Capítulo 5

LIMITES DE FUNCIONES

5.1. INTRODUCCION

El objetivo de este capítulo es iniciar y familiarizar al alumno con el concepto de límite, uno de los más importantes del análisis y que ha permitido tratar en forma rigurosa ideas como las de derivada, continuidad e integración de funciones.

En el capítulo siguiente se presentará el concepto de derivada de una función donde se apreciará su vinculación con el de límite de una función en un punto.

En este capítulo sobre límites, se insistirá principalmente en la definición misma de límite y en la técnica general de las demostraciones que será desarrollada a través de ejemplos sencillos y de la demostración de algunos teoremas básicos.

Se previene al alumno que no es común el obtener una completa comprensión de este concepto en un primer encuentro con él.

5.2. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

Esta vez, como en el caso de las relaciones reales nos referiremos a funciones en donde, tanto el dominio como el rango son subconjuntos de IR. Tales funciones se llaman *funciones reales de variable real* o simplemente *funciones reales.* En este sentido una *función real* f es todo subconjunto de $\mathbb{R}^2$/que cumple con la propiedad siguiente:

"dos pares distintos del subconjunto no pueden tener igual la primera componente".

La definición dada permite asegurar que para toda función se cumple la siguiente propiedad:

"ninguna recta vertical puede intersectar a la gráfica que representa a la función en más de un punto".

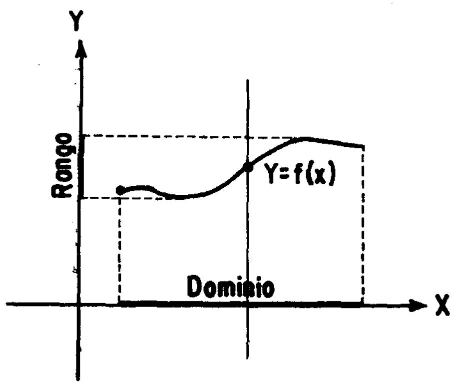

Fig. 5.1

Así, de los conjuntos de $\mathbb{R}^2$ siguientes:

$f = \{(x, y) \ / \ y = 4\}$, $\quad g = \{(x, y) \ / \ y = x^2\}$

$h = \{(x, y) \ / \ y^2 = x\}$, $\quad s = \{(x, y) \ / \ x^2 + y^2 = 1\}$,

sólo los dos primeros cumplen con la definición de función. Las gráficas correspondientes se indican en la siguiente figura:

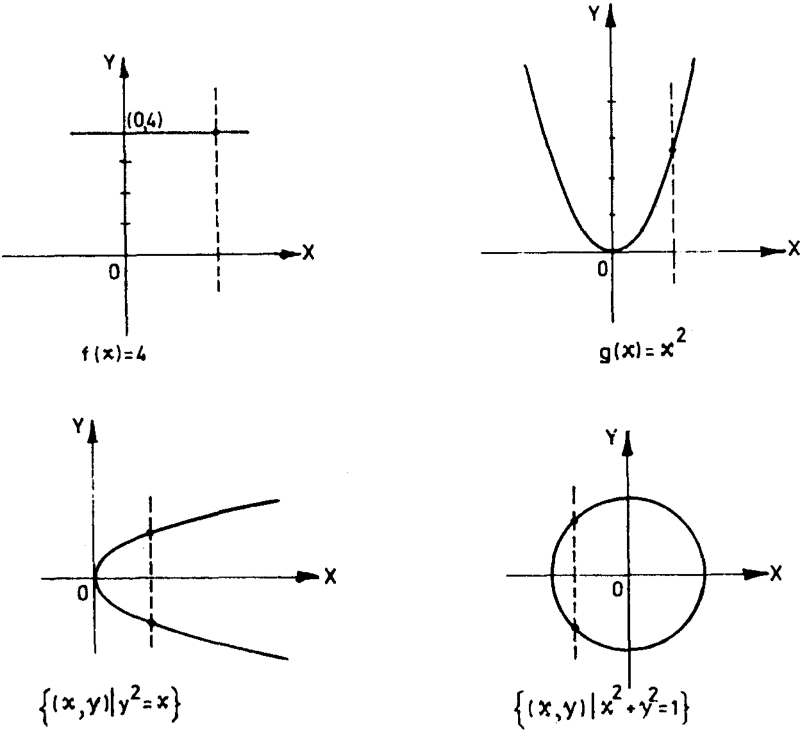

Fig. 5.2

También, como en el caso de las relaciones reales, usaremos preferentemente funciones que pueden ser definidas por ecuaciones lo que nos permitirá usar los resultados referentes a las relaciones definidas por ecuaciones.

La definición de función, también en este caso, nos permite establecer una correspondencia entre los elementos del dominio y los elementos del rango, de manera que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del rango. Esta correspondencia nos permitió sin confusión alguna, denotar a un par (x, y) de una función f, por $(x, f(x))$, es decir, escribir $y = f(x)$. Si por ejemplo, la función es:

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = 3x + 4\}$$

podemos escribir simplemente

$$f(x) = 3x + 4 ,$$

para referirnos a ella o, también

$$f: x \longrightarrow 3x + 4 ,$$

lo cual subraya la correspondencia que existe entre los elementos x del dominio y los elementos $f(x) = 3x + 4$ del rango.

ALGUNAS FUNCIONES ESPECIALES

Definiremos a continuación algunas funciones reales que se usan a menudo.

La función *identidad* I, que se define con la regla de correspondencia $I(x) = x$ y cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{R}$.

La gráfica de la función identidad es la recta que pasa por el origen de coordenadas y cuyo ángulo que forma con el eje X, mide 45°.

La función *constante,* que se define como la función f cuya regla de correspondencia es $f(x) = c$, c constante, cuyo dominio es $\mathbb{R}$. Su gráfico corresponde a una recta paralela al eje de las X y que pasa por el punto $(0, c)$.

La función *valor absoluto,* es la función definida con la regla de correspondencia $f(x) = |x|$ y con dominio $\mathbb{R}$.

La función *raíz cuadrada,* definida con la regla de correspondencia $f(x) = \sqrt{x}$ y cuyo dominio es el conjunto de los reales no negativos.

La gráfica de la función raíz cuadrada aparece a continuación.

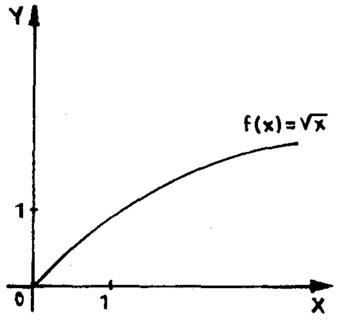

Fig. 5.3

La función *polinómica de grado n,* con la regla de correspondencia

$f\ (x) \ = a_0 + a_1\ x + \ldots + a_n x^n$ con $a_i \in$ IR y $a_n \neq 0$, y cuyo

dominio es el conjunto IR.

La función *mayor entero* definida con la regla de correspondencia $f\ (x) = [\![x]\!]$, en donde

$$[\![x]\!] = m,\ m \in \mathbb{Z} \text{ si y sólo si } m \leq x < m + 1.$$

El dominio de la función mayor entero es IR y su rango,

La gráfica de la función mayor entero aparece a continuación.

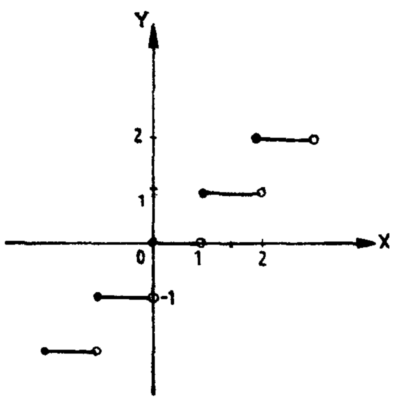

Fig. 5.4 $Y = [\![X]\!]$

IGUALDAD DE FUNCIONES

Dadas las funciones f y g, se dice que f *es igual* a g y se escribe $f = g$ si el dominio de f es igual al dominio de la función g y $f(x) = g(x)$, para todo x del dominio común.

OPERACIONES CON FUNCIONES REALES

Dadas las funciones f y g, con dominios Dom (f) y Dom (g), respectivamente, se definen *la suma, la diferencia, el producto y el cociente* de f y g. Las notaciones que se usan son, respectivamente, $f + g$, $f - g$, fg, y f/g . Las reglas de correspondencia son:

Para la suma:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g).$$

Para la diferencia:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \qquad \forall x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) .$$

Para el producto:

$$(fg)(x) = f(x)\, g(x) \quad \forall x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g).$$

Para el cociente:

$$(f/g)(x) = f(x) / g(x)$$

$$\forall x \in \text{Dom}(f) \cap \{x \in \text{Dom}(g) \,/\, g(x) \neq 0\}$$

Ejemplo 5.1. Dadas las funciones f y g definidas por:

$$f(x) = x^2 + 3x - 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = x - 2 \quad \forall x \in \mathbb{R} ,$$

las funciones $f+g$, $f-g$, fg y f/g, tienen como reglas de correspondencia y como dominios, los que se indican a continuación:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 4x - 6 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 2x - 2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$(fg)(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$(f/g)(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \ \text{y} \ x \neq 2.$$

COMPOSICION DE FUNCIONES REALES

Además de las operaciones indicadas, revisaremos la composición de funciones, operación que fue estudiada en secciones anteriores.

Dadas las funciones reales

f con dominio A y rango B y
g con dominio $C \subset B$ y rango D ,

se denomina *composición* de g con f y se denota gof, a la función cuyo dominio consiste de los elementos $x \in A$, tales que $f(x) \in C$ y cuya regla de correspondencia es:

$$[gof](x) = g(f(x))$$

Ejemplo 5.2. Dadas las funciones f y g definidas por:

$$f(x) = x - 1 \text{ con Dom } (f) = [-1, 4]$$

$$g(x) = x^2 - 1 \text{ con Dom } (g) = [0, 2] \,,$$

hallar gof y fog.

Solución.

La regla de correspondencia de gof es:

$$gof(x) = g(f(x)) = g(x-1) = (x-1)^2 - 1$$

y su dominio,

$$\begin{aligned} \text{Dom}\,(gof) &= \{x \in \text{Dom}\,(f) \;/\; f\,(x) \in \text{Dom}\,(g)\} \\ &= \{x \in [-1,\,4] \;/\; 0 \le x - 1 \le 2\} \\ &= [1,\,3] \end{aligned}$$

La regla de correspondencia de *fog* es:

$$fog\,(x) = f\,(g\,(x)) = f\,(x^2 - 1) = x^2 - 2$$

y su dominio,

$$\begin{aligned} \text{Dom}\,(fog) &= \{x \in \text{Dom}\,(g) \;/\; g\,(x) \in \text{Dom}\,(f)\} \\ &= \{x \in [0,\,2] \;/\; -1 \le x^2 - 1 \le 4\} \\ &= [0,\,2] \end{aligned}$$

FUNCION INVERSA

Hemos indicado que dada una funcion biyectiva

$$f = \{(x,\, f\,(x)) \;/\; x \in \text{Dom}\,(f)\}$$

la inversa de f,

$$f^{-1} = \{(f\,(x),\, x) \;/\; x \in \text{Dom}\,(f)\}\ ,$$

es una función que cumple con $fof^{-1} = f^{-1}of$, que su dominio es el rango de f y que su rango es el dominio de f.

Usaremos ejemplos para aplicar estos conceptos.

Ejemplo 5.3. La función f definida por:

$$f\,(x) = 3x + 5 \qquad x \in \mathbb{R}$$

es una función biyectiva.

En efecto, $f\,(x_1) = f\,(x_2)$ implica: $3x_1 + 5 = 3x_2 + 5$; esto es:

$$x_1 = x_2$$

Esta prueba es suficiente pues es inmediato que f es suryectiva.

Se puede definir entonces, la inversa de f:

$$f^{-1} = \{(3x + 5, x) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$$

Si escribimos $y = 3x + 5$, se tendrá, despejando el valor de x,

$$x = \frac{y - 5}{3}$$

y así: $$f^{-1} = \{(y, (y - 5) / 3), \ y \in \mathbb{R}\}$$

Poniendo x en lugar de y, se obtiene:

$$f^{-1} = \{(x, \frac{x - 5}{3}) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$$

Luego, la regla de correspondencia de la inversa la podemos escribir como:

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{3}$$

La inversa de una función real f, por lo estudiado, puede representarse gráficamente, a partir del gráfico de f. Su representación gráfica es simétrica a la de f, con respecto de la gráfica de $y = x$ (figura 5.5).

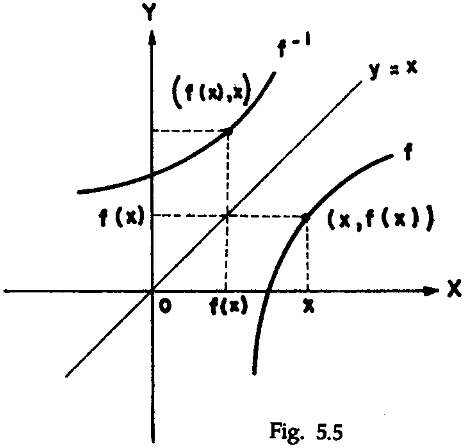

Fig. 5.5

Ejemplo 5.4. La función f definida por $f(x) = \sqrt{x}$ y con dominio $[1, 4]$ tiene como rango al intervalo $[1, 2]$. El dominio de la función inversa de f tiene como dominio a $[1, 2]$ y su rango es $[1, 4]$. La regla de correspondencia es:

$$f^{-1}(x) = x^2$$

Las gráficas de f y de f^{-1} aparecen a continuación.

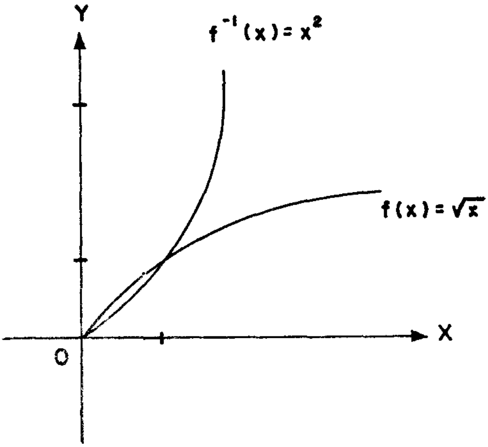

Fig. 5.6

Ejemplo 5.5. Restringir el dominio de la función f definida por $f(x) = x^2$ de tal modo que tenga inversa.

La función indicada tiene como dominio al conjunto $\mathbb{R}$ y en tal conjunto ésta no es inyectiva; sin embargo si restringimos el dominio, por ejemplo, al conjunto

$$\mathbb{R}^+_0 = \{x \in \mathbb{R} \,/ x \geq 0\}$$

la función f, como función de $\mathbb{R}^+_0$ en $\mathbb{R}^+_0$ es una función biyectiva, y como tal, tiene inversa. La regla de correspondencia de la función inversa es:

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \qquad x \in \mathrm{IR}^{+}_{0}$$

Ejercicios 5.1

1. Hallar el dominio y rango de las funciones reales de variable real, determinadas por las siguientes reglas de correspondencia. Representar gráficamente a cada una de las funciones.

   a. $f(x) = 1/x$
   b. $f(x) = \sqrt{x+1}$
   c. $f(x) = 4 - \sqrt{2x+3}$
   d. $f(x) = x^3$
   e. $f(x) = (x-2)^3$
   f. $f(x) = -(x+4)^3 + 2$
   g. $f(x) = \sqrt{x^2}$
   h. $f(x) = [\![3x]\!]$
   i. $f(x) = |x-3| + 1$
   j. $f(x) = (x-3)^2$
   k. $f(x) = (x-3)^2 + 5$
   l. $f(x) = -(x-3)^2 + 5$
   m. $f(x) = \sqrt{x-5}$
   n. $f(x) = \sqrt{x+3}$
   o. $f(x) = 1/x$
   p. $f(x) = 1/(x-3)$
   q. $f(x) = [1/(x-3)] + 2$
   r. $f(x) = x / (x-2)$
   s. $f(x) = sen\ x$
   t. $f(x) = cos\ x$

2. Sea f: $[0, 1] \longrightarrow \mathrm{IR}$ definida por $f(0) = 1$ y para cada entero positivo i sea $f(x) = i$ si $x \in [1/(i+1), 1/i]$.

   Indique el dominio y rango de la función. Graficar f.

3. Dadas las funciones reales de variable real f, g y h, definidas por las reglas de correspondencia

$$f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = x^2 + 1 \quad \text{y} \quad h(x) = x^3 - x,$$

describir las siguientes funciones, indicando su dominio, rango y la regla de correspondencia.

a. $f + g$ b. g/f c. $f \cdot g$ d. f/h .

4. Dadas las funciones reales f y g, definidas por $f(x) = x^2 + 3x$ y $g(x) = \sqrt{x + 1}$, hallar:

   a. $(fog)(3)$,
   b. $(gof)(3)$
   c. la función fog , indicando su dominio y su regla de correspondencia.

5. En cada caso hallar la regla de correspondencia y el dominio de fog y gof.

   a. $f(x) = 2x + 3 \quad g(x) = x - 1$
   b. $f(x) = \sqrt{x} \quad x \in \mathbb{R}^+_0 \quad , \quad g(x) = x^2 \quad x \in [1, 5]$
   c. $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } 0 < x \leq 1 \\ x - 1 \text{ si } x > 1 \end{cases} \quad , \quad g(x) = x + 2$

6. Decir si las funciones reales definidas por las siguientes reglas de correspondencia, son biyectivas. Si su respuesta es afirmativa, indique en cada caso, la función inversa.

   a. $f(x) = x^3$
   b. $f(x) = 1/x$
   c. $f(x) = \sqrt{x}$
   d. $f(x) = x^2 + 2$.

7. Dadas las siguientes reglas de correspondencia de funciones reales, restringir el dominio de tal modo que ellas tengan inversa.

   a. $f(x) = x^2 + 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b. $f(x) = |x|$
c. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
d. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

5.3 IDEA INTUITIVA DE LIMITE

Veamos previamente a la definición rigurosa, un ejemplo donde se resalte la idea intuitiva de lo que significa límite de una función en un punto. Consideremos la función $f(x) = x^2 + 1$ (ver figura 5.7) y analicemos el comportamiento de los valores de la función cuando los valores de la variable se toman cada vez más próximos al valor cero:

x	± 1	± 0.8	± 0.6	± 0.4	± 0.2	± 0.1	± 0.04	± 0.01
$f(x) = x^2 + 1$	2	1.64	1.36	1.16	1.04	1.01	1.0016	1.0001

Se observa en el cuadro que conforme el valor x se acerca (tiende) a cero, sea manteniéndose positivo o negativo, $f(x)$ se acerca *(tiende)* al valor 1. Más aún, podemos encontrar valores de $f(x)$ *tan próximos* al valor 1 como deseemos con solo tomar a x *suficientemente próximo* a cero. En efecto, supongamos que se desee encontrar un intervalo que contenga a cero, de manera tal que para cualquier valor de x dentro de ese intervalo, siempre se tenga que el valor correspondiente de $f(x)$ difiera de uno, en valor absoluto, en menos de 0.002. Es decir, deseamos encontrar un intervalo de x tal que en dicho intervalo, para cualquier valor de x, se tenga: $|f(x) - 1| < 0.002$.

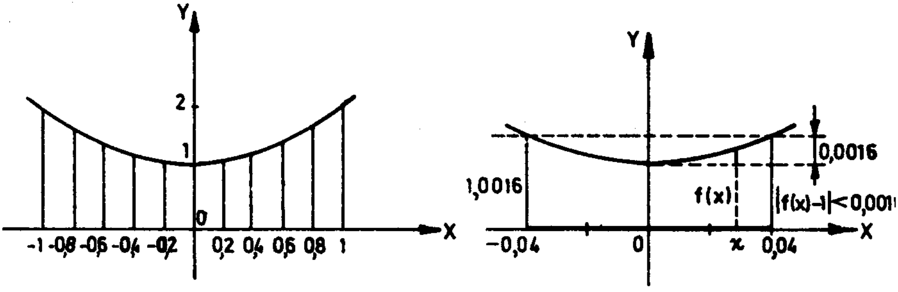

Fig. 5.7

En la tabla de valores calculada anteriormente, se aprecia que existe más de un intervalo que cumple la condición. Uno de ellos, por ejemplo, es el intervalo]–0.04, 0.04[. En efecto, el mayor valor de $f(x)$ en este intervalo es menor que el que corresponde a los valores $x = \pm 0.04$, para los cuales se obtiene $f(x) = 1.0016$ o sea que $|f(x) - 1| < |f(0.04) - 1| = 0.0016 < 0.002$. Para cualquier otro valor de x entre –0.04 y 0.04 la diferencia $|f(x) - 1|$ permanecerá con mayor razón menor que 0.002.

El análisis que se ha efectuado para el número 0.002 podría haberse realizado en la misma forma para cualquier otro número positivo, por pequeño que éste sea, permitiéndonos encontrar un intervalo que contiene a cero y de manera que cualquier valor de x dentro del intervalo determina un valor de $f(x)$ tal que $|f(x) - 1|$ sea menor que el número dado.

Este análisis del comportamiento de la función en las vecindades del valor cero, nos permite asegurar que la función $f(x)$ se puede acercar al valor 1 cuanto se desee, con sólo tomar el valor de x suficientemente próximo a cero. Es decir, el límite de la función $f(x) = x^2 + 1$, cuando x tiende a cero es uno.

Otro Ejemplo: consideremos la función:

$$m(x) = \frac{\sqrt{25 - x^2} - 3}{x - 4},$$

definida para todo $x \neq 4$ en el intervalo [–5, 5].

Para el valor $x = 4$ la función no está definida. Sin embargo nos interesa averiguar si existe un número al cual se acerca el valor de la función cuando x se acerca al valor 4. El estudio se hace con más facilidad si racionalizamos el numerador:

$$m(x) = \frac{(\sqrt{25 - x^2} - 3)\ (\sqrt{25 - x^2} + 3)}{(x - 4)\ (\sqrt{25 - x^2} + 3)}$$

$$= \frac{25 - x^2 - 9}{(x - 4)\ (\sqrt{25 - x^2} + 3)}$$

$$= \frac{16 - x^2}{(x - 4)(\sqrt{25 - x^2} + 3)} = -\frac{(x - 4)(x + 4)}{(x - 4)(\sqrt{25 - x^2} + 3)}$$

$$= \frac{-(x + 4)}{\sqrt{25 - x^2} + 3} \quad ; \quad x \neq 4.$$

Puesta la función $m(x)$ bajo esta forma, podemos observar que cuando x se aproxima a 4, entonces su numerador se aproxima a -8 y

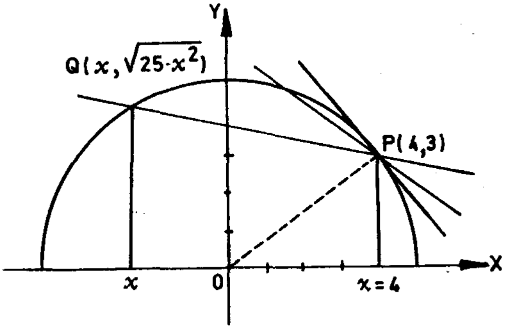

Fig. 5.8

su denominador a 6. Luego, para valores de x muy vecinos a $x = 4$, la función $m(x)$ tomará valores muy vecinos a $-4/3$. Podemos asegurar que $m(x)$ puede acercarse al valor $-4/3$ cuanto se desee con solo tomar x suficientemente próximo a 4. Es decir, el límite de la función $m(x)$ cuando x tiende a 4 es $-4/3$.

Tenemos así un ejemplo de una función que tiene límite cuando x tiende a 4, aunque, como se ha visto, la función no está definida en $x = 4$.

Este ejemplo tiene una interpretación geométrica interesante. Consideremos la semi-circunferencia de ecuación $y = \sqrt{25 - x^2}$ y el punto $P(4, 3)$ sobre ella. Sea $Q(x, y) = (x, \sqrt{25 - x^2})$ un punto cualquiera de la semi-circunferencia, distinto de P. La pendiente de la secante que pasa por P y Q puede expresarse por la función $m(x)$ del ejemplo:

$$m(x) = \frac{\sqrt{25 - x^2} - 3}{x - 4} \quad ; \quad x \neq 4.$$

Al acercarse x al valor 4, el punto Q se desplaza sobre la circunferencia aproximándose al punto P; la secante gira alrededor de P tendiendo a convertirse en tangente a la curva en el punto P. Podemos pues *intuir* que el límite de $m(x)$ cuando x tiende a 4 nos da el valor de la pendiente de la tangente a la circunferencia en P, como posición límite de la secante que pasa por P y Q.

Como la pendiente del radio $\overline{OP}$ es 3/4, efectivamente la pendiente de la tangente a la curva en P (4, 3) es $-4/3$.

5.4 DEFINICION DE LIMITE DE UNA FUNCION

En los ejemplos anteriores hemos empleado varias veces las frases: *"acercarse cuanto se desee"* y *"suficientemente próximo"*, cuyo significado se dejó a la interpretación del alumno. La imprecisión en el significado de estas frases es lo que nos obliga a dar una definición más rigurosa y precisa de límite.

Diremos que *la función f tiene por límite L cuando x tiende al valor a, si para todo número positivo ε, existe un número positivo δ* tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ *para todo x que cumpla la condición* $0 < |x - a| < \delta$.

Si existe el límite anterior, escribiremos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Nótese que la condición $0 < |x - a| < \delta$ representa geométricamente, en la recta real, un intervalo abierto con centro en a, longitud 2δ y al cual *no* pertenece el punto $x = a$:

Es importante observar que de acuerdo con esta aclaración, para estudiar el límite de una función en el punto $x = a$, sólo interesa analizar (como se hizo en los dos ejemplos previos) el comportamiento de la

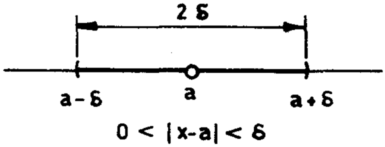

Fig. 5.9

función en puntos vecinos a $x = a$, no dependiendo este límite para nada del valor que la función puede tomar en $x = a$. Más aún, la función puede no estar definida para $x = a$ y sin embargo puede existir el límite en ese punto.

Para entender mejor la idea de límite, es útil dar una interpretación geométrica a la definición.

Ejemplo 5.6. Consideremos la función $f(x) = 3x - 2$ cuya gráfica aparece en la figura 5.10.

Cuando x tiende al valor $x = 2$, $f(x)$ tiende al valor 4 y podemos asumir (luego será verificado) que el límite de f en $x = 2$ es $L = 4$, es decir, $\lim_{x \to 2} (3x - 2) = 4$.

Si realmente $L = 4$ es el límite, entonces para todo $\varepsilon > 0$ debe existir un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| = |(3x - 2) - 4| < \varepsilon$ para todo x que cumple $0 < |x - 2| < \delta$.

Es decir, dado un $\varepsilon > 0$, cualquiera, existe un intervalo $]a - \delta, a + \delta[=]2 - \delta, 2 + \delta[$ tal que para todo x en este intervalo (excepto quizá $x = 2$), el valor de la función cae dentro del intervalo $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[=]4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon[$, Geométricamente esto significa que dada una franja horizontal de ancho 2ε con centro la recta $y = 4$, debemos poder encontrar una franja vertical de ancho 2δ con centro la recta $x = 2$, tal que la gráfica de $f(x) = 3x - 2$ en el intervalo $0 < |x - 2| < \delta$ esté íntegramente dentro del rectángulo intersección de las dos franjas mencionadas.

Con la ayuda de la figura 5.10 podemos verificar, geométricamente, que cualquiera que sea el ε dado siempre podemos determinar un

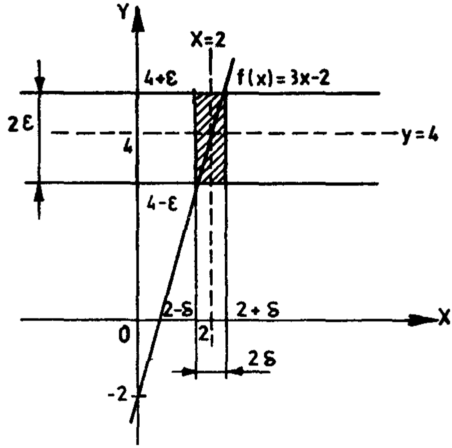

Fig. 5.10

δ, que en general variará con el ε, que permita que la definición de límite se cumpla. Sin embargo, esto que se aprecia con claridad en el dibujo, debe ser corroborado a través de un proceso analítico.

Así, si nosotros imponemos a x la condición $0 < |x - 2| < \delta$, entonces:

$$|f(x) - 4| = |(3x - 2) - 4| = |3x - 6| = 3\,|x - 2| < 3\delta\,.$$

Por tanto, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ que consideremos, será suficiente tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$, para que cada vez que

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 4| < 3\delta = 3\,\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.$$

Esto comprueba que de acuerdo a la definición, el límite de f cuando x tiende a 2 es 4.

Ejemplo 5.7. Determinar el límite de la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 8x + 4}{x - 2}\,, & \text{si } x \neq 2 \\ 5\,, & \text{si } x = 2; \end{cases}$$

cuando x tiende a 2.

Observemos que:

$$\frac{3x^2 - 8x + 4}{x - 2} = \frac{(3x - 2)\ (x - 2)}{x - 2} = 3x - 2 \text{ para todo } x \neq 2\ .$$

Es decir $g\ (x)$ es igual a la función $f\ (x)$ del ejemplo 5.6 excepto para $x = 2$.

Es evidente, por la definición de límite, que dos funciones que toman los mismos valores en una vecindad del punto $x = a$ (intervalo abierto conteniendo el punto $x = a$), tienen el mismo límite (si existe) en este punto.

Luego, $\lim\limits_{x \to 2} g\ (x) = \lim\limits_{x \to 2} f\ (x) = 4$, donde $f\ (x)$ es la función del ejemplo 5.6.

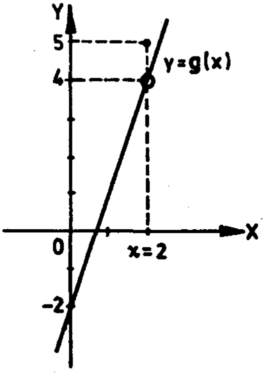

Fig. 5.11

Ejercicio: Determinar el límite de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2 \text{ si } x \text{ no es entero} \\ 1 \text{ si } x \text{ es entero,} \end{cases}$$

cuando x tiende a $3/2$ y cuando x tiende a -2.

5.5 ALGUNOS TEOREMAS SOBRE LIMITES

Teorema 5.1. Límite de la función constante: $f(x) = k$.

Mientras no se determinen los límites de algunas funciones conocidas y se establezcan los teoremas más importantes, el único camino que nos queda para calcular el límite de una función dada, consiste en escoger un valor L que a priori asumiremos es el límite de la función y luego aplicar la definición de límite para probar que efectivamente el L escogido es el límite buscado. Por supuesto que la función misma nos dá la pauta para escoger convenientemente el número L.

Sea la función constante definida por: $f(x) = k$, para todo número real x.

En este caso es evidente que el valor L que debemos asumir es $L = k$.

Debemos verificar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = k$,

para cualquier número real a. O sea que dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - k| < \varepsilon$.

En este caso, muy particular, el valor de $\delta > 0$ por escoger puede ser cualquier número positivo, por ejemplo $\delta = 1$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, para todo x en el intervalo $]a - 1, a + 1[$, *se tendrá* $|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon$.

Teorema 5.2. Límite de la función identidad: $f(x) = x$.

Sea la función identidad definida por $f(x) = x$ para todo x real.

La gráfica de esta función es una recta de pendiente uno que pasa por el origen.

Si un punto está sobre la recta, entonces sus dos coordenadas son iguales. Parece conveniente asumir que el límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor a es justamente $L = a$.

En efecto, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, bastará tomar como δ el valor $\delta = \varepsilon$, entonces cada vez que se cumpla $0 < |x - a| < \delta$ se verificará que: $|f(x) - L| = |x - a| < \delta = \varepsilon$ esto comprueba efectivamente que $\lim_{x \to a} f(x) = a$.

Teorema 5.3. Límite de la función lineal: $f(x) = mx + b,\ m \neq 0$.

Vamos a probar que $\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$

Observemos que: $|f(x) - L| = |mx + b - ma - b| = |mx - ma| = |m|\ |x - a|$. Ahora bien, si $|x - a| < \delta$ entonces queda $|f(x) - L| < |m|\ \delta$; y será suficiente escoger un δ tal que $|m|\ \delta \leq \varepsilon$. Por ejemplo, podemos escoger

$$\delta = \frac{\varepsilon}{|m|},$$

entonces si $0 < |x - a| < \delta$ se tendrá:

$$|f(x) - L| = |m|\ |x - a| < |m| \frac{\varepsilon}{|m|} = \varepsilon .$$

Teorema 5.4.

a) Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y c es una constante cualquiera, entonces:

$$\lim_{x \to a} (cf(x)) = c \lim_{x \to a} f(x) = c\,L$$

b) si $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$ entonces

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$$

c) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$ entonces

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = (\lim_{x \to a} f(x)) (\lim_{x \to a} g(x)) = L_1 \cdot L_2$$

d) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$, y $L_2 \neq 0$ entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} .$$

Efectuaremos las demostraciones de las partes a) y b) dejando las dos últimas demostraciones para un curso posterior.

Demostración de la parte a):

Asumiremos $c \neq 0$ puesto que si $c = 0$ entonces cf es la función constante nula cuyo límite fue calculado por el Teorema 5.1.

Consideremos un $\varepsilon > 0$ cualquiera. Deseamos probar que existe un $\delta > 0$, (escogido convenientemente y en general como función de ε) tal que:

$$|cf(x) - cL| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \varepsilon$$

Por la hipótesis se tiene que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Luego, dado un número positivo cualquiera, por ejemplo $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{|c|}$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|c|} \text{ para todo } x \text{ tal que } 0 < |x - a| < \delta_1 .$$

El δ que buscamos para la demostración lo tomamos $\delta = \delta_1$. entonces, cada vez que $0 < |x - a| < \delta = \delta_1$ se tendrá $|cf(x) - cL|$

$= |c| |f(x) - L| < |c| \varepsilon_1 = |c| . \dfrac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$, relación que teníamos que probar.

Demostración de la parte b):

Debemos probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Por hipótesis, dados ε_1 y ε_2 números positivos arbitrarios, existirán números positivos δ_1 y δ_2 dependientes en general de ε_1 y ε_2 respectivamente, tal que $|f(x) - L_1| < \varepsilon_1$ siempre que $0 < |x - a| < \delta_1$, y $|g(x) - L_2| < \varepsilon_2$ siempre que $0 < |x - a| < \delta_2$.

Si escogemos

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ y $\delta = \text{mínimo } \{\delta_1 , \delta_2\}$, entonces cada vez

que $0 < |x - a| < \delta$ se tiene: $0 < |x - a| < \delta_1$ y $0 < |x - a| < \delta_2$ y por tanto $|f(x) - L_1| < \varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ y $|g(x) - L_2| < \varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Además también se tiene que: $|(f(x) + g(x)) - (L_2 + L_2)| = |(f(x) - L_1) + (g(x) - L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$; que es lo que tenemos que demostrar.

Los cuatro teoremas anteriores son básicos en el proceso del cálculo de límites de funciones o en la demostración de nuevos teoremas que son consecuencia de los primeros. Este es el caso de los dos teoremas siguientes:

Teorema 5.5. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y n es un número entero positivo, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n = L^n$$

$[f(x)]^n = f(x) \,.\, f(x) \ldots f(x)$, n veces. Aplicando la parte c del teorema 5.4 se tiene: $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = \lim\limits_{x \to a} f(x) . \lim\limits_{x \to a} \underbrace{(f(x) \ldots f(x))}_{n - 1 \text{ veces}}$

$= L \lim\limits_{x \to a} \underbrace{(f(x) \ldots f(x))}_{n - 1 \text{ veces}}$.

Aplicando nuevamente el teorema 3:

$\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = L^2 \cdot \lim\limits_{x \to a} \underbrace{f(x) \ldots f(x)}_{n-2 \text{ veces}}$. Como n es finito, si seguimos procediendo en la misma forma, obtendremos:

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = L^n .$$

La demostración puede también efectuarse utilizando inducción.

Caso particular: $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$.

En efecto, ya probamos que $\lim\limits_{x \to a} x = a$. Luego por el Teorema 5.5, $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$.

Teorema 5.6. Límite de una función polinómica. Si $P(x)$ es una función polinómica, entonces

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

Aplicando los teoremas anteriores tenemos:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = \lim_{x \to x_0} (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} a_0 + \lim_{x \to x_0} (a_1 x) + \ldots + \lim_{x \to x_0} (a_n x^n) =$$

$$= a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x^n_o = P(x_0)$$

Un último teorema que no demostraremos pero si lo enunciaremos por su utilidad en los ejercicios sobre límites, es el siguiente:

Teorema 5.7. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L > 0$, entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt{L}$$

Ejemplo 5.8. Calcular los siguientes límites:

a) $$\lim_{t \to 0} \frac{4t^2 + 3t + 2}{t^3 + 2t - 6} = \frac{\lim\limits_{t \to 0} (4t^2 + 3t + 2)}{\lim\limits_{t \to 0} (t^3 + 2t - 6)} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{4x - 3x^2 + 8x^3}{2x - 5x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x(4 - 3x + 8x^2)}{x(2 - 5x)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 0} (4 - 3x + 8x^2)}{\lim\limits_{x \to 0} (2 - 5x)} = \frac{4}{2} = 2$$

c) $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + x - 6)}{\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 4)} = \frac{0}{0}$$, forma

indeterminada[1] que debe evitarse por algún artificio algebraico.

Por ejemplo:

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x + 3}{x + 2} \qquad \text{si } x \neq 2$$

Luego:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{x + 3}{x + 2} = \frac{5}{4}$$

---

1 Se dice que una función es indeterminada cuando para algún valor de la variable toma una de las formas siguientes:

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0∞ , $(+\infty) - (+\infty)$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ , donde ∞ puede ser $+\infty$ ó $-\infty$.

En los cursos de Análisis se estudian métodos para levantar la indeterminación cuando algunas de las formas señaladas se presenta al calcular un límite. El método más empleado hace uso de la derivada y fue establecido por el matemático francés Guillermo de L'Hospital.

d) $$\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x - 3}{x^2 + 5}} = \sqrt{\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 2x - 3}{x^2 + 5}} =$$

$$\sqrt{\frac{\lim_{x \to 2} (x^3 + 2x - 3)}{\lim_{x \to 2} (x^2 + 5)}} = \sqrt{\frac{8 + 4 - 3}{4 + 5}} = 1$$

e) $$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{\lim_{x \to 1} (\sqrt{x} - 1)}{\lim_{x \to 1} (x - 1)} = \frac{0}{0}$$, forma indeterminada.

Como

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$, siempre que $x \neq 1$,

entonces

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} .$$

f) $$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3} = \frac{0}{0}$$, forma indeterminada .

Como $$\frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3} = \frac{(x + a)(x - a)}{(x^2 + ax + a^2)\ (x - a)} = \frac{x + a}{x^2 + ax + a^2} ,$$

si $x \neq a$, entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3} = \lim_{x \to a} \frac{x + a}{x^2 + ax + a^2} = \frac{2a}{3a^2} = \frac{2}{3a}$$

si $a \neq 0$

g) $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2} = \frac{0}{0}$$, forma indeterminada .

Como $\dfrac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2} = \dfrac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)^2} = \dfrac{x + 2}{x - 1}$

si $x \neq 1$, se tiene:

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 2}{x - 1} = \dfrac{3}{0}$ valor que no existe.

Podemos decir que no existe límite.

h) $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{3 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 6}} = \dfrac{0}{0}$, forma indeterminada

Racionalizando el denominador:

$$\frac{3 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 6}} \cdot \frac{3 + \sqrt{x^2 + 6}}{3 + \sqrt{x^2 + 6}} = \frac{(3 - x^2)(3 + \sqrt{x^2 + 6})}{9 - (x^2 + 6)} =$$

$$= \frac{(3 - x^2)(3 + \sqrt{x^2 + 6})}{3 - x^2} = 3 + \sqrt{x^2 + 6}, \qquad \text{si } x^2 \neq 3;$$

es decir si $x \neq \pm\sqrt{3}$.

Luego: $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{3 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 6}} = \lim\limits_{x \to \sqrt{3}} (3 + \sqrt{x^2 + 6}) = 6$

i) Si $f(x) = x^3$, calcular $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$,

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{(x + h)^3 - x^3}{h} =$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2 h + 3x h^2 + h^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 .$$

Luego: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) =$

$= 3x^2$

j) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$. Haciendo $x = y^3$ ó $y = x^{1/3}$ entonces cuando $x \to 8$, $\lim y = \lim x^{1/3} = 2$, y podemos calcular el límite equivalente: $\lim\limits_{y \to 2} \dfrac{y^3 - 8}{y - 2} = \lim\limits_{y \to 2} \dfrac{(y-2)(y^2 + 2y + 4)}{(y-2)} = 12$

EJERCICIOS 5.2

1.— Demostrar, aplicando la definición de límite que $\lim\limits_{x \to 2} (8x - 4) = 12$. Determinar el máximo δ que corresponde, en cada caso, al valor de $\varepsilon = 1/2$ y $\varepsilon = 0.001$.

2.— Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}\,(x + 2)}{x + 1}$

b) $\lim\limits_{z \to -1} \dfrac{z^{-2} - 1}{z + 1}$

c) $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\sqrt{4 + y} - 2}{y}$

d) $\lim\limits_{r \to 1} \dfrac{1 - r^3}{2 - \sqrt{r^2 + 3}}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4 + x + x^2} - 2}{\sqrt{4 + x - x^2} - 2}$

f) $\lim\limits_{y \to 2} \sqrt{\dfrac{y^2 - 4}{y^2 - 3y + 2}}$

g) $\lim\limits_{z \to 2} \sqrt{\dfrac{z^3 - 8}{z^2 - 4}}$

3.— Calcular $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ en cada uno de los siguientes casos

a) $f(x) = c$

b) $f(x) = ax + b$

c) $f(x) = x^2$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$

e) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$

4.— Probar que si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, entonces ese límite es único

Sugerencia: Asumir: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$,

donde $L_1 \neq L_2$

Escoger $\varepsilon < \dfrac{1}{2} |L_1 - L_2|$. Determinar δ_1 y δ_2 para los dos límites y tomar δ = mínimo $\{\delta_1 , \delta_2\}$.

Probar que entonces se tiene la siguiente contradicción:
$|L_1 - L_2| = |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)| < |L_1 - L_2|$

5.— Calcular los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 64} \dfrac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt[3]{1 + x} - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{3}{1 - x^3} \right)$

e) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x + h} - \sqrt[3]{x}}{h}$

Nota. La definición de límite exige que se pruebe la existencia de un δ cada vez que se toma un ε arbitrario. Por supuesto que encontrado un δ apropiado, se tienen infinitos δ que también cumplirán con la definición (todo δ menor que el hallado). Hemos visto que en general el δ depende de ε. Lo que hay que aclarar es que esa dependencia no es siempre lineal como podría parecer si sólo se tiene en cuenta los ejemplos sencillos que hemos desarrollado. La técnica de la demostración de la existencia de límite de una función en base a la definición, es decir, la técnica del $\varepsilon - \delta$, es bastante complicada de aplicar cuando las funciones, aun las algebraicas, no son lineales.

Con el objeto de dar una idea del procedimiento de demostración que se puede usar en los casos en que la función no sea lineal, desarrollaremos un último ejemplo.

Ejemplo 5.9. Demostrar, aplicando la definición, que $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$

Debemos probar que: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x^2 - 9| < \varepsilon$ si $0 < |x - 3| < \delta$.

En efecto, sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Tomemos $\delta = \text{mínimo } \{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$ (luego aclararemos porque escogemos este valor de δ).

Entonces, si $0 < |x - 3| < \delta$, como δ es menor o igual que 1, se tendrá $|x - 3| < 1$, y como también

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{7}, \text{ entonces } |x - 3| < \frac{\varepsilon}{7}.$$

Como: $|x - 3| < 1 \Rightarrow -1 < x - 3 < 1 \Rightarrow 5 < x + 3 < 7$

$\Rightarrow |x + 3| < 7$ y siendo $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{7}$, entonces $|x^2 - 9| = |x + 3|$ $|x - 3| < 7\frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon$. Lo que prueba que el límite es 9.

Ahora veamos como se encontró δ = menor entre 1 y $\frac{\varepsilon}{7}$.

$|x^2 - 9| = |x + 3|\ |x - 3|$. Tenemos $|x - 3| < \delta$ y asumimos $|x - 3| < 1$, entonces, $-1 < x - 3 < 1$. Equivalentemente $|x + 3| < 7$.

Luego $|x^2 - 9| < 7\,\delta$ siempre que $|x - 3| < 1$, como deseamos que $|x^2 - 9| < \varepsilon$, tomamos $7\,\delta = \varepsilon$ entonces $\delta = \dfrac{\varepsilon}{7}$, y $|x^2 - 9| < \varepsilon$, siempre que $|x - 3| < \delta$ y $|x - 3| < 1$. Luego δ está sujeto a *no ser nunca mayor* de 1 ó $\varepsilon/7$, es decir, δ podrá ser el menor de los números 1 y $\dfrac{\varepsilon}{7}$.

Una última aclaración. El valor 1 tomado como restricción para δ se ha escogido arbitrariamente. Cualquier otro valor positivo puede ser igualmente útil.

Así, si tomamos el valor 2, entonces el δ por determinar se calcularía así:

$|x - 3| < 2 \Rightarrow -2 < x - 3 < 2 \Rightarrow 4 < x + 3 < 8 \Rightarrow |x + 3| < 8$ y como $|x^2 - 9| = |x + 3|\,|x - 3| < 8\,\delta < \varepsilon$, entonces tenemos que escoger $\delta = \text{mínimo } \{2, \dfrac{\varepsilon}{8}\}$.

5.6. LIMITES DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Hay 3 límites trigonométricos importantes que a continuación vamos a demostrar.

Teorema 5.8.

$$\lim_{x \to 0} sen\, x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} cos\, x = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$$

En la demostración vamos a utilizar la figura 5.12 que muestra un sector circular de radio 1 que subtiende un ángulo de x radianes.

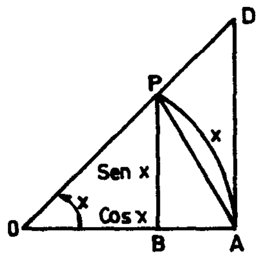

Fig. 5.12

La longitud del arco será entonces x.

En cada límite a probar interesan los valores de x cercanos a 0, luego podemos asumir que $0 < |x| < \pi/2$, esto es: $-\pi/2 < x < \pi/2$.

Si $0 < x < \pi/2$, se tiene: $sen\ x = \overline{PB} < \overline{PA} < x$, es decir: $|sen\ x| < x$.

Si $-\pi/2 < x < 0$, se tiene: $0 < -x < \pi/2$, luego, como en el caso anterior; se cumple $0 < sen\ (-x) < -x$; en forma equivalente $x < sen\ x < 0$, es decir $|sen\ x| < |x|$.

En resumen: Para $0 < |x| < \pi/2$, $|sen\ x| < |x|$.

Luego dado $\varepsilon > 0$, bastará tomar $\delta = \varepsilon$ para probar que

$\lim\limits_{x \to 0} sen\ x = x$ pues cada vez que $|x - 0| < \delta$, se cumple

$|sen\ x - 0| < |x| < \delta = \varepsilon$.

Por otro lado:

para $0 < x < \pi/2$, tenemos:

$0 < 1 - cos\ x = \overline{OA} - \overline{OB} = \overline{AB} < \overline{PA} < x$.

Para $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$, puesto que $0 < -x < \pi/2$, se tiene: $0 < 1 - cos\ (-x) < -x$ en forma equivalente:

$$0 < 1 - cos\ x < -x\ .$$

En resumen para $0 < |x| < \pi/2$, se tiene: $0 < |1 - \cos x| < |x|$.

Luego, dado $\varepsilon > 0$, bastará tomar $\delta = \varepsilon$ para probar que

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 .$$

Por último, comparando el área del sector AOP con las áreas de los triángulos OBP y OAD se tiene para

$$0 < x < \frac{\pi}{2} :$$

Area triángulo OBP < área sector AOP < área triángulo OAD

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} x \ . \cos x < \frac{x}{2\pi} \pi < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x .$$

Dividiendo por $\frac{1}{2} \operatorname{sen} x$: $\quad \cos x < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$

Tomando inversas: $\quad \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}$.

Estas inecuaciones se han establecido para $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

pero son también correctas para: $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ desde que $\cos(-x) = \cos x$ y $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$. Por tanto son válidas para $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Ya demostramos que $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$, luego también $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$. Es decir, $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ estará tomando valores entre los valores de 2 funciones que tienden a 1 cuando x tiende a 0.

Podemos concluir que también $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\ x}{x}$ tiene que ser 1. Esto completa la demostración.

Ejemplo 5.10. Calcular los siguientes límites trigonométricos:

a) $$\lim_{x \to 0} tg\ x = \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{cos\ x} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} sen\ x}{\lim\limits_{x \to 0} cos\ x} = \frac{0}{1} = 0\ .$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{tg\ x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x\ cos\ x} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{cos\ x} =$$

$$= 1.1 = 1\ .$$

c) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\ x}{x^2} = \frac{0}{0},$$ forma indeterminada.

Utilizando un artificio:

$$\frac{1 - cos\ x}{x^2} \cdot \frac{1 + cos\ x}{1 + cos\ x} = \frac{1 - cos^2\ x}{x^2\ (1 + cos\ x\ )} = \frac{sen^2\ x}{x^2\ (1 + cos\ x)}$$

$$= \frac{sen\ x}{x}\ \frac{sen\ x}{x}\ \frac{1}{1 + cos\ x}\ .$$

Tomando límite cuando $x \to 0$, se obtiene $\dfrac{1}{2}$.

d) $$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ 3x}{x} = \lim_{x \to 0} 3 \cdot \frac{sen\ 3x}{3x} = 3 \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} =$$

$$= (3)(1) = 3\ .$$

e) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (sec\ x - tg\ x) = (+\infty) - (+\infty)$, forma indeterminada.

Transformando en senos y cosenos:

$$sec\ x - tg\ x = \frac{1}{cos\ x} - \frac{sen\ x}{cos\ x} = \frac{1 - sen\ x}{cos\ x} \quad ;$$

expresión que sigue siendo indeterminada, ahora de la forma $\frac{0}{0}$ cuando $x \to \frac{\pi}{2}$

Usando un artificio similar al de la parte c):

$$\frac{1 - sen\ x}{cos\ x} \ \frac{1 + sen\ x}{1 + sen\ x} = \frac{cos^2\ x}{cos\ x\ (1 + sen\ x)} = \frac{cos\ x}{1 + sen\ x}$$

Luego:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (sec\ x - tg\ x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{cos\ x}{1 + sen\ x} = \frac{0}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

f) $$\lim_{x \to 0} \frac{2}{5} \left(\frac{sen\ \frac{x}{4} + tg\ x}{x} \right) = \frac{2}{5} \left\{ \lim_{x \to 0} \frac{sen\ \frac{x}{4}}{x} + \right.$$

$$\left. + \lim_{x \to 0} \frac{tg\ x}{x} \right\} = \frac{2}{5} \left\{ \lim_{x \to 0} \frac{sen\ \frac{x}{4}}{4 \cdot \frac{x}{4}} + \lim_{x \to 0} \frac{tg\ x}{x} \right\} =$$

$$= \frac{2}{5}\left\{ \frac{1}{4} \lim_{x \to 0} \frac{sen \dfrac{x}{4}}{\dfrac{x}{4}} + \lim_{x \to 0} \frac{tg\ x}{x} \right\} = \frac{2}{5}\left\{ \frac{1}{4} . 1 + 1 \right\}$$

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2} = 0.5 \ .$$

g) $\lim\limits_{2k \to 0} \dfrac{1 - cos\ 4k}{4k^2}$. Haciendo $2k = x$ entonces cuando

$2k \to 0$ también $x \to 0$, es decir:

$$\lim_{2k \to 0} \frac{1 - cos\ 4k}{4k^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\ 2x}{x^2} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - cos\ 2x)(1 + cos\ 2x)}{x^2\ (1 + cos\ 2x\ )} = \lim_{x \to 0} \frac{sen^2\ 2x}{x^2\ (1 + cos\ 2x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4\ .\ sen^2\ 2x}{(2x)^2} \ . \ \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + cos\ 2x} =$$

$$= (4)(1)\left(\frac{1}{1 + 1}\right) = \frac{4}{2} = 2.$$

h) $$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ 3x}{sen\ 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{3\ .\ \dfrac{sen\ 3x}{3x}}{5\ .\ \dfrac{sen\ 5x}{5x}} = \frac{3}{5} \ .$$

5.7. APLICACION: ASINTOTAS EN COORDENADAS POLARES

En lo que sigue usaremos como referencia la figura 5.13.

Si una curva en polares tiene asíntota, entonces al acercarse un punto P de la curva a ésta el radio vector se acercará a la dirección que

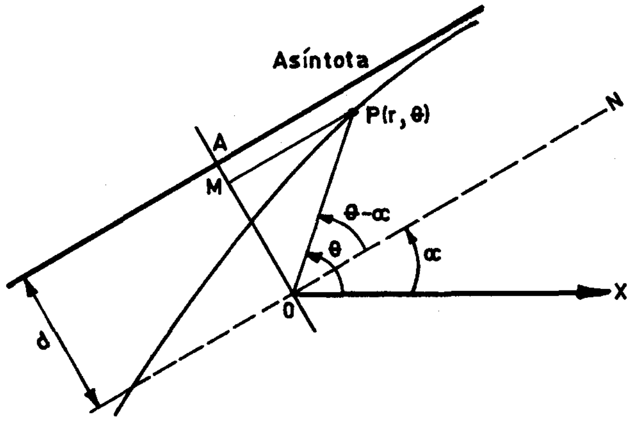

Fig. 5.13

tiene la recta $\overline{ON}$ paralela a dicha asíntota. Por consiguiente las asíntotas corresponden a valores de θ para los cuales r se hace infinito. Así, si para $\theta = \alpha$ se tiene $r = +\infty$, entonces la dirección de la asíntota será paralela a la de la recta $\theta = \alpha$. Para ubicar a la asíntota será suficiente conocer, por ejemplo, su distancia al polo.

Se nota que esta distancia $d = \overline{OA}$ en la figura, es el límite de la proyección $\overline{OM}$ del radio vector $r = \overline{OP}$ sobre el segmento $\overline{OA}$, perpendicular bajada del polo a la asíntota, cuando θ se acerca a α.

Es decir: $d = \lim\limits_{\theta \to \alpha} \overline{OM}$.

Como $\overline{OM} = r \cos \left\{ \dfrac{\pi}{2} - (\theta - \alpha) \right\} = r \operatorname{sen} (\theta - \alpha)$,

entonces $\quad d = \lim\limits_{\theta \to \alpha} r \operatorname{sen} (\theta - \alpha)$

Si $d = +\infty$, no existirá asíntota pero sí una rama parabólica.

Ejemplo 5.11. Asíntota de la espiral hiperbólica $r = \dfrac{\pi}{\theta}$ estudiada en el ejemplo 4.7 del capítulo correspondiente a coordenadas polares.

Cuando $\theta = 0$, $r = +\infty$, luego $\alpha = 0$ es la dirección de la posible asíntota.

Su distancia al polo se determina por el límite:

$$d = \lim_{\theta \to \alpha} r \, sen\,(\theta - \alpha) = \lim_{\theta \to 0} r \, sen\,\theta$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\pi}{\theta} \, sen\,\theta = \pi \lim_{\theta \to 0} \frac{sen\,\theta}{\theta} = \pi$$

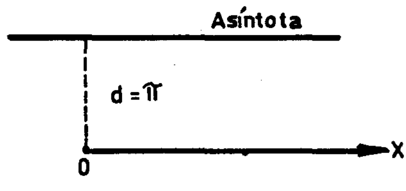

Fig. 5.14

Ejemplo 5.12. Asíntota de la curva en polares: $r = 3\dfrac{sen^2\,\theta}{\cos\,\theta}$

Para $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $r = +\infty$. Luego $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

$$d = \lim_{\theta \to \alpha} r \, sen\,(\theta - \alpha) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} 3\frac{sen^2\,\theta}{\cos\,\theta} \, sen\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \left(-3 \frac{sen^2\ \theta}{\cos\ \theta} \cos\ \theta \right) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} (-3\ sen^2\ \theta) = -3$$

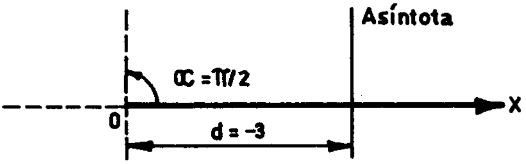

Fig. 5.15

El signo negativo de la distancia, indica que las 3 unidades deben medirse como se mide un radio vector negativo.

EJERCICIOS 5.3

Calcular los límites siguientes:

1.— $\lim_{x \to \pi} \dfrac{sen\ x}{\pi - x}$

2.— $\lim_{x \to 0} \dfrac{3x^2\ tg\ x}{(sen\ 3x)^3}$

3.— $\lim_{x \to 0} \dfrac{sen\ x\ \sqrt{1 - \cos\ x}}{x\ sen\ 2x}$

4.— $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{tg\ x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

5.— $$\lim_{x \to 0} \frac{sen \dfrac{x}{2} sen\ 3x}{2\ sen\ x^2\ sen\ 7x}$$

6.— $$\lim_{x \to 0} \frac{x^2\ sen \dfrac{1}{x}}{sen\ x}$$

7.— $$\lim_{y \to a} \frac{sen\ (y - a)}{y^2 - a^2}$$

8.— $$\lim_{z \to 0} \frac{z}{tg\ 3z}$$

9.— $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{cotg\ \theta}{cotg\ 3\theta}$$

10.- $$\lim_{x \to 0} x\ sen \frac{1}{x}$$

11.— $$\lim_{x \to a} \frac{sen\ x - sen\ a}{x - a}$$

12.— $$\lim_{x \to 1} \frac{cos \dfrac{\pi x}{2}}{1 - \sqrt{x}}$$

13.— $$\lim_{x \to 0} \frac{cos\ (ax) - cos\ (bx)}{x^2}$$

14.— $$\lim_{x \to 0} \frac{tg\ x - sen\ x}{x^3}$$

15.— $$\lim_{x \to -2} \frac{tg\ \pi x}{x + 2}$$

16.— $$\lim_{x \to 0} \frac{arc\ sen\ x}{x}$$

17.— $$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\ cos\ x}{\pi - 3x}$$

18.— $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{cos\ x}}{x^2}$$

19.— $$\lim_{x \to \pi} \frac{1 - sen \dfrac{x}{2}}{\pi - x}$$

20.— $$\lim_{x \to 1} \frac{1 - x^2}{sen\ \pi\ x}$$

Determinar las asíntotas de las siguientes curvas:

21.— $$r = \frac{4\ cos\ 2\theta}{cos\ \theta}$$

22.— $$r = \frac{\theta}{\theta^2 - 1}$$

23.— $$r = \frac{sen\ \theta}{1 - 2\ cos\ \theta}$$

5.8 FUNCIONES CONTINUAS

La idea intuitiva que podemos dar de función continua está ligada a la idea intuitiva de curva continua. Queremos que una función continua tenga una gráfica que pueda ser trazada sin saltos bruscos ni interrupciones, es decir, que pueda ser trazada en "forma continua".

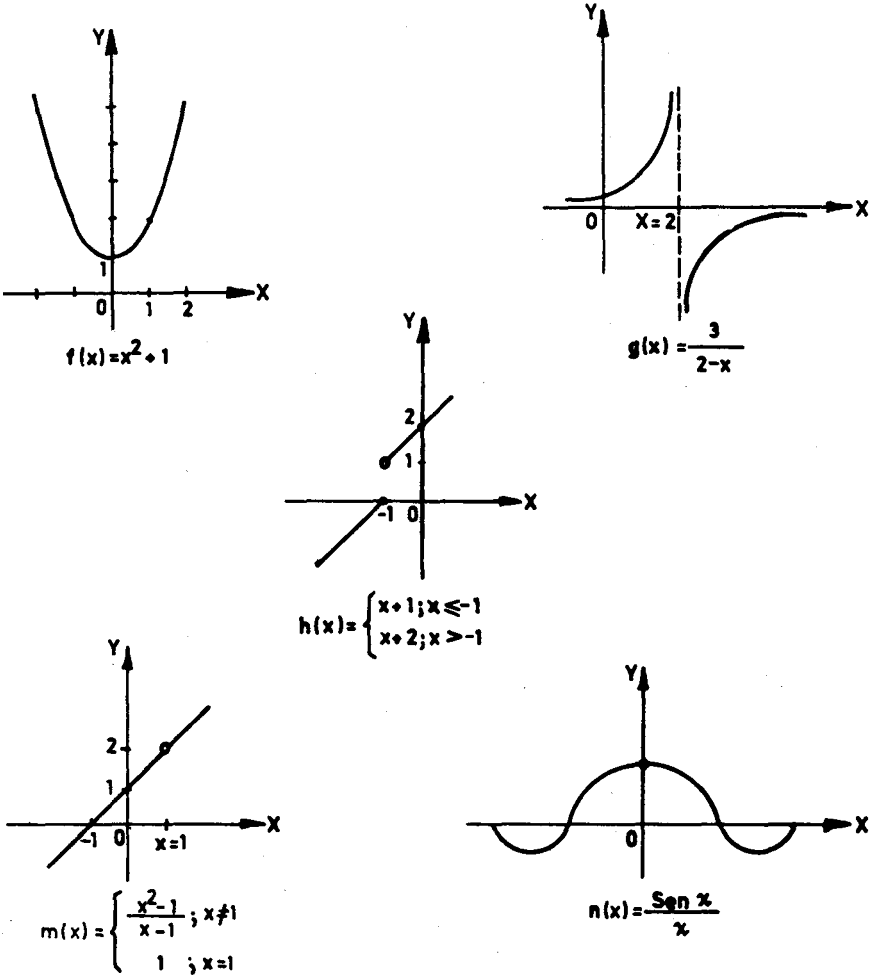

Fig. 5.16

Según esta idea, de las 5 funciones cuyas gráficas se indican en la figura 5.16, sólo la función f sería continua. Las funciones g, h y m presentan saltos bruscos en $x = 2$, $x = -1$ y $x = 1$ respectivamente; y la función $n\ (x)$ presenta una interrupción en $x = 0$.

Analicemos las gráficas de las cuatro últimas funciones que por no ser continuas las llamaremos *discontinuas.*

La función $g\ (x)$ cuando x se acerca a 2 tiende a $+\infty$ ó $-\infty$ según x permanezca menor o mayor que 2 respectivamente. Es decir, en $x = 2$ la función sufre un "salto brusco infinito", careciendo de límite para ese valor de x.

La función $h\ (x)$ en $x = -1$ sufre también un salto pero ésta vez "finito". No tiene límite en $x = 1$.

La función $m\ (x)$ presenta también un salto finito pero para $x = 1$. La diferencia con las funciones anteriores está en que el límite de $m\ (x)$ cuando x tiende a 1 existe y es igual a 2, pero sin embargo se presenta un salto en los valores de la función al pasar por $x = 1$, pues si bien la función tiende a 2 en cambio el valor de la función es 1 para $x = 1$. Es decir, $\lim\limits_{x \to 1} m\ (x) \neq m\ (1)$.

Finalmente, la función

$$n\ (x) = \frac{sen\ x}{x}$$

presenta una interrupción en su gráfica para el valor $x = 0$, debido a que la función no está definida en ese punto.

La definición de función continua evita estas y otras posibles discontinuidades en el trazado de la curva de una función.

Definición 5.1. Una función $f\ (x)$ definida en un intervalo que contiene al punto $x = a$ es *continua* en a si el límite de la función $f\ (x)$ cuando x tiende al valor a existe y es igual al valor que toma la función para $x = a$.

La definición señala que una función es continua en el punto a si se cumplen las condiciones siguientes:

1ro. f es definida en $x = a$, es decir, $f(a)$ es un valor real finito;

2do. Existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor a, es decir, el límite es único y finito;

3ro. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Las funciones cuyas gráficas aparecen en la figura 5.16., a excepción de $f(x) = x^2 + 1$, no cumplen todas las condiciones señaladas en la definición, luego no son continuas.

Si aplicamos la definición de límite podemos dar una definición de función continua equivalente a la dada anteriormente.

Definición 5.2. Una función $f(x)$ definida en un intervalo que contiene a $x = a$ es *continua* en a si y sólo si dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $\delta > 0$ tal que para $|x - a| < \delta$ se cumple $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

La demostración del siguiente teorema es inmediata si se aplica la definición de función continua y los teoremas 5.1, 5.2, 5.3 y 5.6 sobre límites.

Teorema 5.9. Las funciones constantes $f(x) = k$, identidad $f(x) = x$, lineal $f(x) = mx + b$ y polinómica $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ son continuas en todo punto $a \in \mathbb{R}$.

Asimismo una aplicación directa del teorema 5.4, sobre límites permite establecer el siguiente teorema.

Teorema 5.10. el producto de una función constante por una función continua en el punto $x = a$ es una función continua en este punto. La suma y el producto de dos funciones continuas en $x = a$ es continua en dicho punto. El cociente de dos funciones continuas en $x = a$ es continua en este punto si la función divisor no se anula en un intervalo que contenga a $x = a$.

Combinando los resultados obtenidos para límites y los teoremas 5.9 y 5.10 se puede estudiar la continuidad de muchas de las funciones de uso frecuente.

Ejemplo 5.13. Una función racional es el cociente de dos funciones polinómicas. Probar que toda función racional es continua en todo punto que no anule al divisor.

Una función racional es de la forma

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

donde f y g son polinomios. Por el teorema 5.9 f y g son continuas y por el teorema 5.10 su cociente también lo será en todo punto que no anule al denominador.

Ejemplo 5.14. Si $f(x)$ es continua en $x = a$ entonces también es continua en ese punto la función $y(x) = \sqrt{f(x)}$, si $f(a) > 0$.

Si f es continua en a, entonces

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) > 0$. Por el teorema 5.7 se tiene:

$$\lim_{x \to a} y(x) = \lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt{f(a)} = y(a)$$

Luego $y(x)$ es continua en $x = a$.

Ejemplo 5.15. Estudiar la continuidad de la función.

$$f(x) = \frac{2x + \sqrt{x + 4}}{\sqrt[3]{x - 3}}$$

El dominio de la función está dado por el intervalo $[-4, +\infty[$, excepto el punto $x = 3$ que anula el denominador.

Si a está en el dominio de f entonces:

$$\lim_{x \to a} (2x + \sqrt{x + 4}) = \lim_{x \to a} 2x + \lim_{x \to a} \sqrt{x + 4} =$$

$$= 2a + \sqrt{a + 4} \ .$$

Luego el numerador es continuo para todo a en el dominio. Asimismo:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[3]{x - 3} = \sqrt[3]{\lim_{x \to a} (x - 3)} = \cdot \sqrt[3]{a - 3} \ ,$$

luego, el denominador es también continuo para todo punto del dominio.

Por el teorema 5.10 que establece que el cociente de dos funciones continuas es una función continua en todo punto del dominio que no anule al divisor, se tiene que f es continua en todo punto x del conjunto $[-4, 3[\cup]3, +\infty[$.

Nota. La definición de función continua en $x = a$ exige que se cumpla

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \ .$$

Esta condición puede expresarse en otra forma que en algunos casos puede ser utilizada con ventajas.

Haciendo $x = a + h$, s tiene que cuando $x \to a$, $h \to 0$ y la condición es:

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$$

Teorema 5.11. Probar que las funciones *sen* x y *cos* x son continuas para todo x real.

En la sección 5.6, teorema 5.8 se estableció que

$$\lim_{x \to 0} sen\ x = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0} cos\ x = 1.$$

Como $sen\ (x + h) = sen\ x\ cos\ h + cos\ x\ sen\ h$, entonces

$$\lim_{h \to 0} sen\ (x + h) = \lim_{h \to 0} (sen\ x\ cos\ h) + \lim_{h \to 0} (cos\ x\ sen\ h) =$$

$$= sen\ x \lim_{h \to 0} cos\ h + cos\ x \lim_{h \to 0} sen\ h = sen\ x.\ 1 + cos\ x\ .\ 0 =$$

$= sen\ x.$

Luego para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene : $\lim\limits_{h \to 0} sen\ (x + h) = sen\ x$,

y de acuerdo con lo establecido en la nota anterior, *sen x* es continua en todo x real.

En forma análoga se demuestra que *cos x* es continua en todo punto x real.

Ejemplo 5.16. Continuidad de la función

$$tg\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x}$$

Por el teorema 5.11, *sen x* y *cos x* son continuas en todo x real. Luego *tg x* es continua en todo punto real que no anule el denominador. Es decir, es continua en todo x real salvo los de la forma $\frac{\pi}{2} + n\ \pi$, para $n \in \mathbb{Z}$.

EJERCICIOS 5.4.

1.— Demostrar que $f\ (x) = |x|$ es continua en todo punto real. Trazar su gráfica.

2.— Demostrar que la función *cos x* es continua para todo valor real de x.

3.— Indicar para que valores de x las siguientes funciones son discontinuas. Hacer un croquis en cada caso.

a) $f\ (x) = \dfrac{2x}{3x - 2}$

b) $f\ (x) = \dfrac{x + 2}{x^2 + x - 6}$

c) $f\ (x) = \begin{cases} 2x + 1\ ; & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{2}\ x^2 - 3\ ; & \text{si } x > 1 \end{cases}$

d) $$f(x) = \frac{2x - 8}{|x - 3|}$$

e) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-4}{|x-4|} & ; \quad x \neq 4 \\ 0 & ; \quad x = 4 \end{cases}$$

4.— Demostrar que la función

$f(x) = \dfrac{sen\ x}{|x|}$ para $x \neq 0$, $f(0) = 1$, es discontinua en $x = 0$

5.— ¿Para qué valores de x son las funciones a) $sec\ x$ y b) $cotg\ x$ continuas?

6.— Una función es definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & ; \quad x \neq 2 \\ A & ; \quad x = 2 \end{cases}$$

¿Cuanto debe valer A para que f sea continua en $x = 2$? Trazar la gráfica de f.

7.— La función

$f(x) = \dfrac{\sqrt{7 + x} - 3}{x^2 - 4}$ no está definida para $x = \pm 2$, luego es discontinua en esos puntos. ¿Qué valor de $f(2)$ hace a $f(x)$ continua? ¿Existe un valor real para $f(-2)$ que haga continua a f en $x = -2$?

8.— La función $f(x) = arc\ tg\ \dfrac{1}{x - 2}$ no tiene sentido para $x = 2$. ¿Es posible definir el valor de $f(2)$ de tal manera que la nueva función redefinida sea continua en $x = 2$?