

FRANCISCO UGARTE GUERRA  
editor

# VI ESCUELA DOCTORAL INTERCONTINENTAL DE MATEMÁTICAS

PUCP-UVA 2013

## Capítulo 3



FONDO  
EDITORIAL

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

*VI Escuela Doctoral Intercontinental de Matemáticas  
PUCP-UVA 2013*

Francisco Ugarte Guerra, editor

De esta edición:

© Vicerrectorado de Investigación (VRI),

Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú, 2014

Avenida Universitaria 1801, Lima 32, Perú

Teléfono (51 1) 626 2650

feditor@pucp.edu.pe

www.fondoeditorial.pucp.edu.pe

Diseño de interiores: Francisco Ugarte Guerra / Janet Yucra Núñez

Diseño de cubierta: Francisco Ugarte Guerra / DCI-PUCP

Primera edición: octubre de 2014

Tiraje: 500 ejemplares

Prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores.

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2014-16314

ISBN: 978-612-317-056-1

Registro del Proyecto Editorial: 31501361401068

Impreso en Tarea Asociación Gráfica Educativa

Pasaje María Auxiliadora 156, Lima 5, Perú

# Singularidades de campos de vectores reales: perfil topológico

Clementa Alonso-González

## 1. Introducción

El objetivo de este curso es dar una introducción al estudio topológico local de los campos de vectores reales. Aunque en principio manejaremos conceptos y resultados válidos para cualquier dimensión, nos centraremos esencialmente en el caso bidimensional. Nos interesan fundamentalmente dos cuestiones: la clasificación topológica de campos de vectores cerca de un punto singular y la determinación de un representante sencillo del tipo topológico de un campo a partir de la expresión del mismo. Supondremos que el alumno está familiarizado con los conceptos y resultados básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales y que maneja las nociones básicas de geometría algebraica.

Para no extendernos demasiado en la redacción, en la mayor parte de los casos hemos omitido las demostraciones completas de los resultados que se presentan, aunque siempre se incluye la correspondiente referencia bibliográfica. A lo largo de estas notas hemos ido formulando preguntas y proponiendo ejercicios que el lector puede intentar responder para una mejor comprensión de los conceptos. Al final de las mismas también incluimos una breve colección de ejercicios y problemas.

Este texto está organizado en dos secciones respondiendo a las dos cuestiones que nos interesan. En la primera de ellas recordaremos aspectos y definiciones generales de campos de vectores en cualquier dimensión y daremos una clasificación topológica local de campos de vectores analíticos planos. La herramienta fundamental que utilizamos para dar esta clasificación es la reducción de singularidades, a la que dedicamos una buena parte del primer capítulo. La segunda parte está dedicada al problema de la determinación finita y más concretamente a demostrar el Teorema de Brunella-Miari. Este es el resultado alrededor del cual se desarrolla toda la segunda sección. Esencialmente establece que la parte principal del campo dada por el polígono de Newton del mismo tiene, bajo ciertas condiciones, el mismo tipo topológico que el campo original. Para explicar este resultado, haremos previamente una breve introducción a los aspectos básicos y al lenguaje de la geometría tórica.

Al elaborar la primera sección hemos utilizado principalmente los libros de Perko [24],

Palis y de Melo [23] y Lefschetz [21] para los resultados clásicos de ecuaciones diferenciales y campos de vectores en el plano. En el apartado dedicado al desarrollo de la reducción de singularidades, hemos usado [26], [10] y también [13] para las explosiones reales. Puntualmente hemos acudido a [5, 11, 12, 16, 19]. Para la segunda parte, la referencia esencial es el artículo de Brunella-Miari [7]. La parte de geometría tórica ha sido desarrollada usando [6], [14] y [22]. Finalmente, para el estudio de campos de vectores planos con singularidades de tipo tórico hemos utilizado [8].

En estas notas nos restringimos al caso bidimensional. No obstante, existen trabajos sobre el estudio topológico local de campos analíticos reales en dimensión tres. Más precisamente, la autora de estas notas en colaboración con F. Cano e I. Camacho, en los artículos [2, 3], ha desarrollado técnicas y herramientas que permiten dar una clasificación topológica completa, después de reducción de singularidades, de campos de vectores que admiten una desingularización hiperbólica. A partir de los resultados contenidos en estos artículos, se deduce una generalización del teorema de Brunella-Miari en dimensión tres [1].

## 2. Campos de vectores en el plano

En esta primera sección, recordaremos los conceptos y resultados básicos necesarios para el estudio topológico de campos de vectores que desarrollaremos en este curso. Muchos de ellos forman parte de la materia de cualquier curso elemental de teoría de ecuaciones diferenciales. En las notas del curso impartido por F. Sanz, en la pasada edición de la esta escuela doctoral (ver [25]), se puede encontrar una exposición más detallada de algunos de los que vamos a mencionar en esta parte preliminar.

### 2.1. Conceptos básicos

Sea  $U$  un abierto del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ . Un *campo de vectores* en  $U$  es una aplicación  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  donde  $\xi(p) \in \mathbb{R}^n \simeq T_p\mathbb{R}^n$  representa un vector libre con origen en el punto  $p \in U$ . Si fijamos coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  en  $\mathbb{R}^n$ , podemos escribir

$$\xi = A_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + A_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_n}$$

donde los coeficientes  $A_i$  son funciones reales definidas en  $U$ . Diremos que  $\xi$  es de clase  $\mathcal{C}^r$  si las funciones  $A_i$  lo son. El valor  $r$  puede denotar un entero positivo,  $+\infty$  o  $\omega$ , donde  $\mathcal{C}^\omega$

corresponde al caso analítico.

*Integrar* un campo de vectores  $\xi$  significa encontrar una *solución* o *curva integral* del mismo, es decir, una curva parametrizada diferenciable  $\gamma : I \rightarrow U$  definida en algún intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  que satisfaga el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = A_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

para  $(x_1, \dots, x_n) \in U$ . Esto equivale a que  $\gamma$  satisfaga la igualdad:

$$\gamma'(t) = \xi(\gamma(t)) \quad \forall t \in I.$$

Diremos que un punto  $x \in U$  es un *punto singular* o *punto de equilibrio* del campo  $\xi$  si  $\xi(x) = 0$ . Los puntos no singulares son *puntos regulares*. Obsérvese que si  $x \in U$  es un punto singular de  $\xi$ , entonces la función constante  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow U$  con  $\gamma(t) = x$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  es una solución en el sentido anterior. Por otro lado, si  $x_0 \in U$  y  $\gamma : I \rightarrow U$  es una solución con  $\gamma(0) = x_0$ , diremos que  $\gamma$  es *maximal* si para cada solución  $\psi : J \rightarrow U$  con  $I \subset J$  tal que  $\gamma = \psi|_I$ , entonces  $I = J$  y  $\gamma = \psi$ . Escribiremos entonces  $I = I_{x_0}$  y lo llamaremos *intervalo maximal*. Claramente, si  $x_0$  es un punto singular entonces  $I_{x_0} = \mathbb{R}$ .

Otro tipo destacable de soluciones de un campo de vectores son las periódicas. Si  $\gamma(t)$  es una curva integral o solución de  $\xi$ , decimos que es *periódica* si existe un número real  $c > 0$  tal que  $\gamma(t+c) = \gamma(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Por el Teorema clásico de existencia y unicidad local de soluciones de sistemas ecuaciones diferenciales sabemos que, dado  $x \in U$ , si el campo es al menos de clase  $\mathcal{C}^1$ , existe una solución maximal  $\gamma_x$  definida en un intervalo maximal  $I_x$  con la misma clase de diferenciabilidad que los coeficientes  $A_i$  (analítica si estos lo son) y tal que  $\gamma_x(0) = x$ . Este teorema se puede reformular en términos del flujo del campo de vectores  $\xi$ , entendiendo por flujo del campo de vectores  $\xi$  a la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \Omega &\longrightarrow U \\ (t, p) &\longmapsto \gamma_p(t) \end{aligned}$$

donde  $\Omega = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times U : t \in I_p\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Esta aplicación tiene la misma clase de diferenciabilidad que  $\xi$  (analítica si  $\xi$  lo es).

En este curso no nos interesaremos tanto por la parametrización de las curvas integrales de un campo de vectores  $\xi$  como por la imagen de las mismas. Sea  $\gamma : I \rightarrow U$  una solución

maximal. Su imagen

$$\Gamma_\gamma = \{\gamma(t) : t \in I\} \subset U$$

dotada con la orientación inducida por  $\gamma$  (en caso de que no sea constante) será una *trayectoria* u *órbita* asociada a la solución  $\gamma$ . Obsérvese que si denotamos por  $\Gamma_p$  la órbita de un campo de vectores  $\xi$  por un punto  $p$ , se tiene que si  $q \in \Gamma_p$ , entonces  $\Gamma_q = \Gamma_p$ . En otras palabras, dos órbitas o trayectorias de  $\xi$ , o bien coinciden o bien son disjuntas.

Podemos distinguir tres posibilidades para una solución maximal  $\gamma$  de  $\xi$ :

1.  $\gamma$  es una biyección en su imagen.
2.  $\gamma$  es una función constante.
3.  $\gamma$  es una función periódica.

Desde el punto de vista topológico, que es el que nos ocupa en este curso, eso significa que una órbita será homeomorfa a  $\mathbb{R}$ , a un punto o bien a  $\mathbb{S}^1$ .

Por *espacio de fases* de un campo de vectores entendemos el conjunto de todas las órbitas del mismo. Está formado por singularidades y órbitas regulares orientadas. Obtener el mapa de fases de un campo de vectores no es otra cosa que considerar la partición del dominio  $U$  por las trayectorias del campo. Diremos que esta partición, a la que denotaremos  $\mathcal{F}_\xi$ , es la *foliación generada por  $\xi$* .

Por otro lado, una foliación (singular)  $\mathcal{F}$  de dimensión uno en una variedad diferenciable  $M$  se puede definir localmente a partir de un campo de vectores: para cada  $p \in M$  existe un entorno  $U_p$  de manera que la restricción de la foliación a  $U_p$  está generada por algún campo de vectores  $\xi_p$ . Diremos que  $\mathcal{F}$  es de clase  $\mathcal{C}^r$  si el campo  $\xi_p$  se puede elegir con esta clase de diferenciability en cada punto  $p \in M$ . Para más detalles sobre este concepto consultar [9].

## 2.2. Equivalencias y conjugaciones topológicas

Introduciremos ahora las nociones de equivalencia que nos permitirán comparar los espacios de fase de dos campos de vectores.

Como sabemos, en el caso de campos lineales se puede dar una expresión explícita de la solución o curva integral que pasa por un punto. Sin embargo, para la mayor parte de los campos no lineales esto no es posible. De aquí deriva la importancia de poder dar una descripción geométrica y/o topológica del mapa de fase de un campo. Este interés,

por la faceta cualitativa de los sistemas dinámicos, tiene su origen en los trabajos sobre ecuaciones diferenciales de H. Poincaré.

Distinguiremos entre equivalencia topológica, si no se tiene en cuenta la parametrización de las órbitas del campo, o conjugación topológica en caso contrario. Veamos las definiciones precisas.

Sean  $\xi_1$  y  $\xi_2$  dos campos de vectores definidos en abiertos respectivos  $U_1$  y  $U_2$  de  $\mathbb{R}^n$ . Decimos que  $\xi_1$  es *topológicamente equivalente* (resp.  $C^r$ -equivalente) a  $\xi_2$  si existe  $h : U_1 \rightarrow U_2$  un homeomorfismo (resp.  $C^r$ -difeomorfismo) que envíe trayectorias de  $\xi_1$  en trayectorias de  $\xi_2$  preservando la orientación. Más precisamente, si  $p \in U_1$  y  $\Gamma_p^1$  es la órbita orientada de  $\xi_1$  que pasa por  $p$ , entonces  $h(\Gamma_p^1)$  es una órbita orientada de  $\xi_2$  que pasa por  $h(p)$ . Llamaremos a  $h$  una *equivalencia topológica* o  $C^0$ -*equivalencia* (resp.  $C^r$ -equivalencia).

Consideremos ahora  $\Phi_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\Phi_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  los flujos generados por los campos de vectores  $\xi_1$  y  $\xi_2$  respectivamente. Decimos que  $\xi_1$  es *topológicamente conjugado* (resp.  $C^r$ -conjugado) a  $\xi_2$  si existe  $h : U_1 \rightarrow U_2$  un homeomorfismo (resp.  $C^r$ -difeomorfismo) tal que

$$h(\Phi_1(t, x)) = \Phi_2(t, h(x)) \quad \forall (t, x) \in \Omega_1.$$

Llamaremos a  $h$  una *conjugación topológica* o  $C^0$ -*equivalencia* (resp.  $C^r$ -conjugación).

Fijados  $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$  dos abiertos, una equivalencia topológica define una relación de equivalencia entre campos de vectores definidos respectivamente en estos abiertos. Una equivalencia topológica envía puntos singulares sobre puntos singulares y órbitas periódicas sobre órbitas periódicas (si es una conjugación, además preserva el período).

### 2.3. Campos lineales y no lineales. Teorema de Hartman-Grobman

Además de interesarnos por la descripción topológica local de un campo de vectores, también pondremos énfasis en el problema de la determinación de un representante (también local), lo más sencillo posible, del tipo topológico del mismo.

En la parte básica del curso nos restringiremos al caso de vectores en el plano para abordar ambas cuestiones. Por seguir un orden, dado  $\xi$  un campo de vectores en el plano, distinguiremos entre puntos regulares y singulares y, dentro de estos últimos, separaremos distintos casos en función de los autovalores de la parte lineal.

**Puntos regulares** Si pensamos en el entorno de un punto no singular, es decir,  $p \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\xi(p) \neq 0$ , la respuesta a nuestra pregunta es que el campo original  $\xi$  es topológicamente equivalente (incluso conjugado) a un campo horizontal, es decir, a un campo cuya expresión es  $\xi' = \frac{\partial}{\partial x}$ . Este es un resultado clásico conocido como el Teorema de rectificación de campos de vectores o Teorema de la caja de flujo ([10], Théorème 2.1). Podemos concluir que en el entorno de un punto regular dos campos de vectores son siempre topológicamente equivalentes, es decir, hay un único modelo. Este resultado es válido en cualquier dimensión.

Mucho más interesante, y también más complicado, es hacer un estudio del tipo topológico de un campo de vectores en el entorno de un punto singular. En el caso de campos analíticos planos, se puede dar una descripción de la topología local alrededor de un punto de este tipo utilizando a la técnica de las explosiones. En dimensión tres, en los trabajos [2, 3], se da una clasificación topológica en el caso de campos de vectores con desingularización hiperbólica.

**Puntos singulares** Supongamos que trabajamos con un campo plano analítico  $\xi = A(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$  y que  $p$  es un punto singular de  $\xi$ . Asociamos a  $\xi$  un campo de vectores lineal  $L\xi_p$  al que llamaremos *parte lineal de  $\xi$  en  $p$* . Matricialmente,

$$L\xi_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x}(p) & \frac{\partial A}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial B}{\partial x}(p) & \frac{\partial B}{\partial y}(p) \end{pmatrix}$$

Distinguimos diferentes tipos de puntos singulares: diremos que el punto  $p$  es un punto singular *no degenerado* si los autovalores de  $L\xi_p$  son distintos de cero. El punto singular  $p$  será *hiperbólico* si los dos autovalores de  $L\xi_p$  tienen parte real distinta de cero y *semi-hiperbólico* si exactamente uno de los autovalores es cero. Las singularidades hiperbólicas y semihiperbólicas se dice que son *singularidades elementales*.

Obsérvese que si  $p = (x_0, y_0)$  es un punto singular de  $\xi$ , entonces el origen es un punto singular de

$$\xi' = A(x', y')\frac{\partial}{\partial x'} + B(x', y')\frac{\partial}{\partial y'}$$

donde  $x = x' + x_0$ ,  $y = y' + y_0$ . Ahora las funciones  $A(x', y')$  y  $B(x', y')$  comienzan con términos de grado uno en  $x'$  e  $y'$ . Es decir, siempre podemos desplazar un punto singular al origen de coordenadas a través de una traslación de manera que nuestro campo original se exprese como (eliminamos las primas por simplicidad)

$$\xi = (ax + by + F(x, y))\frac{\partial}{\partial x} + (cx + dy + G(x, y))\frac{\partial}{\partial y}$$

donde  $F, G$ , y sus primeras derivadas se anulan en el origen de  $\mathbb{R}^2$ . Tras un cambio lineal de coordenadas podemos escribir la matriz de la parte lineal

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

en su forma canónica de Jordan real. Dependiendo de la naturaleza del punto singular, tendremos distintas posibilidades para esta forma canónica. Si la singularidad es hiperbólica:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

con  $\lambda\mu \neq 0$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta \geq 0$ . Si es semihiperbólica o un *centro* respectivamente

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

con  $\lambda \neq 0$  y  $\beta > 0$ . En los casos más degenerados

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si consideramos el sistema lineal  $\dot{x} = Cx$ , donde  $C$  es una de las formas canónicas de Jordan anteriores e imponemos la condición inicial  $x(0) = p_0$ , podemos dar una expresión explícita de las soluciones. Esto nos resultará muy útil para dibujar el mapa de fase. Las expresiones respectivas de la solución son:

▪ Si  $C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ , entonces la solución está dada por  $x(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} p_0$ . (I)

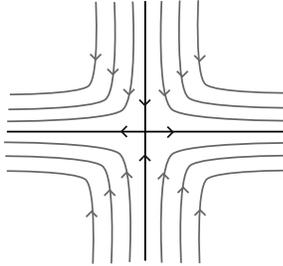
▪ Si  $C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , entonces  $x(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} p_0$ . (II)

▪ Si  $C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ , entonces  $x(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} p_0$ . (III)

### 2.3.1. Singularidades NO DEGENERADAS

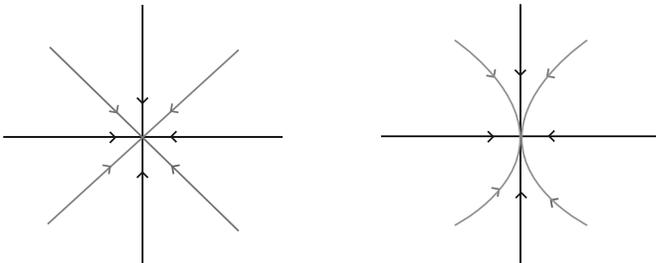
**Singularidades hiperbólicas.** Veamos cómo es la topología local del campo en cada uno de los casos posibles:

(I) con  $\lambda < 0 < \mu$ . SILLA.

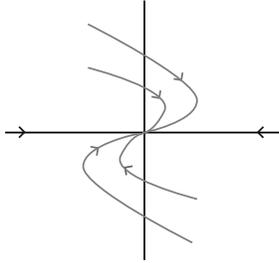


Observemos que en este mapa de fase aparecen cuatro regiones delimitadas por cuatro trayectorias especiales que corresponden a los subespacios propios estable  $E^s(0)$  e inestable  $E^u(0)$  asociados a los autovalores de la matriz  $C$ . Dos sillares son siempre localmente topológicamente equivalentes (ejercicio).

(II) con  $\lambda \leq \mu < 0$ . NODO ESTABLE

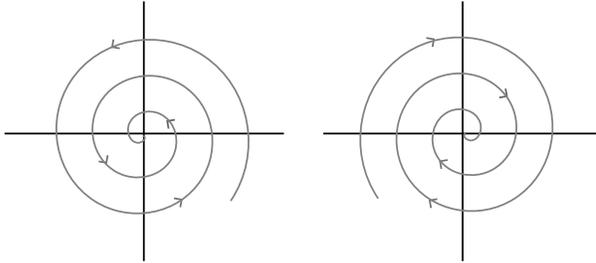


(III) con  $\lambda < 0$ . NODO ESTABLE



Obsérvese que si el punto singular es un nodo estable, cada trayectoria se aproxima al punto singular a lo largo de una tangente bien definida. Por otro lado, se tiene que dos nodos estables son siempre topológicamente equivalentes. Sin embargo, un nodo no tiene el tipo de topología de una silla (¿por qué?).

(IV) con  $\alpha < 0$ . FOCO ESTABLE



Las trayectorias no se aproximan al origen con una dirección como en el caso de un nodo. Sin embargo, un foco estable es topológicamente equivalente a un nodo estable (¿por qué?).

En la clasificación anterior, si consideramos además el nodo inestable y foco inestable tomando  $\lambda > 0$  y  $\alpha > 0$  respectivamente en (III) y (IV), corresponden al caso hiperbólico. Supongamos ahora que el campo  $\xi$  es no lineal. Si la singularidad es hiperbólica, el comportamiento de  $\xi$  alrededor del punto singular se puede determinar a partir del estudio de la parte lineal. Esto es consecuencia del Teorema de Hartman-Grobman (válido para

cualquier dimensión). Una demostración completa de este resultado puede consultarse en [24] (los pasos principales están recogidos en [25].)

**Teorema 1.** (Teorema de Hartman-Grobman) Sea  $\xi$  un campo de vectores de clase  $C^1$  en un abierto  $U$ . Supongamos que  $0 \in U$  y que es un punto singular de  $\xi$  de tipo hiperbólico. Entonces el campo lineal  $L\xi_0$  y  $\xi$  son topológicamente conjugados en un entorno del origen.

Este teorema implica que, para el caso hiperbólico, la parte lineal  $L\xi_0$  es una buena aproximación de  $\xi$  en el sentido de que es un representante de su tipo topológico local. Por otro lado, teniendo en cuenta que los modelos lineales anteriores no son topológicamente equivalentes entre sí, concluimos que existen tres clases de equivalencia en el caso hiperbólico: silla, nodo estable y nodo inestable.

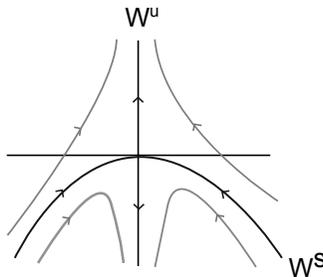
**Ejemplo 2.** El campo de vectores no lineal

$$\xi = -x \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + y) \frac{\partial}{\partial y}$$

tiene una singularidad de tipo silla en el origen. La expresión de la solución que en tiempo  $t = 0$  pasa por  $c = (c_1, c_2)$  es la siguiente:

$$\Phi(t, c) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^t + \frac{c_1^2}{3}(e^t - e^{-2t}) \end{pmatrix}.$$

Localmente, el diagrama de fase presenta el siguiente aspecto:

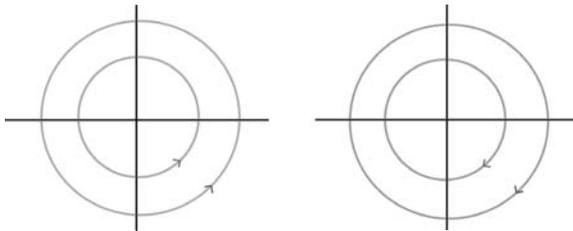


Observemos que también hay cuatro trayectorias que separan cuatro regiones como en el caso lineal. Estas trayectorias corresponden a las variedades estable e inestable del campo denotadas respectivamente por  $W^s$  y  $W^u$ . Se trata de curvas no singulares, únicas,

tangentes en el origen respectivamente a los espacios estable e inestable del sistema linealizado correspondiente. Para profundizar en la naturaleza y propiedades de estas variedades se recomienda consultar [17, 20, 24, 25].

Avanzamos que las singularidades elementales (hiperbólicas y semi-hiperbólicas) son los únicos “modelos” que necesitamos para determinar la topología de singularidades más complicadas gracias al proceso de reducción de singularidades que introduciremos más adelante.

**Singularidades no-hiperbólicas: centro-foco.** El caso no degenerado y no hiperbólico corresponde, en el caso lineal, a una matriz del tipo (IV) con  $\alpha = 0$ . En este caso tenemos una singularidad de tipo CENTRO, es decir, todas las órbitas regulares son periódicas.



Obsérvese que dos singularidades de este tipo siempre son topológicamente equivalentes. Sin embargo, un campo de vectores no lineal sea

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

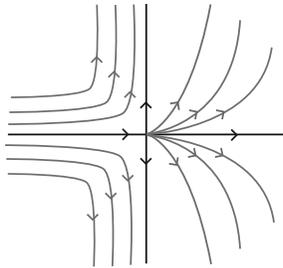
puede tener un comportamiento de tipo centro o de tipo foco. Distinguir entre estos dos casos a partir de la expresión del campo es un problema muy complicado (véase el libro de Arnold [5]), para el que hay que utilizar técnicas muy sofisticadas en las que no vamos a entrar en este curso. Teniendo en cuenta además que un centro y un foco no son topológicamente equivalentes, hemos de excluir esta situación si queremos dar una clasificación topológica de campos de vectores planos. No obstante, como veremos más adelante, sí podremos determinar si una singularidad es de tipo centro-foco (sin poder distinguir entre ambos) acudiendo a la reducción de singularidades.

### 2.3.2. Singularidades DEGENERADAS

Si en el último caso no degenerado la parte lineal no determina la topología del campo, tampoco lo hace en los casos degenerados (al menos un autovalor nulo).

**Singularidades semi-hiperbólicas.** Recordemos que corresponden al caso en el que hay exactamente un autovalor distinto de cero. En el caso lineal ni siquiera tenemos una singularidad aislada. En el caso no lineal, podemos observar con un ejemplo cómo la dinámica es completamente distinta:

$$\xi = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}.$$



Una singularidad de este tipo se denomina *silla-nodo*. Utilizando este ejemplo, aparte de la presencia de la variedad inestable  $W^u$ , que en este caso coincide con el espacio lineal inestable  $E^u(0)$ , también podemos observar la presencia de una infinidad de curvas tangentes al espacio central  $E^c(0)$  en el origen. Cada una de ellas es una *variedad central*  $W^c$ . Recomendamos consultar [17, 20, 24, 25] para más detalles sobre la variedad central. Aquí simplemente mencionaremos que siempre existe, aunque no tiene por qué ser única ni tiene por qué conservar la clase de diferenciabilidad del campo. Sin embargo, la restricción del campo a una variedad central determina la dinámica alrededor del punto singular.

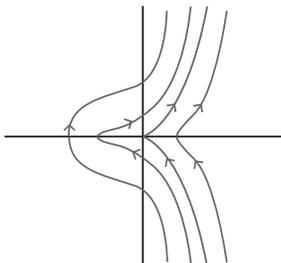
**Singularidades nilpotentes.** Este caso corresponde a una parte lineal no nula pero con dos autovalores nulos, es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En el caso lineal esta situación no corresponde a una singularidad aislada. Los siguientes ejemplos, extraídos de [24], muestran distintos tipos topológicos para un campo no lineal con una parte lineal de este tipo:

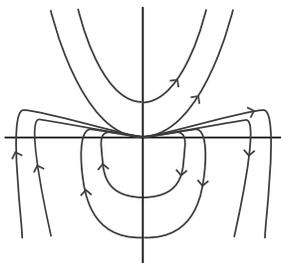
**Ejemplo 3.** Cúspide en el origen

$$\xi = y \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial y}$$



**Ejemplo 4.** Dominio elíptico

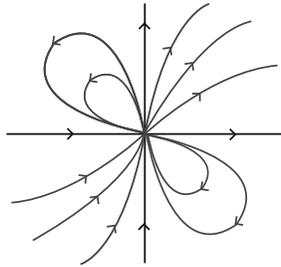
$$\xi = y \frac{\partial}{\partial x} + (-x^3 + 4xy) \frac{\partial}{\partial y}$$



**Singularidades con parte lineal nula.** Este caso, el más degenerado posible, corresponde a una parte lineal idénticamente nula. Todo el plano es el conjunto singular. Si consideramos, por ejemplo, el campo

$$\xi = (x^2 + xy) \frac{\partial}{\partial x} + (1/2y^2 + xy) \frac{\partial}{\partial y}$$

que tiene parte lineal nula, observamos que presenta un mapa de fase completamente diferente:



Después de observar estos ejemplos, nos planteamos dos cuestiones:

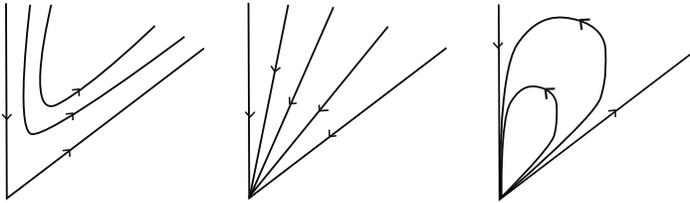
1. ¿Podemos clasificar topológicamente las singularidades que no sean hiperbólicas?
2. ¿Podemos encontrar para las singularidades degeneradas un representante de cada clase de equivalencia que juegue el papel de la parte lineal en el caso hiperbólico? ¿Cómo buscarlo? ¿Cuáles son los candidatos?

Ambas preguntas tienen respuesta afirmativa en el caso analítico plano. En el caso de dimensión tres, en [2, 3] se desarrollan técnicas que permiten responder a estas preguntas para una familia genérica de campos de vectores. En el siguiente apartado daremos una idea de cómo determinar el tipo topológico de una singularidad cualquiera en el caso analítico plano. Dedicaremos la sección 3 a la respuesta de la segunda pregunta en el caso bidimensional.

## 2.4. Clasificación topológica de campos de vectores planos con órbita característica

Si observamos con detenimiento los mapas de fases de los ejemplos anteriores y también de las singularidades elementales, llegamos a la conclusión de que dado un entorno del

punto singular, se puede distinguir un número finito de regiones abiertas caracterizadas por el comportamiento común de las órbitas pertenecientes a ellas. Estas regiones, a las que llamaremos *sectores*, están delimitadas por trayectorias especiales a las que llamaremos *separatrices*. Distinguiremos varios tipos: un sector topológicamente equivalente al primer, segundo o tercer sector de la siguiente figura, se dice respectivamente un sector *hiperbólico*, *parabólico* o *elíptico* (no es necesario preservar la dirección del flujo).



Nos interesa especialmente la descomposición sectorial para singularidades elementales: en el caso de una silla, dado un entorno de la misma, podemos descomponerlo en cuatro sectores hiperbólicos delimitados por cuatro separatrices que corresponden a las variedades estable e inestable. Por otro lado, cada entorno de una singularidad de tipo nodo (estable o inestable) consta de un único sector de tipo parabólico. En el caso elemental no hiperbólico (exactamente un autovalor igual a cero) se puede demostrar que hay tres tipos de descomposición sectorial posible: tipo silla-nodo (dos sectores hiperbólicos y uno parabólico), tipo silla o tipo nodo. La frontera entre sectores viene dada en este caso por las variedades estable (o inestable) y una variedad central.

Para dar un resultado general necesitamos excluir el caso centro-foco que, como ya hemos mencionado, resulta indistinguible si no se recurre a técnicas mucho más complicadas. Caracterizaremos esta situación definiendo un nuevo objeto:

Sea  $\xi$  un campo de vectores plano analítico con una singularidad en el origen. Una *órbita característica*  $\gamma(t)$  en el origen es una órbita que tiende al origen en tiempo positivo (respectivamente en tiempo negativo) con una tangente bien definida, es decir, existe el límite  $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) / \|\gamma(t)\|$  (respectivamente existe el límite  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) / \|\gamma(t)\|$ ). Obsérvese que  $\xi$  tendrá una singularidad centro-foco si no existen órbitas características.

**Teorema 5.** Supongamos que  $\xi$  es un campo plano analítico con una singularidad en el origen que no sea de tipo centro-foco. Entonces existe un número finito de órbitas

características de  $\xi$  en el origen que determinan sectores de tipo hiperbólico, elíptico o parabólico que componen un entorno de la singularidad.

Volveremos a la demostración de este resultado más adelante. Para finalizar este apartado, únicamente señalaremos que si los valores  $p$ ,  $e$  y  $h$  denotan el número de sectores parabólicos, elípticos e hiperbólicos respectivamente, se puede conseguir una *descomposición sectorial minimal* reduciendo todo lo posible el valor  $p$  no aceptando sectores parabólicos adyacentes o adjuntando un sector parabólico a uno elíptico si ambos son contiguos. De esta manera un sector parabólico puede aparecer solamente entre dos sectores hiperbólicos. Por otro lado, se puede probar que el tipo topológico de una singularidad aislada está caracterizado por los valores  $p$ ,  $e$  y  $h$  de una descomposición sectorial minimal y la disposición de los sectores. Para más detalles, consultar [13].

La clave para poder exhibir la descomposición sectorial de un campo de vectores es utilizar las *explosiones*.

## 2.5. Explosiones. Reducción de singularidades

La herramienta esencial para estudiar singularidades no elementales de un campo de vectores, consiste en la utilización de ciertas transformaciones que permiten alterar la parte lineal del campo. Estas transformaciones son las explosiones.

### 2.5.1. Explosión polar

Comenzaremos introduciendo la *explosión polar* de  $\mathbb{R}^2$  en el origen. Se trata del morfismo consistente en tomar “coordenadas polares”:

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\theta, r) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

donde se considera  $\mathbb{S}^1$  dentro de  $\mathbb{R}^2$ . Observemos que  $\phi$  no es una aplicación inyectiva pero sí es un cambio de coordenadas analítico entre el semicilindro abierto  $\mathbb{S}^1 \times (0, +\infty)$  y el plano agujereado  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . La imagen de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$  es un doble recubrimiento de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . El ecuador central  $D = \{r = 0\} = \mathbb{S}^1$ , *el divisor excepcional*, se proyecta por completo en el origen. Cada punto de la circunferencia representa una de las semirrectas que pasan por el origen de  $\mathbb{R}^2$ .

Consideremos ahora un campo de vectores analítico  $\xi$  en  $\mathbb{R}^2$  con una singularidad en el origen. Denotemos por  $\tilde{\xi}$  el campo de vectores definido en el cilindro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  tal que

$\phi_*(\tilde{\xi}) = \xi$ . Lo llamaremos el *transformado total* de  $\xi$ . Para estudiar el mapa de fase de  $\xi$  en un entorno del origen es suficiente estudiar el mapa de fase de  $\tilde{\xi}$  en un entorno de  $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ . De hecho, podemos restringirnos a estudiarlo en  $\{r > 0\}$ . Supongamos que el campo  $\xi$  se escribe en determinadas coordenadas de la siguiente forma:

$$\xi = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Cuando la *multiplicidad*  $k$  de  $\xi$  (el mínimo de los órdenes de  $A$  y  $B$ ) es mayor que uno, el campo  $\tilde{\xi}$  se anula en  $\{r = 0\}$ . Podemos considerar el campo

$$\bar{\xi} = \frac{1}{r^{k-1}}(\tilde{\xi}).$$

Este campo, al que llamaremos *transformado estricto* de  $\xi$ , también es analítico en  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ . Obsérvese que las singularidades de  $\bar{\xi}|_{r=0}$  son dobles en el sentido de que aparecen como parejas de puntos antipodales. Por otro lado, en  $\{r > 0\}$  la división por  $r^{k-1}$  no cambia las órbitas ni la orientación del campo, solamente la parametrización, por lo que podemos usar  $\bar{\xi}$  en  $\{r > 0\}$  para estudiar las trayectorias de  $\tilde{\xi}$ .

Desde un punto de vista geométrico, el cilindro es una buena superficie para conseguir una visión global del mapa de fase del campo  $\tilde{\xi}$ . Por razones algebraicas, dado que hay que manipular constantemente expresiones trigonométricas, resulta menos adecuado para realizar cálculos. Por esa razón utilizaremos diferentes cartas (podemos usar dos o cuatro, como veremos), lo que dará lugar a las llamadas *explosiones direccionales*.

En la región del cilindro correspondiente a  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2)$  usaremos la siguiente carta:

$$\varphi^x : (\theta, r) \mapsto (r \cos \theta, \tan \theta) = (x', y')$$

En esta carta, la expresión de  $\phi$  está dada por

$$\phi^x : (x', y') \mapsto (x', x'y').$$

Llamaremos a  $\phi^x$  *explosión en la dirección de  $x$* . Se tiene que

$$\phi = \phi^x \circ \varphi^x : (\theta, r) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

En la región del cilindro dada por  $\theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$  usamos una carta dada por:

$$\varphi^y : (\theta, r) \mapsto (\cot \theta, r \sin \theta) = (x'', y'')$$

En esta carta, la expresion de  $\phi$  está dada por

$$\phi^y : (x'', y'') \mapsto (x''y'', y'').$$

Llamaremos a  $\phi^y$  *explosión en la dirección de y*. Se tiene que

$$\phi = \phi^y \circ \varphi^y : (\theta, r) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Denotaremos por  $\tilde{\xi}^x$  y  $\tilde{\xi}^y$  respectivamente los transformados totales de  $\xi$  por  $\phi^x$  y  $\phi^y$ . Podemos ver sin dificultad que estos campos se expresan en las cartas respectivas como:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^x &= A(x', x'y') \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{1}{x'}(B(x', x'y') - y'A(x', x'y')) \frac{\partial}{\partial y'} \\ \tilde{\xi}^y &= \frac{1}{y''}(A(x''y'', y'') - x''B(x''y'', y'')) \frac{\partial}{\partial x''} + B(x''y'', y'') \frac{\partial}{\partial y''} \end{aligned}$$

Al igual que antes, estos campos son muy degenerados en el divisor excepcional, cuyas ecuaciones en las cartas respectivas son  $\{x' = 0\}$  e  $\{y'' = 0\}$ . Podemos definir entonces los transformados estrictos:

$$\bar{\xi}^x = \frac{1}{x'^{k-1}} \tilde{\xi}^x \quad \bar{\xi}^y = \frac{1}{y''^{k-1}} \tilde{\xi}^y.$$

Teniendo en cuenta que  $(\varphi^x)_*(\tilde{\xi}) = \tilde{\xi}^x$  (análogamente para  $y$ ), un cálculo sencillo nos lleva a que en  $\{x' \neq 0\}$

$$(\varphi^x)_*(\bar{\xi}) = \bar{\xi}^x \left(\frac{x'}{r}\right)^{k-1}$$

es decir,  $(\varphi^x)_*(\bar{\xi})$  y  $\bar{\xi}^x$  coinciden salvo multiplicación por una función analítica no nula. En las coordenadas  $(\theta, r)$  se tiene que  $\frac{x'}{r} = \cos \theta$ , que es una función estrictamente positiva si  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Análogamente, en la dirección de  $y$  tenemos que  $(\varphi^y)_*(\bar{\xi}) = \bar{\xi}^y (\sin \theta)^{k-1}$  donde  $\sin \theta > 0$  si  $\theta \in (0, \pi)$ .

Así pues, la explosión direccional  $\phi^x$  se puede usar para estudiar el mapa de fase de  $\bar{\xi}$  en  $\{(\theta, r) : \theta \in (\pi/2, 3\pi/2), r > 0\}$ , pero en esta región se tiene  $\cos \theta < 0$ . Esto implica que para  $k - 1$  impar, en el espacio de fase que encontramos para  $\bar{\xi}^x|_{\{x' \leq 0\}}$  tenemos que cambiar la orientación de las órbitas. La misma observación sirve para estudiar  $\bar{\xi}$  en  $\{(\theta, r) : \theta \in (\pi, 2\pi), r > 0\}$  usando  $\bar{\xi}^y$ .

Otra forma de proceder que evitaría tener que considerar un cambio en la orientación de las órbitas sería restringir el uso de  $\phi^x$  (resp.  $\phi^y$ ) a  $x' \geq 0$  (resp.  $y'' \geq 0$ ) y añadir dos explosiones direccionales adicionales para trabajar respectivamente en  $x' \leq 0$  e  $y'' \leq 0$

$$\begin{aligned} \phi^{-x} : (x', y') &\mapsto (-x', -x'y') \\ \phi^{-y} : (x'', y'') &\mapsto (-x''y'', -y''). \end{aligned}$$

Obsérvese que si bien  $\bar{\xi}^x$  y  $\bar{\xi}^y$  no coinciden en la intersección de las cartas, sí determinan una foliación  $\phi^*\mathcal{F}_\xi$  a la que llamaremos *foliación transformada estricta* de la foliación  $\mathcal{F}_\xi$  generada por  $\xi$  alrededor del origen. A una hoja de  $\mathcal{F}_\xi$  le corresponde una hoja de  $\phi^*\mathcal{F}_\xi$  en  $r > 0$  (o en  $r < 0$ ). En cuanto al divisor excepcional, se pueden dar dos situaciones:

- Caso no-dicrítico: el divisor  $D$  es invariante para  $\phi^*\mathcal{F}_\xi$ . Es una unión de hojas y puntos singulares de la foliación transformada estricta.
- Caso dicrítico:  $D$  es transversal a las hojas regulares de  $\phi^*\mathcal{F}_\xi$  en casi todos los puntos.

### 2.5.2. Explosión no orientada

En algunos casos conviene considerar la variedad  $M$  obtenida a partir de  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$  por paso al cociente identificando  $(\theta, r)$  con  $(\pi + \theta, -r)$ , es decir, los puntos cuya imagen por  $\phi$  coincide. Se obtiene así el *morfismo de explosión (proyectivo)* por paso al cociente

$$\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Los detalles de esta explosión están desarrollados en [25]. Recordemos algunas cuestiones. Se puede comprobar que  $M$  es una variedad analítica real (la banda de Möbius no acotada) y que  $\pi$  es una aplicación analítica *propia* que restringe a un isomorfismo entre  $M \setminus \pi^{-1}(0)$  y  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . El *divisor excepcional de la explosión*,  $D = \pi^{-1}(0)$ , es isomorfo a la recta proyectiva real  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ .

Por construcción, la variedad  $M$  se puede considerar recubierta por dos cartas afines  $(U', (x', y'))$  y  $(U'', (x'', y''))$  en las que el morfismo de explosión se escribe (para las coordenadas cartesianas  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$ ) como

$$\pi(x', y') = (x', x'y'), \quad \pi(x'', y'') = (x''y'', y'').$$

La imagen  $\pi(U')$  cubre  $\mathbb{R}^2$  menos la recta vertical  $x = 0$ , privada del origen y la imagen  $\pi(U'')$  cubre  $\mathbb{R}^2$  menos la recta horizontal  $y = 0$  privada del origen. El divisor excepcional  $D$  está dado en  $U'$  por  $x' = 0$  y en  $U''$  por  $y'' = 0$ .

Como en el caso de la explosión polar, dado un campo de vectores analítico  $\xi$ , se puede definir el transformado total  $\tilde{\xi}$  y los transformados estrictos en las cartas  $U'$  y  $U''$ . También se puede definir la foliación transformada estricta  $\pi^*\mathcal{F}_\xi$  de la foliación  $\mathcal{F}_\xi$  dada por  $\xi$ , que será una foliación en la variedad  $M$ , esto es, una partición de  $M$  por trayectorias que pueden ser curvas inmersas o puntos y que no está necesariamente generada por ningún campo de vectores global.

### 2.5.3. Reducción de singularidades de campos planos

Dada una variedad analítica real  $M$ , generalizando la construcción anterior, es posible hacer una explosión de la misma en cualquier punto (ver [25] para más detalles). Esto nos permite repetir la operación de explosión considerando cada vez un centro en la variedad resultante de la etapa anterior. Obtenemos una secuencia:

$$\Pi : M = M_r \xrightarrow{\pi_r} M_{r-1} \xrightarrow{\pi_{r-1}} \dots \xrightarrow{\pi_2} M_1 \xrightarrow{\pi_1} M_0 = \mathbb{R}^2.$$

donde  $D = \Pi^{-1}(0) \subset M$  es el *divisor total* de  $\Pi$  y es una unión  $D = D_1 \cup \dots \cup D_r$  de rectas proyectivas con cruzamientos normales (transversales dos a dos). Cada componente  $D_j$  es el transformado estricto correspondiente del divisor excepcional de la explosión  $\pi_j$ . El morfismo  $\Pi$  es analítico e induce un isomorfismo de  $M \setminus D$  sobre  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

Este proceso puede adaptarse a un campo de vectores analítico  $\xi$  con una singularidad en el origen de manera que en cada etapa se obtengan singularidades menos degeneradas. Nos detenemos cuando todas las singularidades son *simples*: una singularidad  $p$  de un campo de vectores analítico  $\xi$  en  $\mathbb{R}^2$  es *simple* si los dos autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  de la parte lineal de  $\xi$  en  $p$  son reales, uno de ellos, por ejemplo  $\lambda_2$ , es distinto de cero y  $\lambda_1/\lambda_2$  no es un número racional positivo. El siguiente resultado nos garantiza que en un número finito de pasos obtendremos únicamente singularidades simples sobre el divisor excepcional.

**Teorema 6.** (Reducción de singularidades de campos planos) Sea  $\xi$  un campo de vectores analítico definido en un entorno del origen y tal que el origen es una singularidad aislada de  $\xi$ . Entonces existe una secuencia de explosiones de puntos  $\Pi : M \rightarrow U$ , cada una de ellas centrada en un punto singular de la foliación transformada estricta de la etapa anterior, de manera que la foliación transformada estricta final  $\Pi^*\mathcal{F}_\xi$  tiene únicamente singularidades simples y las componentes del divisor excepcional son, o bien invariantes por  $\Pi^*\mathcal{F}_\xi$  o bien transversales a las hojas de  $\Pi^*\mathcal{F}_\xi$ .

Para profundizar en los detalles de este resultado se recomienda consultar [26] y [10].

**Descomposición sectorial de campos planos** Se puede utilizar ahora el Teorema de reducción de singularidades para determinar si un campo analítico plano con singularidad en el origen tiene una singularidad de tipo centro-foco. Si no es así, aplicando este mismo resultado también podremos exhibir una descomposición sectorial y demostrar el teorema 5.

Los pasos a seguir serían los siguientes: supongamos que hemos completado el proceso de reducción de singularidades para  $\xi$ . Eso significa que tras una secuencia finita de explosiones  $\Pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ , la foliación transformada estricta  $\Pi^*\mathcal{F}_\xi$  tiene solo un número finito de singularidades, todas simples, sobre el divisor. Se pueden dar varias posibilidades:

- No hay componentes dicríticas ni singularidades no-esquinas (fuera de las intersecciones de componentes del divisor). Además, todas las esquinas son sillas hiperbólicas. En ese caso, estamos ante un centro-foco.
- Puede aparecer alguna componente dicrítica o alguna singularidad no-esquina. Tengamos en cuenta que en la descomposición sectorial de una singularidad simple únicamente aparecen sectores hiperbólicos o parabólicos. Esto implica que un entorno del divisor excepcional puede dividirse en un número finito de regiones, cada una de ellas determinada por una pareja de singularidades contiguas o una componente dicrítica del divisor, y que será homeomorfa a una de las regiones que detallamos a continuación en función de los sectores que aparezcan en las singularidades de los extremos de dicha región. La proyección por  $\Pi$  de cada una de estas regiones determina un sector para  $\xi$ , de este modo:
  1. Componente dicrítica  $\rightsquigarrow$  sector parabólico.
  2. Región extremos parabólico-parabólico  $\rightsquigarrow$  sector elíptico.
  3. Región extremos parabólico-hiperbólico  $\rightsquigarrow$  sector parabólico.
  4. Región extremos hiperbólico-hiperbólico  $\rightsquigarrow$  sector hiperbólico.

Para más detalles se recomienda consultar el libro de Lefschetz [21] y el artículo de Dumortier [13].

### 3. Equivalencia topológica entre un campo plano y su parte principal

Hemos visto que la topología de un campo de vectores analítico plano  $\xi$  con órbita característica, es decir, su configuración sectorial, queda perfectamente determinada después del proceso de reducción de singularidades. Volvamos ahora a la otra cuestión que nos interesa: ¿es posible determinar algebraicamente a partir de  $\xi$  otro campo de vectores “más sencillo” que pertenezca a la misma clase de equivalencia topológica?

### 3.1. $K$ -jets. Determinación finita

Consideremos un campo plano con una singularidad en el origen. Supongamos que

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n + \dots$$

es el desarrollo en serie de Taylor de  $\xi$  en el origen, donde  $\xi_n$  representa la componente homogénea de grado  $n$ . Nos preguntamos si es posible truncar este desarrollo a altura  $k$ , es decir, considerar el campo de vectores  $j^k(\xi) = \xi_1 + \dots + \xi_k$  al que llamaremos *k-jet de  $\xi$  en el origen*, de manera que  $j^k(\xi)$  sea localmente topológicamente equivalente a  $\xi$ .

La respuesta a esta pregunta en el caso de singularidades hiperbólicas la da el Teorema de Hartman-Grobman. En este caso, el 1-jet (la parte lineal) es *topológicamente suficiente*. En el caso de campos de vectores planos de clase  $\mathcal{C}^\infty$  con órbita característica, tenemos el siguiente resultado debido a Dumortier [13]:

**Teorema 7.** Sea  $\xi$  un campo de clase  $\mathcal{C}^\infty$  en  $\mathbb{R}^2$  con una singularidad en el origen. Si  $\xi$  tiene órbitas características, entonces existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $j^k(\xi)$  es topológicamente equivalente a  $\xi$  en un entorno del origen.

A pesar de la importancia de este resultado, el teorema no permite calcular a priori el orden  $k$  ni dibujar el mapa de fase sin tener que desarrollar por completo el proceso de reducción de singularidades. Sin embargo, tal y como se sugiere en la introducción del artículo de Brunella-Miari [7], en la clasificación topológica de un campo de vectores tal vez no es necesario considerar componentes homogéneas completas, sino que determinados términos de distinto grado pueden bastar para determinar el tipo topológico de  $\xi$ .

La propuesta de Brunella-Miari, inspirada en la *Geometría Tórica*, es establecer un mecanismo que permita seleccionar en el desarrollo en serie de  $\xi$  únicamente aquellos *términos relevantes* para determinar la clase topológica del campo original. Esta elección se hace a partir del polígono de Newton  $\mathcal{N}$  de  $\xi$ . Veremos también que a partir de  $\mathcal{N}$  se puede construir  $\tau_{\mathcal{N}}$  una secuencia de explosiones centradas en los orígenes de las cartas correspondientes (morfismo tórico), que bajo ciertas condiciones, será una reducción de singularidades de  $\xi$ .

El resultado de Brunella-Miari (ver [7]) se puede enunciar como generalización del teorema de Hartman-Grobman: sea  $\xi$  un campo de vectores de clase  $\mathcal{C}^\infty$  con una singularidad en el origen. Existe un campo de vectores determinado a partir de  $\mathcal{N}$  (la parte principal de  $\xi$ ) que, bajo ciertas condiciones, es localmente topológicamente equivalente a  $\xi$  módulo centro-foco.

### 3.2. Nociones básicas de geometría tórica

Dedicaremos esta sección a introducir los conceptos mínimos necesarios de geometría tórica. El objetivo es utilizar este lenguaje para construir un morfismo a partir del polígono de Newton que, bajo ciertas condiciones, sea una desingularización del campo. Para esta breve introducción hemos seguido esencialmente el curso [6]. Se recomienda consultar [14] o [22] para profundizar en el tema.

El procedimiento de construcción de una variedad tórica afín asociada a un cono  $\sigma$  en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  sigue esencialmente las siguientes etapas: el cono dual  $\check{\sigma}$ , el semigrupo  $S_\sigma$  y finalmente, la variedad algebraica  $U_\sigma$

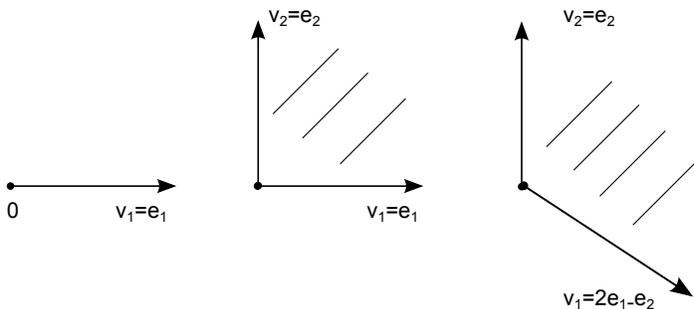
$$\sigma \mapsto \check{\sigma} \mapsto S_\sigma \mapsto U_\sigma.$$

**Conos:** Dado  $A = \{v_1, \dots, v_r\}$  un conjunto finito de vectores de  $\mathbb{R}^n$ , el conjunto

$$\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n; \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \lambda_i \geq 0\}$$

se llama un *cono poliédrico*. Los vectores  $v_1, \dots, v_r$  son los generadores del cono. Si  $A = \emptyset$ , entonces  $\sigma = \{0\}$ .

**Ejemplo 8.** En  $\mathbb{R}^2$  con la base canónica  $\{e_1, e_2\}$ , tenemos los siguientes conos:



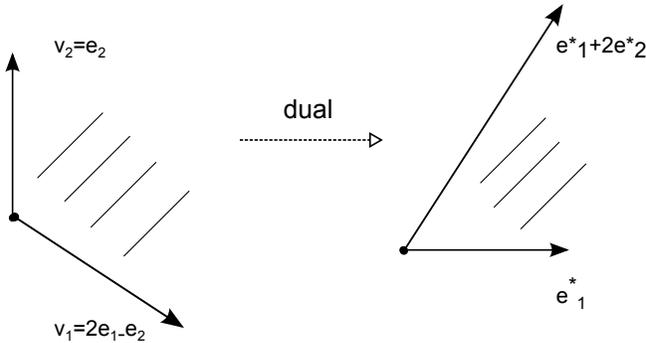
La dimensión de  $\sigma$  es la dimensión del mínimo subespacio vectorial que lo contiene. Denotamos este valor por  $\dim \sigma$ . A partir de ahora denotaremos por  $N$  el retículo  $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ .

Un cono poliédrico será *racional*, si todos los generadores pertenecen a  $N$ . Además, diremos que es *fuertemente convexo*, si  $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ .

Veamos cómo se construye el cono dual a partir de un cono  $\sigma$ . Sea  $(\mathbb{R}^n)^*$  es espacio dual de  $\mathbb{R}^n$ . Podemos definir  $\check{\sigma}$  el *cono dual* como

$$\check{\sigma} = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : u(v) \geq 0 \quad \forall v \in \sigma\}$$

**Ejemplo 9.** Sea  $\{e_1^*, e_2^*\}$  la base dual de  $(\mathbb{R}^2)^*$ . Tenemos



Dado un retículo  $N$  en  $\mathbb{R}^n$ , definimos el retículo dual  $M = Hom_{\mathbb{Z}}(N; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$  en  $(\mathbb{R}^n)^*$ . Se puede comprobar que si  $\sigma$  es un cono racional entonces  $\check{\sigma}$  también lo es. No obstante, el hecho de que  $\sigma$  sea fuertemente convexo, no implica que  $\check{\sigma}$  lo sea (ejercicio).

Obsérvese que un cono poliédrico se puede escribir como una intersección de semi-espacios: cada co-vector  $u \in (\mathbb{R}^n)^*$  define un semiespacio

$$H_u = \{v \in \mathbb{R}^n : u(v) \geq 0\}.$$

Por tanto, si  $\{u_i\}_{i=1}^t$  es un conjunto de generadores del cono dual  $\check{\sigma}$ , entonces

$$\sigma = \bigcap_{i=1}^t H_{u_i}.$$

De hecho, dado  $\sigma$  un cono racional generado por  $\{v_1, \dots, v_r\}$ , entonces  $\check{\sigma} = \bigcap \tau_i$  donde  $\tau_i$  es el cono generado por el vector  $v_i$  (ejercicio).

**Caras:** Dado  $\sigma$  un cono y  $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$ , entonces

$$\tau = \sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma : \lambda(v) = 0\}$$

será una *cara* de  $\sigma$ . Lo denotaremos por  $\tau < \sigma$ . Esta definición coincide con la intuitiva (ejercicio).

Obviamente, un cono es una cara de sí mismo. El resto de caras son las *caras propias*. En particular, las caras de dimensión uno se llamarán *aristas*. En el caso de un cono racional fuertemente convexo, se puede comprobar que cada cara conserva esta propiedad. Además, la intersección de caras es una cara y cada cara de una cara es una cara a su vez.

Teniendo en cuenta por un lado que si  $\tau < \sigma$ , entonces  $\check{\sigma} \subset \check{\tau}$  y por otro que si  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ , entonces  $\check{\sigma} = \check{\sigma}_1 \cap \check{\sigma}_2$ , se puede probar una propiedad que nos resultará muy útil (ejercicio):

Si  $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$  (con  $\lambda \in \check{\sigma}$ ) es una cara de  $\sigma$ , entonces

$$\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda).$$

**El semigrupo  $S_\sigma$ :** Recordemos que un semigrupo aditivo es un conjunto no vacío  $S$  dotado de una operación asociativa  $+$  :  $S \times S \rightarrow S$  que es conmutativa, tiene elemento neutro y satisface las leyes de simplificación, es decir, para todos  $s, s', t \in S$ ,

$$s + t = s' + t \Rightarrow s = s'.$$

Diremos que  $S$  está finitamente generado si existen  $a_1, \dots, a_k \in S$  tales que cada  $s \in S$  se puede escribir de la forma

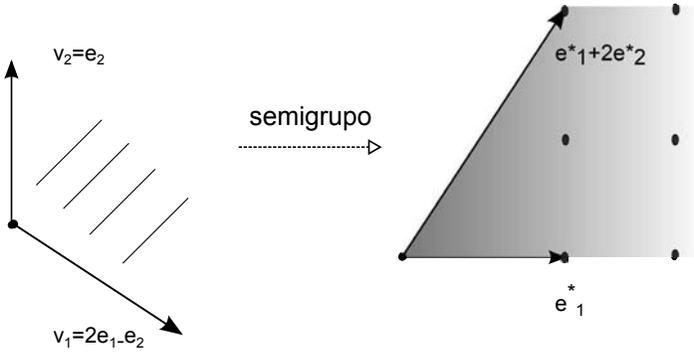
$$s = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k,$$

donde  $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

**Lema 10.** (Lema de Gordon). Si  $\sigma$  es un cono poliédrico racional entonces  $\sigma \cap N$  es un semigrupo aditivo finitamente generado.

Se puede aplicar este lema al cono poliédrico  $\check{\sigma}$ . Denotaremos por  $S_\sigma$  al semigrupo  $\check{\sigma} \cap M$  y lo llamaremos el *semigrupo asociado a  $\sigma$* .

**Ejemplo 11.** En  $\mathbb{R}^2$  consideramos el siguiente cono



En este caso, hemos marcado los elementos de  $S_\sigma = \check{\sigma} \cap M$  con un punto  $\bullet$ . El semigrupo  $S_\sigma$  no está generado únicamente por los vectores  $e_1^*$  y  $e_1^* + 2e_2^*$ ; necesitamos añadir  $e_1^* + e_2^*$ . Por tanto, un conjunto de generadores para  $S_\sigma$  es  $\{e_1^*, e_1^* + e_2^*, e_1^* + 2e_2^*\}$ .

Si  $\sigma$  es un cono poliédrico racional convexo y  $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$  es una cara de  $\sigma$  con  $\lambda \in S_\sigma = \check{\sigma} \cap M$ , en virtud de la propiedad anterior se concluye fácilmente que:

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda).$$

**La variedad  $U_\sigma$ :** Consideremos un cuerpo  $K$  (usualmente  $\mathbb{C}$ ). Una variedad algebraica afín  $V(E) \subset K^n$  se define como el conjunto de los ceros comunes de un número finito de polinomios  $E = \{f_1, \dots, f_r\}$  donde  $f_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ . Recordemos que se puede definir una topología en el espacio afín  $K^n$  en la que los cerrados sean precisamente las variedades algebraicas afines (*topología de Zariski*). Para más detalles ir a [15].

Sea  $\sigma$  un cono poliédrico racional y  $S_\sigma$  el semigrupo asociado. Sabemos, por el lema de Gordon, que está finitamente generado. Tomemos  $\{m_1, \dots, m_p\}$  un conjunto de generadores. Estos generadores satisfarán un número finito de relaciones entre sí:

$$a_1 m_1 + \dots + a_p m_p = b_1 m_1 + \dots + b_p m_p \quad a_i, b_i \in \mathbb{Z}$$

Se puede definir la siguiente variedad algebraica:

$$U_\sigma = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{C}^p : x_1^{a_1} \dots x_p^{a_p} = x_1^{b_1} \dots x_p^{b_p}\}.$$

Diremos que  $U_\sigma$  es la *variedad algebraica afín* asociada a  $\sigma$ .

Aunque no lo vamos a demostrar aquí, es importante resaltar que  $U_\sigma$  es única salvo homeomorfismo, aunque pueda ser representada de formas distintas dependiendo del conjunto de generadores que se seleccione en  $S_\sigma$  ([22]).

Obsérvese que si  $\{m_1, \dots, m_p\}$  son independientes, no existe ninguna relación de dependencia entre ellos, por lo que  $U_\sigma \simeq \mathbb{C}^p$ . Esto nos da pie para introducir la definición de cono no singular. Diremos que un cono  $\sigma$  es *no singular* si está generado por una base de  $\mathbb{Z}^n$ . En particular esto implica que  $S_\sigma$  está generado por una base de  $M$  y, por tanto,  $U_\sigma \simeq \mathbb{C}^p$  (donde  $p = \dim \sigma$ ).

La pregunta que nos hacemos ahora es la siguiente: si  $\tau < \sigma$  es una cara de un cono  $\sigma$ , ¿cuál es la relación entre las variedades algebraicas afines  $U_\tau$  y  $U_\sigma$ ? Recordemos que  $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda)$  para algún  $\lambda \in S_\sigma$ , es decir, que  $S_\tau$  se obtiene a partir de  $S_\sigma$  añadiendo un generador  $-\lambda$  a un sistema de generadores  $\{m_1, \dots, m_p\}$  de  $S_\sigma$ . Podemos suponer que  $m_p = \lambda$  y tomar como  $m_{p+1} = -\lambda$ . Entonces el conjunto  $\{m_1, \dots, m_p, m_{p+1}\}$  genera  $S_\tau$ . En la construcción de  $U_\tau$  debemos tener en cuenta las relaciones entre estos generadores más la condición adicional

$$m_p + m_{p+1} = 0.$$

Ahora, si  $U_\tau \subset \mathbb{C}^{p+1}$  y consideramos coordenadas  $x_1, \dots, x_{p+1}$ , esto nos da la relación

$$x_p x_{p+1} = 1.$$

Y esta es la única relación suplementaria que necesitamos para obtener  $U_\tau$  a partir de  $U_\sigma$ . La proyección

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{p+1} & \rightarrow & \mathbb{C}^p \\ (x_1, \dots, x_p, x_{p+1}) & \mapsto & (x_1, \dots, x_p) \end{array}$$

identifica  $U_\tau$  con el abierto de  $U_\sigma$  definido por  $x_p \neq 0$ . Esto se puede expresar diciendo que existe una identificación natural

$$U_\tau \simeq U_\sigma \setminus \{x_p = 0\}.$$

Resumiendo: si  $\tau$  es una cara de  $\sigma$ , se tienen las siguientes inclusiones:

$$\begin{array}{ccc} \tau & \hookrightarrow & \sigma \\ \check{\tau} & \hookleftarrow & \check{\sigma} \\ U_\tau & \hookrightarrow & U_\sigma. \end{array}$$

En el caso de dos conos  $\sigma' \subset \sigma$  se tiene que  $S_\sigma \subset S_{\sigma'}$  y se puede razonar de manera análoga para determinar un morfismo  $\pi_{\sigma, \sigma'} : U_{\sigma'} \rightarrow U_\sigma$  que puede ser visto como una proyección.

Si suponemos ahora que  $\tau$  es la cara común de dos conos  $\sigma$  y  $\sigma'$ , según lo anterior, podemos “pegar”  $U_\sigma$  y  $U_{\sigma'}$  a lo largo de su parte común  $U_\tau$ . Si  $v_1, \dots, v_l$  son las coordenadas en  $U_{\sigma'}$ , existe un homeomorfismo  $U_\tau \simeq U_{\sigma'} \setminus \{v_l = 0\}$  y obtenemos una aplicación de pegado

$$\Psi_{\sigma, \sigma'} : U_\sigma \setminus \{x_p = 0\} \simeq U_\tau \simeq U_{\sigma'} \setminus \{v_l = 0\}.$$

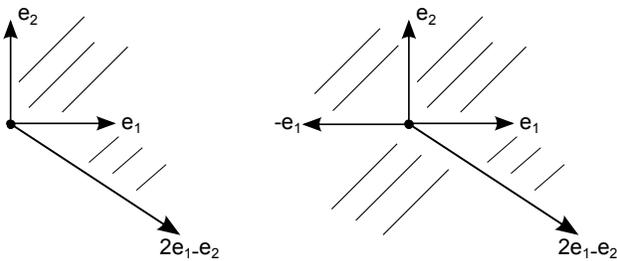
Vamos a generalizar este proceso para construir una variedad tórica. Necesitamos introducir el concepto de abanico.

**Abanicos y variedades tóricas:** Un *abanico*  $\Delta$  en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ , es una unión finita de conos satisfaciendo las siguientes propiedades:

1. cada cono de  $\Delta$  es un cono poliédrico racional fuertemente convexo,
2. cada cara de un cono de  $\Delta$  es un cono de  $\Delta$ ,
3. si  $\sigma$  y  $\sigma'$  son conos de  $\Delta$ , entonces  $\sigma \cap \sigma'$  es una cara común de ambos.

**Ejemplo 12.** El abanico *estándar* en  $\mathbb{R}^2$  tiene como único cono de dimensión dos el cono  $\sigma = e_1\mathbb{R}_{\geq 0} + e_2\mathbb{R}_{\geq 0}$ . Denotaremos este abanico por  $\Delta_{st}$ .

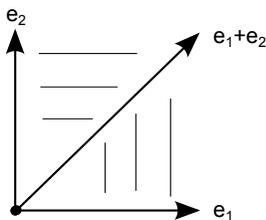
**Ejemplo 13.** Otros ejemplos de abanicos son:



Utilizando el proceso anterior, se puede construir una variedad tórica  $T(\Delta)$  asociada al abanico  $\Delta$ . Se trata de una variedad algebraica cuyas cartas están dadas por relaciones binomiales correspondientes a los conos de  $\Delta$ . De manera más precisa y utilizando la notación anterior, se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 14.** (Definición de variedad tórica) Sea  $\Delta$  un abanico en  $\mathbb{R}^n$ . Consideremos la unión disjunta  $\cup_{\sigma \in \Delta} U_\sigma$  donde dos puntos  $x \in U_\sigma$  y  $x' \in U_{\sigma'}$  están identificados si  $\Psi_{\sigma, \sigma'}(x) = x'$ . El espacio resultante se llama variedad tórica. Se trata de un espacio topológico dotado de un recubrimiento dado por las variedades tóricas afines  $U_\sigma$  donde  $\sigma \in \Delta$ .

**La explosión de  $\mathbb{R}^2$  en el origen es una variedad tórica:** Veamos ahora el ejemplo que más nos interesa: cómo construir la explosión de  $\mathbb{R}^2$  en el origen como una variedad tórica. Para ello consideramos el siguiente abanico:



Se tiene que los subgrupos asociados son  $S_{\sigma_1} = \langle e_1^* - e_2^*, e_2^* \rangle$  y  $S_{\sigma_2} = \langle e_1^*, -e_1^* + e_2^* \rangle$ . Se trata de conos no singulares, por lo que las variedades algebraicas afines correspondientes son  $U_{\sigma_1} = \mathbb{R}^2$  con coordenadas  $(u_1, u_2)$  y  $U_{\sigma_2} = \mathbb{R}^2$  con coordenadas  $(u_3, u_4)$  (trabajamos ahora con  $K = \mathbb{R}$ ). El subgrupo  $S_\tau$  puede considerarse generado por  $\{e_1^* - e_2^*, e_2^*, e_1^*, -e_1^* + e_2^*\}$ . Las relaciones entre estos generadores nos dan las ecuaciones que definen

$$U_\tau = \{(u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4 : u_1 u_2 = u_3, u_1 u_4 = 1\}.$$

Es decir, que  $U_\tau$  está representada

- en  $U_{\sigma_1}$  como  $U_{\sigma_1} \setminus \{u_1 = 0\} \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{u_1 = 0\}$
- en  $U_{\sigma_2}$  como  $U_{\sigma_2} \setminus \{u_4 = 0\} \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{u_4 = 0\}$

y estas dos variedades no singulares se pegan a lo largo de  $U_\tau$  usando el cambio de coordenadas

$$(u_1, u_2) \mapsto (u_1 u_2, u_1^{-1}).$$

Se recomienda como ejercicio comprobar que esta construcción corresponde exactamente a la explosión de  $\mathbb{R}^2$  en el origen, explicada en el apartado 2.5.2.

Esta construcción es válida a partir del abanico que se obtiene haciendo una subdivisión de un cono no singular  $\sigma \subset \mathbb{R}^2$  de la siguiente forma: si  $\sigma = n\mathbb{R}_{\geq 0} + n'\mathbb{R}_{\geq 0}$  con  $n \neq n'$  (recordemos que entonces  $U_\sigma \simeq \mathbb{R}^2$ ), la explosión en el origen de  $U_\sigma$  corresponde al abanico que se obtiene considerando como conos de máxima dimensión del mismo los siguientes:

$$\sigma_1 = n\mathbb{R}_{\geq 0} + (n + n')\mathbb{R}_{\geq 0} \quad \sigma_2 = (n + n')\mathbb{R}_{\geq 0} + n'\mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Obsérvese que, dado que  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  vuelven a ser conos no singulares, es posible repetir el procedimiento obteniendo un nuevo abanico  $\Delta$  por refinamiento sucesivo, lo que daría lugar a una sucesión de explosiones, cada una de ellas centrada en el origen de la variedad correspondiente.

Nos planteamos la siguiente cuestión: ¿qué ocurre si partimos de un *abanico singular* (es decir, alguno de sus conos es singular)?

**Refinamientos y subdivisiones:** Decimos que un abanico  $\Delta'$  *refina* otro abanico dado  $\Delta$ , si para cada  $\sigma' \in \Delta'$  existe  $\sigma \in \Delta$  tal que  $\sigma' \subset \sigma$ . Lo denotaremos por  $\Delta' > \Delta$ . En este caso, usando la proyección  $\pi_{\sigma, \sigma'}$  para cada cono, obtenemos un morfismo entre variedades tóricas  $T(\Delta') \rightarrow T(\Delta)$  (*morfismo tórico*). Diremos además que  $\Delta'$  es una *subdivisión* de  $\Delta$ , y lo denotaremos por  $\Delta' \gg \Delta$ , si cada  $\sigma \in \Delta$  es la unión de varios conos  $\sigma' \in \Delta'$ .

Dado ahora un abanico cualquiera  $\Delta$ , ¿será posible encontrar otro abanico no singular  $\Delta'$  tal que  $\Delta' \gg \Delta$ ? Para tratar de dar respuesta a esta pregunta nos restringiremos al caso de abanicos en  $\mathbb{R}^2$ .

Supongamos que tenemos un abanico en  $\mathbb{R}^2$  que consta de un único cono  $\sigma = n\mathbb{R}_{\geq 0} + n'\mathbb{R}_{\geq 0}$ . Podemos suponer que tanto  $n$  como  $n'$  son vectores con coordenadas enteras sin factores comunes. Es decir si  $n = (a, b)$ , entonces  $\text{m.c.d}\{a, b\} = 1$ . Consideramos  $\Theta$  el cierre convexo de  $\sigma \cap \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , y  $\{n = n_0, \dots, n_{s+1} = n'\}$  todos los puntos con coordenadas enteras contenidos en las caras compactas de la frontera de  $\Theta$ . Cada  $\sigma_j = n_{j-1}\mathbb{R}_{\geq 0} + n_j\mathbb{R}_{\geq 0}$  es no singular (¿por qué?). Esta es la mínima (en el sentido de menor número de conos) subdivisión no singular de  $\sigma$ . Para un abanico general  $\Delta$ , aplicando este proceso a cada  $\sigma \in \Delta$ , obtenemos un abanico  $\Delta'$  que es una subdivisión de  $\Delta$ . Diremos entonces que el morfismo tórico  $T(\Delta') \rightarrow T(\Delta)$  es una *desingularización* de  $T(\Delta)$  (en este caso resulta ser la desingularización minimal).

Por otro lado, si consideramos el abanico estándar  $\Delta_{st} = (0, 1)\mathbb{R}_{\geq 0} + (1, 0)\mathbb{R}_{\geq 0}$  y  $\Delta'$  es una subdivisión no singular del mismo, se tiene que  $\Delta'$  se puede obtener realizando subdivisiones sucesivas de  $\Delta_{st}$ , cada una de ellas correspondiente a una explosión. Es decir, se puede obtener una secuencia

$$\Delta' = \Delta_k > \dots > \Delta_1 > \Delta_0 = \Delta_{st}$$

donde cada morfismo  $T(\Delta_j) \rightarrow T(\Delta_{j-1})$  es una explosión en el origen de alguna de las cartas algebraicas afines que recubren  $T(\Delta_{j-1})$ . Esto nos proporciona un morfismo tórico

$$\pi_{\Delta} : T(\Delta') \rightarrow T(\Delta_{st}) = \mathbb{R}^2$$

al que volveremos más adelante.

### 3.3. El polígono de Newton. Parte Principal

En esta sección utilizaremos los conceptos de la anterior para construir un abanico adaptado a un campo de vectores que, bajo ciertas condiciones, determine una reducción de singularidades del mismo. Obsérvese que las explosiones que se han manejado en la sección anterior (que corresponden a la subdivisión “elemental” de un cono no singular) siempre tienen como centro el origen de una carta. Es decir, consideraremos entonces campos de vectores con una singularidad aislada en el origen que sea de *tipo tórico*: su morfismo de desingularización es una sucesión de explosiones sucesivas cada una de ellas con centro en el origen de una carta.

Consideremos  $\xi$  un campo de vectores analítico plano con una singularidad aislada en el origen. Supongamos que para ciertas coordenadas  $(x, y)$  este campo puede expresarse de la siguiente forma:

$$\xi = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Escribamos  $\xi$  como una suma finita  $\xi = \sum \xi_{ij}$  donde

$$\xi_{ij} = a_{ij} x^{i+1} y^j \frac{\partial}{\partial x} + b_{ij} x^i y^{j+1} \frac{\partial}{\partial y} \quad a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Llamamos *soporte* del campo  $\xi$  al conjunto:

$$S = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \xi_{ij} \neq 0\}$$

El *polígono de Newton*  $\mathcal{N}$  de  $\xi$  es el cierre convexo del conjunto

$$P = \bigcup_{k \in S} \{k + \mathbb{R}_{\geq 0}^2\}$$

donde  $\mathbb{R}_{\geq 0}^2 = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ . El *diagrama de Newton*  $\Gamma$  de  $\xi$  es la unión de las caras compactas  $\eta_j$  de la frontera del polígono de Newton. Finalmente, la *parte principal* de  $\xi$  se define como el campo de vectores  $P\xi = \sum_k \xi_{\eta_k}$  con

$$\xi_{\eta_k} = \sum_{(i,j) \in \eta_k} \xi_{ij}.$$

Obsérvese que si el campo es homogéneo, la parte principal corresponde al primer  $k$ -jet no nulo.

**Ejemplo 15.** Si consideremos el campo

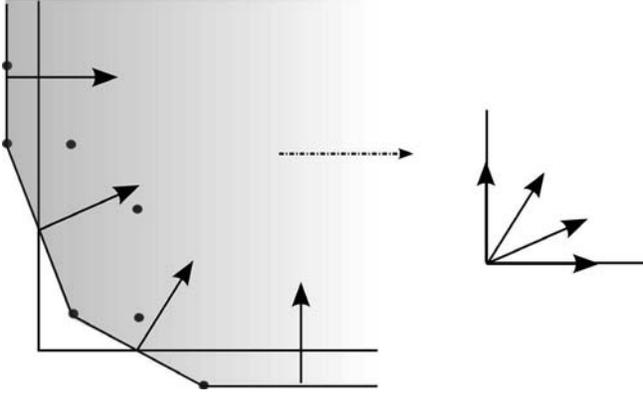
$$\xi = (y + x^2 + xy + x^3 + x^2y^2)x \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 - 2y + y^2)y \frac{\partial}{\partial y},$$

se tiene que

$$P\xi = yx \frac{\partial}{\partial x} - 2y^2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

Veamos ahora cómo construir un morfismo de desingularización del campo adaptado al polígono de Newton. Seguimos los siguientes pasos:

1. Para cada cara  $\eta_j$  del diagrama de Newton, consideramos un vector  $(\alpha_j, \beta_j)$  normal a la misma, de manera que  $\alpha_j, \beta_j$  sean primos entre sí.
2. Consideramos el abanico  $\Delta_{\mathcal{N}} \subset \mathbb{R}^2$  determinado por la familia de vectores  $\{(\alpha_j, \beta_j)\}$ .
3. Si  $\Delta_{\mathcal{N}}$  es no singular, consideramos  $\Delta' \gg \Delta_{\mathcal{N}}$  la subdivisión mínima no singular.
4. Consideramos el morfismo  $\tau = \pi_{\Delta_{\mathcal{N}}} : T(\Delta') \rightarrow T(\Delta_{st}) = \mathbb{R}^2$ .



Una vez fijada esta secuencia de explosiones  $\tau$  (es decir, fijado el polígono), vamos a trabajar con una familia de campos con *parte principal no degenerada*: campos con *desingularización hiperbólica de tipo tórico*, es decir, que se pueden desingularizar tras una sucesión de explosiones combinatorias (precisamente  $\tau$ ) de manera que todas las singularidades que aparecen sobre el divisor excepcional son simples e hiperbólicas.

**Nota 16.** En el artículo de Brunella-Miari se permiten singularidades de tipo silla-nodo con variedad central en el divisor excepcional. En este curso impondremos que sean simples e hiperbólicas.

Tenemos entonces el siguiente resultado, cuya demostración completa puede encontrarse en [8]:

**Teorema 17.** Si  $P\xi$  es no degenerada, entonces el morfismo  $\tau$  es un morfismo de desingularización para  $\xi$ .

Para demostrar este resultado, supondremos que el campo  $\xi$  se escribe como

$$\xi = A(x, y)x \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y)y \frac{\partial}{\partial y}$$

(consultar [8] para el caso general). Utilizamos inducción sobre el valor

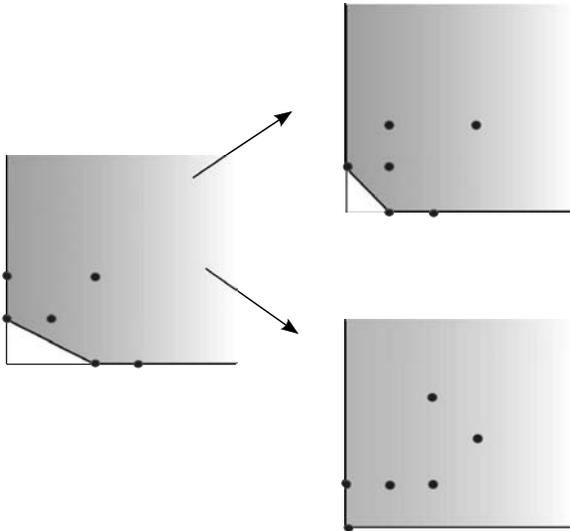
$$\nu = \nu(\xi) = \min\{\text{ord}(A), \text{ord}(B)\}.$$

Obsérvese que si  $(i, j) \in S$  un punto en el soporte del campo, entonces  $(i + j - \nu, j)$  e  $(i, i + j - \nu)$  pertenecen respectivamente a los soportes de los transformados estrictos  $\bar{\xi}_i$  en la carta  $U_i$ ,  $i = 1, 2$ . Claramente  $\nu(\bar{\xi}_i) = \nu_i \leq \nu$ . De hecho, o bien  $\nu_1 < \nu$  o bien  $\nu_2 < \nu$ .

**Ejemplo 18.** En el caso del campo

$$\xi = (y + x^2 + xy + x^3 + x^2y^2)x \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 - 2y + y^2)y \frac{\partial}{\partial y}$$

la variación del polígono de Newton, tras la primera explosión, queda reflejada en la siguiente figura:



*Idea de la demostración:*

- $\nu = 0$ . En este caso el polígono tiene un único vértice y  $\Delta_{\mathcal{N}} = \Delta_{st}$ . El morfismo  $\tau$  es la identidad. Bajo nuestras condiciones se tiene que la singularidad es hiperbólica y simple.
- $\nu > 0$ . Supongamos que el resultado es cierto para  $\nu' < \nu$ . Obsérvese que después de realizar una explosión, las únicas singularidades que pueden ser no hiperbólicas y simples son los orígenes de las cartas. Dado que  $\nu_i < \nu$  para  $i = 1$  ó  $i = 2$ , concluimos utilizando la hipótesis de inducción o explotando de nuevo.

Claramente  $\tau$  también es un morfismo de desingularización para  $P\xi$ . Mas aún, las singularidades correspondientes a ambos campos después de explosión coinciden y son del mismo tipo.

### 3.4. El teorema de Brunella-Miari

Volvamos ahora a la pregunta que nos hacíamos al principio del curso: localizar un representante de la clase de equivalencia topológica de un campo  $\xi$  a partir de su expresión. Este representante resulta ser la parte principal del campo para una familia suficientemente amplia de campos de vectores. Podemos enunciar de manera precisa el resultado que aparece en [7]:

**Teorema 19.** Sea  $\xi$  un campo de vectores de clase  $\mathcal{C}^\infty$  en  $\mathbb{R}^2$ . Supongamos que  $\xi$  tiene una singularidad en el origen y que su parte principal  $P\xi$  es no degenerada (en el sentido anterior). Entonces  $\xi$  y  $P\xi$  son topológicamente equivalentes en un entorno del origen módulo centro-foco.

#### Idea de la demostración.

- La configuración de singularidades sobre el divisor excepcional es la misma para el transformado estricto del campo y el de su parte principal. Todas son simples e hiperbólicas dado que la parte principal es no degenerada.
- Damos un homeomorfismo sobre el divisor excepcional, por ejemplo, la identidad.
- En el explotado de un sector, consideramos transversales respectivas, entre las cuales establecemos un homeomorfismo aleatorio (dato inicial). Extendemos este homeomorfismo al resto del levantado del sector garantizando continuidad en el divisor excepcional.
- Todos los homeomorfismos construidos entre los levantados de sectores respectivos pegan bien (también respetan el dato de partida sobre el divisor excepcional) puesto que no se da una situación de retorno al estar excluyendo el caso centro-foco.

## 4. Ejercicios

**Ejercicio 1.**– Determina la descomposición sectorial del campo

$$\xi = (yx + x^3) \frac{\partial}{\partial x} + (x^2y - 2y^2) \frac{\partial}{\partial y}$$

**Ejercicio 2.**– Determina, de manera razonada, la verdad o falsedad de la siguiente afirmación:

“Si dos campos de vectores no tienen la misma reducción de singularidades, no pueden tener descomposiciones sectoriales homeomorfas.”

**Ejercicio 3.**– Determina la variedad algebraica afín  $U_\sigma$  que le corresponde al cono trivial  $\sigma = \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ .

**Ejercicio 4.**– Determina la variedad tórica que le corresponde al abanico:

$$\Delta = \sigma_1 \cup \sigma_2$$

donde  $\sigma_1 = \langle(0, 1)\rangle$  y  $\sigma_2 = \langle(1, 0)\rangle$ .

**Ejercicio 5.**– Consideremos el campo

$$\xi = (y + x^2 + xy + x^3 + x^2y^2)x \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 - 2y + y^2)y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Determina el morfismo de desingularización minimal correspondiente a este campo utilizando su polígono de Newton y abanico asociado.

**Ejercicio 6.**– Determina las posibles partes principales para un campo de vectores con singularidad aislada en el origen y con parte lineal nilpotente.

**Ejercicio 7.**– Describe los posibles mapas de fase para los campos de vectores cuya parte principal sea de la forma:

$$y \frac{\partial}{\partial x} + ax^k \frac{\partial}{\partial y}$$

## Referencias

- [1] ALONSO-GONZÁLEZ, C. *Infinitesimal Hartman-Grobman Theorem in Dimension Three*. Artículo en preparación.
- [2] ALONSO-GONZÁLEZ, C; CAMACHO, M.I; CANO, F. *Topological Classification of Multiple Saddle Connections*. Discrete and Contin. Dyn. Syst. **15**, 395-414, (2006).
- [3] ALONSO-GONZÁLEZ, C; CAMACHO, M.I; CANO, F. *Topological Invariants for Singularities of Real Vector Fields in Dimension Three*. Discrete and Contin. Dyn. Syst. **20**, 275-291, (2008).
- [4] ANDRONOV, A.A. ET AL. *Qualitative Theory of Second-Order Dynamical Systems*. John Wiley and Sons, New York, 1973.
- [5] ARNOLD, V. *Equations différentielles ordinaires*. Editions Mir, Moscow, tercera edición, (1981).
- [6] BRASSELET, J.P- *Introduction to Toric Varieties*. 23<sup>o</sup> Colóquio brasileiro de matemática (2001).
- [7] BRUNELLA, M; MIARI, M. *Topological Equivalence of a Plane Vector Field with its Principal Part Defined through Newton Polyhedra*. Journal of Differential Equations **85**, 338-366 (1990)..
- [8] CAMACHO, M.I; CANO, F. *Singular foliations of toric type*. Annales de la Fac. de Sciences de Toulouse, **VIII**, pp. 45-52, (1999).
- [9] CAMACHO, C.; LINS NETO, A. *Geometric theory of foliations*. Traducido del portugués. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.
- [10] CANO, F.; CERVEAU, D.; DÉSERTEI, J. *Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singuliers*. Belin. Paris. (2013).
- [11] CAMACHO, C.; SAD, P. *Pontos singulares de equações diferenciais analíticas*. 16<sup>o</sup> Colóquio brasileiro de matemática (1987).
- [12] CODDINGTON, E.A.; LEVINSON, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. MacGraw Hill, New York, 1955.

- [13] DUMORTIER, F. *Singularities of vector fields on the plane*. Jour. Diff. Eq., 23 (1977), 53-106.
- [14] EWALD, G. *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, **168**, Springer Verlag (1996).
- [15] FULTON, W. *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*. Benjamin, New York Amsterdam (1969).
- [16] HARTMAN, P. *Ordinary Differential Equations*. John Wiley and Sons, New York, 1964.
- [17] HIRSCH, M.; PUGH, C.; SHUB, M. *Invariant Manifolds*. LNM, vol. 583, Springer-Verlag, 1977.
- [18] HIRSH, M.W.; SMALE, S. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, New York, 1974.
- [19] ILYASHENKO, Y.; YAKOVENKO, S. *Lectures on Analytic Differential Equations*. American Mathematical Society, (2008).
- [20] KELLEY, A. *The stable, center-stable, center, center-unstable and unstable manifolds*. J. Diff. Eq., 3 (1967), 546-570.
- [21] LEFSCHETZ, S. *Differential Equations: Geometric Theory*. Interscience, New York, 1962.
- [22] ODA, T. *Convex Bodies and Algebraic Geometry. An introduction to the Toric Varieties*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **3**, Folge Band 15, Springer Verlag (1985).
- [23] PALIS, J.; DE MELO, W. *Geometric Theory of Dynamical Systems*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [24] PERKO, L. *Differential equations and dynamical systems. Third edition*. Texts in Applied Mathematics, 7. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [25] SANZ, F. *Dinámica local de campos de vectores reales*. V Escuela doctoral PUCP-UVA 2012.
- [26] SEIDENBERG, A. *Reduction of the singularities of the differential equation  $Ady = Bdx$* . Am. J. of Math., (1968), 248-269.