FRANCISCO UGARTE GUERRA
editor

VI ESCUELA DOCTORAL INTERCONTINENTAL DE MATEMÁTICAS

PUCP-UVA 2013

Capítulo 1

FONDO EDITORIAL
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

VI Escuela Doctoral Intercontinental de Matemáticas
PUCP-UVA 2013
Francisco Ugarte Guerra, editor

De esta edición:

Avenida Universitaria 1801, Lima 32, Perú
Teléfono (51 1) 626 2650
feditor@pucp.edu.pe
www.fondoeditorial.pucp.edu.pe

Diseño de interiores: FranciscoUgarte Guerra / Janet Yucra Núñez
Diseño de cubierta: Francisco Ugarte Guerra / DCI-PUCP
Primera edición: octubre de 2014
Tiraje: 500 ejemplares

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú Nº 2014-16314
ISBN: 978-612-317-056-1
Registro del Proyecto Editorial: 31501361401068

Impreso en Tarea Asociación Gráfica Educativa
Pasaje María Auxiliadora 156, Lima 5, Perú

Introducción a la teoría de los Stacks

J.M. Aroca

1. Introducción

Un sistema de ecuaciones algebraicas:

$$f_1(x_1, ..., x_n) = ... = f_r(x_1, ..., x_n) = 0,\ f_i(x_1, ..., x_n) \in k[x_1, ..., x_n]$$

define por una parte una k- algebra finitamente generada

$$A = k[x_1, ..., x_n]/I,\ I = (f_1, .., f_r)k[x_1, ..., x_n]$$

y por otra las soluciones del sistema, es decir el conjunto de puntos del espacio afín k^n en el que se anulan todas las funciones.

Cada uno de estos puntos $P = (a_1, ...a_n) \in k^n$ define por substitución un homomorfismo de k -algebras:

$$e_P : A \to k,\ e_P(f(x_1, ..., x_n) + I) = f(a_1, ..., a_n)$$

y recíprocamente, de modo que hay correspondencia biunívoca entre soluciones en k^n del sistema y $Hom_k(A, k)$.

Si tomamos una extensión de k, L, la propiedad se mantiene y las soluciones con valores en L del sistema se corresponden biunívocamente con $Hom_k(A, L)$ y lo mismo sucede si tomamos, en lugar de una extensión, una k- algebra cualquiera.

La geometría de Grothendieck substituye las variedades algebraicas por esquemas, en los cuales los *puntos* son ideales primos, con lo que la idea geométrica se pierde. La tendencia post-Grothendieck es substituir los esquemas por sus familias de conjuntos de puntos en el sentido anterior. Así tenemos en lugar de la variedad algebraica clásica o el esquema, una correspondencia que asocia a cada k-álgebra un conjunto de puntos y a cada homomorfismo de k-algebras una aplicación, esto es lo que se llama un funtor.

Ahora debemos preguntarnos: ¿Cómo se trabaja con estos funtores?. ¿ Son estos funtores más generales que las variedades?. ¿Cuándo un funtor representa una variedad? ¿Tiene alguna ventaja trabajar con este tipo de objetos? etc. De esto nos vamos a ocupar a continuación en un contexto muy general.

En todo el texto, y al hablar de categoría, trabajaremos solo con conjuntos para obviar las dificultades añadidas por las diferencias entre clases y conjuntos, que no son esenciales para comprender los objetos que queremos describir.

2. Algo de lenguaje de categorías

Una categoría $\mathfrak{C}$ es:

- Un conjunto $Ob(\mathfrak{C})$ a cuyos elementos llamaremos objetos.
- Para cada par de objetos A, B, un conjunto $Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$ a cuyos elementos llamaremos morfismos. Escribiremos indistintamente $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$ y $f : A \to B$ y llamaremos a A y B dominio y rango de f respectivamente.
- Una composición de morfismos:

  $$Hom_{\mathfrak{C}}(A, B) \times Hom_{\mathfrak{C}}(B, C) \to Hom_{\mathfrak{C}}(A, C),\ (f, g) \mapsto gf.$$

  Si existe la composición de f y g, es decir, si el rango de f coincide con el dominio de g se dice que son componibles. La composición debe verificar las propiedades usuales:

  - asociativa: $\exists gf, hg \Rightarrow (hg)f = h(gf)$
  - Para cada objeto A, $\exists 1_A : A \to A$ de modo que $f : A \to B \Rightarrow f1_A = 1_B f = f$.

Una categoría $\mathfrak{D}$, es una subcategoría de otra $\mathfrak{C}$ si y solo si:

- $Ob(\mathfrak{D}) \subset Ob(\mathfrak{D})$.
- $\forall A, B \in Ob(\mathfrak{D}),\ Hom_{\mathfrak{D}}(A, B) \subset Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$.
- Las composiciones de morfismos coinciden.

En una categoría un isomorfismo es un morfismo con inverso, es decir $f : X \to Y$ es un isomorfismo si y solo si:

$$\exists g : Y \to X,\ gf = 1_X,\ fg = 1_Y.$$

Ejemplo 1.

1. Los conjuntos y las aplicaciones, los grupos y los homomorfismos de grupos, los espacios topológicos y las aplicaciones continuas, etc. son ejemplos de categorías, a las que representaremos como ((Sets)), ((Gr)), ((Top)), etc.. La categoría de grupos abelianos, es una subcategoría de la de grupos, la de conjuntos finitos es una subcategoría de la de conjuntos etc.

2. Si G es un grupo llamaremos G-conjunto a todo conjunto con una acción de G, es decir a un par (X, p) donde X es un conjunto y

$$p : X \times G \to X,\ p(x, g) = xg$$

una aplicación tal que:

- $(xg)h = x(gh)$
- $xe_G = x$ (e_G es la unidad de G).

La acción de un grupo G sobre un conjunto E se dice *simple* si:

$$\forall x \in E,\ \rho_x : G \to E,\ \rho_x(g) = xg \text{ es inyectiva}$$

y se dice *transitiva* si:

$$\forall x, y \in E,\ \exists g \in G,\ xg = y,$$

y se dice trivial si

$$\forall x \in E,\ \forall g \in G,\ xg = x.$$

Un G- morfismo o morfismo equivariante entre dos G-conjuntos es una aplicación que conmuta con la acción

$$\varphi : X \to Y,\ \varphi(xg) = \varphi(x)g$$

La órbita de un elemento $x \in X$ de un G-conjunto es el subconjunto:

$$O_x = \{xg \mid g \in G\}.$$

Y el conjunto de órbitas se llama conjunto cociente por la acción de G y se representa por X/G.

Los G-conjuntos y G-morfismos forman una categoría $((G - Sets))$. Como cada conjunto se puede dotar de la acción trivial y toda aplicación es equivariante para la acción trivial, la categoría $((Sets))$ es una subcategoría de la $((G - Sets))$.

3. Si S es un objetos de una categoría $\mathfrak{C}$ podemos construir una nueva categoría, la categoría relativa a S, $\mathfrak{C}/S$ como sigue:

   - $$Ob(\mathfrak{C}/S) = \bigcup_{X \in Ob(\mathfrak{C})} Hom_{\mathfrak{C}}(X, S)$$

   - $\forall f : X \to S, g : Y \to S, \ Hom_{\mathfrak{C}/S}(f, g) = \{h \in Hom_{\mathfrak{C}}(X, Y) \mid f = gh\}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

   - La composición de morfismos es la de $\mathfrak{C}$.

4. Si X es un espacio topológico se puede construir una categoría T_X cuyos objetos son los abiertos de X y $Hom_{T_X}(U, V)$ esta formado solo por la inclusión si $U \subset V$ y es el vacío en caso contrario.

Dadas dos categorías $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ se llama funtor de la primera en la segunda, a:

- Una aplicación $F : Ob(\mathfrak{C}) \to Ob(\mathfrak{D})$.
- Para todo par de objetos de $\mathfrak{C}$, A, B, una de las dos opciones siguientes:
  - Una aplicación $F : Hom_{\mathfrak{C}}(A, B) \to Hom_{\mathfrak{D}}(F(A), F(B))$ tal que: $F(1_A) = 1_{F(A)}, \ F(gf) = F(g)F(f)$
  - Una aplicación $F : Hom_{\mathfrak{C}}(A, B) \to Hom_{\mathfrak{D}}(F(B), F(A))$ tal que: $F(1_A) = 1_{F(A)}, \ F(gf) = F(f)F(g)$.

En el primer caso el funtor se llama covariante y en el segundo contravariante.

Obviamente la composición de funtores es un funtor y la identidad también, de modo que tiene sentido hablar de la categoría $((Cat))$ cuyos objetos son las categorías y cuyos morfismos son los funtores.

Ejemplo 2.

1. Si $\mathfrak{C}$ es una categoría y T es un objeto, podemos asociar a T dos funtores de $\mathfrak{C}$ en la categoria de conjuntos $((Sets))$.

- $h_T(-)$ definido por: $h_T(S) = Hom_{\mathfrak{C}}(T,S)$, $\forall f : S \to U$, $\forall \varphi \in h_T(S)$, $h_T(f)(\varphi) = f\varphi \in h_T(U)$.
- $T(-)$ definido por: $T(S) = Hom_{\mathfrak{C}}(S,T)$, $\forall f : S \to U$, $\forall \varphi \in T(U)$, $T(f)(\varphi) = \varphi f \in T(S)$.

El primero es covariante y el segundo contravariante.

2. Si X e Y son espacios topológicos y $f : X \to Y$ es una aplicación continua, tenemos un funtor:
$$\overline{f} : T_Y \to T_X,\ \overline{f}(V) = f^{-1}(V).$$

3. Si X es un espacio topológico, todo funtor contravariante $\mathcal{P}$ de T_X en una categoría $\mathfrak{C}$, se llama un prehaz sobre X con valores en $\mathfrak{C}$. Si $U \subset V$ son abiertos de X, el morfismo $\mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(U)$ se llama restricción de V a U.

   Si X e Y son espacios topológicos podemos asociar a cada abierto U de X el conjunto de aplicaciones continuas de U en Y, tomando como restricción la restricción usual de funciones tenemos un prehaz $\mathcal{C}_Y$.
   Este prehaz verifica la propiedad siguiente:

   Dado un recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de un abierto U, y dadas funciones continuas $\{f_i : U_i \to Y\}_{i\in I}$ tales que:
$$f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j},\ \forall i,j \in I$$
   entonces:
$$\exists f : U \to Y, \text{ continua única tal que : } f|_{U_i} = f_i,\ \forall i \in I$$
   entonces se dice que este prehaz es un haz. (La propiedad anterior se enuncia trivialmente para todos los prehaces de conjuntos con una estructura).

   Obviamente y para un objeto T fijo $T(-)$ es un prehaz de conjuntos, pero en general no es un haz. Si $((BMet))$ es la categoría de espacios métricos y aplicaciones continuas acotadas, los $U_n = (1/n, 1), n \in \mathbb{N}$ forman un recubrimiento abierto de $(0,1)$, y las funciones reales $f_n : U_n \to \mathbb{R},\ f_n(x) = 1/x$ cumplen la condición de haz y no definen una función acotada sobre $(0,1)$.

4. Si P es un prehaz sobre un espacio X y $f : X \to Y$ es una aplicación continua, podemos definir un prehaz sobre Y, llamado imagen directa de $\mathcal{P}$ por f, por:
$$\forall V \in T_Y,\ f_*(\mathcal{P})(V) = \mathcal{P}(f^{-1}(V)).$$

Claramente $f_*(\mathcal{P}) = \mathcal{P}\overline{f}$.

5. Si $f : S \to T$ es un morfismo de una categoría $\mathfrak{C}$ se puede construir un funtor (*Imagen directa*) $f_* : \mathfrak{C}/S \to \mathfrak{C}/T$ por:

   - $f_*(g : X \to S) = (fg) : X \to T$
   - f_* es la identidad sobre los morfismos.

   Como consecuencia obtenemos un funtor $R : \mathfrak{C} \to ((Cat))$ asociando a cada objeto S la categoría $\mathfrak{C}/S$ y a cada morfismo f el funtor f_*.

6. La correspondencia que asocia a cada grupo, anillo, espacio topológico, etc., el conjunto subyacente a su estructura y a cada homomorfismo etc. la aplicación subyacente es un funtor covariante que se llama funtor de olvido.

7. Si $\rho : G \to H$ es un homomorfismo de grupos, todo H-conjunto X se puede dotar de estructura de G-conjunto por:

$$\forall x \in X,\ g \in G,\ xg = x\rho(g).$$

   Todo H- morfismo es también un G- morfismo, tenemos así un funtor:

$$\rho^* : ((H - Sets)) \to ((G - Sets)).$$

   También las correspondencias que asocian:

   - A cada grupo G la categoría de los G-conjuntos $((G - Sets))$.
   - A cada homomorfismo $\rho : G \to H$, el funtor

$$\rho^* : ((H - Sets)) \to ((G - Sets)),$$

   definen un funtor de la categoría de grupos en la de categorías.

8. Las correspondencias:

$$X \mapsto X/G, f \mapsto f_O,\ f_O(O_x) = O_{f(x)},$$

   definen un funtor: $((G - Sets)) \to ((Sets))$.

Dados dos funtores $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ (ambos covariantes o ambos contravariantes) se llama una transformación natural de F en G a una familia de morfismos

$$N_X : F(X) \to G(X),\ \forall X \in Ob(\mathfrak{C}).$$

Tales que:

- <u>Caso covariante</u>. $\forall f : X \to Y, N_Y F(f) = G(f) N_X$

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "N_X"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "N_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

- <u>Caso contravariante</u>. $\forall f : X \to Y, N_X F(f) = G(f) N_Y$

$$\begin{tikzcd} F(Y) \arrow[r, "N_Y"] \arrow[d, "F(f)"] & G(Y) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(X) \arrow[r, "N_X"] & G(X) \end{tikzcd}$$

La composición de transformaciones naturales es una transformación natural y la identidad también, por tanto dadas dos categorías, tomando como objetos los funtores entre ellas y como morfismos las transformaciones naturales tenemos una categoría, los isomorfismos en esa categoría, es decir, las transformaciones naturales con inversa se llaman isomorfismos naturales.

Ejemplo 3.

1. Todo morfismo $g : X \to Y$ induce transformaciones naturales:

   - $\forall S \in Ob(\mathfrak{C}),\ h_S(g) : X(S) \to Y(S),\ h_S(g)(f) = gf$
   - $\forall S \in Ob(\mathfrak{C}),\ S(g) : h_Y(S) \to h_X(S),\ S(g)(f) = fg$

2. Toda aplicación continua $f : X \to Z$ induce una transformación natural (*morfismo de haces*):

$$F : \mathcal{C}_Z \to f_*(\mathcal{C}_X),\ F_U; \mathcal{C}_Z(U) \to f_*(\mathcal{C}_X)(U) = \mathcal{C}_X(f^{-1}(U)),\ F_U(g) = gf.$$

Dos categorías $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ se dicen *isomorfas* si existen funtores: $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ tales que:

$$F.G = 1_{\mathfrak{D}},\ G.F = 1_{\mathfrak{C}}$$

Dos categorías $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ se dicen *equivalentes* si existen funtores: $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ e isomorfismos naturales

$$\alpha : F.G \to 1_{\mathfrak{D}},\ \beta : G.F \to 1_{\mathfrak{C}}.$$

Cualquiera de los dos funtores F, G se llama, en este caso, una equivalencia de categorías.

Es un ejercicio fácil probar que: un funtor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es una equivalencia de categorías si y solo si es fiel, completo y esencialmente suprayectivo, es decir si y solo si para todo par de objetos X, Y de $\mathfrak{C}$, $F : Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y) \to Hom_{\mathfrak{D}}(F(X), F(Y))$ es biunívoca y para todo objeto Z de $\mathfrak{D}$ existe un objeto X de $\mathfrak{C}$ tal que $F(X)$ es isomorfo a Z.

Ejemplo 4. La categoría de K- espacios vectoriales de dimensión finita. es equivalente a la categoría cuyos objetos son los espacios K^n y los morfismos de K^n en K^m las matrices $m \times n$ con entradas en K.

3. Funtores representables

Como hemos señalado a cada objeto X de una categoría $\mathfrak{C}$ se le puede asociar el funtor contravariante (funtor de puntos):

$$X(-) : \mathfrak{C} \to ((Sets)), X(S) = Hom_{\mathfrak{C}}(S, X).$$

- El objeto X queda unívocamente determinado salvo isomorfismos por el funtor $X(-)$
- $Hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)$, se corresponde biunívocamente con las transformaciones naturales de $X(-)$ en $Y(-)$

Un functor contravariante $F : \mathfrak{C} \to ((Sets))$ se dice representable si existe $X \in \mathfrak{C}$ tal que $F \simeq X(-)$

- Si un functor es representable su representante es único salvo isomorfismos.
- Si no es representable cabe la posibilidad de construir una categoría más amplia que $\mathfrak{C}$ en la que lo sea.
- Se puede hacer la misma construcción con los funtores covariantes $h_X(-)$.

Si X representa F, el elemento a de $F(X)$ correspondiente a la identidad $1_X \in Hom\mathfrak{C}(X,X) \simeq F(X)$ se llama aplicación universal, de la definición se sigue que el par $(X,a),\ a \in F(X)$ queda unívocamente caracterizado, salvo isomorfismos, por la propiedad:

$$\forall S \in Ob(\mathfrak{C}),\ \forall b \in F(S),\ \exists \beta : S \to X \text{ único} \mid F(\beta)(a) = b.$$

Ejemplo 5.

1. En la categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo: Dados dos espacios V y W el funtor $Bihom(V \times W, -)$ que asocia a cada espacio T las aplicaciones bilineales de $V \times W$ en T es covariante y representable, su representante es $V \bigotimes W$ y la aplicación universal

$$a : V \times W \to V \bigotimes W,\ a(v,w) = v \otimes w,$$

es decir, el producto tensorial queda caracterizado; porque para toda aplicación bilineal $F : V \times W \to T$ existe un único homomorfismo $f : V \bigotimes W \to T$ tal que $F = fa$.

2. Dada una familia de objetos de $\mathfrak{C}$, $\{C_i\}_{i \in I}$ si el funtor $F : \mathfrak{C} \to ((Sets))$

$$F(T) = \prod_{i \in I} Hom_{\mathfrak{C}}(T, C_i)$$

es representable, su representante se llama producto de la familia, y se escribe como $\prod_{i \in I} C_i$. La aplicación universal es la familia de proyecciones:

$$a = (\pi_j)_{j \in I}, \pi_j : \prod_{i \in I} C_i \to C_j$$

de modo que para cada objeto de $\mathfrak{C}$ y cada familia de morfismos $b = (b_i : T \to C_i)_{i \in I}$ existe un único morfismo $\beta : T \to \prod_{i \in I} C_i$ tal que:

$$b = F(a) \Leftrightarrow b_j = \pi_j \beta\ \forall j \in I.$$

Es interesante observar que $\prod_{i \in I} C_i$ no esta bien definido, ya que el objeto descrito en la definición está determinado salvo isomorfismo, lo que sabemos es que entre cada dos determinaciones del objeto hay un isomorfismo único con la propiedad de conmutar con las proyecciones.

3. Si en la categoría $\mathfrak{C}/S$ existe el producto de un par de objetos $f : X \to S, g : Y \to S$, este producto se llama producto fibrado de X e Y sobre S y se representa por $X \times_S Y$. $X \times_S Y$ queda unívocamente caracterizado, salvo isomorfismos, por las propiedades siguientes:

- Existen morfismos $\pi_1 : X \times_S Y \to X,\ \pi_2 : X \times_S Y \to Y$, tales que $f\pi_1 = g\pi_2$.
- Para cada par de morfismos $\beta_1 : T \to X,\ \beta_2 : T \to Y$, tales que $f\beta_1 = g\beta_2$ existe un único morfismo $\beta = \beta_1 \times_S \beta_2 : T \to X \times_S Y$ tal que $\pi_1\beta = \beta_1,\ \pi_2\beta = \beta_2$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "\beta"] \arrow[drr, bend left, "\beta_1"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_2"'] & & \\
& X \times_S Y \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"] & S
\end{tikzcd}$$

Como hemos dicho en el ejemplo anterior el producto fibrado, si existe, no está unívocamente determinado. De la caracterización anterior está claro también que es funtorial en las dos variables módulo isomorfismos. A veces se puede dar un criterio que permite elegir un producto fibrado para cada par de objetos, por ejemplo: si $\mathfrak{C}$ es una categoría de conjuntos con una estructura, se puede elegir un producto fibrado de $f : X \to S, g : Y \to S$ dado por:

$$X \times_S Y = \{(x, y) \in X \times Y \quad f(x) = g(y)\}.$$

En particular, si X e Y son subconjuntos de S su producto fibrado es $X \cap Y$.

En el primer caso el producto fibrado no define en cada variable un funtor (esa es una de las razones de la definición de 2-funtor) pero si lo define en el caso particular de la intersección.

4. Dado un morfismo $f : S \to T$ podemos construir para cada objeto de $\mathfrak{C}/T,\ (X \to T)$ su (*Imagen recíproca*) $f^*(X \to T)$ por:

   - $f^*(X \to T) = (\pi_2 : X \times_T S \to S)$
   - Dado un morfismo g en $\mathfrak{C}/T$ de $\alpha : X \to T$ a $\beta : Y \to T$, $f^*(g) = \pi_2 \times_T g\pi_1 : X \times_T S \to Y \times_T S$

y la imagen recíproca está determinada, salvo isomorfismos, por tanto al contrario que la imagen directa, no es un funtor a menos que, como sucede en la mayoría de las categorías, podamos elegir de modo canónico un representante del producto fibrado.

5. Dada una familia de objetos de $\mathfrak{C}$, $\{C_i\}_{i\in I}$ si el funtor $F : \mathfrak{C} \to ((Sets))$

$$F(T) = \prod_{i\in I} Hom_{\mathfrak{C}}(C_i, T)$$

es representable, su representante se llama coproducto de la familia y se escribe como $\coprod_{i\in I} C_i$. La aplicación universal es la familia de secciones:

$$q = (q_j)_{j\in I}, q_j : C_j \to \coprod_{i\in I} C_i$$

de modo que para cada objeto de $\mathfrak{C}$ y cada familia de morfismos $b = (b_i : C_i \to T)_{i\in I}$ existe un único morfismo $\beta : \coprod_{i\in I} C_i \to T$ tal que:

$$b = F(q) \Leftrightarrow b_j = \beta q_j, \ \forall j \in I.$$

Del mismo modo que en el ejemplo anterior se define el coproducto fibrado como el coproducto en la categoría relativa $\mathfrak{C}/S$. El coproducto de una familia de conjuntos es su unión disjunta, el de una familia de espacios topológicos, su suma topológica. El coproducto fibrado de subconjuntos, es su unión.

En general se pueden leer mas fácilmente las propiedades de un objeto en el funtor de puntos al que representa que en el objeto mismo:

Ejemplo 6.

1. En geometría algebraica se asocia a cada anillo A un espacio topológico, su espectro:

$$Spec(A) = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ ideal primo de A}\}$$

dotado de la topología (*topología de Zariski*) con base de abiertos:

$$\mathfrak{Z}_A = \{D(f)\}_{f\in A}, \ D(f) = \{\mathfrak{p} \in Spec(A) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

Las correspondencias:

- $A \mapsto Spec(A)$
- $(f : A \to B) \mapsto f^{-1} : Spec(B) \to Spec(A)$

definen un funtor contravariante de la categoría de anillos (conmutativos y homomorfismos unitarios) en la de espacios topológicos.

Podemos definir un prehaz sobre $Spec(A)$ asignando a cada abierto de la base $D(f)$, el anillo de fracciones:

$$A_f = \left\{ \frac{a}{f^n} \mid a \in A,\ n \in \mathbb{N} \right\},$$

a este prehaz se le asocia un haz, $\widetilde{A}$ por medio de una construcción que no detallaremos, y el par $(Spec(A), \widetilde{A})$ se llama un *esquema afín*. La categoría de esquemas afines es isomorfa a la categoría de anillos.

El *grupo lineal* es el esquema afín:

$$GL_n = Spec\left(\mathbb{Z}[(x_{i,j}), t]/(det(x_{i,j})t - 1)\right)$$

en el que no se aprecia la estructura de grupo. En cambio para un anillo A:

$$GL_n(Spec(A)) = Hom_{Spec(\mathbb{Z})}(Spec(A), GL_n) =$$

$$= Hom(\mathbb{Z}[(x_{i,j}), t]/(det(x_{i,j})t - 1), A) = GL_n(A)$$

Ya que los homomorfismos de anillos de $\mathbb{Z}[(x_{i,j}), t]/(det(x_{i,j})t - 1)$ en A, se obtienen dando valores a las $(x_{i,j})$ y a t que anulen a $det(x_{i,j})t - 1$, es decir, se corresponden con las matrices $n \times n$ de elementos de A con determinante inversible.

2. La definición formal de esquema en grupos, grupo algebraico, grupo analítico, grupo de Lie etc. sigue siempre el siguiente proceso:

   Se parte de una categoría $\mathfrak{G}$ con productos finitos y un objeto cero U, es decir un objeto tal que

   $$\forall S \in Ob(\mathfrak{G}),\ Hom_{\mathfrak{G}}(U, S) = \{0\},\ Hom_{\mathfrak{G}}(S, U) = \{e\}.$$

   Entonces, una estructura de grupo en un objeto G de esa categoría es una terna de morfismos:

   - $\mu : G \times G \to G$
   - $e : U \to G$
   - $p : G \to G$

   correspondientes al producto, unidad e inverso, que verifican las propiedades usuales:

- Asociativa: El diagrama:

$$\begin{tikzcd} G\times G\times G \arrow[r, "\mu\times 1_G"] \arrow[d, "1_G\times\mu"] & G\times G \arrow[d, "\mu"] \\ G\times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd}$$

  es conmutativo

- Elemento neutro: Los diagramas:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "0\times 1_G"] \arrow[d, "1_G"] & U\times G \arrow[d, "e\times 1_G"] \\ G & G\times G \arrow[l, "\mu"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "1_G\times 0"] \arrow[d, "1_G"] & G\times U \arrow[d, "1_G\times e"] \\ G & G\times G \arrow[l, "\mu"'] \end{tikzcd}$$

  son conmutativos

- Inverso:Los diagramas:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "1_G\times 1_G"] \arrow[d, "e0"] & G\times G \arrow[d, "p\times 1_G"] \\ G & G\times G \arrow[l, "\mu"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "1_G\times 1_G"] \arrow[d, "e0"] & G\times G \arrow[d, "1_G\times p"] \\ G & G\times G \arrow[l, "\mu"'] \end{tikzcd}$$

son conmutativos.

Esta definición significa que para cada objeto T el conjunto $Hom_{\mathfrak{G}}(T,G)$ con la operación:

$$(f.g)=\mu(f,g),\ (f,g):T\to G\times G,\ \pi_1.(f,g)=f,\ \pi_2.(f,g)=g,$$

es un grupo. Independientemente de que a veces, si los objetos de la categoría son conjuntos, la definición signifique que en el objeto correspondiente se ha definido una estructura de grupo.

3. La acción de un grupo de $\mathfrak{G}$ sobre un objeto X, se define como un morfismo:

$$\sigma: G\times X \longrightarrow X$$

con las propiedades usuales (presentadas en forma de diagrama como en el ejemplo anterior) y significa que para todo objeto T de $\mathfrak{G}$, el grupo $Hom_{\mathfrak{G}}(T,G)$ actúa sobre el conjunto $Hom_{\mathfrak{G}}(T,X)$.

Podemos construir ahora un nuevo funtor:

$$F : \mathfrak{G} \longrightarrow ((Sets)),\ F(T) = Hom_{\mathfrak{G}}(T, X)/Hom_{\mathfrak{G}}(T, G)$$

que en las categorías citadas como ejemplos no es representable, y de este problema surge el concepto de Stack como objeto de una categoría más amplia en la que se tiene la representabilidad de este funtor.

4. Primera definición de Stack

Formalmente un Stack es un *haz de grupoides sobre un site (categoría con una topología)*. Casi ninguna de las palabras de la definición pertenecen al vocabulario usual de un matemático no especializado en el área. Vamos a explicarlas una a una.

4.1. Grupoides

Un grupoide es una categoría en la que todos los morfismos son isomorfismos. Si substituimos la categoría por la unión disjunta de todos sus conjuntos de morfismos, junto con el conjunto de sus objetos, podemos decir también que un grupoide es un par compuesto por dos conjuntos (G, O) con:

1. Una aplicación $u : O \to G$.
2. Dos aplicaciones $d, r : G \to O$ (dominio y rango) tales que $du = ru = 1_O$ (En consecuencia d y r son sobreyectivas y u es inyectiva por lo que podemos identificar O con Imu)
3. Una aplicación involutiva $i : G \to G$ tal que $di = r$ (y en consecuencia $r.i = d$).
4. Si $P = \{(a, b) \in G \times G \mid r(a) = d(b)\} = G \times_O G$, una aplicación $p : P \to G$ (si $(a, b) \in P$ diremos que a es multiplicable por b y llamaremos $p(a, b) = ab$).

De modo que:

- La operación parcial p es asociativa, es decir, si a es multiplicable por b y b lo es por c, $a(bc) = (ab)c$
- $\forall a \in G, au(d(a)) = u(r(a)) = a$

- i es el inverso respecto a p, es decir, $\forall a \in G, ai(a) = u(r(a)),\ i(a)a = u(r(a))$.

Ejemplo 7.

1. Si V es un espacio vectorial, la categoría cuyos objetos son los subespacios de dimensión 1 de V y cuyos morfismos son las aplicaciones lineales no nulas entre estos espacios, es un grupoide.

2. Si X es un espacio topológico, el conjunto de clases de homotopía de caminos en X con la operación de concatenación es un grupoide. Los objetos de la categoría son los puntos de X, los morfismos entre dos puntos son los las clases de homotopía de caminos que los unen. Es necesario tomar clase de homotopía porque $\sigma * 1_x \neq \sigma$ pero ambos caminos son homótopos. Este grupoide se llama grupoide de homotopía de X y se representa por $\pi_1(X)$.

3. La holonomía de una foliación es un grupoide. En una sección posterior estudiaremos como se construye este grupoide.

4. Si $\mathfrak{C}$ es una categoría, el conjunto de isomorfismos de $\mathfrak{C}$ es un grupoide.

5. Si G es un grupo que actúa sobre un conjunto X, podemos dotar a $T = X \times G$ de estructura de grupoide:

   - $O = X, u = X \equiv X \times \{1\}$.
   - $r(x, g) = gx, d(x, g) = x$.
   - $r(x, g) = d(y, h) \Leftrightarrow y = gx,\ (x, g).(y, h) = (x, hg)$.

   En términos de categorías los objetos de T son los elementos de X y $Hom_T(x, y) = \{g \in G \mid gx = y\}$. Claramente en esta categoría:

   $$x \simeq y \Leftrightarrow x, y \text{ estan en la misma órbita para la acción de } G,$$

   de este modo las clases de isomorfía del grupoide son las órbitas.

   Si G es un grupo en una categoría $\mathfrak{C}$, que actúa sobre un objeto X, para todo objeto S, $Hom_{\mathfrak{C}}(S, G) = G(S)$ es un grupo que actúa sobre el conjunto $Hom_{\mathfrak{C}}(S, X) = X(S)$, tenemos así para cada objeto S el grupoide $T(S)$ construido como en el ejemplo anterior.

6. Si la acción de G sobre E es simple y transitiva, es decir si $E \simeq G$ considerando la acción de G sobre si mismo por producto por la derecha, se dice que E es un G- torsor.

   Dado un G-conjunto X, se llama G-torsor de X a un par (E, u) donde E es un G-torsor y $u : E \to X$ un morfismo equivariante. Un morfismo de G -torsores de X de (E, u) a (F, v) es un morfismo equivariante $\beta : E \to F$ tal que $v\beta = u$. Observemos que:

   - Los G-torsores de X y sus morfismos forman una categoría.
   - Todo morfismo de G- torsores es un isomorfismo.
   - Las imágenes en X de los G-torsores son las órbitas de X por la acción de G.
   - Dos G- torsores de X son isomorfos si y solo si tienen como imagen la misma órbita.

   Es decir, la categoría de G-torsores de X es también un grupoide cuyas clases de isomorfia de objetos se corresponden con las órbitas de X por la acción de G.

   Para cada x de X tenemos el G-torsor de X, $\rho_x : G \to X$, $\rho_x(g) = xg$ tenemos así un funtor de la categoría T construida en el ejemplo anterior en la categoría de G-torsores de X que es fiel, completo y esencialmente suprayectivo, por tanto ambas categorías son equivalentes y equivalentes al grupoide asociado a la acción trivial de G sobre el espacio de órbitas X/G.

7. Sea X un espacio topológico y sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de X, podemos construir los conjuntos:

   - $U = \coprod_{i \in I} U_i$.
   - $G = U \times_X U = \coprod_{i,j \in I} U_i \cap U_j$.

   y las aplicaciones siguientes dotan al par (G, U) de estructura de grupoide:

   a) $u : U \to G$, $u(x) = x$ es decir si $x \in U$ existe un único $i \in I$ con $x \in U_i = U_i \cap U_i \subset G$ y u está bien definida.

   b) $d|_{U_i \cap U_j}$ es la inclusión $U_i \cap U_j \subset U_i$.

   c) $r|_{U_i \cap U_j}$ es la inclusión $U_i \cap U_j \subset U_j$.

   d) $i|_{U_i \cap U_j}$ es la identidad $U_i \cap U_j = U_j \cap U_i$.

e) Si

$$(x,y) \in P, x \in U_i \cap U_j,\ y \in U_l \cap U_k$$

entonces

$$r(x) = x \in U_j,\ d(y) = y \in U_l,\ r(x) = d(y) \Rightarrow l = j,\ x = y$$

y definimos:

$$p(x,y) = x \in U_i \cap U_k.$$

En vez de un recubrimiento podríamos haber tomado un atlas de una variedad diferenciable o de un espacio analítico, substituyendo las identidades por los cambios de carta.

Podemos definir un morfismo de grupoides como un funtor covariante, ya que los grupoides son categorías. En términos de conjuntos con una operación parcial esta definición significa lo siguiente:

Un morfismo $F : G \to H$ es una aplicación tal que:

- $F(G_0) \subset H_0$
- $rF = Fr,\ Fd = dF$
- $F(gh) = F(g)F(h)$
- $Fi = iF$

De este mode se puede hablar de la categoría de grupoides.

Ejemplo 8.

1. Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua, la composición con f define un morfismo entre los grupoides de homotopía de X e Y.

2. Si $F : V \to W$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, la conjugación por F (Paso de σ a $F^{-1}\sigma F$) define un morfismo del grupoide de isomorfismos entre rectas vectoriales de V en el de W.

3. Si X e Y son G-conjuntos y $\beta : X \to Y$ es un morfismo de G-conjuntos, la aplicación:

$$\widetilde{F} X \times G \to Y \times G,\ \widetilde{F}(x,g) = (F(x), g)$$

es un morfismo de grupoides.

4.2. 2- Categorías, 2- Funtores y prehaces

Un prehaz sobre una categoría $\mathfrak{C}$ es un 2- funtor contravariante de $\mathfrak{C}$ en una 2-categoría. Debemos definir las 2 categorías y los 2-funtores para saber que es un prehaz.

Una 2 - categoría consta de tres tipos de elementos:

- Objetos.
- Para cada par de objetos A, B, un conjunto de 1-morfismos $[A, B]_1$.
- Para cada par de 1-morfismos $f, g \in [A, B]_1$, un conjunto de 2- morfismos $[f, g]_2$.

De modo que:

1. Los objetos y los 1-morfismos forman una categoría (es decir tenemos composición asociativa de 1-morfismos y unidades)
2. Para cada par de objetos A, B, los 1-morfismos $[A, B]_1$ y los 2-morfismos entre ellos forman una categoría a la que llamaremos $\mathcal{H}om(A, B)$, es decir tenemos una composición (*vertical*) de 2-morfismos

   $$f, g, h \in [A, B]_1,\ F \in [f, g]_2,\ G \in [g, h]_2 \Rightarrow GF \in [f, h]_2$$

   asociativa y con unidades
3. Tenemos una *composición horizontal* de 2-morfismos:

   $$\forall\ f_1, f_2 \in [A, B]_1,\ g_1, g_2 \in [B, C]_1,\ \alpha \in [f_1, g_1]_2,\ \beta \in [f_2, g_2]_2$$

   tenemos:

   $$\beta * \alpha \in [f_2 f_1, g_2 g_1]_2$$

   de modo que:

   a) $*$ es asociativa

   b) $1_g * 1_f = 1_{gf}$

   c) La composición de 2- morfismos conmuta con la composición horizontal, es decir si:

   $$f_1, f_2, f_3 \in [A, B]_1,\ g_1, g_2, g_3 \in [B, C]_1$$

   $$\alpha_1 \in [f_1, f_2]_2,\ \alpha_2 \in [f_2, f_3]_2,\ \beta_1 \in [g_1, g_2]_2,\ \beta_2 \in [g_2, g_3]_2$$

Entonces:

$$(\beta_2 * \alpha_2)(\beta_1 * \alpha_1) = (\beta_2\beta_1) * (\alpha_2\alpha_1)$$

Ejemplo 9.

1. Toda categoría es una 2- categoría tomando como 2- morfismos:

$$[f,g]_2 = \begin{cases} \emptyset & \Leftrightarrow f \neq g \\ \{1_f\} & \Leftrightarrow f = g \end{cases}$$

2. Si tomamos como objetos categorías (de grupos , espacios topológicos etc.) como 1- morfismos los funtores y como 2-morfismos las transformaciones naturales, tenemos 2-categorías. Observemos en estos casos la diferencia entre composición y composición horizontal de 2-morfismos, es decir de transformaciones naturales entre funtores.

   - Si F, G, H son funtores de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$ y $P \in [F,G]_2,\ R \in [G,H]_2$ su composición RP es:

$$\left.\begin{array}{ll} P_X : F(X) \to G(X), & X \in Ob(\mathfrak{C}) \\ R_X : G(X) \to H(X), & X \in Ob(\mathfrak{C}) \end{array}\right\} \Rightarrow (RP)_X = R_X P_X : F(X) \to H(X)$$

   - Si $F_1,\ F_2$, son funtores de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$, $G_1,\ G_2$, son funtores de $\mathfrak{D}$ en $\mathfrak{E}$ y $P \in [F_1, F_2]_2,\ R \in [G_1, G_2]_2$ su composición horizontal $R * P$ es:

$$\left.\begin{array}{ll} P_X : F_1(X) \to F_2(X), & X \in Ob(\mathfrak{C}) \\ R_X : G_1(Y) \to G_2(Y), & Y \in Ob(\mathfrak{D}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(R * P)_X = R_{F_2(X)}.G_1(P_X) : G_1(F_1(X)) \to G_2(F_2(X))$$

3. En la categoría $((Top))$ de espacios topológicos y aplicaciones continuas, podemos tratar de definir los 2-morfismos por:

$$\forall f, g : X \to Y,\ H \in [f,g]_2 \Leftrightarrow H : X \times [0,1] \to Y$$

$$H \text{ continua},\ H(x,0) = f(x),\ H(x,1) = g(x).$$

   La composición horizontal no presentaría problemas, porque si las aplicaciones correspondientes son componibles:

$$H(x,t) \in [f,g]_2,\ H'(y,t) \in [f',g'] \Rightarrow H(x,t) * H'(x,t) = H'(H(x,t),t) \in [f'f, g'g]$$

pero la composición vertical habría que definirla como:

$$f, g, h \in [X, Y]_1,\ H(x,t) \in [f,g]_2,\ H'(x,t) \in [g,h]_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H''(x,t) = H(x,t)H'(x,t) \in [f,h]_2, H''(x,t) = H(x,2t)$$
$$0 \leq t \leq 1/2,\ H''(x,t) = H(x,2t-1),\ 1/2 \leq t \leq 1$$

y no funciona la composición por unidades, por tanto no tenemos una 2-categoría. Ahora bien podemos modificar los 2-morfismos por paso al cociente, cambiando las homotopías por clases de homotopías:

Dos aplicaciones continuas

$$H, G : X \times [0,1] \to Y, H(x,0) = G(x,0) = f(x),\ H(x,1) = G(x,1) = g(x)$$

se dicen equivalentes, si difieren a su vez en una homotopía, es decir:

$$\exists L : X \times [0,1] \times [0,1] \to Y,\ L(x,t,0) = H(x,t),\ L(x,t,1) = G(x,t)$$

Esta relación es de igualdad y se pueden considerar como 2-morfismos las clase de igualdad de homotopías. Ahora los espacios topológicos, las aplicaciones continuas y las clases de homotopía de homotopías entre aplicaciones continuas forman una 2-categoría.

4. Como un grupoide es una categoría, podemos construir una 2- categoría cuyos objetos son los grupoides, los 1-morfismos los funtores entre grupoides (homomorfismos de grupoides) y como 2-morfismos las transformaciones naturales. A esa 2- categoría le llamaremos categoría de grupoides.

5. Hemos visto que la correspondencia que asocia a cada espacio topológico su grupoide de homotopía define un funtor, si $f, g : X \to Y$ son aplicaciones continuas y $F, G, \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ son los morfismos de grupoides (funtores) inducidos, una homotopía $H : X \times [0,1] \to Y,\ H(x,0) = f(x),\ H(x,1) = g(x)$ induce un 2- morfismo $\widetilde{H} : F \to G$ por:

$$\widetilde{H}_x : F(x) = f(x) \to G(x) = g(x),\ \text{es el camino}\ \widetilde{H}_x(t) = H(x,t).$$

Un 2- funtor entre dos 2-categorías es una terna (F, ε, δ) compuesta por:

1. una correspondencia F que asocia:
   - A cada objeto X de la primera un objeto $F(X)$ de la segunda.
   - A cada 1-morfismo $f : A \to B$ un 1 morfismo $F(f) : F(A) \to F(B)$.
   - A cada 2-morfismo $\alpha : f \to g$ un 2-morfismo, $F(\alpha) : F(f) \to F(g)$ y F conserva la composición de 2-morfismos y las 2-unidades, es decir F es un funtor de $\mathcal{H}om(A, B)$ en $\mathcal{H}om(F(A), F(B))$.
2. Una correspondencia δ que asocia a cada objeto A un 2-isomorfismo $\delta_A : F(1_A) \to 1_{F(A)}$.
3. Una correspondencia ε que asocia a cada par de 1-morfismos componibles f, g, un 2- isomorfismo:
$$\varepsilon_{g,f} : F(g)F(f) \Leftarrow F(gf).$$

De modo que:

- Para todo 1-morfismo $f : X \to Y$,
$$\varepsilon_{1_Y,f} = \delta_Y * 1_{F(f)},\ \varepsilon_{f,1_X} = 1_{F(f)} * \delta_X.$$
- ε es asociativa, es decir si f y g, g y h son componibles,y el diagrama:
$$\begin{tikzcd} F(hgf) \arrow[r, "\varepsilon_{h,gf}"] \arrow[d, "\varepsilon_{hg,f}"] & F(h)F(gf) \arrow[d, "1_{F(f)}*\varepsilon_{g,f}"] \\ F(hg)F(f) \arrow[r, "\varepsilon_{h,g}*1_{F(f)}"] & F(h)F(g)F(f) \end{tikzcd}$$
es conmutativo.
- F, ε respetan la composición horizontal es decir para:
$$f_1, f_2 \in [A, B]_1,\ g_1, g_2 \in [B, C]_1,\ \alpha \in [f_1, f_2]_2,\ \beta \in [g_1, g_2]_2,$$
el diagrama
$$\begin{tikzcd} F(g_1)F(f_1) \arrow[r, "F(\beta)*F(\alpha)"] \arrow[d, "\varepsilon_{g_1,f_1}"] & F(g_2)F(f_2) \arrow[d, "\varepsilon_{g_2,f_2}"] \\ F(g_1f_1) \arrow[r, "F(\beta*\alpha)"] & F(g_2f_2) \end{tikzcd}$$
es conmutativo.

Resulta difícil poner un ejemplo fácil de 2-funtor, como sólo nos interesan un tipo particular de 2-funtores (los prehaces) nos limitaremos a dar después ejemplos de ellos.

Un prehaz sobre una categoría $\mathfrak{C}$ con valores en una 2 categoría $\mathcal{G}$ es un 2- funtor contravariante de $\mathfrak{C}$ considerada como 2 - categoría en $\mathcal{G}$. Es decir, es una terna de correspondencias $(P(-), \delta, \varepsilon)$ tales que:

- P asocia a cada objeto X un objeto $P(X)$
- P asocia a cada morfismo $X \to Y$ un 1-morfismo $P(Y) \to P(X)$
- δ asocia a cada objeto X un 2-1somorfismo $\delta_X : P(1_X) \to 1_{P(X)}$
- ε asocia a cada par de morfismos componibles un 2- isomorfismo:

$$\varepsilon_{f,g} : P(f)P(g) \Leftarrow P(gf)$$

de modo que:

- δ es compatible con ε, es decir, para todo 1-morfismo $f : X \to Y$,

$$\varepsilon_{1_Y,f} = \delta_Y * 1_{P(f)},\ \varepsilon_{f,1_X} = 1_{P(f)} * \delta_X$$

- ε es asociativa

Ejemplo 10.

1. Si componemos por la izquierda un prehaz con un 2-funtor covariante o por la derecha con un funtor covariante se obtiene un nuevo prehaz.
2. Si consideramos una categoría $\mathfrak{C}$ y en la categoría de conjuntos la estructura trivial de 2 - categoría, $Hom_{\mathfrak{C}}(-, S) = S(-)$ es un prehaz de conjuntos sobre $\mathfrak{C}$, en este caso ε y δ son la identidad. El funtor de puntos también se puede considerar como un prehaz con valores en la 2-categoría $((Cat))$ si consideramos cada conjunto $S(Z)$ como una categoría con solo las identidades como morfismos.
3. Hay otra forma de considerar el funtor de puntos como un prehaz con valores en $((Cat))$. Si $\mathfrak{C}$ tiene productos fibrados y elegimos para cada objeto S y cada par de objetos X, Y sobre S un producto fibrado $X \times_S Y$, tenemos automáticamente un prehaz sobre $\mathfrak{C}$ con valores en $((Cat))$, el que asigna a cada objeto S de $\mathfrak{C}$, la categoría relativa $\mathfrak{C}/S$ y a cada morfismo $a : S' \to S$ el funtor $F_a : \mathfrak{C}/S \to \mathfrak{C}/S'$ definido a su vez por:

- $F_a(X \to S) = (X \times_S S') \to S'$
- $F_a(f) = f \times 1_{S'}$

Observemos que los objetos de $\mathfrak{C}/S$ son los *puntos* de S con valores en X, es decir los elementos de $S(X)$, pero ahora hemos dotado a este conjunto con una estructura de categoría, con lo cual el funtor de puntos toma valores en $((Cat))$. La aplicación imagen de un morfismo es ahora un funtor, es decir F_a es un funtor, ya que elegidos como hemos hecho todos los $X \times_S S'$, dado el morfismo $f : (Y \to S) \to (X \to S)$, existe un único morfismo $f \times 1_{S'} : (Y \times_S S' \to S') \to (X \times_S S')$ que conmuta con las proyecciones sobre Y y X. Esta unicidad garantiza que si $h : (Z \to S) \to (Y \to S)$ es otro morfismo:

$$(f \times 1_{S'})(h \times 1_{S'}) = (fh \times 1_{S'})$$

como se observa en el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
X \times_S S' \arrow[rrr, "\alpha_1"] \arrow[dd, "\alpha_2"'] & & & S' \arrow[dd, "a"] \\
& Y \times_S S' \arrow[ul, "f\times 1_{S'}"'] \arrow[urr, "\beta_1"] \arrow[dl, "f\beta_2"'] \arrow[dd, "\beta_2"] & Z \times_S S' \arrow[l, "h\times 1_{S'}"] \arrow[ull, "fh\times 1_{S'}"'] \arrow[ur, "\gamma_1"'] \arrow[dll, "fh\gamma_2"] \arrow[ddl, "h\gamma_2"] \arrow[dd, "\gamma_2"] & \\
X \arrow[rrr, "b"] & & & S \\
& Y \arrow[ul, "f"] \arrow[urr, "c"] & Z \arrow[l, "h"] \arrow[ull, "fh"] \arrow[ur, "d"'] &
\end{tikzcd}$$

La correspondencia define a su vez un 2-funtor añadiéndole:

- El isomorfismo natural δ_X entre el funtor de $\mathfrak{C}/S$ en $\mathfrak{C}/S$ que lleva $X \to S$ a $X \times_S S \to S$ y el funtor identidad de $\mathfrak{C}/S$ es el definido por el isomorfismo canónico $X \times_S S \simeq X$
- El isomorfismo natural $\varepsilon_{a,b}$, para $a : S' \to S$, $b : S'' \to S'$ corresponde al isomorfismo canónico:

$$(X \times_S S') \times_{S'} S'' \simeq X \times_S S''$$

Esta estructura de prehaz no interesa en sí, pero las construcciones que se hacen son de interés para los dos ejemplos siguientes. Además, en la sección siguiente usaremos esta construcción como ejemplo de categoría fibrada.

4. Si tomamos la categoría $((Top))$ y para cada espacio topológico X consideramos la categoría $((Rec_X))$ de espacios recubridores de X, que es una subcategoría completa (con los mismos morfismos) que $((Top))/X$, la construcción anterior funciona, porque si $R \to X$ es un recubrimiento de X, $R \times_X Y \to Y$ es un recubrimiento de Y y en la categoría de espacios topológicos se puede elegir un representante canónico del producto fibrado.

5. En la categoría de G conjuntos hay productos fibrados; Si $f : X \to S,\ g : Y \to S$ son morfismos equivariantes:

$$\{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}, \text{ con la acción } (x,y)g = (xg, yg)$$

es un producto fibrado $X \times_S Y$ además si $\alpha : E \to Y$ es un G-torsor de Y y $f : X \to Y$ es equivariante, $(E \times_Y X, \pi_2)$ es un G-torsor de X, de este modo la correspondencia que asocia a cada G- conjunto X el grupoide $Tors(X)$ es un prehaz de grupoides sobre la categoría $((G - sets))$.

4.3. Topología en una categoría

Una topología, o más precisamente una base de abiertos, en una categoría $\mathfrak{C}$, es un conjunto $Cov(\mathfrak{C})$ de familias de morfismos:

$$\{U_i \to U\}_{i \in I}$$

a cuyos elementos se llama recubrimientos, tal que:

1. Todo isomorfismo de $\mathfrak{C} : \{V \simeq U\}$ es un recubrimiento de U.

2. Si $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ y $\forall\, i \in I,\ \{U_{i,j} \to U_i\}_{j \in J_i}$ están en $Cov(\mathfrak{C})$,

$$\{U_{i,j} \to U\}_{i \in I,\, j \in J_i}$$

   está en $Cov(\mathfrak{C})$.

3. Si $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ está en $Cov(\mathfrak{C})$, y $f : V \to U$ es un morfismo en $\mathfrak{C}$, $\{V \times_U U_i \to V\}_{i \in I}$ está en $Cov(\mathfrak{C})$.

Una categoría con una topología se llama un site.

Un abierto en un objeto X es un morfismo $U \to X$ incluido en un recubrimiento. Si $U \to X$, $V \to X$ son abiertos, por la propiedad 3, $U \times_X V \to V$ es abierto de V y por la propiedad 2, $U \times_X V \to X$ es abierto de X, de modo que la familia de abiertos es cerrada para intersecciones finitas, ya que el producto fibrado juega el papel de la intersección. Y aunque técnicamente hemos definido solo la base de abiertos, se puede dar una construcción de toda la topología generada por un site. Pero para lo que necesitamos nos basta con los abiertos de la base y no nos preocuparemos de la condición de que la union de abiertos sea abierta.

Una topología en una categoría $\mathfrak{C}$, induce topologías en todos los conjuntos $X(T)$. Cada morfismo $U_i \to X$ de un recubrimiento de X induce una aplicación $U_i(T) \to X(T)$, las imágenes de estas aplicaciones son una base de abiertos para una topología de $X(T)$, en general para un morfismo $f : S \to T$ la aplicación inducida $f_* : X(T) \to X(S)$ no es continua, pero para cada morfismo $g : X \to Y$, $g^* : X(S) \to Y(S)$ si es continua.

Ejemplo 11.

1. Sea X un espacio topológico:

   - Objetos de $\mathcal{T}_X$ los abiertos de X.
   - $[U, V] = \emptyset \Leftrightarrow U \not\subseteq V$, $[U, V] = \{i_{U,V}\} \Leftrightarrow U \subset V$.
   - $\{U_i \to U\}_{i\in I} \in Cov(\mathfrak{C})$ si y solo si $\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de U.

   Es un site y en este caso el funtor de puntos es trivial porque $X(U)$ se reduce a un solo elemento o el vacio.

2. La categoría de espacios topológicos con la familia de recubrimientos formada por todos los recubrimientos abiertos de todos los espacios topológicos es también un site. Ahora para el espacio P compuesto por un solo punto, para cada espacio topológico X, $X(P)$ coincide con X.

3. En la categoría $((Sets))$ la familia de recubrimientos:

   $$DCov = \{\{U_i \to U\}_{i\in I},\ U = \bigcup_{i\in I} U_i\}$$

   es una topología que define en cada conjunto $X(P)$ donde P es el conjunto de un solo punto la topología discreta, pero no en los conjuntos $X(T)$ para T general.

4. Si G es un grupo y formamos la categoría de G-conjuntos y morfismos equivariantes, $((G - Sets))$ y tomamos como recubrimientos las familias:

$$\{\psi_i : U_i \to U\}_{i\in I},\ \bigcup_{i\in I} Im(\psi_i) = U$$

tenemos un site. Si P es el conjunto con un solo punto y la acción trivial de G, $X(P)$ es el conjunto de puntos aislados de X y el site induce en este conjunto la topología discreta. Si tomamos en G la acción por producto de G, $X(G)$ coincide con X y la topología inducida por el site es la que tiene como base de abiertos las órbitas de X por la acción de G.

4.4. Haces en una categoría

En una categoría con una topología se puede establecer la noción de haz en la forma habitual es decir como un prehaz con valores en una 2- categoría, que verifican condiciones de *pegado*. Para más comodidad nos limitaremos al caso que nos interesa, el de haces con valores en la 2-categoría $((Cat))$ cuyos objetos son categorías, cuyos 1- morfismos son funtores y cuyos 2- morfismos son transformaciones naturales.

Un prehaz P sobre $\mathfrak{C}$ y con valores en $((Cat))$ asigna a cada objeto X una categoría $P(X)$ y a cada morfismo $f : X \to Y$ un funtor $P(f) : P(Y) \to P(X)$ al que se suele llamar *imagen recíproca o pullback* por f, y se representas por f^*. Cuando el morfismo corresponda a un abierto del site $f_i : U_i \to X$, si A es un objeto o α un morfismo de $P(X)$, escribiremos indistintamente $f_i^*(A) = A|_{U_i} = A|_i,\ f_i^*(\alpha) = \alpha|_{U_i} = \alpha|_i$

Si $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ es un recubrimiento, son también recubrimientos:

- $\{U_i \times_U U_j = U_{i,j} \to U_j\}_{i\in I}$ y también $\{U_{i,j} \to U_i\}_{j\in I}$
- $\{U_i \times_U U_j = U_{i,j} \to U\}_{i,j\in I}$
- $\{U_i \times_U U_j \times_U U_k = U_{i,j,k} \to U_{j,k}\}_{i\in I}$ y también $\{U_{i,j,k} \to U_{i,k}\}_{j\in I},\ \{U_{i,j,k} \to U_{i,j}\}_{k\in I}$
- $\{U_{i,j,k} \to U_k\}_{i,j\in I}$
- $\{U_{i,j,k} \to U\}_{i,j,k\in I}$

Si la categoría $\mathfrak{C}$ tiene coproductos para cada recubrimiento $\{U_i \to U\}_{i\in I}$, si llamamos $V = \coprod_{i\in I} U_i$ es :

- $V \times_U V = \coprod_{i,j\in I} U_i \times_U U_j = \coprod_{i,j\in I} U_{i,j}$
- $V \times_U V \times V = \coprod_{i,j,k\in I} U_i \times_U U_j \times_U U_k = \coprod_{i,j,k\in I} U_{i,j,k}$

y podemos construir *la resolución de Çech* (en la que los morfismos multiples corresponden a las distintas proyecciones señaladas arriba)

$$...V \times_U V \times_U V \overset{\to}{\rightrightarrows} V \times_U V \rightrightarrows V \to U \Leftrightarrow ... \coprod_{i,j,k\in I} U_{i,j,k} \overset{\to}{\rightrightarrows} \coprod_{i,j\in I} U_{i,j} \rightrightarrows \coprod_{i\in I} U_i \to U$$

Entonces diremos que el prehaz P es un haz si verifica las siguientes condiciones de pegado:

1. Pegado de morfismos: Si A, B son objetos de $P(U)$ y $\alpha_i : A|_i \to B|_i$ morfismos tales que $\alpha_i|_{i,j} = \alpha_j|_{i,j}$, $\forall i, j$, existe un morfismo $\alpha : A \to B$ tal que $\alpha|_i = \alpha_i$, $\forall i$
2. Unicidad Si dos morfismos $\alpha, \beta : A \to B$ verifican que $\alpha_i = \beta_i$, $\forall i$, es $\alpha = \beta$
3. Pegado de objetos Si para cada $i \in I$, A_i es un objeto de $P(U_i)$ y $\alpha_{i,j} : A_j|_{i,j} \to A_i|_{i,j}$ son morfismos tales que:

   $$\forall i, j, k,\ \alpha_{i,j}|_{i,j,k}\alpha_{j,k}|_{i,j,k} = \alpha_{i,k}|_{i,j,k}.$$

   Existen un objeto A en $P(U)$ e isomorfismos $\alpha_i : A|_i \simeq A_i$, tales que $\alpha_{j,k}\alpha_j|_{j,k} = \alpha_k|_{j,k}$

Ahora queda completamente explicada la definición.

Definición 12. (Primera definición de Stack)

Un Stack es un haz de grupoides sobre una categoría

Ejemplo 13.

1. En una categoría $\mathfrak{C}$ con productos fibrados un epimorfismo efectivo es una familia de morfismos $\{f_i : U_i \to U\}_{i\in I}$ tal que para todo objeto Z y toda familia de morfismos $\{g_i : U_i \to Z\}_{i\in I}$ tal que $g_i|_{i,j} = g_j|_{i,j}$, $\forall i, j \in I$ existe un único $g : U \to Z$ tal que $g|_i = g_i$ $\forall i \in I$, y un epimorfismo efectivo $\{f_i : U_i \to U\}_{i\in I}$ se llama universal si para todo objeto sobre U, $h : V \to U$, la familia $\{\pi_{i,2} : U_i \times_U V \to V\}_{i\in I}$ es también un epimorfismo universal. Los epimorfismos estrictos universales son los recubrimientos de una topología sobre la categoría, y en esa topología todos los

funtores $S(-)$ (y en consecuencia todos los funtores contravariantes representables con valores en la categoría de conjuntos) son haces. Si consideramos los funtores $S(-)$ como funtores con valores en $((Cat))$ como hicimos antes, sus imágenes son grupoides y por tanto cada funtor $S(-)$ es un stack, de modo que para esta topología tenemos una inmersión de la categoría $\mathfrak{C}$ en la categoría de stacks sobre ella, que lleva cada objeto S al stack $S(-)$.

2. Si tomamos como morfismos en cada conjunto $S(-)$ los morfismos sobre S, tenemos también la estructura de prehaz que hemos señalado antes, pero no una estructura de haz, porque se verifican los dos primeros axiomas de la definición de haz, pero en general no se cumple el tercero.

3. Si tomamos el prehaz sobre la categoría $((Top))$ que asocia a cada espacio topológico X la categoría $((Rec(X)))$ de sus espacios recubridores, y consideramos en $((Top))$ la topología definida por todos los recubrimientos abiertos, como los recubrimientos abiertos son epimorfismos universales efectivos se cumplen los dos primeros axiomas de la definición de haz, y también se cumple el tercero porque dados espacios recubridores de los abiertos de un recubrimiento de X que coinciden en las intersecciones, se pueden pegar para dar lugar a un espacio recubridor del espacio total. Observemos que la restricción a los abiertos de este espacio recubridor es isomorfa a los espacios recubridores de partida. Por tanto este prehaz es un haz.

4. Si tomamos en la categoría $((G - sets))$ la topología definida en la sección anterior, los recubrimientos son epimorfismos efectivos estrictos y el prehaz $Tors(-)$ verifica los dos primeros axiomas de la definición de haz. Además si:

   - $\{U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento de U.
   - (E_i, α_i) es un torsor sobre U_i para cada $i \in I$.
   - $g_{ij} : E_i|_{U_i \cap U_j} \to E_j|_{U_i \cap U_j}$ son morfismos que verifican la condición de cociclo de la definición.

   Se puede definir sobre la union disjunta de los E_i la relación de igualdad dada por los $g_{i,j}$ y el conjunto cociente E es un torsor sobre X que restringe a torsores isomorfos a los E_i. Por tanto $Tors(-)$ es un stack.

5. Segunda definición de Stack

5.1. Categorías fibradas. Descenso

La teoría de descenso de Grothendieck coloca en un marco adecuado la teoría clásica aritmética de modo que su aplicación a la geometría resulta natural. En el enfoque de Grothendieck la teoría de descenso es esencialmente un puente local-global: Si tenemos una propiedad, objeto, o morfismo para todos los abiertos de un recubrimiento de X, ¿la tenemos para X?. En su lenguaje un recubrimiento se puede substituir por la unión disjunta de sus elementos y en consecuencia es un morfismo $U \to X$. La restricción significa producto fibrado, o algebraicamente cambio de base, es decir si $A \to X$ es un objeto sobre X, $U \times_X A$ representa la restricción de A a los abiertos del recubrimiento U. Entonces la teoría de descenso responde a las preguntas siguientes:

- (Descenso de propiedades) Si $A \to X$ es un objeto sobre X y $U \times_X A$ tiene una propiedad. ¿Cuándo tiene A esa propiedad?.
- (Descenso de morfismos) Si $A \to X$ y $B \to X$ son objetos sobre X y $g : (U \times_X A \to U) \to (U \times_X B \to U)$ es un morfismo. ¿Cuándo existe un morfismo $f : (A \to X) \to (B \to X)$ tal que $g = 1_U \times f$?.
- (Descenso de objetos) Si $B \to U$ es un objeto sobre U. ¿ Cuándo existe un objeto sobre X, $A \to X$, tal que $B = U \times_X B$?.

Dado un funtor $P : \mathfrak{F} \to \mathfrak{C}$, para cada objeto S de $\mathfrak{C}$ llamamos fibra de P en S a la subcategoría de $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}(S)$ cuyos objetos son los elementos de $P^{-1}(S)$ y para cada par de objetos $A, B \in P^{-1}(S)$, los morfismos de A en B son los $f : A \to B$, $P(f) = 1_S$. Las fibras de P son los objetos de una 2-subcategoría de $((Cat))$ a la que representaremos por $((Fib(P)))$.

Una *categoría fibrada* sobre una categoría $\mathfrak{B}$ es un par $(\mathfrak{F}, P)$, formado por una categoría $\mathfrak{F}$ y un funtor covariante $P : \mathfrak{F} \to \mathfrak{B}$ tales que existe un un prehaz de categorías, $(-)^*$, sobre $\mathfrak{B}$, que asigna a cada S la categoría $\mathfrak{F}(S)$. Es decir, una correspondencia que asocia a cada morfismo $f : S \to S'$ un funtor: $f^* : \mathfrak{F}(S') \to \mathfrak{F}(S)$, a cada par de morfismos componibles f, g un isomorfismo de funtores $\varepsilon_{g,f} : f^*g^* \to (gf)^*$ que es asociativo, y a cada objeto S de $\mathfrak{B}$ un isomorfismo natural $\delta_S : 1_S^* \to 1_{\mathfrak{F}(S)}$, que es compatible con ε. Este prehaz se llama prehaz asociado a la categoría fibrada, y se incorpora a su descripción.

Esencialmente categoría fibrada y prehaz son conceptos equivalentes, la categoria fibrada determina el prehaz, ya que aparece en su definicion, y para cada prehaz se puede construir una categoría fibrada (Construcción de Grothendieck) que lo tiene como prehaz asociado.

Si $H : \mathfrak{B} \to ((Cat))$ es un prehaz, podemos construir una categoría $\int H$ por:

- Los objetos de $\int H$, son los pares (B, X) donde $B \in Ob(\mathfrak{B})$ y $X \in Ob(H(B))$.
- Los morfismos entre (B, X) y (B', X'), son los pares (f, α) donde:

$$f \in Hom_{\mathfrak{B}}(B, B'),\ \alpha \in Hom_{H(B)}(X, H(f)(X'))$$

- La composición de morfismos:

$$(g, \beta)(f, \alpha) = (gf, H(f)(\beta)\alpha)$$

Si $\pi_1 : \int H \to \mathfrak{B}$ es la primera proyección, $(\int H, \pi_1)$ es una categoría fibrada, cuyo prehaz asociado es H.

Si $(\mathfrak{F}, P, (-)^*)$ es una categoría fibrada sobre $\mathfrak{B}$, y $f : B' \to B$ es un morfismo de $\mathfrak{B}$, podemos construir:

$$\begin{tikzcd} B'' = B' \times_B B' \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"] \arrow[dr, "g"] & B' \arrow[d, "f"] \\ B' \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad , g = f\pi_i = f\pi_2$$

y para cada par de objetos $A, B \in \mathfrak{F}(B)$ tenemos un diagrama:

$$Hom_{\mathfrak{F}(B)}(A, B) \xrightarrow{f^*} Hom_{\mathfrak{F}(B')}(f^*(A), f^*(B)) \underset{\pi_2^*}{\overset{\pi_1^*}{\rightrightarrows}} Hom_{\mathfrak{F}(B'')}(g^*(A), g^*(B))$$

Entonces decimos que f es un *morfismo de descenso* para $(\mathfrak{F}, P, (-)^*)$ si el diagrama anterior es exacto, es decir si para cada morfismo $\alpha : f^*(A) \to f^*(B)$ tal que $\pi_1^*(\alpha) = \pi_2^*(\alpha)$ existe un único morfismo $\beta : A \to B$, con $f^*(\beta) = \alpha$.

Ejemplo 14. Supongamos que $\mathfrak{B}$ tiene coproductos y está dotada de una topología. Sea X un objeto de $\mathfrak{B}$ y $\mathcal{C} = \{f_i : U_i \to X\}_{i \in I}$ un recubrimiento de X. Si llamamos $U = \coprod i \in IU_i$, veamos cuando el morfismo $f : U \to X$ inducido por el recubrimiento es un morfismo de descenso.

Si A y B son objetos de $\mathfrak{F}(X)$ y α es un morfismo de $f^*(A)$ en $f^*(B)$, las inmersiones de los U_i en U dan lugar a una serie de morfismos $\alpha_i : A|_{U_i} \to B|_{U_i}$, la condición $\pi_1^*(\alpha) = \pi_2^*(\alpha)$ significa que:

$$\alpha_i|_{U_{i,j}} = \alpha_j|_{U_{i,j}}$$

y la condición de descenso significa que:

$$\exists\, \beta : A \to B,\ \beta|_{u_i} = \alpha_i,\ \forall i \in I.$$

Es decir la condicion de morfismo de descenso significa que el morfismo verifica la propiedad de descenso para morfismos.

Un *dato de pegado* para un objeto A' de $\mathfrak{F}(B')$ respecto de $\alpha : B' \to B$ es un isomorfismo $\tau : \pi_1^*(A') \simeq \pi_2^*(A')$. El dato de pegado se llama *efectivo* si existen un objeto A en $\mathfrak{F}(B)$ y un isomorfismo $\varphi : f^*(A) \simeq A'$, tales que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \pi_1^*(f^*(A)) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi_1^*(\varphi)"] & \pi_2^*(f^*(A)) \arrow[d, "\pi_2^*(\varphi)"] \\ \pi_1^*(A') \arrow[r, "\tau"] & \pi_2^*(B') \end{tikzcd} \quad , \mu = [\pi_1^*(f^*(A)) \simeq (f\pi_1)^*(A) = (f\pi_2)^*(A) \simeq \pi_2^*(f^*(A))]$$

El dato de pegado se llama *dato de descenso* si verifica que:

$$\pi_{2,3}^*(\tau)\pi_{1,2}^*(\tau) = \pi_{1,3}^*(\tau)$$

donde los $\pi_{i,j}$ son los tres morfismos naturales

$$B' \times_B B' \times_B B' \overset{\rightarrow}{\rightrightarrows} B' \times_B B'$$

Ejemplo 15. En la situación del ejemplo anterior, el objeto A' es una familia de objetos $\{E_i\}_{i\in I}$ de las $\mathfrak{F}(U_i)$ y:

1. Un *dato de pegado* es una familia de isomorfismos en $\mathfrak{F}(U_{i,j})$;

$$\{f_{i,j} : E_i|_{U_{i,j}} \to E_j|_{U_{i,j}}\}_{i,j\in I}.$$

2. Un *dato de descenso* es un dato de pegado $\{f_{i,j} : E_i|_{U_{i,j}} \to E_j|_{U_{i,j}}\}_{i,j\in I}$, que verifica la condición de cociclo:

$$f_{i,j}|_{U_{i,j,k}} = f_{i,k}|_{U_{i,j,k}} f_{k,j}|_{U_{i,j,k}},\ \forall i,j,k \in I.$$

3. Un dato de pegado $\{f_{i,j} : E_i|_{U_{i,j}} \to E_j|_{U_{i,j}}\}_{i,j\in I}$ es *efectivo* (comparar con la tercera propiedad de la definición de haz) si existen un objeto E en $\mathfrak{F}(X)$ y una familia de isomorfismos:
$$f_i : E|_{U_i} \simeq E_i,\ \forall i \in I$$
tales que $\forall i, j \in I$:
$$f_{i,j} f_j|_{U_{i,j}} = f_i|_{U_{i,j}}.$$

Un morfismo de descenso tal que todo dato de descenso para él es efectivo se llama *morfismo de descenso efectivo.*

5.2. Categorías fibradas en grupoides

Una *categoría fibrada en grupoides* sobre una categoría $\mathfrak{B}$ es un par $(\mathfrak{F}, p)$, formado por una categoría $\mathfrak{F}$ y un funtor covariante $p : \mathfrak{F} \to \mathfrak{B}$ tales que:

1. Para cada morfismo en $\mathfrak{B}$, $b : B_1 \to B_2$ y todo objeto X_2 en $\mathfrak{F}$ con $p(X_2) = A_2$ existe al menos un morfismo $\beta : X_1 \to X_2$ tal que $p(\beta) = b$ (y en consecuencia$p(X_1) = B_1$)
2. Si $a : B_3 \to B_2$ y $b : B_2 \to B_1$ son morfismos en $\mathfrak{B}$ y $\beta : X_2 \to X_1$, $\gamma : X_3 \to X_1$ son morfismos en $\mathfrak{F}$, tales que $p(\beta) = b,\ p(\gamma) = ba$ existe un único morfismo $\alpha : X_3 \to X_2$ tal que:
$$\gamma = \beta\alpha,\ p(\alpha) = a.$$

Como consecuencia de la definición:

- Un morfismo φ de $\mathfrak{F}$ es un isomorfismo si y solo si lo es $p(\varphi)$ en $\mathfrak{B}$.
- En la primera condición se tiene la unicidad salvo isomorfismos. Aplicando elección podemos seleccionar para $b : B_1 \to B_2$ y X_2 un par β, X_1 y llamarles $b * (X_2), p_b$.
- Para cada objeto B de $\mathfrak{B}$, la subcategoría de $\mathfrak{F}$ cuyos objetos son los objetos X tales que $p(X) = B$ y cuyos morfismos son los morfismos α tales que $p(\alpha) = 1_B$, tenemos un grupoide al que se llama fibra sobre B y se le representa por $\mathfrak{F}(B)$.

Una categoría fibrada en grupoides sobre una categoría $\mathfrak{B}$ es una categoría fibrada en la que el prehaz asociado es un prehaz de grupoides.

- Si $(\mathfrak{F}, p)$ es una categoría fibrada en grupoides. La correspondencia $B \mapsto \mathfrak{F}(B)$ define un prehaz en grupoides

- Si P es un prehaz en grupoides sobre $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{F}$ tiene:
  - Objetos: los pares (B, X) , con $X \in P(B)$.
  - Morfismos: los pares $(b, \beta) : (B', X') \to (B, X)$ donde $b : B' \to B$ es un morfismo en $\mathfrak{B}$ y $\beta : P(f)(X) \to X'$ es un isomorfismo.

  Entonces la primera proyección dota a $\mathfrak{F}$ de estructura de categoría fibrada en grupoides sobre $\mathfrak{B}$.

Se pueden añadir a las categorías fibradas en grupoides las propiedades suficientes para que los prehaces asociados sean stacks, para ello se utiliza la notación de la *teoría del descenso* que omitimos aquí.

Suponemos la base $\mathfrak{B}$ dotada de una topología. Si $f : U \to T$ es un morfismo de $\mathfrak{B}$, y $p(X) = T$ se puede construir $X|_U = f * (X)$. Dados X, Y objetos de $\mathfrak{F}(T)$, tiene sentido el conjunto $Hom_{\mathfrak{F}(U)}(X|_U, Y|_U)$ y también la topología inducida por la de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{B}/T$.

Definición 16. (Segunda definición de Stack) Un *pre-stack* es una categoría fibrada en grupoides $(\mathfrak{F}, p)$ tal que para todo objeto T de $\mathfrak{B}$ y para todo par de objetos X, Y de $\mathfrak{F}(T)$, la correspondencia:

$$H : \mathfrak{B}/T \to ((sets)), H(U) = Hom_{\mathfrak{F}(U)}(X|_U, Y|_U)$$

es un haz de conjuntos. Un stack es un pre-stack que verifica la condición tres de pegados de objetos de la definición primera.

6. Stacks representables. Stacks de Deligne - Mumford

Si T es un objeto de una categoría $\mathfrak{B}$ el funtor de olvido $p : \mathfrak{B}/T \to \mathfrak{B}$ dota a $\mathfrak{B}/T$ de estructura de categoría fibrada en grupoides sobre $\mathfrak{B}$, la restricción sería el producto fibrado, que está unívocamente determinado salvo isomorfismos. En general no es un stack pero si lo es en todos los casos usuales, esquemas con la topología etale, o fielmente plana cuasicompacta, espacios analíticos, variedades diferenciables, etc.

En términos funtoriales, la 2- categoría de valores de este stack tiene como objetos los grupoides construidos, tomando para cada objeto B de $\mathfrak{B}$ el grupoide cuyos objetos son los morfismos de B en T y cuyos morfismos son solo las identidades, entonces los objetos de este stack no tienen automorfismos propios.

Un stack se llama representable, si coincide con el construido mas arriba, entonces si un objeto de un stack tiene automorfismos propios, el stack no es representable.

Un morfismo de stacks, en términos de la segunda definición, es un funtor entre las categorías fibradas que conmuta con las proyecciones. Si U es un objeto de $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{F}, p$ es un stack sobre $\mathfrak{B}$, se llama morfismo de U en $\mathfrak{F}$ a todo morfismo de stacks de $\mathfrak{B}/U$ en $\mathfrak{F}$

El producto fibrado de stacks se define de la forma natural:

Dados dos morfismos de stacks :$f_1 : \mathfrak{F}_1 \to \mathfrak{H},\ f_2 : \mathfrak{F}_2 \to \mathfrak{H}$, la categoría de $\mathfrak{F}_1 \times_{\mathfrak{B}} \mathfrak{F}_2$ tiene:

- Objetos: Ternas (X_1, X_2, a) con $p_1(X_1) = p_2(X_2)$ y $a : f_1(X_1) \to f_2(X_2)$ un isomorfismo.
- Morfismos: Pares $(\eta_1, \eta_2) : (X_1, X_2, a) \to (Y_1, Y_2, b)$, con:

$$\eta_i \in Hom_{\mathfrak{F}_i}(X_i, Y_i),\ i = 1, 2,\ p_1(\eta_1) = p_2(\eta_2),\ bf_1(\eta_1) = af_2(\eta_2).$$

Y dada una propiedad relativa a morfismos de naturaleza local en la categoría base y que este establecida para morfismos con rango representable, se dice que un morfismo de stacks $f : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$, tiene la propiedad si para todo objeto U de $\mathfrak{B}$ y todo morfismo $U \to \mathfrak{G}$, la propiedad se verifica para $U \times_{\mathfrak{G}} \mathfrak{F} \to U$

Definición 17. Un stack de Deligne - Mumford es un stack $\mathfrak{F}$ en la categoría $((esquemas))/S$ con la topología etale tal que:

1. El morfismo diagonal es representable, cuasicompacto separado y no ramificado
2. Existe un atlas para $\mathfrak{F}$, es decir un morfismo $U \to \mathfrak{F}$ etale y suprayectivo, con U esquema de tipo finito sobre S.

Referencias

[1] Abramovich D., Graber T.,Vistoli A. *Gromov-Witten theory of Deligne-Mumford stacks.* Journal Amer. J. Math.(2008). Volume 130, n. 5

[2] Artin, M. *Algebraic spaces.* J. K. Whittemore Lecture in Mathematics given at Yale University 1969. Yale University Press, New Haven, Conn. (1971)

[3] Deligne P.,Mumford D. *The irreducibility of the space of curves of given genus.* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Maths, 1969, Volume 36.

[4] Edidin E. *What is a stack?*. Notices Amer. Math. Soc., (2003). Volume 50, no. 4

[5] Fantechi B. *Stacks for everybody.* Progr. Math.(European Congress of Mathematics)(2001).Volume 201

[6] Knutson D. *Algebraic spaces.* Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics (1971).Volume 203.

[7] Kresch A. *On the geometry of Deligne-Mumford stacks.* Algebraic geometry (Seattle 2005). Part 1, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 80.

[8] Laumon G.,Moret-Baill L. *Champs algèbriques.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 39.Springer-Verlag, Berlin, (2000)

[9] Stacks Project Copyright (C) 2005 Johan de Jong $http://math.columbia.edu/algebraic_geometry/stacks-git$.

.