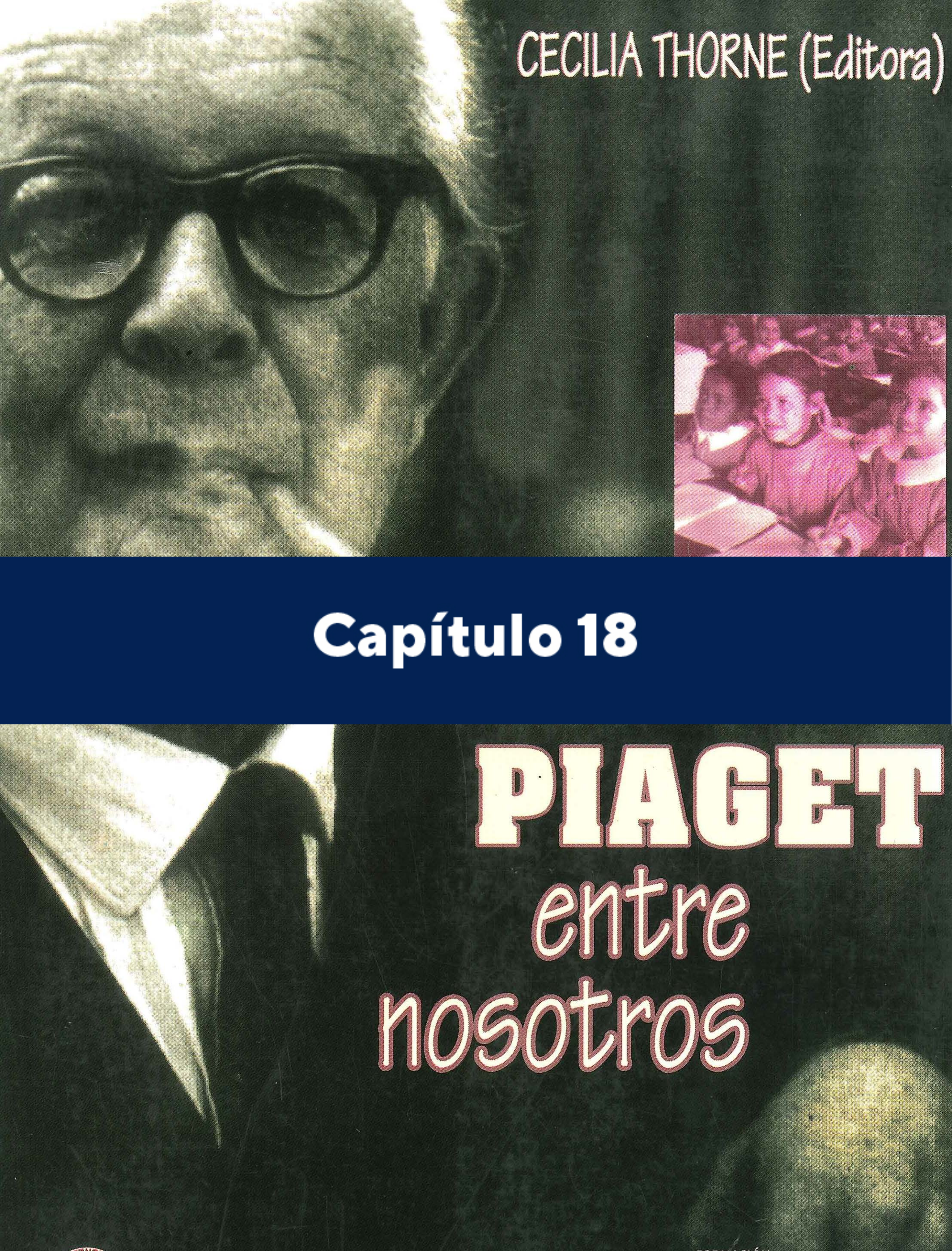

CECILIA THORNE (Editora)

Capítulo 18

PIAGET entre nosotros

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FONDO EDITORIAL 1997

Primera edición, setiembre de 1997

Carátula: AVA Diseños
Cuidado de la edición: María del Carmen Ghezzi
Diagramación: Marilú Alvarado Vargas

Piaget entre nosotros

ISBN 9972-42-077-9

Impreso en el Perú - Printed in Peru

EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN LA PERSPECTIVA PIAGETANA

Uldarico Malaspina Jurado

Según Piaget, el conocimiento se adquiere no por interiorización de un algo "dado" y exterior, sino por un largo proceso de construcción desde dentro, que comienza al nacer y continúa a lo largo de la madurez (Piaget, 1986). Este punto de vista, llamado *constructivismo*, es evidentemente distinto al de los empiristas que sostienen que el conocimiento tiene su fuente fuera del niño y que éste lo adquiere al interiorizarlo mediante los sentidos y el lenguaje. A Piaget podemos ubicarlo más bien entre los racionalistas, aunque tomando cierta distancia de ellos al insistir en que todo conocimiento, incluyendo la capacidad de razonar lógicamente, es construido por el individuo a medida que actúa sobre los objetos y con las personas e intenta sacar algún provecho de su experiencia.

Piaget fundamenta sus afirmaciones en numerosas observaciones hechas trabajando con niños (Piaget e Inhelder, 1974); por ejemplo, muestra cómo la experiencia sensorial por sí sola no capacita al niño menor de seis años para entender la conservación de la cantidad de líquido al cambiarlo de un recipiente a otro de distintas dimensiones. No es pues la información sensorial ni el lenguaje los que capacitan al niño para percibir la conservación del líquido; por el contrario, la atracción perceptiva generalmente gana y niños menores de 6 o 7 años creen que la cantidad neta de algo cambia cuando su apariencia se modifica; es el razonamiento el que le hace sentir la necesidad lógica de que la cantidad de líquido se mantenga, y es la consecuencia de la interacción de sus estructuras mentales con el ambiente. En general, para Piaget el desarrollo intelectual es un proceso dinámico de reestructuración del conocimiento, que comienza con una estructura o una forma de pensar propia de un nivel, pasa por una situación de conflicto y desequilibrio por efecto de algún cambio externo, continúa con la resolución del conflicto mediante su propia actividad intelectual y llega a un estado de nuevo equilibrio, con una nueva forma de pensar y estructurar las cosas.

Conocimiento físico y conocimiento matemático

Para ubicarnos más específicamente en torno al aprendizaje de la matemática, consideramos importante detenernos en lo que en la corriente piagetana se denomina *conocimiento físico y conocimiento matemático:*

- El conocimiento físico es un conocimiento sobre objetos observables en la realidad externa. La manipulación del objeto es fundamental para desarrollar este tipo de conocimiento, pues su fuente está principalmente en el objeto. Cuando el niño percibe que un trozo de hielo es frío, o que las canicas ruedan, que las pelotas de jebe rebotan, que un pedazo de corcho flota en el agua, etc., está adquiriendo conocimientos físicos.
- El conocimiento lógico-matemático está constituido por relaciones que crea el sujeto e introduce en o entre los objetos. El conocimiento lógico-matemático se inventa, se construye; su fuente está principalmente en el sujeto, en la manera cómo éste organiza la realidad. Su origen está en los actos que el sujeto realiza con los objetos y no en los objetos mismos. Los objetos sólo son un medio que permiten que ocurra la construcción. Esto, evidentemente, está en la misma línea de concebir la matemática, ante todo, como una actividad mental (escribir símbolos en el papel es sólo una ayuda). Cuando el niño juega con canicas y advierte que la cantidad que tiene se mantiene independientemente del lugar en el que las guarde, cuando advierte que tiene más canicas que su amigo, cuando agrupa sus canicas con algún criterio (las rojas, las verdes, las nuevas, etc.) está construyendo conocimientos lógico-matemáticos. Es claro que para que el niño haga este tipo de construcciones no es indispensable que los objetos sean canicas y menos aún que sean objetos que rueden. El niño está estableciendo relaciones lógico-

matemáticas entre los objetos, está organizando una realidad dada. Al respecto, consideramos muy ilustrativa una nota aclaratoria de las educadoras Constance Kamii y Rheta DeVries (1983, p. 19, nota 4): «La relación más elemental y la base para todas las relaciones lógico-matemáticas más complejas, es la que se establece entre dos objetos. Cuando, por ejemplo, el niño encuentra dos cucharas de distinto tamaño, puede concebirlas como "iguales", "diferentes", "más grande que" o "dos". Estas relaciones no existen ni *en* una cuchara ni *en* la otra. Las relaciones las crea literalmente el sujeto que pone en relación los objetos, y si no los pusiera en relación, para él cada objeto permanecería separado y sin relacionar con el otro. Como las relaciones las crea el sujeto, no pueden ser juzgadas como "correctas" o "equivocadas" por verificación empírica. Así, pues, las dos cucharas pueden ser consideradas como "iguales", "diferentes" o "dos", según el punto de vista del sujeto».

En la misma obra citada, Kamii y DeVries explican que Piaget establece claramente que la fuente del conocimiento físico está principalmente en el objeto y la fuente del conocimiento lógico-matemático está principalmente en el sujeto, pero que también sostiene que estas fuentes no son completamente diferentes, pues ambas están inseparablemente unidas en la realidad psicológica de la experiencia del niño pequeño. Por ello, resulta esencial para comprender el proceso constructivo la relación entre experiencia física y experiencia lógico-matemática. En ambas experiencias está presente la abstracción, pero mientras que en la experiencia física el niño obtiene información de los objetos mediante la *abstracción empírica*, centrándose sólo en alguno o algunos de los aspectos del objeto, en la experiencia lógico-matemática el conocimiento que adquiere el niño se construye por *abstracción reflexiva*, pues no resulta de los objetos en sí, sino de la acción del niño sobre éstos al introducir relaciones en o entre los objetos.

Cabe aclarar que el término *acción* tiene dos acepciones en la terminología piagetana: uno en el sentido corriente de hacer algo al objeto o con el objeto y otro, como actividad mental, con la cual se centra en lo que es específico de los objetos, pero también los ubica en el marco de toda una red de relaciones, como parte de una estructuración general de diversas experiencias específicas. Por esto, son inseparables la experiencia física y la lógico-matmática, pues no puede darse la primera sin una armazón lógico-matemática, y en el caso de bebés y niños muy pequeños, no puede haber experiencia lógico-matemática sin objetos que relacionar. Los conocimientos que puede construir un niño a partir de un juguete serán el resultado de sus manipulaciones diversas y de las relaciones que él establezca entre tal juguete y otros objetos que conoce; así, según Piaget, la experiencia física que acumule el niño le ayudará a estructurar su armazón lógico-matemática y el funcionamiento de su inteligencia se estimulará y desarrollará más cuanto más variados e interesantes sean los problemas presentados por la realidad.

Esta perspectiva presenta, pues, un serio reto a los docentes, ya que serán ellos los que con sus conocimientos, con su creatividad, con su afectividad y su paciencia brinden al niño experiencias que favorezcan la construcción de sus propios conocimientos. Sin embargo, Piaget advierte, en su artículo "La iniciación matemática. La matemática moderna y la psicología del niño" (Piaget, Choquet y Dieudonné, 1978), que la primera precaución que hay que tomar es la de no "quemar etapas". Tal advertencia resulta completamente natural, pues –como sabemos– Piaget no sólo considera que en el desarrollo intelectual hay periodos y etapas que conocer y respetar, sino también que existe un desarrollo espontáneo de las operaciones lógico-matemáticas en el niño y el adolescente, que puede ser alimentado, completado y prolongado mediante una enseñanza adecuada, pero no olvidado, como ocurre con aquellos maestros que "hablan de conjuntos a niños de cinco años, sin sospechar que más tarde estos niños descubrirán por sí mismos las reuniones, las particiones, las intersecciones y las equivalencias por correspondencias, siempre que se les deje actuar libremente, en vez de llenarles la cabeza con discursos incomprensibles" (Piaget, Choquet y Dieudonné, 1978, p. 183).

En relación con lo mismo, en su trabajo *Cómo forman los niños los conceptos matemáticos* (Piaget, 1975, p. 108), sostiene: "Es un gran error suponer que el niño adquiere la noción de número y otros conceptos matemáticos justamente por la enseñanza. Por el contrario, hasta un interesante punto los descubre él mismo independiente y espontáneamente. Cuando los adultos tratan de imponer prematuramente a un chico los conceptos matemáticos, su aprendizaje es meramente verbal;

la verdadera comprensión de los mismos sólo llega con su crecimiento mental". Sustenta esta afirmación narrando por una parte cómo niños de 5 o 6 años, aunque conozcan los nombres de los números, porque tuvieron una enseñanza verbal de éstos, todavía no captan la idea esencial de número, que es su permanencia o conservación en conjuntos de objetos, sin importar la forma en que éstos estén dispuestos, y por otra parte, narrando cómo niños de $6^1/_2$ a 7 años generalmente muestran que han formado espontáneamente el concepto de número, aunque no le hayan enseñado todavía a contar. Esto se verifica, según Piaget, porque los niños advierten que dos conjuntos cuyos elementos pueden emparejarse sin que sobren ni falten en ninguno de ellos, son conjuntos que tienen el mismo número de elementos y éste se mantiene aunque los elementos de los conjuntos se ubiquen de diferentes formas.

Lo dicho anteriormente no debe llevar a concluir que, según Piaget, debemos dejar que el niño descubra él solo los conocimientos matemáticos, sin intervención de los maestros. Piaget valoraba la docencia y preveía un replanteamiento de la enseñanza de la matemática en los niveles preescolar, primaria y secundaria, planteando que una organización razonable de las *acciones* del niño, en oposición a los discursos conjuntistas, podría servir de preparación para una adecuada utilización de las funciones, de los conjuntos y de la matemática cualitativa. Pone especial énfasis en la organización conveniente de las acciones, tanto por la importancia que éstas tienen en su planteamiento constructivista de elaboración de conocimientos, como porque es consciente de que «hay demasiados ensayos educativos contemporáneos que incurren en la triste paradoja de pretender enseñar las "matemáticas modernas" con métodos que, de hecho, son arcaicos, es decir, esencialmente verbales y basados solamente en la transmisión más que en la reinvención o redescubrimiento por el alumno» (Piaget, Choquet y Dieudonné, 1978, p. 185).

Tener en cuenta todos estos criterios es fundamental en la tarea docente, pues se estará ayudando al niño a que *aprenda matemática*, en la medida en que se le vaya brindando experiencias adecuadas que le permitan ir construyendo conocimientos lógico-matemáticos. Evidentemente, cada niño –considerando no sólo su individualidad y sus características personales, sino la etapa de su desarrollo intelectual en la que se encuentre– tendrá su forma de construir tales conocimientos. Al respecto, resulta particularmente esclarecedor el resumen que hacen Constance Kamii y Rheta DeVries en la página 30 de su ya citada obra (1983): «El niño pequeño se centra principalmente en contenidos físicos concretos, observables y, en particular, en el resultado de su acción. A medida que se va haciendo mayor, se rompe el equilibrio entre los aspectos físico y lógico-matemático y este último se va separando cada vez más del contenido físico. En la adolescencia y, finalmente, la madurez, el aspecto lógico matemático puede hacerse completamente independiente del contenido físico (como puede verse en la matemática "pura"), mientras que el aspecto físico depende cada vez más de una organización lógico-matemática (como puede verse en la física)».

Algunas reflexiones

Luego de revisar estos aportes de Piaget y de los investigadores de su entorno, cabe hacernos algunas preguntas vinculadas con el quehacer docente en matemáticas:

- Cuando un niño es obligado a memorizar y manejar una técnica para sumar números sin las suficientes experiencias previas que le permitan tanto relacionar el conteo con la adición como entender la numeración de posición, ¿está construyendo conocimientos lógico-matemáticos?
- Es frecuente escuchar a padres o maestros afirmaciones como la siguiente: "Este niño ya sabe hacer bien las operaciones, pero cuando se le pone un problema no sabe qué hacer". ¿No será esto el resultado de no haber estimulado lo suficiente su capacidad de relacionar, de "organizar su realidad" y de vincular lo que va aprendiendo con sus experiencias concretas? Si recordamos que para Piaget la inteligencia es la capacidad de adaptarse a situaciones nuevas y que en la adaptación hay que considerar la *comprensión* de la situación y la *invención* de una solución basada en esa comprensión, es evidente que trabajar con problemas es parte esencial para el aprendizaje de la matemática y para el desarrollo de la inteligencia; sin embargo, podemos hacer un mal uso de ellos si no cuidamos su dificultad ni su oportunidad y –peor aún– si pretendemos obligar

al niño a seguir determinado camino para su solución y a memorizar procedimientos. Creemos oportuno mencionar al respecto que –en general– lo interesante de un problema no acaba cuando se encuentra una solución de él. Una vez hallada una solución, siempre es posible buscar otras, darse cuenta de los caminos equivalentes, pensar en modificaciones al problema, formular conjeturas, plantear casos particulares interesantes y ensayar generalizaciones.

- ¿Acaso no se está forzando al niño y engañándose a sí mismo el docente de tercero o cuarto grado de primaria que exige a sus alumnos en una evaluación de matemáticas que enuncien las propiedades de la adición? Decimos engañándose a sí mismo el docente, porque seguramente cree que aquellos niños que escribieron el enunciado tal como figura en su cuaderno o texto, saben más matemática que aquellos que no lo hicieron así, cuando en realidad lo más probable es que sólo estén revelando capacidad de memorizar y quizá –lo cual sería más grave– disposición a responder teniendo como criterio lo que cree que satisfará al maestro.

Podemos citar muchos ejemplos en los que el docente, actuando de buena voluntad, en lugar de favorecer a que el educando construya conocimientos lógico-matemáticos, lo que hace es conducirlo a aceptar reglas y "trucos" sin el sustento de experiencias adecuadas. Lamentablemente esto se repite año tras año y llega a lo que podríamos llamar a su "máxima expresión" en dos niveles: uno en los cursos que en muchos colegios se dan paralelos a los de matemáticas, que –oh ironía– se llaman "razonamiento matemático", y el otro en las academias de preparación para los exámenes de ingreso a las universidades. Se llega, pues, a la aberración de "enseñar razonamiento matemático" en "tiempo récord", haciendo memorizar procedimientos y fórmulas, con el agravante que en los colegios se hace fuera de los cursos de matemática. Las consecuencias las encontramos fácilmente en la universidad, pues los trucos memorizados sin la comprensión de los conceptos y un adecuado ejercicio de abstracción reflexiva, no llegan a formar parte del conocimiento lógico-matemático construido por el alumno, pronto son olvidados y pasan sin haber aportado a enriquecer el periodo de las operaciones formales. Así, es comprensible que muchos jóvenes opten por estudiar carreras de letras, no porque les gusten las letras, sino porque quieren estar alejados de las matemáticas.

Piaget y las estructuras matemáticas

Pasemos ahora a comentar un poco el papel que juega la matemática en los planteamientos de Piaget:

La matemática está muy presente en la teoría piagetana, y no sólo como parte de las observaciones y conclusiones respecto a los conceptos de número, volumen, área, distancia, horizontalidad, espacio, probabilidad, etc. Piaget, en su planteamiento del desarrollo intelectual, presenta interesantes ejemplos de aplicación cualitativa de la matemática en las ciencias humanas, pues considera las estructuras fundamentales de la matemática –que son las estructuras algebraicas, las topológicas y las de orden– como modelos de estructura cognoscitiva, sobre todo hacia la mitad y el final de la niñez. Piaget, en su artículo "Las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia" (Piaget, Beth y Dieudonné, 1963, p. 7), sostiene que "es del mayor interés comprobar que si se quiere analizar hasta sus raíces el desarrollo psicológico de las operaciones aritméticas y geométricas espontáneas en el niño, y, sobre todo, las operaciones lógicas que constituyen sus necesarias condiciones previas, se encuentra en todas las etapas, primero, una tendencia fundamental a la organización de totalidades o sistemas, fuera de los cuales los elementos carecen de significado y aun de existencia, y en seguida, una distribución de estos sistemas de conjunto según tres especies de propiedades que corresponden precisamente a las de las estructuras algebraicas, las estructuras de orden y las estructuras topológicas". Y es que según él, en el terreno de la inteligencia el papel de las totalidades es constante, pues la inteligencia aparece esencialmente como una coordinación de las acciones que se organizan en esquemas que comportan ciertas estructuras de totalidad; luego, con ayuda de la función simbólica y en particular de las imágenes mentales del lenguaje, las acciones se interiorizan progresivamente y después del llamado periodo preoperatorio, entre los 2 y los 7 u 8 años, se constituyen en operaciones propiamente dichas y así ofrecen las estructuras de conjunto, características de la inteligencia.

Cabe mencionar que en la base de los modelos de Piaget de las estructuras elementales de la inteligencia está el criterio de *reversibilidad* como "la ley fundamental de las composiciones propias de la inteligencia", presentándose ésta, desde los esquemas sensoriomotrices, bajo dos formas complementarias e irreducibles: la *inversión* y la *reciprocidad.* Sería largo explicar –y lo haría mejor un psicólogo– el significado de la reversibilidad y sus dos formas a las que estamos haciendo alusión. Baste decir, ahora, en términos muy generales, que la reversibilidad se refiere a la posibilidad de hacer algo que anule o compense una cierta acción previa, de modo que se tenga nuevamente una situación similar a la que se tuvo antes; en cuanto a sus dos formas, "que ambas estarán juntas a lo largo de todo el desarrollo, pero que sólo llegarán a una síntesis en un sistema único, cuando, al nivel de las operaciones formales, después de los 11 o 12 años, se constituya el grupo de las cuatro transformaciones interproposicionales"; y en cuanto a su vinculación estrecha con el aprendizaje de la matemática, que mientras no haya reversibilidad en el pensamiento, no pueden existir en el niño nociones de conservación, ni siquiera en los campos más simples de la observación; por ejemplo, conservación de la equivalencia entre dos conjuntos cuando sólo a uno se varía la ubicación de sus elementos y ya se pierde la "correspondencia óptica", o conservación de las longitudes de dos varillas, cuando una se desplaza ligeramente respecto a la otra. Según Piaget, las primeras estructuras representativas reversibles, que se van construyendo hacia los 7 u 8 años, llevan consigo, necesariamente, la elaboración de las correspondientes nociones de conservación.

Por ser de gran importancia en el planteamiento piagetano y por su natural vinculación con la matemática, ahora nos detendremos ligeramente en las estructuras matemáticas, que Piaget considera que corresponden a estructuras elementales de la inteligencia.

Tengamos en cuenta que las *estructuras matemáticas,* en general, quedan establecidas al definir una o varias relaciones entre elementos de un conjunto, independientemente de la naturaleza de éstos, y al postular que tal o tales relaciones satisfacen ciertas condiciones, que son los axiomas de la estructura considerada.

Estructuras algebraicas

Son aquellas en las que las relaciones que se definen son "leyes de composición"; es decir, una manera de relacionar tres elementos del conjunto, de modo que uno de ellos queda determinado de manera única en función de los otros dos. Una estructura algebraica muy importante es la estructura de *grupo*, que si bien es cierto aparece como ente matemático recién en el siglo XIX, según Piaget, expresa algunos de los mecanismos más característicos de la inteligencia.

Para comprender más fácilmente esta estructura, veamos un ejemplo familiar a todos nosotros: el conjunto de los números fraccionarios, sin considerar el cero, en el que se define como ley de composición la multiplicación. Advertimos que en este conjunto:

- podemos tomar dos elementos cualesquiera y al multiplicarlos siempre obtendremos otro elemento del conjunto. Suele decirse que el conjunto es cerr*ado* con respecto a la operación definida;
- existe un elemento del conjunto, la fracción 1, que al multiplicarla por cualquier otra fracción da como resultado la misma fracción. Se dice que el conjunto posee un elemento *identidad*;
- para todo elemento del conjunto siempre existe un elemento, también del conjunto, llamado su *inverso*, de modo que al multiplicarlos se obtiene el elemento 1, o sea el elemento identidad. Por ejemplo, para la fracción 3/5 su inverso es la fracción 5/3, pues al multiplicarlas se obtiene 1, y
- para multiplicar tres fracciones es indiferente multiplicar dos de ellas primero y luego el resultado con la tercera, que multiplicar la primera con el resultado de multiplicar la segunda con la tercera. Esta propiedad es conocida como *asociatividad*.

En general, si en un conjunto cualquiera se define una ley de composición, de modo que se cumpla:

- que el conjunto sea cerrado respecto a tal ley;
- que todo elemento tenga un correspondiente elemento inverso;

- que exista un elemento identidad, y
- que la ley de composición sea asociativa, diremos que tal conjunto, con su ley de composición, tienen una estructura de grupo.

Para Piaget, Beth y Dieudonné (1963, p. 11), el conjunto de esquemas de acción, en el cual se define la ley de composición de "coordinar" esquemas, tiene una estructura de grupo, pues:

- "la coordinación de dos esquemas de acción constituye un nuevo esquema que se añade a los anteriores;
- una coordinación puede, a voluntad, realizarse o suprimirse, y, dicho más simplemente, una acción inteligente puede desarrollarse en los dos sentidos;
- el retorno al punto de partida permite volver a encontrar éste sin cambio, y
- puede alcanzarse el mismo punto de llegada por diferentes caminos, sin que dicho punto cambie, cualquiera que sea el camino elegido".

Debemos reconocer que desde el punto de vista del rigor matemático estas afirmaciones no son suficientemente claras, pero Piaget estaba convencido de que el grupo es la "traducción simbólica" de algunos de estos caracteres fundamentales del acto de inteligencia: la posibilidad de una coordinación de las acciones (se está refiriendo a que el conjunto de los esquemas de acción es cerrado respecto a la coordinación); la posibilidad de los retornos (se está refiriendo a la existencia del inverso de cada esquema de acción; es decir a la reversibilidad), y la posibilidad de los giros (se está refiriendo a la asociatividad)

La estructura de grupo se da completa todavía a partir de la adolescencia, con el grupo de operaciones interproposicionales –cuando se consideran no sólo objetos sino también hipótesis–, pero las primeras operaciones lógicas relacionadas con números naturales, recta, medida, tiempo, etc., exigen también, para constituirse, ciertas estructuras de tipo algebraico, aún no idénticas al grupo, pero con algunas semejanzas. Piaget define, entonces, las estructuras llamadas *agrupamientos*, que en parte son grupos y en parte son reticulados, pero en conjunto no son ni lo uno ni lo otro. Define nueve agrupamientos elementales que describen la estructura cognoscitiva del subperiodo operacional concreto (entre 7 y 11 años).

Los agrupamientos:

- describen la organización de las operaciones lógicas propiamente dichas; esto es, de las clases y relaciones lógicas;
- son adecuadas para la organización de lo que Piaget llama "operaciones infralógicas" (las vinculadas a la posición, la proximidad, la relación parte-todo, etc.);
- servirían también como modelos para las operaciones cognoscitivas relativas a valores y relaciones interpersonales.

Estructuras de orden

Son estructuras de relaciones y no de operaciones. En éstas la relación se define para dos elementos del conjunto, sin que esto signifique la determinación unívoca de uno de los elementos en función del otro. Las propiedades que debe cumplir tal relación son la reflexividad, la antisimetría y la transitividad. Como ejemplos tenemos al conjunto de números naturales con la relación "menor o igual" y al conjunto de subconjuntos de un conjunto con la relación de inclusión. Una estructura de orden a la que Piaget le presta mucha atención es la de *reticulado*. Ésta se caracteriza por la propiedad adicional según la cual todo par de elementos del conjunto tiene un supremo y un ínfimo. Piaget encuentra también la reversibilidad en el reticulado, no en su forma de inversión, como en los grupos, sino en su forma de *reciprocidad*; es decir, una transformación en base a la permutación del orden, sin negación de las operaciones en juego.

Estructuras topológicas

Éstas tienen que ver con nuestra concepción del espacio y dan una formulación matemática abstracta a las nociones intuitivas de vecindad, de límite y de continuidad. Desde el punto de vista topológico son equivalentes una región cuadrada y una región circular, y una aproximación intuitiva a esta afirmación matemática es que cualquiera de estas figuras puede obtenerse mediante transformaciones continuas de la otra. Por eso en textos de divulgación sobre topología suele encontrarse la expresión "la matemática de la plastilina". Con lo dicho ya podemos ver la vinculación de la topología con la geometría y entender más fácilmente la importancia que le asignó Piaget a estas estructuras al observar que el niño va aprendiendo a ubicarse en el espacio y adquiriendo criterios de interior, de exterior, de curva cerrada, etc. Éstas son parte de sus construcciones de nociones geométricas, y Piaget advierte que van ocurriendo precisamente en orden inverso a cómo se formalizaron a lo largo de la historia.

Comentarios finales

Para terminar, deseamos hacer algunas puntualizaciones relacionadas con nuestro quehacer docente, y con la enseñanza y el aprendizaje de la matemática:

- Ante los estudios y propuestas de Piaget en torno a los conocimientos matemáticos, y los significativos avances de esta disciplina, surgieron naturalmente innovaciones en su enseñanza. En la actualidad todavía existen las corrientes que podemos llamar ortodoxa y numérica, que ponen énfasis, la primera en el trabajo detenido con conjuntos, clasificaciones y "seriaciones" para llegar al concepto de número, y la segunda en un trabajo menos detenido en los conjuntos, que lleve más rápidamente a identificar números y a operar con ellos. Particularmente, creemos que no se trata de alinearse con una de las corrientes, sino de buscar creativamente alternativas en cada realidad concreta, teniendo en cuenta los estudios y advertencias que hace el mismo Piaget y su grupo de investigadores y las experiencias previas de los niños. En este sentido, consideramos muy interesante el proyecto que actualmente se viene trabajando en el Perú, de articulación de la educación inicial con la educación primaria

- Los docentes tenemos el reto de mejorar la calidad de la educación matemática en el Perú, y al asumirlo, debemos ser más respetuosos de los ritmos, las iniciativas, los sentimientos, los conocimientos y experiencias previas, las curiosidades y las diversas etapas del desarrollo intelecutal de los educandos. Sobre todo en los niveles correspondientes a periodos anteriores al de las operaciones formales –o sea antes de la adolescencia– debemos tener especial cuidado de no caer en una enseñanza meramente verbal, pues mediante ésta se obligará a aceptar conocimientos ya elaborados, creando bloqueos emocionales y "fobias" que se llevan a la universidad y en general a la vida adulta, con su consiguiente efecto multiplicador negativo.

- Es esencial tener docentes bien formados, con bases sólidas no sólo en los aspectos pedagógico y psicológico, sino también en el aspecto matemático, pues sólo así podrán orientar adecuadamente las iniciativas de los educandos y tener la capacidad y creatividad necesarias para brindar oportunidades de construcción de conocimientos físicos y lógico-matemáticos a los niños. En la tarea de formación de docentes, es claro que tienen gran responsabilidad las universidades, los institutos superiores pedagógicos y el Ministerio de Educación con sus programas de capacitación docente.

- Es muy grande la responsabilidad que tenemos los docentes de formar a los jóvenes, a los ciudadanos y a los profesionales del siglo XXI, que están viviendo ya la era del conocimiento, de la información, de la competencia y de los avances tecnológicos. Tenemos que cambiar de actitudes, revisar nuestro ejercicio docente y educar poniendo más énfasis que nunca en desarrollar los conocimientos lógico-matemáticos y con ellos las capacidades de observar, de relacionar, de organizar la información y de crear nuevos conocimientos y alternativas, mas allá de los paradigmas imperantes en nuestra sociedad. Evidentemente, conocer más los estudios de Piaget y de sus investigadores, así como las críticas a sus conclusiones, serán de gran utilidad en esta opción.

Referencias

Kamii,C. y DeVries, R. (1983). *El conocimiento físico en la educación preescolar. Implicaciones de la teoría de Piaget.* Madrid: Siglo XXI.

Piaget, J. (1975). *Cómo forman los niños los conceptos matemáticos.* Blume.

Piaget, J. (1986). *Seis estudios de psicología.* Barcelona: Barral y Labor.

Piaget, J.; Beth, E.W., y Dieudonné, J. (1963). *La enseñanza de las matemáticas.* Madrid: Aguilar.

Piaget, J.; Choquet, G.y Dieudonné, J. (1978). *La enseñanza de las matemáticas modernas.* Madrid: Alianza Editorial.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1974). *The child's construction of quantities.* Londres: Routledge and Kegan Paul.