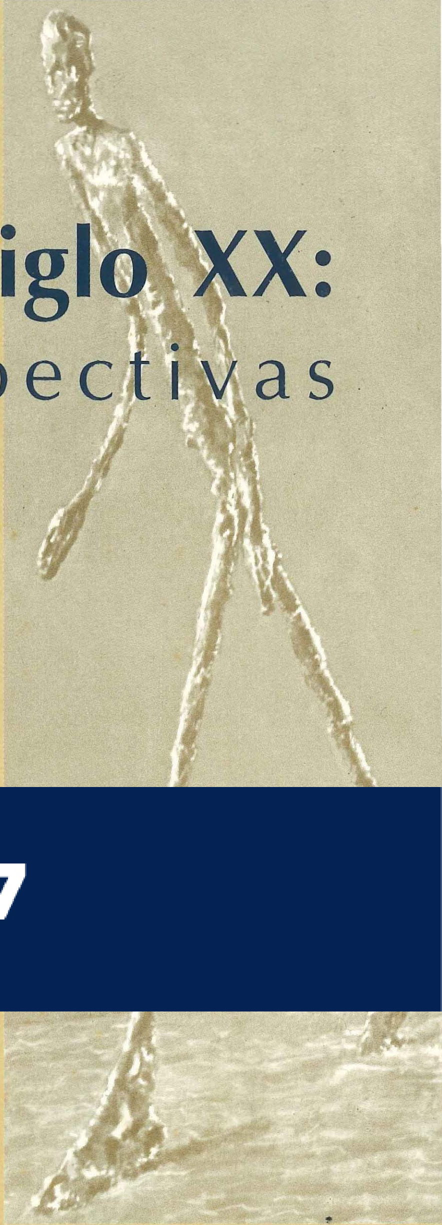
# La filosofía del siglo XX: balance y perspectivas

Miguel Giusti | editor



## Capítulo 47

Actas del
VII Congreso Nacional
de Filosofía

Pontificia Universidad Católica del Perú | Fondo Editorial 2000

Av. Universitaria cuadra 18, San Miguel, Lima-Perú
Telf. 460-0872 - 460-2291 - 460-2870 anexos 220 y 356
Cuidado de la edición: Rocío Reátegui
Diseño de cubierta: Gisella Scheuch

*La filosofía del siglo XX: balance y perspectivas*

Impreso en el Perú - Printed in Peru
Primera edición: julio del 2000
ISBN 9972-42-354-9
Depósito Legal: 1501052000-2618

# ¿Está la teoría de los tipos lógicos libre de paradojas?

Antonio Belaunde
Sociedad Peruana de Filosofía

Al ingresar a la Sociedad Peruana de Filosofía, si mal no recuerdo hacia 1971, presenté una ponencia sobre el tema de las paradojas lógico-semánticas, una parte de la cual estaba destinada a demostrar que dentro de la teoría de los "tipos lógicos" con que Russell y Whitehead pensaron resolver el problema de las paradojas, puede construirse una paradoja muy similar a la célebre paradoja que lleva el nombre de Russell, que sin duda era la principal de toda la serie de las antinomias que plagaron a la lógica-matemática a principio del siglo.

Recordémosla brevemente.

Prima facie *hay conjuntos que se contienen a sí mismos y otros que no se contienen a sí mismos. Sea Q el conjunto de los conjuntos que no se contienen a sí mismos. Surge de inmediato la cuestión de si Q se contiene o no se contiene a sí mismo, pero cualquier respuesta que se dé a esta pregunta implica su contradictoria.*

Es sabido el efecto desolador que la comunicación de este hallazgo del *enfant terrible* de la filosofía produjo en el célebre matemático alemán Gottlob Frege, quien creyó amenazado por ella el enorme esfuerzo que acababa de concluir para la formalización de la lógica y la aritmética. El propio Russell propuso la salida en la forma de lo que llamó "teoría de los tipos lógicos", o sea una estratificación formal del dominio del lenguaje en la cual ningún conjunto podría contenerse a sí mismo, porque sólo puede ser miembro de conjuntos de "tipo" superior. (La exposición de la teoría de los tipos lógicos constituye una capítulo clave de la célebre obra conjunta de Whitehead y Russell (tres ladrillezcos volúmenes) denominado *Principia Mathematica*; pero antes Russell le dedicó el año 1908 un célebre artículo titulado "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types", lo que indica que la teoría es propiamente russelliana, sin perjuicio que Whitehead haya cumplido en ella una función censora.) Este postulado de estratificación lo completó Russell con uno que llamó de "ambigüedad sistemática", según la cual los términos puramente lógicos, es decir lo que la antigua escolática llamaba términos "sincategoremáticos", inclusive, por ejemplo, la relación "ser miembro de un conjunto dado" tiene un valor o significado constante en los diferentes niveles o tipos.

El supuesto básico de Russell es que su paradoja era el resultado de la autoreferencia, es decir, de admitir un uso reflexivo de la relación "ser miembro de un conjunto dado". Rechazada así la reflexividad o uso auto-referencial de esa relación la paradoja debía quedar salvada. Pero he aquí que Russell —¿o fue Whitehead?— se dio cuenta que ciertos teoremas básicos del análisis matemático indispensables para precisar la noción de continuidad de la recta y el plano comportan una auto-referencia de conjuntos. Para salvar este segundo escollo Russell formuló lo que llamó el postulado de "reductibilidad", el cual hacía que mediante la noción de ambigüedad sistemática o algunas libertades haciendo transitiva la conversa de la relación "miembro de", en cuyos detalles no podemos entrar, se permitiesen ciertas aplicaciones no paradojales de la auto-referencia.

No vamos a discutir esto ahora, sino antes bien mostrar que no es propiamente la auto-referencia de la relación de pertenencia a un conjunto la causante de la paradoja: más bien es el uso negativo de cualquier función reflexiva lo que produce una paradoja, cosa que se ilustra con el célebre caso del barbero del regimiento que debe afeitar a todos, oficiales y soldados, miembros de tal regimiento que no se afeiten a sí mismos. ¿Debe el barbero afeitarse o no por su propia mano?

Ahora bien, en la ponencia a que me he referido al comenzar este escrito yo pretendía construir una paradoja de uso negativo de la auto-referencia dentro de la propia teoría de los tipos lógicos. Me permito citarme textualmente, si bien con alguna enmienda en pro de la claridad: "Sea $C^2$ la clase de todas las clases del nivel 1, y sea $C^3$ la clase de todas las clases del nivel 2 (el nivel o tipo 0 (cero) es puramente objetual, no tiene clases). Entre ambas puede establecerse una relación de correspondencia, la que puede definirse por el hecho de que sus definiciones sólo difieren por la indicación de los niveles respectivos. En lo demás, son formalmente idénticas. Ahora bien, sea $A^3$ la clase de todas las clases del nivel 2 que tienen correspondientes, en el sentido previamente indicado, en otros niveles (o por lo menos en el nivel o tipo inmediato superior), e igualmente, sea $A^4$ la clase de todas las clases del nivel 3 que tienen asimismo correspondientes en otros niveles (a comenzar por el inmediato superior). Por añadidura, sean $B^3$, $B^4$, etc. las clases de todas las clases de los niveles 2, 3, etc., que son miembros de su correspondiente en el nivel inmediato superior. Las respectivas clases complementarias son no$B^3$, no $B^4$, etc. Ahora bien, surge la pregunta: ¿es no$B^3$ miembros de no$B^4$? Cualquiera que fuese la respuesta que se dé a esta pregunta, ella repite una contradicción exactamente paralela a la paradoja de Russell."

El único de los filósofos presentes en la sesión de la Sociedad Peruana de Filosofía, donde expuse el precedente argumento, que de alguna manera lo objetó, fue un destacado profesor quien, sin rechazar el fondo de mi argumento, se limitó a decir que cualquier intento de formalizarlo sería imposible. Yo le respondí que si eso era así, entonces el principio de ambigüedad sistemática carecería de eficacia y significación tanto lógica como matemática, y por vía de consecuencia el postulado de reductibilidad no podría ser válido. En efecto, yo no veo qué dificultad puede haber en formalizar la relación de "correspondencia" de clases de diferentes niveles, relación que ciertamente no es reflexiva, pero nada impide considerarla a la vez simétrica y transitiva, lo cual haría de ella una relación de *cuasi* equivalencia, como ocurre por ejemplo en geometría euclideana con la relación entre rectas paralelas. En todo caso, esta reflexión no estaba contenida en mi trabajo original.

La cosa quedó allí. Ninguna de las partes abandonó sus respectivas posiciones, de modo que puedo considerar que tal es todavía el estado actual de la cuestión. Me permito, sin embargo, recordarla en vista de que acaso la posibilidad de que un andamiaje lógico erigido como abortante para impedir el derrumbe de un edificio lógico formal esté a su vez corroído por una paradoja construible infiltrándose, como un virus electrónico, dentro de él.

¿Qué solución ha de tener todo este asunto? Mi ponencia pretendía dar esa solución, pero no sobrecarguemos este papel por ahora con un desarrollo que nos llevaría demasiado lejos y dejemos la cosa pendiente. Básteme decir que estoy convencido que la solución existe, en un sentido similar al señalado por el filósofo franco-ruso André Koyré a propósito de la paulina paradoja de Epiménides. Queda pues mucha tela por cortar.