la altura media de las asperezas.

## 8.4 Pérdida de carga por fricción en el flujo laminar

La pérdida de carga por fricción en tuberías se determina con la fórmula Darcy-Weisbach:

$$h_f = f \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad \dots (79)$$

consistiendo el problema en establecer el valor del coeficiente de fricción  $f$ .

De la ecuación (68):  $v = \frac{g D^2 S}{32 \mu}$

$$S = \frac{32 \mu v}{\gamma D^2}$$

$$h_f = \frac{32 \mu v L}{\gamma D^2} \quad \dots (80) \text{ ecuación Hagen - Poiseuille.}$$

adecuándola a la forma de la (79):

$$h_f = \frac{64}{\frac{\rho v D}{\mu}} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{64}{Re} \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

$$\text{es decir, } f = \frac{64}{Re} \quad \dots (81)$$

válida para cualquier tubería en que el flujo es laminar, es decir con números de Reynolds de hasta 2,300.

Para canales muy anchos se puede escribir:

$$h_f = S L$$

y tomar  $S$  de la ecuación (68'):

$$h_f = \frac{3 \nu \gamma L}{g R^2} \quad \dots (80')$$

## 8.5 Pérdida de carga por fricción en el flujo turbulento

### 8.5.1 Fórmula de Colebrook-White

Por definición,  $h_f = S L$

según la (66):  $h_f = \frac{4 \tau_0}{\gamma D} L$

comparándola con la (79):

$$\frac{4 \tau_0}{\gamma D} L = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

$$\tau_0 = f \frac{\gamma}{g} \frac{v^2}{8}$$

$$\tau_0 = f \cdot \rho \frac{V^2}{8} \quad \dots \quad (82)$$

reemplazando en la velocidad de corte:

$$v_* = \sqrt{\tau_0 / \rho} = \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{8}} \cdot V \quad \dots \quad (83)$$

o bien:  $V = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{f}} v_* \quad \dots \dots \dots (83')$

Recordemos la (74) válida para contorno hidráulicamente liso,

$$V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{11,6 D}{\delta}$$

pero  $\frac{v_* \delta}{\nu} = 11,6$

$$V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{v_* D}{\nu}$$

con la (83):  $V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{8}} \frac{V D}{\nu}$

$$V = \frac{v_*}{\chi} \ln 0,35 Re \sqrt{f}$$

con la (83')  $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{f}} v_* = \frac{v_*}{0,40} \ln 0,35 Re \sqrt{f}$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0,88 \ln 0,35 Re \sqrt{f}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0,88 \ln Re \sqrt{f} - 0,92$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2,03 \log Re \sqrt{f} - 0,92$$

ajustando los coeficientes a los valores obtenidos experimentalmente por Nikuradse:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log Re \sqrt{f} - 0,8$$

o bien:  $\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{Re \sqrt{f}}{2,51} \quad \dots \dots (84)$

válida para tuberías de paredes lisas.

Recordemos ahora la (77) válida para contorno hidráulicamente rugoso:

$$v = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{3.35 D}{K}$$

con la (83')  $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{f}} v_* = \frac{v_*}{0.40} \ln \frac{3.35 D}{K}$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.88 \ln \frac{3.35 D}{K}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.88 \ln \frac{D}{K} + 1.06$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.03 \log \frac{D}{K} + 1.06$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.03 \log \frac{D}{2K} + 1.67$$

ajustando los coeficientes a los valores obtenidos experimentalmente por Nikuradse:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{D}{2K} + 1.74$$

o bien:  $\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{3.71 D}{K} \dots\dots\dots (85)$

válida para flujo altamente turbulento en tubería rugosa.

Luego se hicieron investigaciones en tuberías comerciales habida cuenta que la rugosidad comercial es irregular a diferencia de la rugosidad artificial de Nikuradse que es uniforme. Las diferencias se compatibilizaron asignando a cada material comercial una de las rugosidades artificiales. - Desde el punto de vista práctico el impase ha quedado definitivamente resuelto con la tabla del Apéndice A3.

Cuando una tubería trabaja en la zona de transición entre tubo liso y tubo rugoso altamente turbulento rige una fórmula que resulta de combinar las ecuaciones (84) y (85):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{K/D}{3.71} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right) \dots\dots (86)$$

conocida como fórmula de Colebrook-White.

En ella se puede apreciar que si el tubo trabaja como liso la rugosidad - pierde significación, se ignora el primer término del paréntesis y resulta la (84); y que si el tubo trabaja como rugoso con flujo altamente turbulento el  $Re$  pierde significación, se ignora el segundo término y resulta la (85).

Si la tubería trabaja en la zona de transición ambos parámetros intervienen en su comportamiento y rige la (86).

Diagramas.- Con base en estos resultados ha sido construido el Diagrama de Moody que aparece en el Apéndice A4 y que sirve para determinar  $f$  cuando se conoce el caudal. También el diagrama de Johnson-Rouse que aparece en el Apéndice A5 y que sirve para determinar  $f$  cuando el caudal es desconocido.

Concepto de rugosidad.- Observando el diagrama de Moody se puede notar cómo en una misma tubería (un cierto valor de la rugosidad relativa  $K/D$ ) su contorno puede tener unas veces comportamiento de liso, otras veces de rugoso y otras transicional.

Con esto debe quedar completamente aclarado el por qué del empleo de los términos "contorno hidráulicamente liso", "contorno hidráulicamente rugoso" y "contorno en transición".

Para las rugosidades relativas muy grandes no cabe la posibilidad de comportamiento liso porque no llega a formarse la subcapa laminar.

Comentario.- Cuando no se conoce el caudal no se puede determinar el  $Re$  para hallar  $f$  con el diagrama de Moody, a menos que se proceda por tanteos. Esto es obviado con el empleo del diagrama de Johnson-Rouse, en el cual el valor del eje X se procederá a justificar enseguida:

$$Re = \frac{V D}{\nu}$$

de aquí, 
$$V^2 = \frac{Re^2 \nu^2}{D^2}$$

que reemplazado en la fórmula de Darcy-Weisbach da:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = f \frac{L}{D} \frac{Re^2 \nu^2}{2g D^2}$$

despejando: 
$$Re^2 \cdot f = \frac{2g D^3 h_f}{\nu^2 L}$$

$$Re \sqrt{f} = \frac{D}{\nu} \sqrt{\frac{2g D h_f}{L}}$$

Los términos del segundo miembro son todos conocidos o se pueden determinar como ocurre con  $h_f$ ,

$$h_f = \left( Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \right) - \left( Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} \right)$$

### 8.5.2 Fórmula de Chezy

Para contorno hidráulicamente liso rigen las ecuaciones:

$$(75) \text{ para tuberías, } V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{46.4 R}{\delta}$$

$$(75') \text{ para canales, } V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{38.3 R}{\delta}$$

la única diferencia está en el valor del coeficiente numérico, de manera que se puede conciliar, escribir el valor medio:

$$V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{42 R}{\delta} \dots\dots (87)$$

y emplear esta única fórmula para tuberías y canales de contorno hidráulicamente liso.

Análogamente, para contorno hidráulicamente rugoso rigen:

$$(78) \text{ para tuberías, } V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{13.4 R}{K}$$

$$(78') \text{ para canales, } V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{11.0 R}{K}$$

de modo que se puede conciliar escribiendo el valor medio del coeficiente numérico:

$$V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{12 R}{K} \dots\dots (88)$$

y emplear esta única fórmula para tuberías y canales de contorno hidráulicamente rugoso.

Por último, para tuberías y canales trabajando en la zona de transición se puede emplear la fórmula que resulte de un arreglo de las dos últimas:

$$V = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{6 R}{\frac{K}{2} + \frac{\delta}{7}} \dots (89)$$

En este punto son aplicables las mismas explicaciones que fueron dadas con ocasión de la fórmula (86) de Colebrook-White.

Reemplazando  $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma R S}{\rho}} = \sqrt{g R S}$

se obtiene:  $V = \frac{\sqrt{g R S}}{\chi} \ln \frac{6 R}{\frac{K}{2} + \frac{\delta}{7}}$

$$V = \frac{\sqrt{g}}{0.40} \ln \frac{6 R}{\frac{K}{2} + \frac{\delta}{7}} \cdot \sqrt{R S}$$

$$V = 18 \log \frac{6 R}{\frac{K}{2} + \frac{\delta}{7}} \cdot \sqrt{R S}$$

es decir:  $V = C \sqrt{R S} \dots (90)$  ecuación de Chezy.

$$C = 18 \log \frac{6 R}{\frac{K}{2} + \frac{\delta}{7}} \dots \text{coeficiente de Chezy (L}^{1/2} \text{T}^{-1}\text{)}$$

V ... velocidad media

R ... radio hidráulico de la tubería o el canal

S ... pendiente de la línea de energía o pérdida de energía por unidad de longitud =  $\frac{h_f}{L}$ .

Concepto de rugosidad.- Un contorno se comporta, como hidráulicamente liso cuando:

$$K \leq 0.4 \delta \dots (91)$$

$$\delta \quad \frac{V_* K}{\nu} \leq 5$$

como hidráulicamente rugoso cuando:

$$K \geq 6 \delta \dots (92)$$

$$\delta \quad \frac{V_* K}{\nu} \geq 70$$

y en transición cuando:

$$0.4 \delta < K < 6 \delta \dots (93)$$

$$\delta \quad 5 < \frac{V_* K}{\nu} < 70$$

Los valores de K se obtienen del Apéndice A3.

### 8.5.3 Asuntos conexos

Caso de tuberías no circulares.- La pérdida de carga en las tuberías no circulares se puede evaluar con la fórmula de Darcy-Weisbach, a condición de usar el concepto de radio hidráulico en reemplazo del diámetro.

$$R = \frac{A}{P} = \frac{\frac{\pi D^2}{4}}{\pi D} = \frac{D}{4}$$

es decir, 
$$h_f = f \frac{L}{4 R} \frac{V^2}{2g}$$

$$R_e = \frac{V 4 R}{\nu}$$

$$\frac{K}{D} = \frac{K}{4 R}$$

Aumento de la rugosidad con el tiempo.- El efecto corrosivo del agua hace que con el tiempo aumente el valor de la rugosidad absoluta (K) de las tuberías. El ritmo de aumento depende sobre todo de la naturaleza del agua conducida.

$$K_t = K_0 + \alpha t$$

$K_0$  ... rugosidad del tubo nuevo en mm (Apéndice A3)

$\alpha$  ... coeficiente que depende del tipo de agua (ver tabla en la referencia 3 de la Bibliografía).

$t$  ... número de años de servicio de la tubería.

$K_t$  ... rugosidad de la tubería después de  $t$  años de servicio.

Relación entre  $f$  y  $C$ .- Escribamos la fórmula de Darcy-Weisbach:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

y la ecuación de Chezy:  $V = C \sqrt{R S}$

De esta última:

$$S = \frac{V^2}{C^2 R} = \frac{V^2 4}{C^2 D} \cdot \frac{2g}{2g} = \frac{8g}{C^2 D} \frac{V^2}{2g}$$

$$h_f = S \cdot L$$

$$h_f = \frac{8g}{C^2 D} \cdot \frac{V^2}{2g} L = \frac{8g}{C^2} \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

es decir, 
$$f = \frac{8g}{C^2}$$

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}}$$

Flujo laminar y flujo turbulento.- Como ha sido ya indicado, el escurrimiento laminar de los líquidos corresponde a números de Reynolds de hasta 2,300; luego viene un rango de  $R_e$  en que el flujo puede ser laminar o turbulento, y por último el escurrimiento turbulento corresponde a  $R_e$  mayores



que 4,000. Todo esto puede verse reflejado en el diagrama de Moody.

Puesto que no hay un  $R_e$  definido que separe el flujo laminar del turbulento, y ante la necesidad de utilizar uno a fin de facilitar la solución de problemas se conviene en señalar el valor  $R_e = 2000$  como crítico. De aquí en adelante se considerará pues, como es usual, que el flujo es laminar si  $R_e < 2,000$  y turbulento si  $R_e > 2,000$ . Este  $R_e$  está referido al diámetro.

Como en canales el  $R_e$  viene referido al radio hidráulico, el valor crítico es 500 ( $D = 4 R$ ).

## 8.6 Ejemplos de aplicación

Ejemplo 76.- Determinar el tipo de flujo que tiene lugar en una tubería de 30 cm de diámetro cuando a la velocidad de 1 m/sg fluye

a) agua de  $\nu = 1.13 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sg}$ ; b) aceite de  $\nu = 2.06 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sg}$ .

$$a) R_e = \frac{V D}{\nu} = \frac{1.00 \times 0.30 \times 10^6}{1.13} = 265,000 > 2,000$$

es decir, el flujo es turbulento.

$$b) R_e = \frac{V D}{\nu} = \frac{1.00 \times 0.30 \times 10^4}{2.06} = 1,450 < 2,000$$

es decir, el flujo es laminar.

Ejemplo 77.- Un caudal de 44 lps de un aceite de  $\mu = 0.0103 \frac{\text{kg-sg}}{\text{m}^2}$  y  $\gamma = 0.85$  está circulando por una tubería de 30 cm de diámetro y 3,000 m de longitud. ¿Cuál es la pérdida de carga en la tubería?

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.044 \times 4}{\pi (0.30)^2} = 0.62 \text{ m/sg}$$

$$R_e = \frac{V D}{\nu} = \frac{V D \rho}{\mu} = \frac{V D \gamma}{\mu g} = \frac{0.62 \times 0.30 \times 850}{0.0103 \times 9.8} = 1,565$$

es decir, el flujo es laminar y por lo tanto:

$$f = \frac{64}{R_e} = 0.0409$$

$$y \quad h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = 0.0409 \cdot \frac{3000}{0.30} \cdot \frac{(0.62)^2}{2g} = 8.02 \text{ m}$$

Ejemplo 78.- Por una tubería horizontal de acero, de 15 cm de diámetro - está fluyendo un aceite pesado de  $\nu = 4,13 \times 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{sg}}$  y  $\gamma = 0.918$ . Si la presión en el punto A es  $11.0 \text{ kg/cm}^2$  y en B es  $0.35 \text{ kg/cm}^2$ , siendo la distancia entre A y B de 900 m, ¿cuál es el caudal?.

Ecuación de Bernoulli entre A y B:

$$Z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} - h_f = Z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g}$$

$$h_f = \frac{P_A}{\gamma} - \frac{P_B}{\gamma} = \frac{(11.0 - 0.35) \times 10^4}{0.918 \times 1000} = 116.0$$

es decir,  $f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = 116.0$

$$f \frac{900}{0.15} \frac{V^2}{2g} = 116.0$$

$$f 6000 \frac{V^2}{2g} = 116.0$$

Tratándose de un líquido altamente viscoso hay la presunción de que el flujo puede ser laminar.

De ser laminar el flujo rige la ecuación de Hazen-Poiseuille:

$$V = \frac{\gamma D^2 h_f}{32 \mu L} = 2.16 \text{ m/sg}$$

verificando:  $R_e = \frac{V D}{\nu} = 785$

es decir, el flujo es efectivamente laminar y  $V = 2.16 \text{ m/sg}$ , con lo cual:

$$Q = AV = 0.038 \text{ m}^3/\text{sg} = 38 \text{ lps.}$$

Ejemplo 79.- Determinar la pérdida de carga en un tramo de tubería nueva de  $K = 0.024 \text{ cm}$ , de  $30 \text{ cm}$  de diámetro y  $1,000 \text{ m}$  de longitud, cuando fluye agua de viscosidad  $1.13 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sg}$  a una velocidad de  $1.50 \text{ m/sg}$ .

$$R_e = \frac{V D}{\nu} = 3.98 \times 10^5, \text{ el flujo es turbulento.}$$

$$\frac{K}{D} = 0.0008$$

entrando al diagrama de Moody  $f = 0.0194$  y por lo tanto:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = 7.40 \text{ m.}$$

Ejemplo 80.- Los puntos A y B están unidos por una tubería nueva de  $K = 0.006 \text{ cm}$ , de  $15 \text{ cm}$  de diámetro y  $1,200 \text{ m}$  de longitud. El punto B está situado  $15.0 \text{ m}$  por encima de A y las presiones en A y B son, respectivamente,  $8.60 \text{ kg/cm}^2$  y  $3.40 \text{ kg/cm}^2$ . ¿Qué caudal de un aceite de g.e. =  $0.854$  y  $\nu = 3.83 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sg}$  circula entre A y B?

$$h_f = \left( Z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} \right) - \left( Z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} \right)$$

$$= \left( Z_A + \frac{P_A}{\gamma} \right) - \left( Z_B + \frac{P_B}{\gamma} \right)$$

$$= \frac{(8.6 - 3.4) \times 10^4}{0.854 \times 1000} - 15.0 = 45.89 \text{ m}$$

aparentemente el flujo es turbulento, luego:

$$R_e \sqrt{f} = \frac{D}{\nu} \sqrt{\frac{2g D h_f}{L}} = 1.314 \times 10^4$$

$$\frac{K}{D} = 0.0004$$

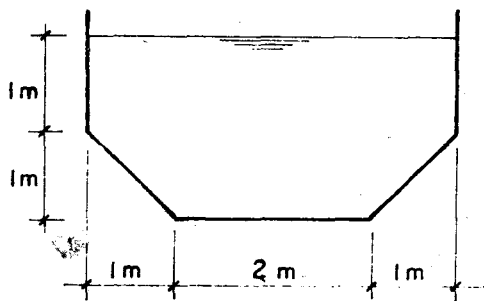
entrando al diagrama de Johnson-Rouse  $f = 0.020$  con  $h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$

se determina la velocidad:  $V = \sqrt{\frac{2g D h_f}{f L}} = 2.37 \text{ m/sg}$

$$y \quad Q = AV = 0.042 \text{ m}^3/\text{sg} = 42 \text{ lps.}$$

Empleo de la fórmula de Chezy.- Aun cuando la fórmula de Chezy también puede ser utilizada para resolver problemas de tuberías, es especialmente indicada para resolver problemas de conducción de agua en canales.

Ejemplo 81.- Un canal para conducción de agua tiene una sección transversal y dimensiones como se muestra en la figura. ¿Cuál debe ser la pendiente del fondo para transportar bajo condiciones de flujo uniforme un caudal de  $3.5 \text{ m}^3/\text{sg}$ ?



$$K = 2 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sg}$$

1º averiguar si el flujo es laminar o turbulento,

$$A = 7 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{Q}{A} = 0.5 \text{ m/sg}$$

$$P = 6.828 \text{ m}$$

$$R = \frac{A}{P} = 1.025 \text{ m}$$

$$R_e = \frac{V R}{\nu} = 5.1 \times 10^5 > 500, \text{ el flujo es turbulento y se puede usar Chezy.}$$

2º suponer que el contorno es hidráulicamente rugoso,

$$C = 18 \log \frac{12 R}{K} = 50.2$$

$$V = C \sqrt{R S}$$

$$S = \frac{V^2}{C^2 R} = 0.000097$$

Verificación:

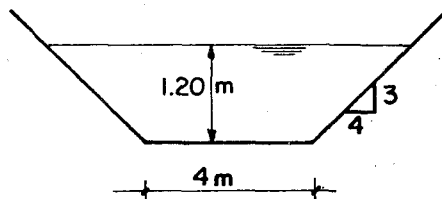
$$\frac{v_* \delta}{\nu} = 11.6$$

$$v_* = \sqrt{g R S} = 0.0312$$

$$\delta = \frac{11.6 \nu}{v_*} = 0.00037$$

$K > 6 \delta$ , efectivamente.

Ejemplo 82.- Bajo condiciones normales, en el canal trapezoidal que se muestra el tirante de agua es 1.20 m. Si en condiciones extraordinarias el caudal se puede ver incrementado en 50%, ¿Cuál sería el tirante de agua en tal caso?.



$$K = 0.15 \text{ m}$$

$$S = 0.000125$$

$$\nu = 1.3 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sg}$$

- 1º suponer que el flujo es turbulento. Se puede usar Chezy.
- 2º averiguar si el contorno es hidráulicamente liso o rugoso,

$$A = 6.72 \text{ m}^2$$

$$P = 8 \text{ m}$$

$$R = \frac{A}{P} = 0.84 \text{ m}$$

$$v_* = \sqrt{g R S} = 0.032 \text{ m/sg}$$

$$\frac{v_* \delta}{\nu} = 11.6$$

$$\delta = \frac{11.6 \nu}{v_*} = 0.00047 \text{ m}$$

$K > 6 \delta$  ... el contorno es hidráulicamente rugoso.

- 3º  $C = 18 \log \frac{12 R}{K} = 32.9$

$$V = C \sqrt{R S} = 0.34 \text{ m/sg}$$

$$R_e = \frac{V_1 R}{\nu} = 2,285 > 500, \quad \text{el flujo es turbulento.}$$

$$Q = A V = 2.27 \text{ m}^3/\text{sg}$$

4º nueva situación:  $Q' = 1.5 Q = 3.41 \text{ m}^3/\text{sg}$

$$A' = 4 d' + 1.33 d'^2$$

$$P' = 4 + 3.33 d'$$

$$R' = \frac{A'}{P'}$$

$$v_*' = \sqrt{g R' S}$$

$$\delta' = \frac{11.6 \nu}{v_*'}$$

$$C' = 18 \log \frac{12 R'}{K}$$

$$Q' = A' C' \sqrt{R' S}$$

probando diferentes valores del nuevo tirante  $d'$  se encuentra que la ecuación se satisface para  $d' = 1.50 \text{ m}$ .

### 8.7 Fórmula empírica de Hazen-Williams

Antes de que se conocieran las fórmulas de tipo logarítmico descritas en el apartado 8.5, las únicas disponibles para el diseño eran las de tipo exponencial de la forma:

$$V = a D^x S^y$$

V ... velocidad media  
D ... diámetro  
S ... pendiente de la línea de energía  
a ... coeficiente de fricción  
x, y ... exponentes

Una de ellas, de uso aún cotidiano, es la fórmula de Hazen-Williams:

$$V = 0.8494 C_H R^{0.63} S^{0.54} \quad \dots \quad (65)$$

V ... velocidad media en m/sg  
R ... radio hidráulico en m  
S ... pendiente de la línea de energía o pérdida unitaria de carga =  $\frac{h_f}{L}$ , adimensional.

$C_H$  ... coeficiente de rugosidad de Hazen-Williams, que sólo depende del material del tubo.

La fórmula es válida dentro de las siguientes limitaciones:

- \* tuberías rugosas,
- \* conducción de agua,
- \* flujo turbulento,
- \* diámetro mayor de 2",
- \* velocidades que no excedan de 3 m/sg.

Otras formas útiles de la (65) son:

$$V = 0.3547 C_H D^{0.63} S^{0.54} \dots (65a)$$

V ... m/sg  
D ... diámetro en m.

$$V = 0.0351 C_H D^{0.63} S^{0.54} \dots (65b)$$

V ... m/sg  
D ... pg

$$Q = 0.2786 C_H D^{2.63} S^{0.54} \dots (65c)$$

Q ... caudal en m<sup>3</sup>/sg  
D ... m.

$$Q = 0.0000178 C_H D^{2.63} S^{0.54} \dots (65d)$$

Q ... m<sup>3</sup>/sg  
D ... pg.

Valores de C<sub>H</sub>

acero corrugado	60
acero con juntas, nuevo	135
acero galvanizado, nuevo y usado	125
acero remachado, nuevo	110
acero remachado, usado	85
acero soldado, nuevo	120
acero soldado, usado	90
acero soldado con revestimiento, nuevo y usado	130
fierro fundido, nuevo	130
fierro fundido, usado	110
fierro fundido, viejo	90
plástico	150
asbesto-cemento, nuevo	135
cobre y latón	130
conductos con acabado de cemento pulido	100
concreto acabado liso	130
concreto acabado común	120
tubos de barro vitrificado (drenes)	110

## 8.8 Pérdidas locales (tomado de la referencia 3 de la Bibliografía)

Cada pérdida local se expresa en la forma:

$$h_{pl} = K \frac{V^2}{2g} \quad \dots \quad (66)$$

donde:

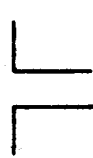
$h_{pl}$  ... pérdida de carga en m.

$K$  ... coeficiente sin dimensiones

$V$  ... velocidad media en m/sg, aguas abajo de la singularidad, salvo indicación en contrario.

Enseguida se presentan los valores de  $K$  de acuerdo con la singularidad.

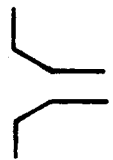
### Pérdida por entrada



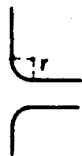
$$K = 0,5$$



$$K = 0.5 + 0.3 \cos \theta + 0.2 \cos^2 \theta$$



$$K = 0,15 - 0,25$$



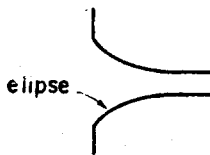
$r/D$	0.04	0.08	0.12	0.16	>0.2
$K$	0.26	0.15	0.09	0.06	<0.03



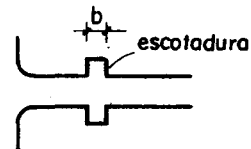
$$K = 0.06 - 0,10$$



$$K = 0,5$$



$K = 0.04 - 0.10$  para  
tubo circular y  $0.07 - 0.2$   
para tubo rectangular



$K = 0.05 - 0.10$  si  
 $\frac{b}{D} > 1$  ó  $\frac{b}{H} > 0.2$  y  
 $V > 2$  m/sg. De lo contrario  
 $K = 0,$

La entrada elíptica es la que produce el mínimo de pérdida. Si el tubo es circular la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{(0.5 D)^2} + \frac{y^2}{(0.15 D)^2} = 1 \quad \dots \quad (67)$$

Si es de sección rectangular la ecuación es:

$$\frac{x^2}{H^2} + \frac{y^2}{(0.33 H)^2} = 1 \quad \dots (68)$$

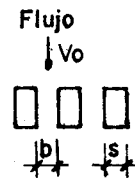
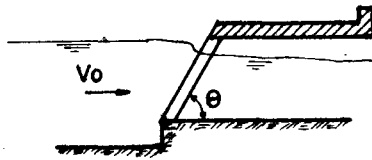


para definir la forma del perfil superior e inferior. Para la forma de los perfiles laterales se utiliza P en vez de H.

Pérdida por rejilla

Para rejillas parcialmente sumergidas,

Forma   
 $C_f$  2.42 1.83 1.67 1.03 0.92 0.76 1.79



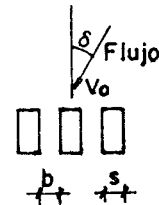
con el flujo normal al plano de la rejilla:

$$K = C_f (S/b)^{4/3} \text{ sen } \theta \quad \dots (69)$$

con el flujo no normal al plano de la rejilla:

$$K = K_* \beta$$

- $K_*$  ... coeficiente para flujo normal
- $\beta$  ... coeficiente de corrección que depende de la relación S/b y del ángulo  $\delta$ .



en ambos casos, la V de la ecuación (66) es la  $V_0$  frente a las rejillas, como si estas no existieran.

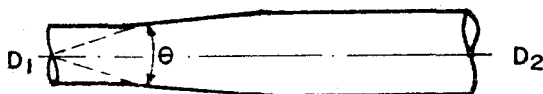
Para rejillas completamente sumergidas:

$$K = 1.45 - 0.45 (A_n/A_b) - (A_n/A_b)^2 \quad \dots (70)$$

- $A_n$  ... área neta de paso entre barras
- $A_b$  ... área bruta de la estructura de rejilla

en este caso, la V de la ecuación (66) es la velocidad neta a través de la rejilla.

Pérdida por ampliación



$$K = C_a \left( \frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 \quad \dots (71)$$



$\frac{D_2}{D_1} = 1.5$	$\theta$	8°	20°	40°	60°	80°	100°	140°	180°
	Ca	0.15	0.40	1.00	1.20	1.16	1.10	1.03	1.00

$\frac{D_2}{D_1} = 3$	$\theta$	8°	20°	40°	60°	80°	100°	140°	180°
	Ca	0.15	0.40	0.80	1.00	1.05	1.05	1.03	1.00

Para ampliaciones bruscas  $C_a = 1.00$



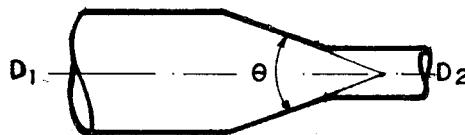
A fin de evitar separaciones, el ángulo  $\theta$  del difusor debe cumplir:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{g D}}{2 V} \quad \dots \text{ para } \theta < 20^\circ$$

donde  $D = \frac{D_1 + D_2}{2}$        $V = \frac{V_1 + V_2}{2}$

Para calcular  $\theta$  en transiciones con sección distinta de la circular, se usa el criterio del cono equivalente, es decir, un tronco de cono limitado por áreas circulares de la misma magnitud que las reales.

Pérdida por reducción



$\theta$	4° a 5°	7°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	60°	75°	80°	
K	0.060	0.005	0.16	0.16	0.18	0.20	0.22	0.24	0.26	0.28	0.30	0.32	0.34	0.35

A fin de evitar pérdidas grandes, el ángulo de reducción  $\theta$  no debe exceder del valor dado por:

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{\frac{g D}{V}}$$

donde  $D = \frac{D_1 + D_2}{2}$        $V = \frac{V_1 + V_2}{2}$

y en este caso  $K = 0.1$

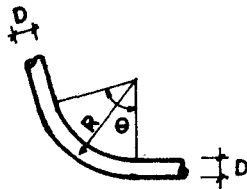
Para contracciones bruscas:



$\frac{D_2}{D_1}$	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
K	0.10	0.18	0.25	0.32	0.37	0.42	0.45	0.47	0.50

Pérdida por cambio de dirección

Para curvas circulares en tubo de diámetro D y rugosidad K,



$$K = C_c \frac{\theta^\circ}{90^\circ}$$

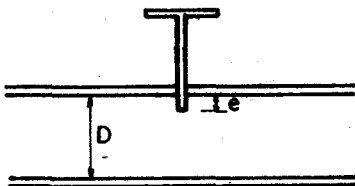
$\frac{K}{D} = 0.0020$	$\frac{R}{D}$	1	2	4	6	8
	$C_c$	0.50	0.30	0.24	0.18	0.18
$\frac{K}{D} = 0.0005$	$\frac{R}{D}$	1	2	4	6	8
	$C_c$	0.30	0.18	0.14	0.11	0.11
tubo liso	$R_D$	1	2	4	6	8
	$C_c$	0.25	0.15	0.11	0.08	0.08

Los cambios de dirección en tubos de gran diámetro se realiza mediante las curvas circulares recién descritas cuyos coeficientes K incluyen el efecto de pérdida por fricción.

Los cambios de dirección en tubos de pequeño diámetro se realiza mediante codos, de los cuales hay en el mercado diferentes tipos y cuyos valores K dependen del ángulo y del diámetro.

Pérdida por válvula.- Para tuberías de tamaño variado:

Válvula de compuerta:

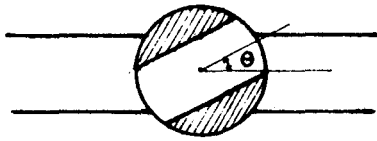


Ejemplo:

Para diámetro D = 50 mm.

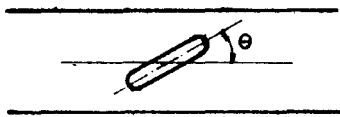
e/D	A/A <sub>0</sub>	K
1/8	0.949	0.07
2/8	0.856	0.26
3/8	0.74	0.81
4/8	0.609	2.06
5/8	0.466	5.52
6/8	0.315	17.0
7/8	0.159	97.8
31/32	---	159.0

Válvula esférica:



$\theta^\circ$	$A/A_0$	K
5	0.926	0.05
10	0.85	0.29
15	0.772	0.75
20	0.692	1.56
30	0.535	5.17
40	0.385	17.3
50	0.25	52.6
55	0.19	106.0
60	0.137	206.0
65	0.091	486.0

Válvula de mariposa o de lenteja:

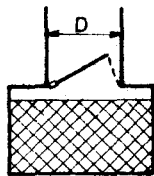


$\theta^\circ$	$A/A_0$	K
5	0.913	0.24
10	0.826	0.52
15	0.741	0.90
20	0.658	1.54
30	0.500	3.91
40	0.357	10.8
50	0.234	32.6
55	0.181	58.8
60	0.124	118.0
65	0.094	256.0
70	0.06	751.0

si la válvula está completamente abierta entonces usar:

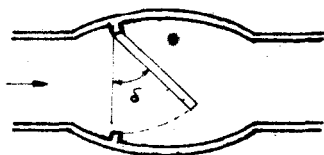
$$K = \frac{t}{D} = \frac{\text{espesor hoja}}{\text{diámetro}}$$

Válvula de pie:



D cm	K	D cm	K
4	12.9	20	5.2
5	10.0	25	4.4
6.5	8.8	30	3.7
8	8.0	35	3.4
10	7.0	40	3.1
12.5	6.5	45	2.8
15	6.0	50	2.5

Válvula check o de retención:



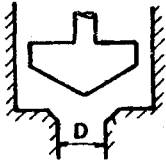
válvula completamente abierta:

D cm	5	10	15	20	30	40	50
K	18	8	6.5	5.5	3.5	2.5	0.8

válvula parcialmente abierta:

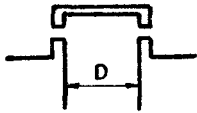
D cm	15	20	30	40	50	60	70
K	90	62	30	14	6.6	3.2	1.7

Válvula de alivio:



de forma cónica

$$K = 2.6 - 0.8 \frac{D}{Z} + 0.14 \left(\frac{D}{Z}\right)^2$$



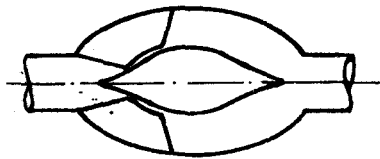
de forma plana

$$K = 0.6 + 0.15 \left(\frac{D}{Z}\right)^2$$

Para tuberías de diámetro pequeño hay en el mercado varios tipos de válvulas como las descritas. El valor de K para válvula completamente abierta depende del tipo y diámetro.

Para el control del gasto en tuberías de gran diámetro se usan las válvulas de aguja y de chorro hueco.

Válvula de aguja.- Se instalan en puntos intermedios o en el extremo.



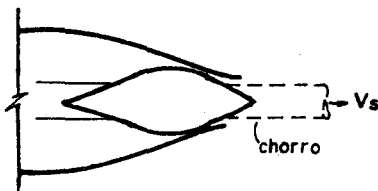
en punto intermedio

$$Q = C_d \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2gH} \quad \dots (72)$$

$C_d$  ... coeficiente de gasto; para válvula completamente abierta  $C_d = 0.58$ .

$D$  ... diámetro antes de la válvula en m.

$H$  ... carga total antes de la válvula en m.



en el extremo final

Para válvula en el extremo la velocidad del chorro de salida es:

$$V_s = C_v \sqrt{2gH} \quad \dots (73)$$

$C_v$  ... coeficiente de velocidad = 0.96 - 0.98

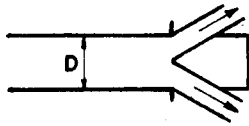
es decir:

$$K = \left(\frac{1}{C_v^2} - 1\right) \quad \dots (74)$$

que afectaría a la carga de velocidad

con  $\frac{V_s^2}{2g}$  para obtener la pérdida.

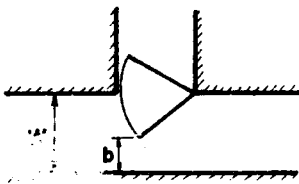
Válvulas de chorro hueco.- Se instalan en el extremo del conducto circular.



Para el gasto rige la ecuación (72), con un valor  $C_d \approx 0.85$  para válvula completamente abierta.

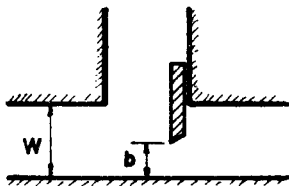
Pérdida por compuerta.- Las compuertas se utilizan para el control del gasto en conductos de gran diámetro y hay dos tipos básicos: radial y deslizante.

Compuerta radial:

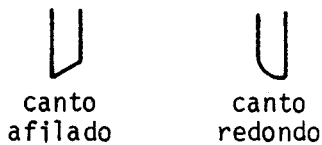


b/W	K
1.00	0.30
0.94	0.31
0.86	0.36
0.77	0.56
0.65	0.99
0.54	1.79
0.43	3.23
0.34	6.03
0.24	12.2
0.15	30.2
0.07	128.0

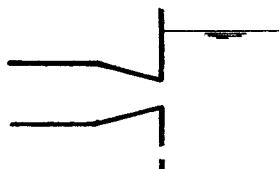
Compuerta deslizante:



b/W	K canto afilado	K canto redondo
	0.3	0.24
	0.38	0.36
	0.68	0.58
0.7	1.31	0.96
0.6	2.43	1.48
0.5	4.57	2.7
0.4	8.68	4.95
0.3	17.8	10.8
0.2	44.1	23.2
0.1	186.5	--



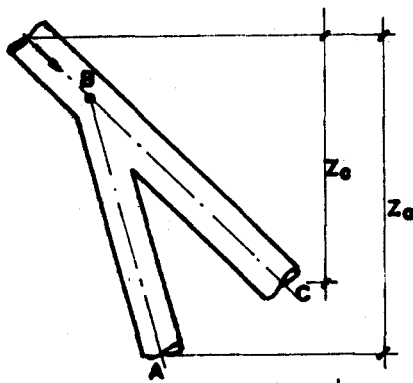
Pérdida por salida



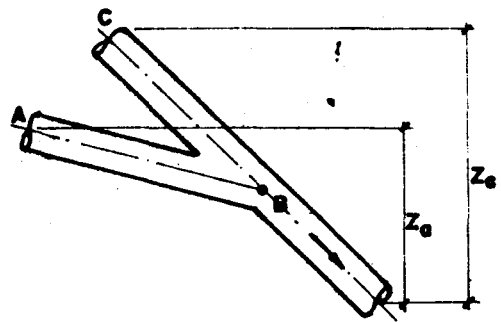
$$h_{ps} = K \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$$

$A_2/A_1$	K
0.2	0.84
0.4	0.87
0.6	0.90
0.8	0.94
1.0	1.00

## Pérdidas por bifurcación



a) Separación



b) Unión

En a) despreciando la fricción, Bernoulli entre la corriente principal y la sección C:

$$z_c + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \frac{p_c}{\gamma} + \frac{v_c^2}{2g} + K_c \frac{v^2}{2g}$$

$$\frac{p - p_c}{\gamma} + z_c = \frac{v_c^2}{2g} + (K_c - 1) \frac{v^2}{2g} \quad \dots \quad (75)$$

análogamente  $\frac{p - p_a}{\gamma} + z_a = \frac{v_a^2}{2g} + (K_a - 1) \frac{v^2}{2g} \quad \dots \quad (76)$

En b) procediendo de la misma manera;

$$\frac{p_c - p}{\gamma} + z_c = (K_c + 1) \frac{v^2}{2g} - \frac{v_c^2}{2g} \quad \dots \quad (77)$$

$$\frac{p_a - p}{\gamma} + z_a = (K_a + 1) \frac{v^2}{2g} - \frac{v_a^2}{2g} \quad \dots \quad (78)$$

Para cantos agudos como en la figura y  $D = D_c$  rigen los valores de  $K_a$  y  $K_c$  de la tabla.

Para bifurcaciones en tubos de pequeño diámetro el valor de  $K$  depende del tipo de la bifurcación y los diámetros.

$Q_a/Q$	Separación				Unión			
	$\theta = 90^\circ$		$\theta = 45^\circ$		$\theta = 90^\circ$		$\theta = 45^\circ$	
	$K_a$	$K_c$	$K_a$	$K_c$	$K_a$	$K_c$	$K_a$	$K_c$
0.0	0.95	0.04	0.90	0.04	-1.20	0.04	-0.92	0.04
0.2	0.88	-0.88	0.68	-0.06	-0.40	0.17	-0.38	0.17
0.4	0.89	-0.05	0.50	-0.04	0.08	0.30	0.00	0.19
0.6	0.95	0.07	0.38	0.07	0.47	0.40	0.22	0.09
0.8	1.10	0.21	0.35	0.20	0.72	0.51	0.37	-0.17
1.0	1.28	0.35	0.48	0.33	0.91	0.60	0.37	-0.54

### Ejemplos de aplicación

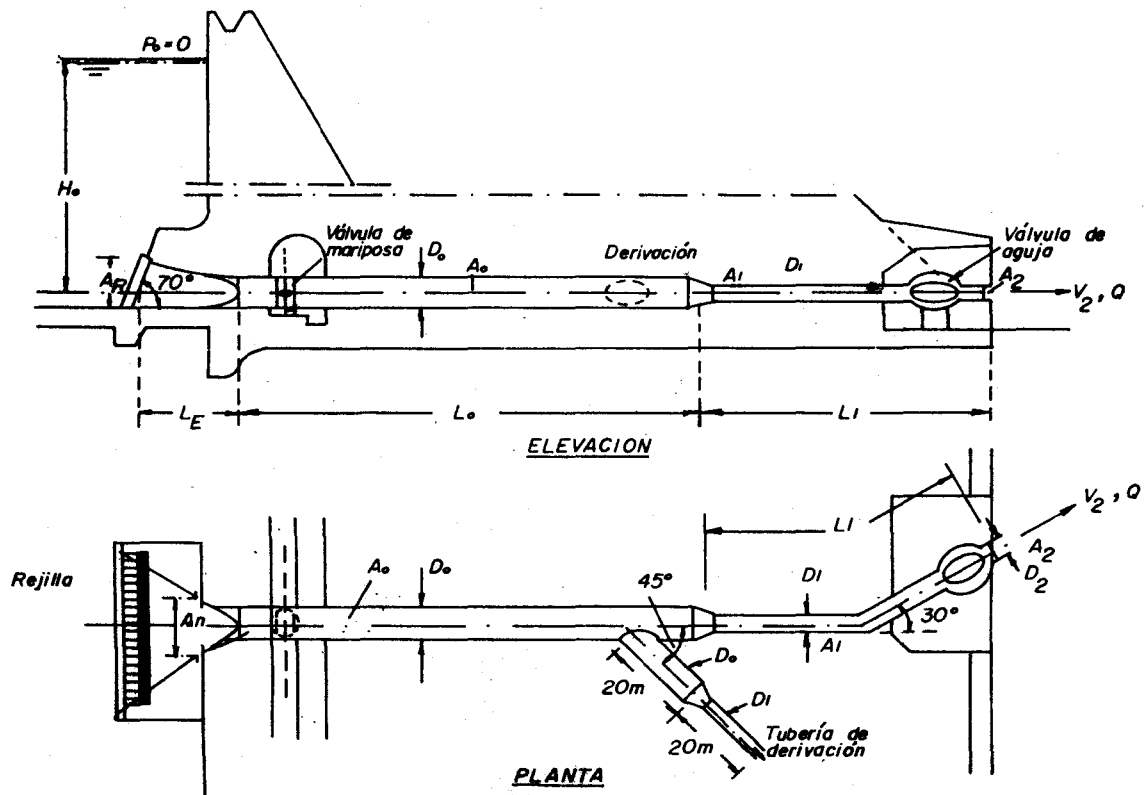
**Ejemplo 83.-** (Ref. 3) En la figura se presenta una tubería horizontal para la descarga de fondo de una presa, con una derivación lateral. Los datos son:

$H_o = 150 \text{ m}$	$D_o = 4 \text{ m}$	$A_o = 12.57 \text{ m}^2$	Rejilla
$L_E = 20 \text{ m}$	$D_1 = 3 \text{ m}$	$A_1 = 7.07 \text{ m}^2$	$S/b = 0.1$
$L_o = 60 \text{ m}$	$D_2 = 2 \text{ m}$	$A_2 = 3.14 \text{ m}^2$	$C_f = 1.67$
$L_1 = 40 \text{ m}$		$A_R = 120 \text{ m}^2$	$\theta = 70^\circ$

en la válvula de mariposa  $A_N = 30 \text{ m}^2$

en las escotaduras  $b/h = 0.2$

rugosidad del conducto  $K = 0.5 \text{ mm}$



Determinar el gasto Q de la tubería, en el supuesto que se cierra el paso a la derivación lateral.

Bernoulli entre el nivel del agua en el embalse y la salida de la tubería:

$$H_0 - \sum h_p = \frac{V_2^2}{2g}$$

expresando cada pérdida en la forma  $K \frac{V_2^2}{2g}$  :

$$H_0 = \sum K \frac{V_2^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g}$$

$$H_0 = (1 + \sum K) \frac{V_2^2}{2g}$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2g H_0}{1 + \sum K}}$$

De manera que habrá que pasar cada pérdida de la forma  $K_i \frac{V_i^2}{2g}$  a la forma  $K \frac{V_2^2}{2g}$  :

$$K = K_i \frac{V_i^2}{V_2^2} = K_i \left(\frac{A_2}{A_i}\right)^2$$

es decir, multiplicando el valor  $K_i$  por la relación de áreas al cuadrado.

1. Rejilla.  $K = 0.073$ ,  $A_2/A_R = 0.0262 \rightarrow K_1 = 0.00005$

2. Reducción después de la rejilla. Se usa el criterio del cono equivalente. Los diámetros equivalentes son:

$$D_R = \sqrt{\frac{4 A_R}{\pi}} = 12.37 \text{ m} \quad D_N = \sqrt{\frac{4 A_N}{\pi}} = 6.19 \text{ m}$$

$$= 2 \text{ arc-tg} \frac{D_R - D_N}{2 L_E} = 17^\circ 34'$$

$$K = 0.19, \quad A_2/A_N = 0.105 \rightarrow K_2 = 0.0021$$

3. Entrada. Para forma de trompeta,

$$K = 0.08, \quad A_2/A_0 = 0.25 \rightarrow K_3 = 0.005$$

4. Escotaduras. Para  $V > 2 \text{ m/sg}$ ,

$$K = 0.05, \quad A_2/A_N = 0.105 \rightarrow K_4 = 0.00055$$

5. Válvula de mariposa abierta. Se supone:



$$K = 0.05, A_2/A_0 = 0.25 \rightarrow K_5 = 0.0031$$

6. Pérdida por bifurcación

$$K_c = 0.04, A_2/A_0 = 0.25 \rightarrow K_6 = 0.0025$$

7. Pérdida por reducción. Para  $\theta$  entre  $4^\circ$  y  $5^\circ$  se elige:

$$K = 0.019, A_2/A_1 = 0.445 \rightarrow K_7 = 0.00376$$

8. Cambio de dirección. Para  $\theta = 30^\circ$ ,  $\frac{K}{D_1} = \frac{0.5}{3000} = 0.000167$  y  $R/D \approx 2$ :  
 $C_c = 0.18$  y

$$K = 0.06, A_2/A_1 = 0.445 \rightarrow K_8 = 0.0119$$

9. Válvula de aguja. Para  $C_v = 0.96$ :

$$K = 0.08507, A_2/A_2 = 1.0 \rightarrow K_9 = 0.08507$$

10. Fricción en la zona de entrada. Se considera cero:

$$K_{10} = 0$$

11. Fricción en el tramo  $L_0$ .

$$\frac{K}{D_0} = 0.000125 \text{ y } R_e \text{ grande, del diagrama de Moody } f_0 = 0.0125$$

$$K = f_0 \frac{L_0}{D_0} = 0.188, A_2/A_0 = 0.25 \rightarrow K_{11} = 0.01175$$

12. Fricción en el tramo  $L_1$ :

$$\frac{K}{D_1} = 0.000167 \text{ y } R_e \text{ grande, del diagrama de Moody } f_1 = 0.0132$$

$$K = f_1 \frac{L_1}{D_1} = 0.176, A_2/A_1 = 0.445 \rightarrow K_{12} = 0.03485$$

$$\text{T o t a l } \quad \Sigma K = 0.16063$$

Reemplazando:

$$V_2 = 50.3 \text{ m/sg}$$

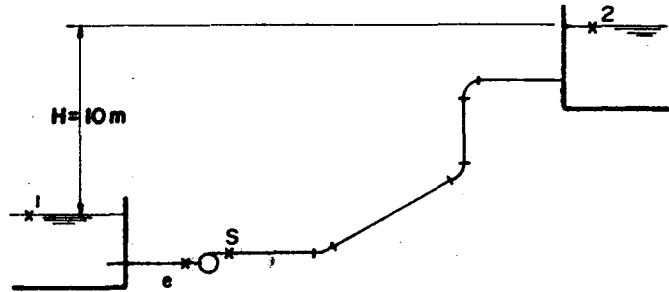
$$Q = 158 \text{ m}^3/\text{sg}$$

$$\text{pérdida total} = H_0 - \frac{V_2^2}{2g} = 20.91 \text{ m}$$

Ejemplo 84.- Una bomba de 25 CV de potencia y 75% de eficiencia debe abastecer un gasto de  $6 \text{ m}^3/\text{min}$  de agua a  $10^\circ\text{C}$ , a un depósito cuyo nivel se encuentra 10 m arriba de la cisterna de bombeo. La tubería de conducción es de fierro fundido con incrustaciones ( $K = 0.76 \text{ mm}$ ) con una

longitud de 100 m, tres curvas de radio 5D (dos de 45° y una de 90°) y una válvula con  $K_v = 8$ . Determinar el diámetro necesario en la tubería. Despreciar las pérdidas de carga en la tubería de aspiración.

( $\nu = 1,31 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sg}$ ).



Bernoulli entre 1 y 2:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} - \sum h_{p1-e} + H_B - \sum h_{ps-2} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$Z_1 + 0 + 0 - 0 + H_B - \sum h_{ps-2} = Z_2 + 0 + 0$$

$$H_B = (Z_2 - Z_1) + \sum h_{ps-2}$$

$$H_B = 10 + \sum h_{ps-2}$$

$$\sum h_{ps-2} = H_B - 10$$

$$\text{Pot} = \frac{\gamma Q H_B}{75 \eta} \quad H_B = \frac{75 \eta \text{ Pot}}{\gamma Q} = \frac{75 \times 0,75 \times 25}{1,000 \times 0,1} = 14,06 \text{ m}$$

$$\sum h_{ps-2} = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} + K_c \frac{V^2}{2g} + K_v \frac{V^2}{2g} + K_s \frac{V^2}{2g}$$

$$\sum h_{ps-2} = \frac{V^2}{2g} (f \frac{L}{D} + K_c + K_v + 1)$$

reemplazando:

$$\frac{V^2}{2g} (f \frac{L}{D} + K_c + K_v + 1) = 4,06$$

Se resuelve por iteraciones. Después de probar varios valores se propone  $D = 0,254 \text{ m}$ .

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = 0,05065 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{Q}{A} = 1.974 \text{ m/sg}$$

$$\frac{V^2}{2g} = 0.199 \text{ m}$$

$$R_e = \frac{V D}{\nu} = 3.8 \times 10^5$$

$$\frac{K}{D} = 0.003$$

Moody:

$$f = 0.026 \rightarrow f \frac{L}{D} = 10.24$$

Del catálogo del fabricante:

$$\left. \begin{array}{l} \text{para codos de } 45^\circ, K = 0.16 \\ \text{para codos de } 90^\circ, K = 0.25 \end{array} \right\} \rightarrow K_c = 2 \times 0.16 + 0.25 = 0.57$$

Se conoce  $K_v = 8$ .

Reemplazando y despejando  $V = 2 \text{ m/sg}$

$$Q = 0.102 \text{ m}^3/\text{sg}$$

lo que quiere decir que el diámetro  $D = 0.254 \text{ m}$  es el adecuado.

## 8.9 Aplicaciones

Para la solución de los diversos problemas de tuberías se dispone de tres fórmulas:

- \* Colebrook-White
- \* Chezy
- \* Hazen-Williams

Por razones de simplicidad, todos los ejemplos de este apartado van a ser desarrollados con la fórmula de Hazen-Williams, dejando claramente establecido que también pueden ser resueltos con las otras fórmulas, especialmente con la de Colebrook-White.

Lo usual es que para cada tubería se conozca su longitud y coeficiente de rugosidad  $C_H$ . Los tres parámetros que quedan son  $Q$ ,  $D$  y  $S$ ; de modo que hay necesidad de conocer dos cualesquiera de ellos a fin de determinar con la fórmula el tercero.

Se considera que la carga de velocidad es despreciable al lado de las cargas potencial y de presión, de modo que resultan confundidas la línea de energía y la línea de alturas piezométricas. Uno puede referirse a ellas con cualquiera de los dos nombres o empleando el término línea de gradiente hidráulico (LGH). La altura de velocidad resulta ciertamente insignificante en las así llamadas tuberías largas:

$$\left(\frac{L}{D} > 2,000\right)$$

### 8.9.1 Tuberías simples, en serie y en paralelo

Ejemplo 85.- Una tubería de  $C_H = 110$  y  $D = 30 \text{ cm}$  transporta  $100 \text{ lps}$  de agua ¿Cuál es la pérdida de carga en  $1,200 \text{ m}$

de tubería?

$$\text{fórmula (65c), } Q = 0.2786 C_H D^{2.63} S^{0.54}$$

$$\text{reemplazando: } Q = 0.100 \text{ m}^3/\text{sg}$$

$$C_H = 110$$

$$D = 0.30 \text{ m}$$

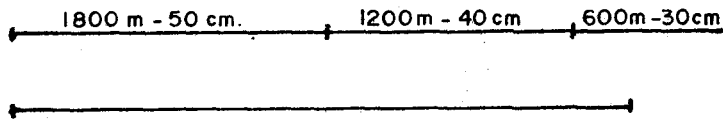
Se obtiene  $S = 0.00875$ , es decir  $h_f = S \cdot L = 10.5 \text{ m}$ .

Ejemplo 86.- Un sistema de tuberías en serie está constituido por un tramo de 1800 m de tubería de 50 cm, otro de 1200, de 40 cm y 600 m de 30 cm. Hallar:

- la longitud equivalente de una tubería de 40 cm.
- el diámetro de la tubería equivalente de 3,600 m,

Todas las tuberías tienen un  $C_H = 130$ .

Dos sistemas, en general, son hidráulicamente equivalentes si dejan pasar el mismo caudal  $Q$  con la misma pérdida de carga  $h_p$ .



- suponer un caudal  $Q = 130 \text{ lps}$ . Con la fórmula (65c):

$$S_{50} = 0.0009 \rightarrow h_p = 1.62 \text{ m (14.8\%)}$$

$$S_{40} = 0.0026 \rightarrow h_p = 3.12 \text{ m (28.4\%)}$$

$$S_{30} = 0.0104 \rightarrow h_p = 6.24 \text{ m (56.8\%)}$$

$$\Sigma h_p = 10.98 \text{ m (100.0\%)}$$

para la tubería equivalente:

$$Q = 130 \text{ lps}$$

$$C_H = 130$$

$$D = 40 \text{ cm}$$

con la fórmula (65c) se encuentra  $S = 0.0026$

$$\text{es decir, } L = \frac{10.98}{0.0026} = 4,223 \text{ m}$$

para la tubería equivalente:

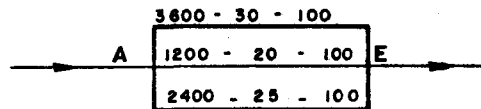
$$Q = 130 \text{ lps}$$

$$C_H = 130$$

$$L = 3,600 \text{ m} \rightarrow S = \frac{10.98}{3,600} = 0.0031$$

con la fórmula (65c) se encuentra  $D = 39 \text{ cm}$ .

**Ejemplo 87.-** En el sistema de tuberías en paralelo, la altura de presión en A es de 36 m de agua y en E de 22 m de agua. Suponiendo que las tuberías están en un plano horizontal, ¿qué caudal circula por cada una de las ramas en paralelo?



Despreciando las pequeñas alturas de velocidad, la caída de la LGH entre A y E es:

$$h_p = \frac{P_A}{\gamma} - \frac{P_E}{\gamma} = 36.0 - 22.0 = 14.0 \text{ m}$$

$$S_{30} = \frac{14}{3,600} = 0.0039 \rightarrow Q_{30} = 58.7 \text{ lps}$$

$$S_{20} = \frac{14}{1,200} = 0.0117 \rightarrow Q_{20} = 36.6 \text{ lps}$$

$$S_{25} = \frac{14}{2,400} = 0.0058 \rightarrow Q_{25} = 45.1 \text{ lps}$$

$$\text{TOTAL } Q = 140.4 \text{ lps}$$

**Ejemplo 88.-** Si en el sistema del ejemplo 87 el caudal total fuera de 280 lps, ¿qué pérdida de carga tiene lugar entre A y E y cómo se reparte el caudal en las ramas del circuito?. Resolver mediante dos métodos, a) del porcentaje y b) de la tubería equivalente. Proceder como si no se hubiera resuelto el ejemplo 87.

a) suponer una pérdida de carga entre A y E,  $h_p = 8 \text{ m}$  y hallar los caudales.

$$S_{30} = \frac{8}{3,600} = 0.0022 \rightarrow Q_{30} = 43.1 \text{ (41.7\%)}$$

$$S_{20} = \frac{8}{1,200} = 0.0067 \rightarrow Q_{20} = 27.1 \text{ (26.2\%)}$$

$$S_{25} = \frac{8}{2,400} = 0.0033 \rightarrow Q_{25} = 33.2 \text{ (32.1\%)}$$

$$\text{TOTAL } Q = 103.4 \text{ (100.0\%)}$$

(compárense estos porcentajes con los que corresponden al ejemplo 87 y constátense cómo el caudal en cada rama del circuito es un porcentaje constante del caudal. Esto es siempre cierto para un intervalo razonable de pérdidas de carga entre los nudos).

Aplicando los porcentajes al caudal dado de 280 lps.

$$Q_{30} = 0.417 \times 280 = 117 \text{ lps} \rightarrow S_{30} = 0.0140 \rightarrow h_p = 50 \text{ m.}$$

$$Q_{20} = 0.262 \times 280 = 73 \text{ lps} \rightarrow S_{20} = 0.0420 \rightarrow h_p = 50 \text{ m.}$$

$$Q_{25} = 0.321 \times 280 = 90 \text{ lps} \rightarrow S_{25} = 0.0209 \rightarrow h_p = 50 \text{ m.}$$

b) se usará el diámetro de 30 cm para la tubería equivalente. Suponer una pérdida de carga entre A y E de  $h_p = 8 \text{ m}$  y hallar el caudal total.

$$S_{30} = \frac{8}{3,600} = 0.0022 \rightarrow Q_{30} = 43.1 \text{ lps.}$$

$$S_{20} = \frac{8}{1,200} = 0.0067 \rightarrow Q_{20} = 27.1 \text{ lps}$$

$$S_{25} = \frac{8}{2,400} = 0.0033 \rightarrow Q_{25} = 33.2 \text{ lps}$$

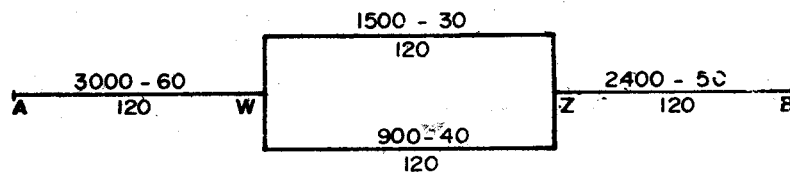
$$\text{TOTAL } Q = 103.4 \text{ lps}$$

$$\left. \begin{array}{l} Q = 103.4 \text{ lps} \\ D = 30 \text{ cm} \end{array} \right\} S_{30} = 0.0111 \rightarrow L_e = \frac{h_p}{S_{30}} = 720 \text{ m de tubería de } 30 \text{ cm y } C_H = 100.$$

Para el caudal dado:

$$\left. \begin{array}{l} Q = 280 \text{ lps} \\ D = 30 \text{ cm} \end{array} \right\} S_{30} = 0.0703 \rightarrow h_p = 0.0703 \times 720 = 50.6 \text{ m.}$$

Ejemplo 89.- Para el sistema mostrado, a) ¿cuál es el caudal si la caída de la LGH entre A y B es de 60 m?, b) ¿qué longitud de una tubería de 50 cm y  $C_H = 120$  es equivalente al sistema AB?.



a) suponer una pérdida de carga entre W y Z y averiguar cómo se reparte un caudal cualquiera.

para  $h_p = 9 \text{ m}$ .

$$S_{30} = 0.0060 \rightarrow Q_{30} = 89 \text{ lps (26.3\%)}$$

$$S_{40} = 0.0100 \rightarrow Q_{40} = 250 \text{ lps (73.7\%)}$$

$$\text{TOTAL } Q = 339 \text{ lps (100.0\%)}$$

suponer un caudal en el sistema AB y averiguar cómo se reparte una pérdida de carga cualquiera en los tres tramos.

para  $Q = 339 \text{ lps}$ .

AW ... S = 0.0024	→	$h_p = 7.2 \text{ m}$	(23.7%)
WZ ...		$h_p = 9.0 \text{ m}$	(29.6%)
ZB ... S = 0.0059	→	$h_p = 14.2 \text{ m}$	(46.7%)
TOTAL		$h_p = 30.4 \text{ m}$	(100.0%)

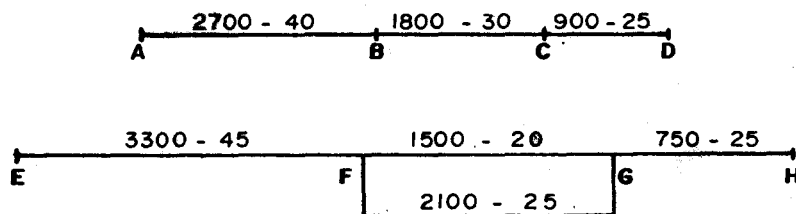
aplicar estos porcentajes a la pérdida de carga dada de 60 m.

$$\begin{aligned}
 h_{PAW} &= 60 \times 0.237 = 14.2 \text{ m} \rightarrow S_{60} = 0.0047 \rightarrow Q_{60} = 483 \text{ lps} \\
 h_{PWZ} &= 60 \times 0.296 = 17.8 \text{ m} \\
 h_{PZB} &= 60 \times 0.467 = 28.0 \text{ m} \rightarrow S_{50} = 0.0117 \rightarrow Q_{50} = 489 \text{ lps.}
 \end{aligned}$$

b) Utilizando la información anterior, en el sistema AB un caudal de 339 lps produce una pérdida de 30.4 m,

$$\left. \begin{aligned}
 Q &= 339 \text{ lps} \\
 D &= 50 \text{ cm} \\
 C_H &= 120
 \end{aligned} \right\} S_{50} = 0.0059 \rightarrow L_e = \frac{h_p}{S_{50}} = 5,153 \text{ m.}$$

Ejemplo 90.- De los dos sistemas que se muestran, ¿cuál de ellos tiene mayor capacidad? (usar  $C_H = 120$  para todas las tuberías).



De los dos sistemas, el de mayor capacidad hidráulica es aquél que con la misma pérdida de carga deja pasar el caudal mayor, o aquél que deja pasar un mismo caudal con la menor pérdida de carga,

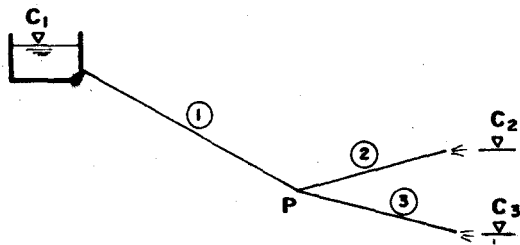
Se sugiere fijar un  $Q = 100 \text{ lps}$  y determinar la pérdida total en cada sistema. Nótese que previamente debe determinarse según qué porcentajes se divide un  $Q$  cualquiera entre F y G.

Se deja para ser resuelto por el lector. El sistema EH resulta ser el de mayor capacidad,

### 8.9.2 Análisis de redes abiertas y cerradas

Cálculo manual de redes abiertas.- Una red es abierta cuando las tuberías que la componen se ramifican, sin unirse después. Los extremos finales de las ramas pueden terminar en un depósito o descargar libremente a la atmósfera.

Ejemplo 91.- (Un reservorio). Cuando la superficie libre del depósito se mantiene en una elevación constante, ¿qué caudales tienen lugar?



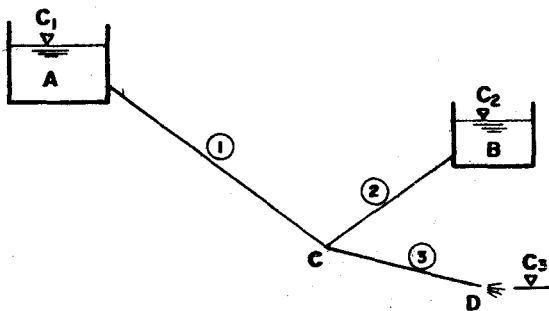
Datos: las tres cotas  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y el trió de valores  $L$ - $D$ - $C_H$  de cada tubería.

El problema se resuelve por tanteos. Se supone una cota para la LGH en el punto P, de determinan los tres caudales y se chequea la ecuación de nudo:

$$\sum Q = 0$$

es decir, la suma algebraica de caudales en P es cero (para ello se otorga un signo a cada caudal: + si llega, - si sale). El problema queda resuelto cuando se satisface la ecuación de nudo con la precisión deseada. Ver procedimiento en el ejemplo 92.

Ejemplo 92.- (Dos reservorios). Cuando las superficies libres de los depósitos se mantienen en una elevación constante, ¿qué caudales tienen lugar?



$C_1$  ... 64.0 m  
 $C_2$  ... 57.0 m  
 $C_3$  ... 30.0 m

	L m	D cm	$C_H$
1 ...	2,400	60	100
2 ...	1,200	40	100
3 ...	1,200	30	100

Como en el ejemplo 91, este problema se resuelve por tanteos.

Suponer: cota LGH en el punto C = 57.0 m.

$$\left. \begin{aligned} S_{60} &= \frac{h_p}{L} = \frac{7}{2,400} = 0.00292 \rightarrow Q_{60} = 311.0 \text{ lps (+)} \\ S_{30} &= \frac{h_p}{L} = \frac{27}{1,200} = 0.02250 \rightarrow Q_{30} = 151.4 \text{ lps (-)} \end{aligned} \right\} \sum Q = 159.6$$



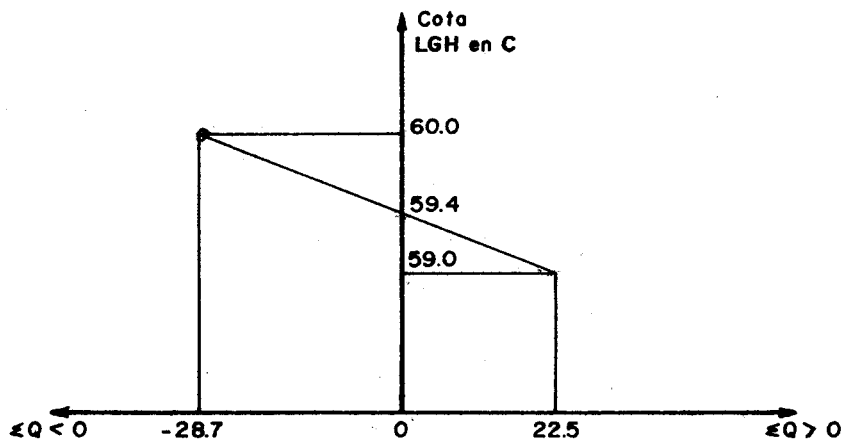
Suponer: cota LGH en C = 60.0 m.

$$\left. \begin{array}{l} S_{60} = 0.00167 \rightarrow Q_{60} = 230.0 \text{ lps (+)} \\ S_{40} = 0.00250 \rightarrow Q_{40} = 98.5 \text{ lps (-)} \\ S_{30} = 0.0250 \rightarrow Q_{30} = 160.2 \text{ lps (-)} \end{array} \right\} \Sigma Q = -28.7$$

Suponer: cota LGH en C = 59.0 m.

$$\left. \begin{array}{l} S_{60} = 0.00208 \rightarrow Q_{60} = 259.0 \text{ lps (+)} \\ S_{40} = 0.00167 \rightarrow Q_{40} = 79.2 \text{ lps (-)} \\ S_{30} = 0.02417 \rightarrow Q_{30} = 157.3 \text{ lps (-)} \end{array} \right\} \Sigma Q = 22.5$$

Dibujar a escala la gráfica auxiliar siguiente para determinar la cota definitiva de la LGH en C:

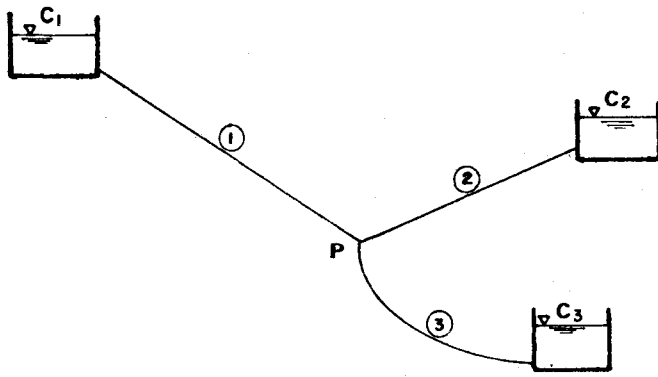


Suponer: cota LGH en C = 59.4 m.

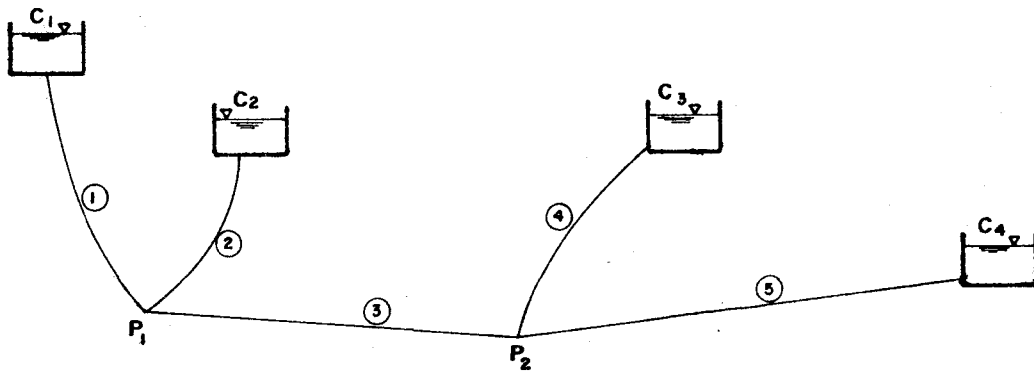
$$\left. \begin{array}{l} S_{60} = 0.00192 \rightarrow Q_{60} = 248.0 \text{ lps} \rightarrow Q_{60} = 247.0 \\ S_{40} = 0.00200 \rightarrow Q_{40} = 87.3 \text{ lps} \rightarrow Q_{40} = 88.0 \\ S_{30} = 0.02450 \rightarrow Q_{30} = 158.5 \text{ lps} \rightarrow Q_{30} = 159.0 \end{array} \right\} \Sigma Q = 0$$

**Ejemplo 93.-** (Tres reservorios). El enunciado es análogo al de los ejemplos 91 y 92. Se conoce el nivel del agua en cada depósito y el juego de valores L-D-C<sub>H</sub> de cada tubería.

El método de solución es el mismo.

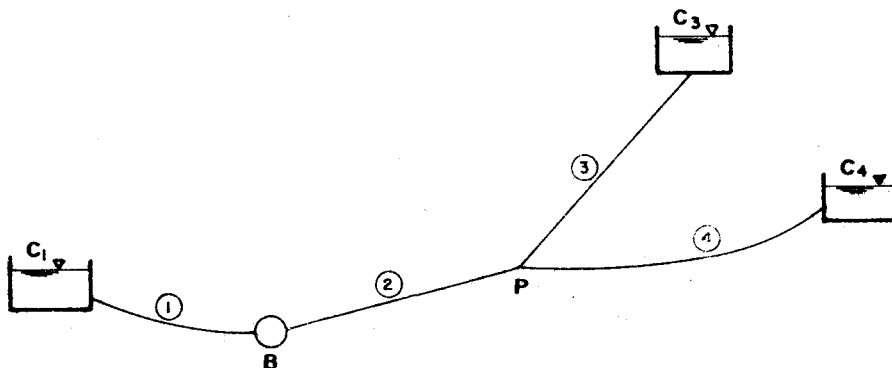


Ejemplo 94.- (Cuatro reservorios).



El método de solución consiste en suponer una cota para la LGH en uno de los nudos, determinar todos los caudales y verificar la ecuación de nudo en el otro nudo.

Ejemplo 95.- (Reservorios con bombeo).



- 1 ... tubería de aspiración
- 2 ... tubería de impulsión o descarga.

Como información adicional se tienen los datos del comportamiento de la bomba:

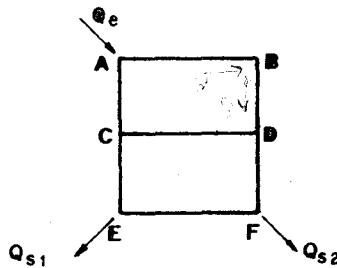
Q	$H_m$	$\eta$
-	-	-

es decir, para cada caudal su carga manométrica  $H_m$  (carga neta que entrega al agua) y la eficiencia con que lo hace.

El método de solución consiste en:

- \* suponer un caudal en la tubería 1
- \* determinar la cota de la LGH a la entrada de la bomba
- \* agregar el valor  $H_m$  para conocer la cota de la LGH a la salida de la bomba
- \* determinar los otros caudales
- \* verificar la ecuación de nudo en P.

Cálculo manual de redes cerradas.- Una red es cerrada cuando las tuberías que la componen se unen formando circuitos. Es el caso de las redes de distribución de agua potable en ciudades.



Como información se tiene:

- \* caudales que entran a la red y caudales que salen (la suma algebraica es cero, de modo que la red está balanceada exteriormente),
- \* juego de valores  $L-D-C_H$  para cada tubería.

Los caudales se reparten en las diferentes tuberías de modo que la red resulta balanceada interiormente. Si en cada nudo se asigna signo + a los caudales que llegan y signo - a los que salen, se cumplirá la ecuación de nudo en todos los nudos:

$$\sum Q = 0$$

Si en cada circuito simple se asigna signo + a las pérdidas de carga en sentido horario y signo - en sentido antihorario, se cumplirá la ecuación de circuito en todos los circuitos:

$$\sum h_f = 0$$

Métodos de cálculo.- El procedimiento general de cálculo es de aproximaciones sucesivas. Hay dos métodos básicos de cálculo:

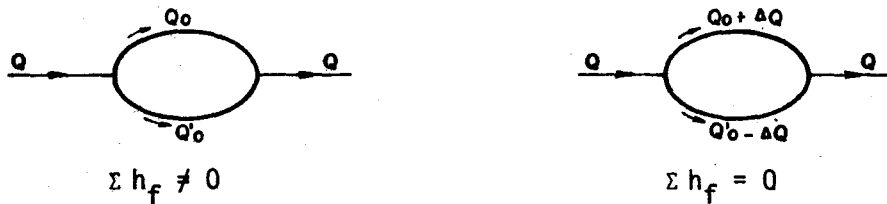
- \* Método de balance de pérdidas. Consiste en suponer caudales (tenien

do cuidado de satisfacer la ecuación de nudo en todos los nudos), hallar las pérdidas y verificar la condición de circuito. Se corrigen los caudales y se repite el proceso hasta que se satisfaga, con la precisión deseada, la ecuación de circuito en todos los circuitos. Se conoce como método de Hardy-Cross.

\* Método de balance de caudales. Consiste en suponer pérdidas (teniendo cuidado de satisfacer la ecuación de circuito en todos los circuitos), hallar los caudales y verificar la condición de nudo. Se corrigen las pérdidas y se repite el proceso hasta que se satisfaga, con la precisión deseada, la ecuación de nudo en todos los nudos. Se conoce como método de Cornish.

Fórmulas de corrección.- A fin de apurar la convergencia de valores, se deduce una fórmula para corregir los caudales cuando se emplea el primer método de cálculo y otra fórmula para corregir las pérdidas cuando se emplea el segundo método de cálculo:

$\Delta Q$  Se parte de considerar un circuito simple antes y después del balance:



De la ecuación Hazen-Williams se deduce  $h_f = SL = KQ^{1.85}$

De esta manera la pérdida genérica de carga antes del balance es:

$$h_{f0} = K Q_0^{1.85} \text{ y después del balance: } h_f = K (Q_0 + \Delta Q)^{1.85}$$

$$\text{desarrollando el binomio: } h_f = K (Q_0^{1.85} + 1.85 Q_0^{0.85} \Delta Q + \dots)$$

en que se desprecian los  $\Delta Q$  de orden superior por ser  $\Delta Q$  pequeño.

$$\text{La condición de circuito es: } \Sigma K (Q_0^{1.85} + 1.85 Q_0^{0.85} \Delta Q + \dots) = 0$$

$$\Sigma K Q_0^{1.85} + 1.85 \Sigma K Q_0^{0.85} \Delta Q = 0$$

$$\Delta Q = \frac{-\Sigma K Q_0^{1.85}}{1.85 \Sigma K Q_0^{0.85}}$$

es decir,

$$\Delta Q = - \frac{\Sigma h_{f0}}{1.85 \Sigma \frac{h_{f0}}{Q_0}}$$

$\Delta h_f$  La pérdida de carga genérica antes del balance es  $h_{f0} = K Q_0^{1.85}$  y después del balance:

$$h_{fo} + \Delta h_f = K (Q_o + \Delta Q)^{1.85}$$

$$h_{fo} + \Delta h_f = K (Q_o^{1.85} + 1.85 Q_o^{0.85} \Delta Q)$$

$$h_{fo} + \Delta h_f = K Q_o^{1.85} + 1.85 K Q_o^{0.85} \Delta Q$$

luego 
$$\Delta h_f = 1.85 \Delta Q \frac{h_{fo}}{Q_o}$$

$$\Delta Q = \frac{\Delta h_f}{1.85} \frac{Q_o}{h_{fo}}$$

$$\Sigma \Delta Q = \frac{\Delta h_f}{1.85} \Sigma \frac{Q_o}{h_{fo}}$$

pero  $\Sigma (Q_o + \Delta Q) = 0$ , condición de nudo,

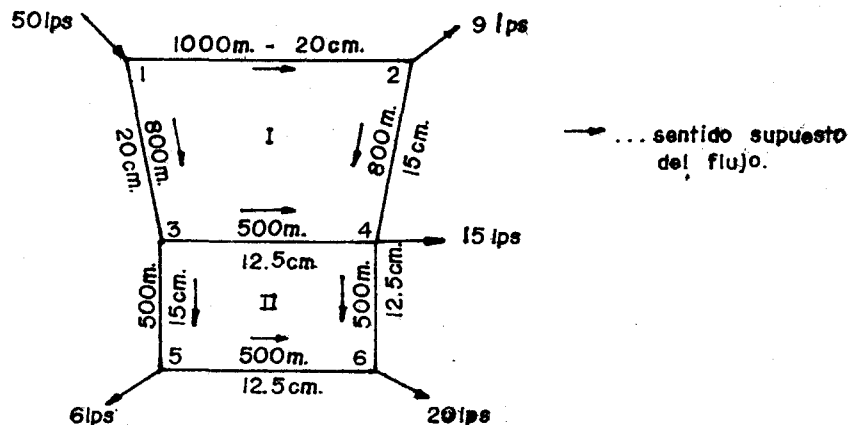
es decir  $\Sigma Q_o = - \Sigma \Delta Q$

reemplazando: 
$$- \Sigma Q_o = \frac{\Delta h_f}{1.85} \Sigma \frac{Q_o}{h_{fo}}$$

$$\Delta h_f = - \frac{1.85 \Sigma Q_o}{\Sigma \frac{Q_o}{h_{fo}}}$$

NOTA: Si se usa Darcy-Weisbach en vez de 1.85 corresponde el valor 2.

Ejemplo 96.- En la red que se muestra, encontrar el caudal en cada tubería. Todas las tuberías tienen un  $C_H = 130$ .



La solución se encuentra en la página 197. Nótese cómo en la tubería 3-4, del segundo circuito, se considera el caudal previo modificado en el valor  $\Delta Q$  del primer circuito. De esta misma manera se procede en las iteraciones siguientes.

$$Q = 0.2786 C_H D^{2.63} S^{0.54} \dots (65c)$$

$$Q \dots \text{m}^3/\text{sg}$$

$$D \dots \text{m}$$

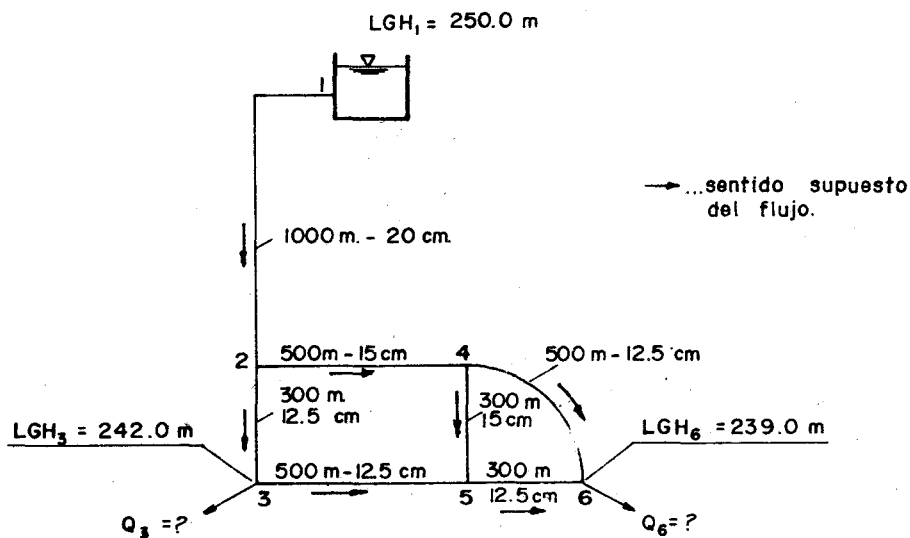
$$S = 0.00130 \frac{Q^{1.85}}{D^{4.87}}$$

$$\Delta Q = - \frac{\sum h_{fo}}{1.85 \sum \frac{h_{fo}}{Q_0}}$$

Ejemplo 97.- En la red que se muestra, encontrar el caudal en cada tubería. Todas las tuberías tienen un  $C_H = 130$ . El dato LGH se refiere a la cota que debe tener la línea de gradiente hidráulica.

LGH<sub>1</sub>, queda determinada por la ubicación topográfica del tanque que alimenta la red;

LGH<sub>3</sub> y LGH<sub>6</sub>, quedan determinadas por la cota topográfica y la altura de presión requerida en cada punto de la derivación.



De acuerdo a la información disponible corresponde emplear el método de balance de caudales. La solución se encuentra en las páginas 198 y 199. Nótese cómo en la tubería 4-5, por pertenecer a los dos circuitos, es necesario aplicar una doble corrección  $\Delta h_f$ , para que la pérdida corregida tenga un valor único.

$$Q = 0.2786 C_H D^{2.63} S^{0.54} \dots (65c)$$

$$Q \dots \text{m}^3/\text{sg}$$

$$D \dots \text{m}$$

$$Q = 36.218 D^{2.63} S^{0.54}$$

$$\Delta h_f = - \frac{1.85 \sum Q_0}{\sum \frac{Q_0}{h_{fo}}}$$

SOLUCION DEL EJEMPLO 96

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CIRCUITO TRAMO		D m	L m	Q <sub>0</sub> lps	S <sub>0</sub> o/oo	H <sub>0</sub> m	H <sub>0</sub> /Q <sub>0</sub>	ΔQ <sub>0</sub> lps	Q <sub>1</sub> lps
I	1-2	0.200	1000	25.0	3.58	3.58	143.20	-1.5	23.5
	2-4	0.150	800	16.0	6.37	5.10	318.75	-1.5	14.5
	4-3	0.125	500	-10.0	-6.49	-3.25	325.00	-1.5	-11.5+1.2
	3-1	0.200	800	-25.0	-3.58	-2.86	114.40	-1.5	-26.5
Σ = 2.57							901.35		
II	4-6	0.125	500	11.0	7.74	3.87	351.82	-1.2	9.8
	6-5	0.125	500	-9.0	-5.34	-2.67	296.67	-1.2	-10.2
	5-3	0.150	500	-15.0	-5.65	-2.83	188.67	-1.2	-16.2
	3-4	0.125	500	10.0+1.5	8.40	4.20	365.22	-1.2	10.3+0.5
Σ = 2.57							1202.38		
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
S <sub>1</sub> o/oo	H <sub>1</sub> m	H <sub>1</sub> /Q <sub>1</sub>	ΔQ <sub>1</sub> lps	Q <sub>2</sub> lps	S <sub>2</sub> o/oo	H <sub>2</sub> m	H <sub>2</sub> /Q <sub>2</sub>	ΔQ <sub>2</sub> lps	Q <sub>3</sub> lps
3.19	3.19	135.74	-0.5	23.0	3.07	3.07	133.48	-0.04	22.96
5.31	4.25	293.10	-0.5	14.0	4.97	3.98	284.29	-0.04	13.96
-6.85	-3.43	333.01	-0.5	-10.8+0.1	-7.35	-3.68	343.93	-0.04	-10.74+0.02
-3.99	-3.19	120.38	-0.5	-27.0	-4.13	-3.30	122.22	-0.04	-27.04
Σ = 0.82		882.23			Σ = 0.07		883.92		
6.25	3.13	319.39	-0.1	9.7	6.13	3.07	316.49	-0.02	9.68
-6.73	-3.37	330.39	-0.1	-10.3	-6.85	-3.43	333.01	-0.02	-10.32
-6.52	-3.26	201.23	-0.1	-16.3	-6.59	-3.30	202.45	-0.02	-16.32
7.48	3.74	346.30	-0.1	10.7+0.04	7.40	3.70	344.51	-0.02	10.72
Σ = 0.24		1197.31			Σ = 0.04		1196.46		

Nótese cómo conforme avanzan las iteraciones el valor Σh<sub>f</sub> se va haciendo más pequeño, tendiendo a cero en cada circuito. En cada circuito el valor ΔQ también tiende a cero.

Nótese que la pérdida de carga entre los nudos extremos 1 y 6 es prácticamente la misma para todos los caminos posibles.

SOLUCION DEL EJEMPLO 97

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
NUDO #	TRAMO	D m	L m	$h_{fo}$ m	$S_o$ o/oo	$Q_o$ lps	$Q_o/h_{fo}$	$\Delta h_f$ m	$h_{f1}$ m	$S_1$ o/oo	$Q_1$ lps	
2	1-2	0.200	1000	-5.00	- 5.00	-30.1	0.006	0.22	-4.78	- 4.78	-29.3	
	3-2	0.125	300	3.00	10.00	12.7	0.004	0.22	3.22	10.73	13.2	
	4-2	0.150	500	3.00	6.00	15.6	0.005	0.22	3.22+0.46	7.36	17.4	
							$\Sigma = - 1.8$	0.015				$\Sigma = 1.3$
4	2-4	0.150	500	-3.00-0.22	- 6.44	-16.2	0.005	-0.46	-3.68+0.16	- 7.04	-17.0	
	5-4	0.150	300	1.00	3.30	11.3	0.011	-0.46	0.54-0.24	1.00	5.9	
	6-4	0.125	500	3.00	6.00	9.6	0.003	-0.46	2.54	5.08	8.8	
							$\Sigma = 4.7$	0.019				$\Sigma = - 2.3$
5	3-5	0.125	500	-1.00	- 2.00	- 5.3	0.005	0.24	-0.76	- 1.52	- 4.6	
	4-5	0.150	300	-1.00+0.46	- 1.80	- 8.1	0.015	0.24	-0.30-0.15	- 1.50	- 7.4	
	6-5	0.125	300	2.00	6.67	10.2	0.005	0.24	2.24	7.47	10.9	
							$\Sigma = - 3.2$	0.025				$\Sigma = - 1.1$

Continúa ...



Continuación

		13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
NUDO #	TRAMO	$Q_1/h_{f1}$	$h_f$ m	$h_{f2}$ m	$S_2$ o/oo	$Q_2$ lps	$Q_2/h_{f2}$	$\Delta h_f$ m	$h_{f3}$ m	$S_3$ o/oo	$Q_3$ lps
2	1-2	0.0061	-0.16	-4.94	- 4.94	-29.9	0.00605	0.06	-4.88	- 4.88	-29.7
	3-2	0.0041	-0.16	3.06	10.20	12.8	0.00418	0.06	3.12	10.40	13.0
	4-2	0.0047	-0.16	3.52-0.15	6.74	16.6	0.00493	0.06	3.43-0.06	6.74	16.6
		$\Sigma = 0.0149$				$\Sigma = - 0.5$	0.01516				$\Sigma = - 0.1$
4	2-4	0.0048	0.15	-3.37-0.06	- 6.86	-16.7	0.00487	0.06	-3.37	6.74	-16.6
	5-4	0.0197	0.15	0.45-0.07	1.27	6.7	0.01763	0.06	0.44-0.05	1.30	6.8
	6-4	0.0035	0.15	2.69	5.38	9.1	0.00338	0.06	2.75	5.50	9.2
		$\Sigma = 0.0280$				$\Sigma = - 0.9$	0.02588				$\Sigma = - 0.6$
5	3-5	0.0061	0.07	-0.69	- 1.38	- 4.4	0.00638	0.05	-0.64	- 1.28	- 4.2
	4-5	0.0164	0.07	-0.38-0.06	- 1.47	- 7.3	0.01659	0.05	-0.39	- 1.30	- 6.8
	6-5	0.0049	0.07	2.31	7.70	11.0	0.00476	0.05	2.36	7.87	11.2
	$\Sigma = 0.0274$				$\Sigma = - 0.7$	0.02773				$\Sigma = 0.2$	

199

1. Nótese cómo conforme avanzan las iteraciones el valor  $\Sigma Q$  se va haciendo más pequeño, tendiendo a cero en cada nudo. En cada nudo el valor  $\Delta h_f$  también tiende a cero.
2. Empleando este método es obvio que la pérdida de carga entre los puntos extremos 1 y 6 es la misma para todos los caminos posibles. También que en cada circuito  $\Sigma h_f = 0$ .

Comentario.- Es bueno hacer notar que en este apartado 8.9.2 que se refiere a análisis de redes, en lo que respecta a las redes cerradas, los dos métodos de cálculo, el de balance de pérdidas y el de balance de gastos, - son métodos de verificación y no de diseño. En el diseño de redes se determina el diámetro de cada tubería y no es tratado aquí.

Antes de atacar un problema de verificación (también de diseño) hay que hacer un breve recuento para ver que el número de incógnitas sea igual al número de ecuaciones disponibles o datos.

En una red cerrada de  $r$  ramas o tuberías conocidas hay  $r$  caudales desconocidos o incógnitas. Los  $n$  nudos proporcionan  $(n-1)$  ecuaciones independientes y los circuitos existentes proporcionan  $(r-n+1)$  ecuaciones, de modo que el total de ecuaciones disponibles es:

$$(n-1) + (r-n+1) = n-1+r-n+1 = r$$

es decir igual al total de incógnitas. Tal es el caso de la red del ejemplo 96.

En el ejemplo 97, las incógnitas son 6 gastos y 3 cotas de la LGH, es decir 9. La información disponible comprende 5 ecuaciones independientes de los nudos, 2 ecuaciones de los circuitos y 2 cotas de LGH, es decir un total de 9 datos.

Cálculo de redes con computadora.- En una red cerrada, en general, de  $n$  nudos, se plantean  $(n-1)$  ecuaciones independientes de nudo, de la forma

$$\sum Q = 0$$

y  $\lambda$  ecuaciones de circuito de la forma:

$$\sum h_f = Q$$

Cuando se combinan estas ecuaciones queda conformado un sistema de  $r$  ecuaciones no lineales. Al no existir un método de solución directa de este sistema se recurre al procedimiento de cálculo iterativo. Para sistemas simples de tuberías puede hacerse el cálculo manual en la forma recién descrita en los ejemplos 96 y 97. Para redes grandes se hace imprescindible el cálculo con computadora.

Existe un método, el de Newton-Raphson, que difiere de los métodos clásicos de balance de pérdidas y de balance de gastos, en que las correcciones a los caudales asumidos o a las pérdidas asumidas se aplican a toda la red simultáneamente. Este método converge más rápidamente, y tiene que ser hecho con computadora. No es tratado aquí.

Método de la teoría lineal.- De la ecuación Darcy-Weisbach se deduce:

$$h_f = KQ^2$$

Si la ecuación de circuito se escribe del modo:

$$\sum KQ^2 = 0$$

se forma un sistema de ecuaciones no lineales. Pero cuando se expresa:

$$h_f = K' Q$$

siendo  $K' = K Q_0$ ,

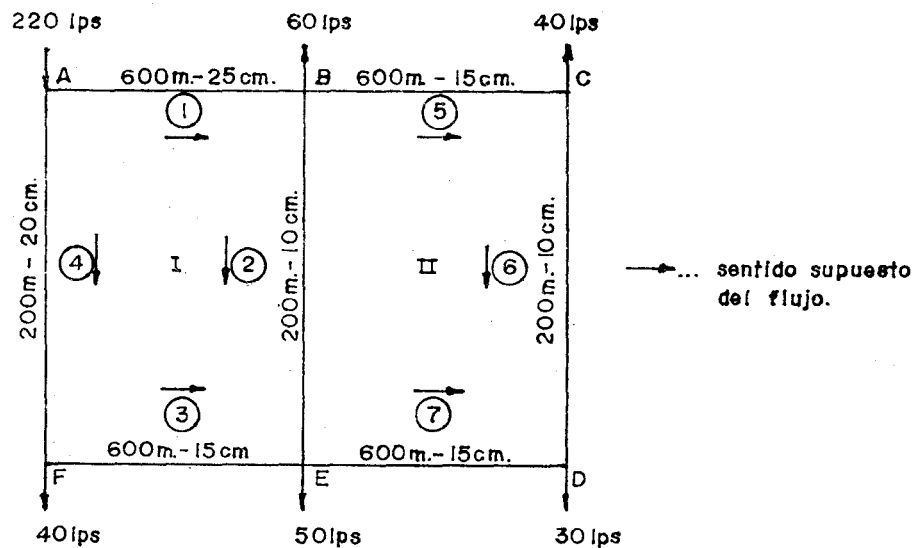
el sistema de ecuaciones no lineales se transforma en un sistema de ecuaciones lineales.

Cuando estas  $\ell$  ecuaciones lineales de circuito, se combinan con las  $(n-1)$  ecuaciones independientes de nudo, se forma un sistema de  $r$  ecuaciones lineales. Resolviendo este sistema de  $r$  ecuaciones lineales con  $r$  incógnitas se obtienen los valores  $Q$ .

Desde que los valores iniciales  $Q_0$  son valores estimados, el procedimiento se repite hasta la precisión deseada en los caudales  $Q$ .

Al igual que el método Newton-Raphson, este método de la teoría lineal converge mucho más rápido que los métodos tradicionales de balance de pérdidas y de gastos, pero no se presta para el cálculo manual sino que tiene que usarse computadora.

Ejemplo 98.- (Referencia 8). Analizar la red cuya geometría se muestra, por el método de la teoría lineal. La rugosidad absoluta de todas las tuberías es  $K = 0.06$  mm. Usar  $\nu = 1.13 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/sg.



Ecuaciones de nudo, para caudales en m<sup>3</sup>/sg:

$$\begin{aligned} + Q_1 + Q_4 &= +0.220 \\ Q_1 - Q_2 - Q_5 &= 0.060 \\ Q_5 - Q_6 &= 0.040 \\ Q_2 + Q_3 - Q_7 &= 0.050 \\ - Q_3 + Q_4 &= 0.040 \end{aligned}$$



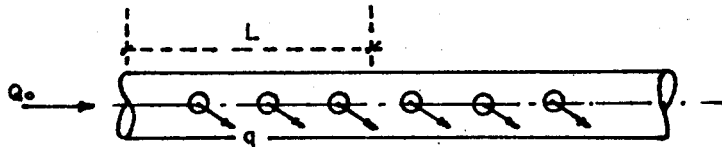
Los nuevos valores de  $K'$  se determinan usando el promedio de los caudales asumido y encontrado en cada tubería. Después de cuatro iteraciones más se obtienen los caudales finales. Los resultados son:

Tubería	Q lps	$h_f$ m
AB	131.55	13.70
BE	25.02	19.55
FE	48.45	26.67
AF	88.45	6.59
BC	46.53	24.74
CD	6.55	1.52
ED	23.47	6.69

### 8.9.3 Tubería con servicio en camino

Es una tubería que cada cierta distancia tiene una salida de agua. Como el diámetro permanece constante, al ir disminuyendo el caudal, va disminuyendo la velocidad.

Por simplicidad se supone todavía válida la fórmula Darcy-Weisbach y el valor de  $f$  constante.



$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{Q^2}{2g A^2} = \frac{f}{2g D A^2} Q^2 L = K Q^2 L$$

si se considera que el gasto que sale es  $q \text{ m}^3/\text{sg}$  por metro lineal de tubería, el gasto genérico es:

$$Q = Q_0 - q L$$

la pérdida de carga en una longitud pequeña:

$$d h_f = K Q^2 d L$$

y la pérdida de carga en una longitud  $L$ :

$$h_f = \int_0^L K Q^2 d L$$

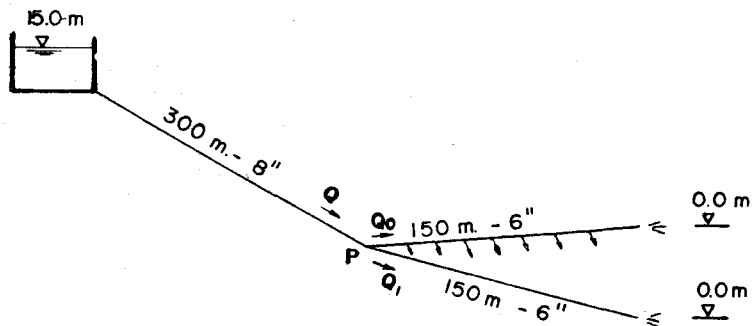
$$\begin{aligned}
 h_f &= \int_0^L K (Q_0 - qL)^2 dL = \int_0^L K (Q_0^2 + q^2 L^2 - 2 Q_0 q L) dL \\
 &= K \left[ Q_0^2 L + \frac{q^3 L^3}{3} - Q_0 q L^2 \right] = KL \left[ Q_0^2 + \frac{(Q_0 - Q)^2}{3} - Q_0 (Q_0 - Q) \right] \\
 &= KL \left( Q_0^2 + \frac{Q_0^2 + Q^2 - 2 Q_0 Q}{3} - Q_0^2 + Q_0 Q \right) \\
 &= \frac{KL}{3} (Q_0^2 + Q_0 Q + Q^2)
 \end{aligned}$$

para el caso particular de gasto final igual cero:

$$h_f = \frac{KL}{3} Q_0^2$$

es decir, la tercera parte de la pérdida que ocurriría si el  $Q_0$  fuera constante.

Ejemplo 99. (Referencia 4). De un depósito sale una tubería de 8" y 300 m que se bifurca en ramales de 6" y 150 m cada uno. Los extremos descargan libremente en la atmósfera. Uno de los ramales es una tubería que da servicio a través de salidas igualmente espaciadas y de modo que el gasto en el extremo es la mitad del gasto en el inicio del ramal. - Despreciando las pérdidas locales, y considerando un valor constante  $f = 0.024$ , calcular el gasto en cada ramal,



Designando con  $Q$ ,  $Q_0$  y  $Q_1$  los caudales, como indica la figura, en la tubería que da servicio:

$$h_f = \frac{KL}{3} (Q_0^2 + Q_0 Q + Q^2)$$

en esta fórmula  $Q = \frac{Q_0}{2}$ ,

$$\therefore h_f = \frac{KL}{3} \left( Q_0^2 + \frac{Q_0^2}{2} + \frac{Q_0^2}{4} \right) = \frac{7KL}{12} Q_0^2 = 2,112.52 Q_0^2$$

Entre el depósito y el nudo P:

$$h_f = 1,718.78 Q^2$$

debiendo cumplirse:  $1,718.78 Q^2 + 2,112.52 Q_0^2 = 15 \dots (1)$

En el otro ramal :  $1,718.78 Q^2 + 3,621.46 Q_1^2 = 15 \dots (2)$

Por último :  $Q = Q_0 + Q_1 \dots\dots\dots (3)$

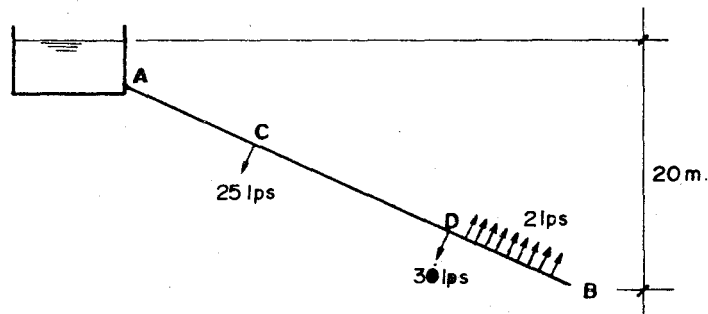
Resolviendo el sistema se determinan los valores solicitados, que resultan ser:

$$Q = 79.0 \text{ lps}$$

$$Q_0 = 44.8 \text{ lps}$$

$$Q_1 = 34.2 \text{ lps}$$

Ejemplo 100. (Referencia 4). Determinar el diámetro constante de un conducto rectilíneo AB, del cual se derivan gastos de 25 lps y 30 lps en C y D, respectivamente; asimismo se tienen, del punto D al B, derivaciones uniformes de 2 lps, a cada metro de longitud. En el punto B la presión debe ser por lo menos de 15 m de columna de agua y el factor de fricción es  $f = 0.020$ .



- AC = 20 m
- CB = 30 m
- DB = 20 m

Pautas para la solución.

- \* no considerar pérdidas menores
- \* la pérdida total de carga es de 5 m
- \* el caudal en AC es 95 lps y el caudal en CD es 70 lps.

Se deja como ejercicio final para el lector.

ACERCA DE LA HISTORIA DE LA HIDRAULICA  
(tomado de la referencia 4)

PRANDTL, Ludwig (1875-1953)

Se le considera el fundador de la Mecánica de Fluidos moderna. Nació en el sur de Alemania. Realizó estudios de ingeniería mecánica y se doctoró con una tesis sobre elasticidad.

Introdujo el concepto de capa límite. Fue llamado como profesor de la Universidad de Göttingen, estableciendo un importante Instituto para la investigación del movimiento de los fluidos.

Tuvo importantes discípulos como Blasius, Von Karman y otros, constituyendo una verdadera escuela dentro de la que cabe mencionar a Tietjens (dio forma de libro a las lecciones de Prandtl) y a Nikuradse (estudió experimentalmente la resistencia en tuberías).

ROUSE, Hunter

Es uno de los autores e investigadores contemporáneos que goza de mayor prestigio por su contribución al desarrollo y divulgación de la Mecánica de los Fluidos.

Se graduó de Master en el Massachusetts Institute of Technology (M.I.T.) en 1932, de doctor en ingeniería en Karlsruhe, Alemania, y de doctor en ciencias físicas en la Sorbona en 1959.

Tuvo una larga carrera en la docencia universitaria que inició como Asistente en el M.I.T. y culminó como Decano de la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Iowa. Conferencista y profesor visitante recorrió muchos países del mundo.

Entre sus libros destacan: "Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers" (1938), "Elementary Mechanics of Fluids" (1953), "History of Hydraulics" (1957), "Engineering Hydraulics" (1950), "Advanced Mechanics of Fluids" (1959) y "Selected Writings" (1971).



APENDICE A1. PROPIEDADES DEL AGUA Y DEL AIRE (\*)

Propiedades mecánicas del agua a la presión atmosférica

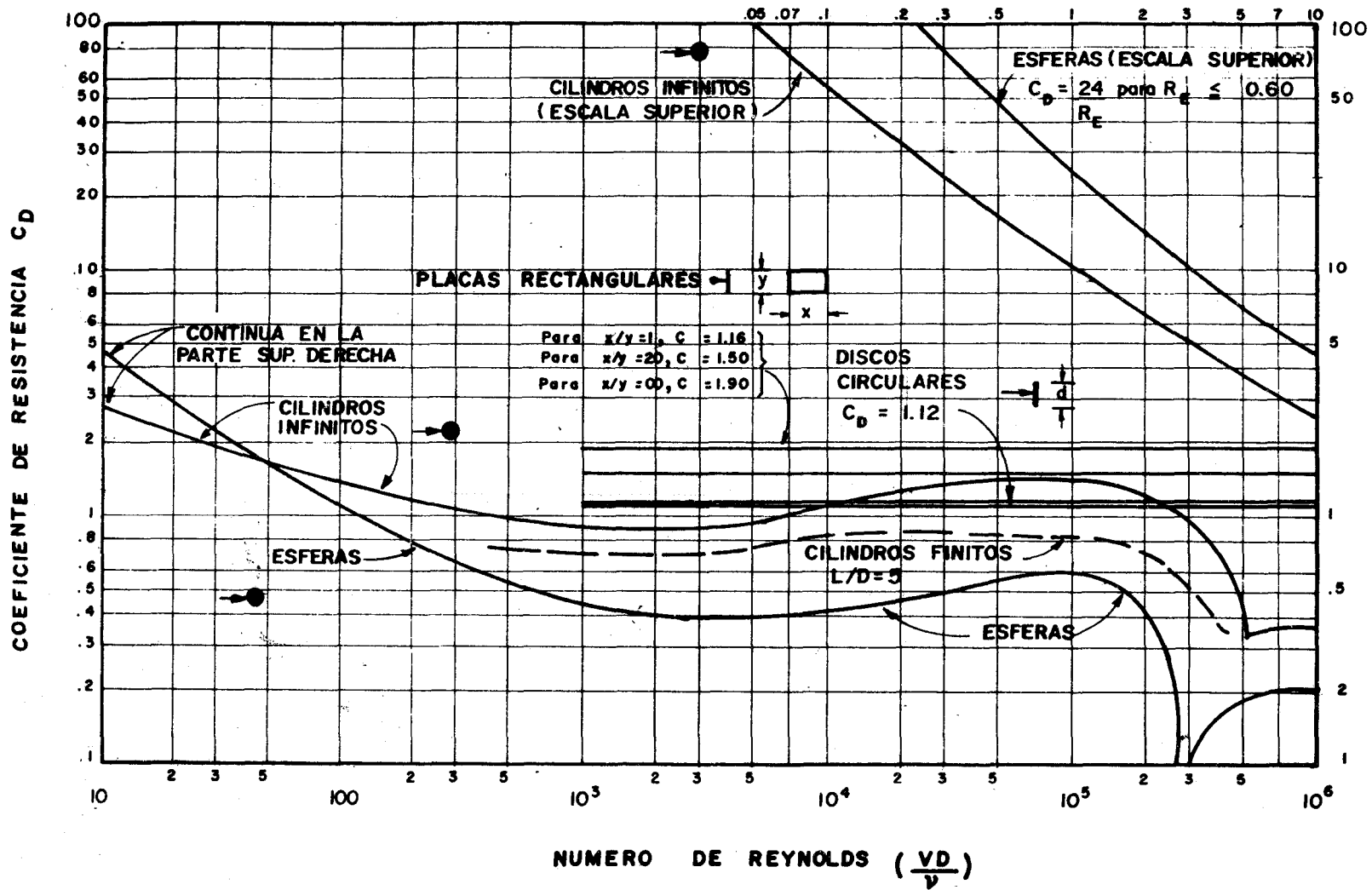
Temp. °C	Densidad $\frac{\text{kg-sg}^2}{\text{m}^4}$	Peso específico $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Viscosidad dinámica $\frac{\text{kg-sg}}{\text{m}^2}$	Viscosidad cinemática $\frac{\text{m}^2}{\text{sg}}$	Presión de vapor $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ (abs)
0	101.96	999.87	$18.27 \times 10^{-5}$	$1.792 \times 10^{-6}$	0.0056
5	101.97	999.99	15.50	1.520	0.0088
10	101.95	999.73	13.34	1.308	0.0120
15	101.88	999.12	11.63	1.142	0.0176
20	101.79	998.23	10.25	1.007	0.0239
25	101.67	997.07	9.12	0.897	0.0327
30	101.53	995.68	8.17	0.804	0.0439
35	101.37	994.11	7.37	0.727	0.0401
40	101.18	992.25	6.69	0.661	0.0780
50	100.76	988.07	5.60	0.556	0.1249

Propiedades del aire a la presión atmosférica

Temp. °C	Densidad $\frac{\text{kg-sg}^2}{\text{m}^4}$	Peso específico $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Viscosidad dinámica $\frac{\text{kg-sg}}{\text{m}^2}$	Viscosidad cinemática $\frac{\text{m}^2}{\text{sg}}$
-20	0.1424	1.3955	$16.917 \times 10^{-7}$	$1.188 \times 10^{-5}$
-10	0.1370	1.3426	16.892	1.233
0	0.1319	1.2926	17.411	1.320
10	0.1273	1.2475	18.013	1.415
20	0.1229	1.2047	18.288	1.488
30	0.1188	1.1642	19.008	1.600
40	0.1150	1.1270	19.412	1.688
50	0.1115	1.0927	19.724	1.769

(\*) Valores tomados de la referencia 2 de la Bibliografía.





APENDICE A2.

COEFICIENTE DE RESISTENCIA



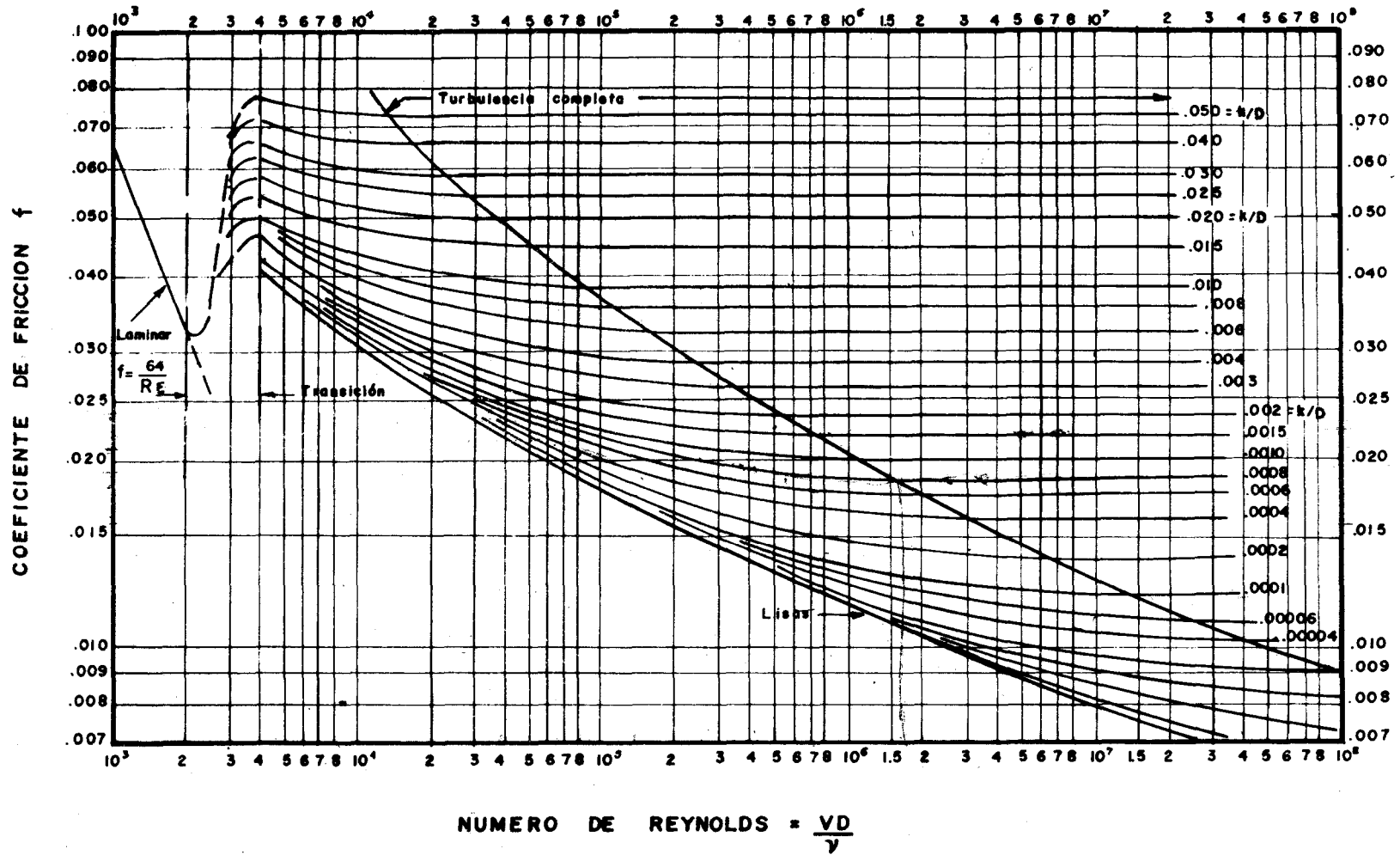
APENDICE A3. VALORES DE LA RUGOSIDAD ABSOLUTA K (\*)

Tubos muy lisos sin costura (vidrio, cobre, acero nuevo con superficie pintada, plástico, etc.	$1.5 \times 10^{-6}$	m
Fierro forjado	$4.5 \times 10^{-5}$	
Acero rolado, nuevo	$5 \times 10^{-5}$	
Acero laminado, nuevo	$4 \times 10^{-5}$	$10^{-4}$
Fierro fundido, nuevo	$2.5 \times 10^{-4}$	
Fierro galvanizado	$1.5 \times 10^{-4}$	
Fierro fundido, asfaltado	$1.2 \times 10^{-4}$	
Fierro fundido, oxidado	$10^{-3}$	$1.5 \times 10^{-3}$
Acero remachado	$0.9 \times 10^{-4}$	$0.9 \times 10^{-3}$
Cemento enlucido	$4 \times 10^{-4}$	
Asbesto cemento, nuevo	$2.5 \times 10^{-5}$	
Concreto centrifugado, nuevo	$1.6 \times 10^{-4}$	
Concreto muy bien terminado, a mano	$10^{-5}$	
Concreto liso	$2.5 \times 10^{-5}$	
Concreto bien acabado, usado	$2 \times 10^{-4}$	$3 \times 10^{-4}$
Concreto sin acabado especial	$10^{-3}$	$3 \times 10^{-3}$
Concreto rugoso	$10^{-2}$	
Duelas de madera	$1.8 \times 10^{-4}$	$9 \times 10^{-4}$
Piedra asentada y bien lisa	$5 \times 10^{-4}$	
Revestimiento de piedra	$2 \times 10^{-3}$	
Grava	$10^{-2}$	
Piedra pequeña	$2 \times 10^{-2}$	
Piedra grande	$5 \times 10^{-2}$	
Roca	0.1	
Tierra (lisa)	$3 \times 10^{-3}$	
Fondo con transporte de arena	$10^{-2}$	$5 \times 10^{-2}$
Acequia con vegetación	0.1	

NOTA: Téngase presente que el valor de K señalado para los contornos muy rugosos (roca, fondo de arena, etc) es absolutamente referencial y sujeto a grandes variaciones según las circunstancias de cada caso particular.

(\*) Valores tomados de la referencia 4 de la Bibliografía.





APENDICE A4.

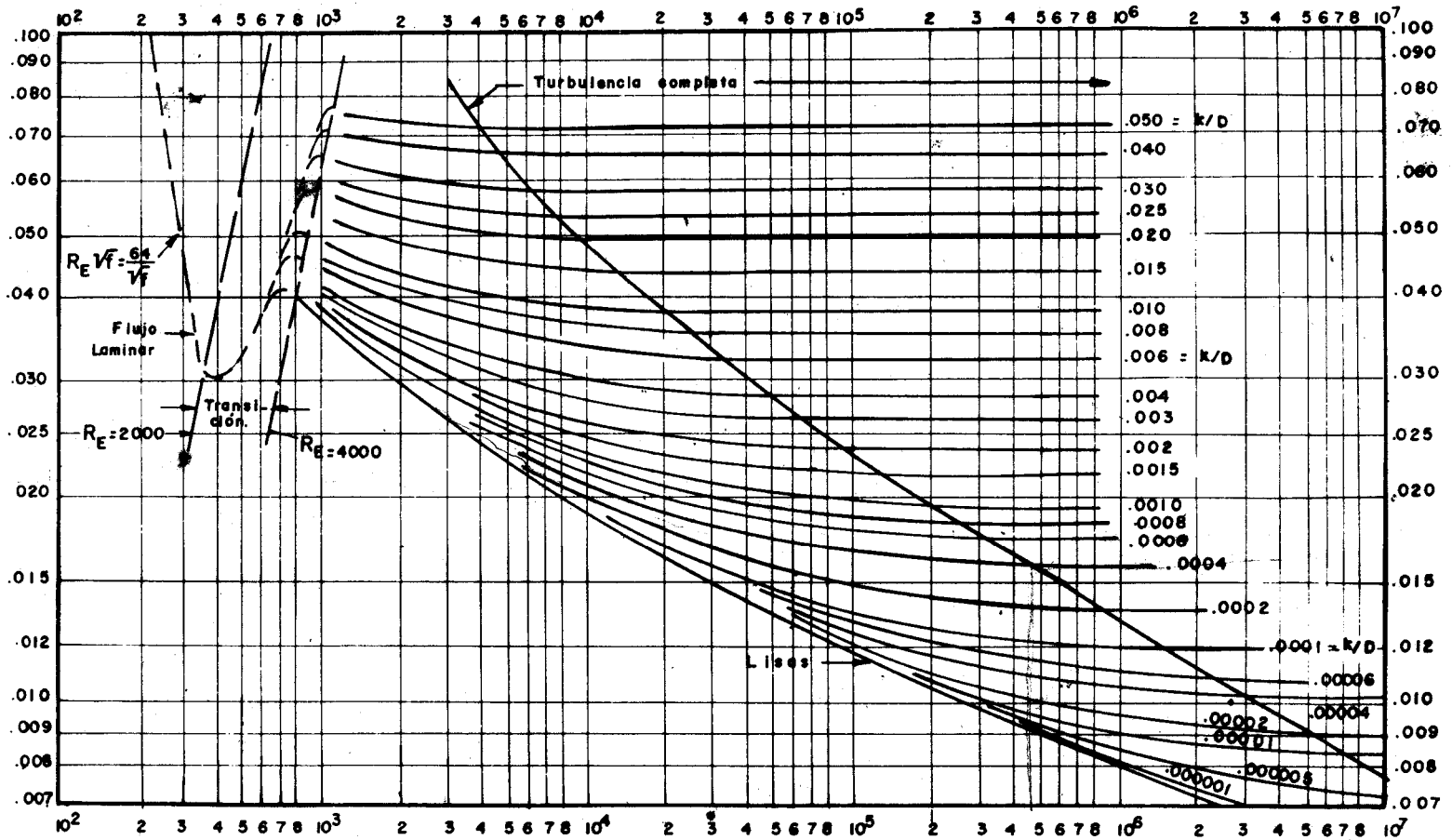
DIAGRAMA DE MOODY

Los valores de la rugosidad absoluta  $K$   
se obtienen del apéndice A3.





COEFICIENTE DE FRICCIÓN



VALORES DE  $Re \sqrt{f} = \frac{D}{\nu} \sqrt{\frac{2gDhf}{L}}$

APENDICE A5.

DIAGRAMA DE JOHNSON ROUSE

Los valores de la rugosidad absoluta K se obtienen del apéndice A3.



APENDICE A6 : PROGRAMA EN PASCAL PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Se trata de resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$a_{11} X_1 + \dots + a_{1N} X_N = b_1$$

$$a_{21} X_1 + \dots + a_{2N} X_N = b_2$$

.....

.....

$$a_{N1} X_1 + \dots + a_{NN} X_N = b_N$$

Para mostrar el método de eliminación de Gauss, se utilizará un ejemplo numérico.

$$6 X_1 + 2 X_2 + 2 X_3 = -2$$

$$2 X_1 + \frac{2}{3} X_2 + \frac{1}{3} X_3 = 1$$

$$X_1 + 2 X_2 - 3 X_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} x - \frac{2}{6} \\ + \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{array}{l} x - \frac{1}{6} \\ + \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{3}x_3 = \frac{5}{3}$$

$$\rightarrow x_3 = -5$$

$$\frac{5}{3}x_2 - \frac{10}{3}x_3 = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow x_2 = -9,8$$

$$6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2$$

$$\rightarrow x_1 = 4,6$$

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} \quad x_N = \frac{b_N}{a_{NN}}$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{23}x_3)$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - |a_{12}x_2 + a_{13}x_3|)$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - \sum_{j=i+1}^{j=N} a_{ij}x_j)$$

$$i = N-1, \dots, 2, 1$$

```

PROGRAM      SIST LINEAL
CONST       MAX = 30; MAX1 = 31
TYPE       MATRIZ = ARRAY  1..MAX, 1..MAX1 OF REAL;
           VECTOR = ARRAY  1..MAX OF REAL;
VAR        A : MATRIZ;
           DET: REAL;
           N  : INTEGER;

PROCEDURE  LEER_MATRIZ (VAR N:INTEGER, VAR A:MATRIZ);
VAR       I,J:INTEGER;
BEGIN
    WRITE ( ORDEN DE LA MATRIZ DEL SISTEMA; ');
    READLN (N);
    FOR I:=1 TO N DO
        BEGIN
            WRITE ('FILA ',I,'INGRESE ',N+1,'COEFICIENTES: ');
            FOR J:=1 TO N+1 DO READLN (A|I,J|);
            WRITELN
        END
    END

PROCEDURE  TRIANGULAR (VAR A:MATRIZ);
VAR       I,J,K:INTEGER;

PROCEDURE  PIVOTE (I:INTEGER)
VAR       V,T :REAL;
           PIV,J:INTEGER;
BEGIN
    PIV:=I;
    V:=ABS (A|I,I|);
    FOR J:=I+1 TO N DO
        BEGIN T:=ABS (A |J,I|);
            IF (V<T) THEN
                BEGIN V:=T; PIV: J  END
        END;
    IF (V=0) THEN DET:=0
    ELSE
        BEGIN
            FOR J:=I TO N+1 DO
                BEGIN
                    V:=A |I,J|; A |I,J|:=A |PIV,J|;
                    A |PIV,J| :=V
                END;
                DET:=A |I,J| * DET;
                IF (I<>PIV) THEN DET:=-DET
            END
        END; (*FIN DE PIVOTE*)
BEGIN
    FOR I:=1 TO N DO
        BEGIN PIVOTE (I);
            IF (DET<>0) THEN
                FOR J:=I+1 TO N DO
                    BEGIN
                        FOR K:=I+1 TO N+1 DO
                            A |J,K| = A |J,K|-|J,I| * A |I,K|/A |I,J|;
                            A |J,I| := 0
                        END
                    END
                END
            END
        END; (*FIN DE TRIANGULAR*)

```

```

PROCEDURE RESOLVER (A MATRIZ);
VAR X : VECTOR;
    T : REAL;
    I,J: INTEGER;
BEGIN
  FOR I:=N DOWN TO 1 DO
    BEGIN
      T:=A |I,N+1|;
      FOR J:=I+1 TO N DO T:=T-A |I,J| * X |J|;
      X |I|:=T/A |I,I|
    END;
    WRITELN ('SOLUCION ENCONTRADA .....');
    FOR I:=1 TO N DO WRITELN ('X(',I,')=', X |I|: 4:2)
  END; (*FIN DE RESOLVER*)

BEGIN (*BLOQUE PRINCIPAL*)
  LEER_MATRIZ (N,A);
  DET:=1;
  TRIANGULAR (A);
  IF (DET=0)
    THEN WRITELN ('DET DEL SISTEMA ES CERO ')
    ELSE RESOLVER (A)
  END. (*FIN DEL PROGRAMA*)

```

## RUN

```

ORDEN DE LA MATRIZ DEL SISTEMA      3
FILA 1, INGRESE 4 COEFICIENTES      : 6      2      2      -2
FILA 2, INGRESE 4 COEFICIENTES      : 2      0.6666  0.3333  1
FILA 3, INGRESE 4 COEFICIENTES      : 1      2      -3      0
SOLUCION ENCONTRADA .....
X(1) = 4.60
X(2) = -9.80
X(3) = -5.00

```



