

INVESTIGACIONES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Jesús Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra

Editores

Capítulo 11



Investigaciones en educación matemática

Jesús Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra, editores

© Jesús Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra, 2016

© Pontificia Universidad Católica del Perú, Fondo Editorial, 2016

Av. Universitaria 1801, Lima 32, Perú

feditor@pucp.edu.pe

www.fondoeditorial.pucp.edu.pe

Diseño, diagramación, corrección de estilo
y cuidado de la edición: Fondo Editorial PUCP

Primera edición: octubre de 2016

Tiraje: 500 ejemplares

Prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio,
total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores.

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2016-12807

ISBN: 978-612-317-201-5

Registro del Proyecto Editorial: 31501361601055

Impreso en Tarea Asociación Gráfica Educativa

Pasaje María Auxiliadora 156, Lima 5, Perú

VISUALIZACIÓN DE CUADRILÁTEROS EN EL REGISTRO FIGURAL DINÁMICO¹

Visualization of quadrilaterals in the dynamic figural register

Cecilia Gómez Mendoza²
Jesús Victoria Flores Salazar³

RESUMEN

El presente artículo tiene como objetivo analizar cómo un estudio de cuadriláteros, que desarrolla el proceso de visualización en el registro figural dinámico, contribuye en la formación de profesores de nivel secundario. En nuestro estudio, tomamos algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica para realizar el análisis *a priori* y *a posteriori* de los procesos deductivos que se evidencian en el desarrollo y coordinación de sus aprehensiones de tres profesores participantes. Como marco teórico utilizamos la Teoría de Registros de Representación Semiótica y focalizamos nuestro interés en los tratamientos en el registro figural. Concluimos que los participantes desarrollaron y coordinaron su aprehensión perceptiva y operatoria empleando para ello diferentes tratamientos en el registro figural dinámico, con ayuda del ambiente de geometría dinámica (AGD) GeoGebra.

Palabras claves: *aprehensiones; visualización; GeoGebra.*

¹ Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de Matemática en Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT participación PUC-SP/Brasil y PUCP/Perú. IREM-PUCP, Proyecto Integrado Internacional: PI0272.

² Pontificia Universidad Católica del Perú – Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. a20089928@pucp.pe

³ Pontificia Universidad Católica del Perú – DIMAT-PUCP. jvflores@pucp.pe

ABSTRACT

This article aims to analyze how a study on quadrilaterals, which develops the visualization process in the dynamic figural register, contributes to secondary teacher training. In our study we take some aspects from Didactic Engineering to make both *a priori* and *a posteriori* analyses of the deductive processes that are evident in three participating teachers' development and coordination of apprehensions. We used the Theory of Registers of Semiotic Representation as a theoretical framework, focusing our interest on treatments in the figural register. We concluded that the participants developed and coordinated their perceptive and operational apprehensions using different treatments in the dynamic figural register, supported by the dynamic geometry environment (DGE) GeoGebra.

Keywords: *apprehensions; visualization; GeoGebra.*

CONSIDERACIONES INICIALES

A partir de las dificultades y errores que observamos en los estudiantes cuando desarrollan problemas de geometría, surge nuestro interés en analizar cómo se desarrolla el proceso de visualización, en el estudio de cuadriláteros, cuando se utiliza el registro figural dinámico en un grupo de profesores de educación secundaria, ya que son ellos los que van a trabajar directamente con los estudiantes, presentar el contenido y diseñar sus estrategias de enseñanza. Nos basamos en la Teoría de Registro de Representación Semiótica y su ampliación a la visualización de Duval (2011). En ese sentido, el autor afirma que la deconstrucción dimensional constituye el proceso central de la visualización en geometría que se da con el desarrollo de la aprehensión perceptiva y operatoria, en el registro figural en coordinación con la aprehensión discursiva.

En esa misma línea de pensamiento, las investigaciones realizadas en el área de educación matemática por Almeida (2007) y Flores y Moretti (2006) en geometría muestran que existe la necesidad de desarrollar

en los sujetos habilidades visuales que les permitan ver en una representación la forma y posición, a fin de que pueda descomponer una figura en subfiguras para luego asociarlas. Según los autores, la falta de estas habilidades origina errores en la resolución de problemas de geometría; además, propicia interferencias entre el objeto matemático y su representación; es decir, se da mayor importancia a lo visual que a lo conceptual.

Con respecto a la influencia de los ambientes de geometría dinámica (AGD), Laborde (1994) y Larios (2006) señalan que su empleo influye en la lectura espacial del objeto geométrico representado; es decir, facilita la identificación de todas las propiedades del objeto. Además, Salazar (2009) afirma que una de las funciones que caracteriza a estos ambientes es la función «arrastre», cuyo uso proporciona diferentes posiciones y configuraciones de una misma figura, además de permitir realizar tratamientos de manera diferente a los que se efectúan en ambientes no dinámicos. A partir de ello, la autora define el registro figural dinámico. Estas investigaciones dan a conocer la problemática y señalan la relevancia de desarrollar investigaciones que involucren el proceso de visualización, centrándose en estudiar cómo se desarrolla el proceso de visualización, desde la perspectiva de Duval (2011), en un grupo de profesores de nivel secundario, cuando movilizan nociones de cuadriláteros usando el registro figural dinámico en el AGD GeoGebra.

ELEMENTOS TEÓRICOS

Como elemento teórico, tomamos la teoría de Registros de Representación Semiótica. Uno de los aspectos que Duval (2011) señala es que las figuras geométricas, el lenguaje algebraico, gráfico y la lengua natural representan diferentes registros de representación semiótica, cada uno de los cuales permite que los sujetos realicen diferentes operaciones cognitivas. Un registro de representación semiótica, según el autor, debe permitir tres actividades cognitivas: formación, tratamiento

(vinculado a las modificaciones internas que se pueden realizar en ese registro) y conversión, que es una transformación externa que hace que se pase de una representación a otra. Para nuestro estudio, nos centraremos en el registro figural, porque los tratamientos realizados en el registro nos conducirán a la solución del problema. El investigador afirma que en el registro figural, las figuras geométricas combinan dos tipos de variación: la variable visual cualitativa (forma) y la variable dimensional (unidades figurales): 0 (un punto), 1 (una línea) o 2 (superficie).

Para Duval (2011), las figuras tienen un papel intuitivo y heurístico, porque permiten hacer tratamientos tales como: dividir, deducir, rotar y trasladar lo que permite anticipar los resultados o seleccionar una solución de un problema. La función heurística de una figura geométrica se sustenta, según el autor, en el tipo de aprehensión: la *aprehensión perceptiva*, caracterizada por la identificación de las formas; la *aprehensión secuencial*, que se refiere al orden secuencial de construcción de la figura; la *aprehensión discursiva*, con afirmaciones matemáticas, se establece una interacción entre los tratamientos figurales y discursivos y, finalmente, la *aprehensión operatoria*, que trata de las modificaciones que se pueden realizar en una figura, y son de tres tipos: *óptica*, *posicional* y *mereológica*. Esta última nos interesa porque realizaremos la descomposición de una figura en subconfiguraciones para luego reconfigurarla.

Sin embargo, como nos interesa estudiar cómo se desarrolla el proceso de visualización de cuadriláteros en el registro figural dinámico cuando se interactúa con el AGD GeoGebra, enseguida presentamos cómo se configura este registro. En ese sentido, afirmamos que las tres actividades cognitivas fundamentales para la constitución de un registro de representación semiótica —es decir, formación, tratamiento y conversión— se realizan de manera diferente que en ambientes no dinámicos, ya que estos ambientes poseen dos funciones fundamentales que son el arrastre y la manipulación directa.

Así, la formación en AGD puede darse cuando el sujeto, para representar un determinado objeto geométrico, escoge, de la barra de herramientas, una herramienta determinada que le permite crear la figura deseada. Asimismo, las reglas de formación de una representación semiótica en estos ambientes también dependen de cómo han sido definidas las unidades figurales elementales y su combinación, ya que el sujeto debe seguir una secuencia de construcción.

En cuanto a los tratamientos en AGD, estamos de acuerdo con Duval (2011) cuando afirma que el uso de computadoras (*software*) permite acelerar los tratamientos de una figura y muestra de manera más rápida y precisa la solución de un determinado problema. Sin embargo, destacamos que la celeridad de tratamientos se realiza cuando el sujeto usa las funciones de manipulación directa y arrastre del AGD, porque estas funciones permiten realizar, en la figura: cambio de posición, cambio de longitud de sus lados y operaciones de reconfiguración de manera instantánea. La figura 1 muestra cómo se pueden realizar los tratamientos en AGD.

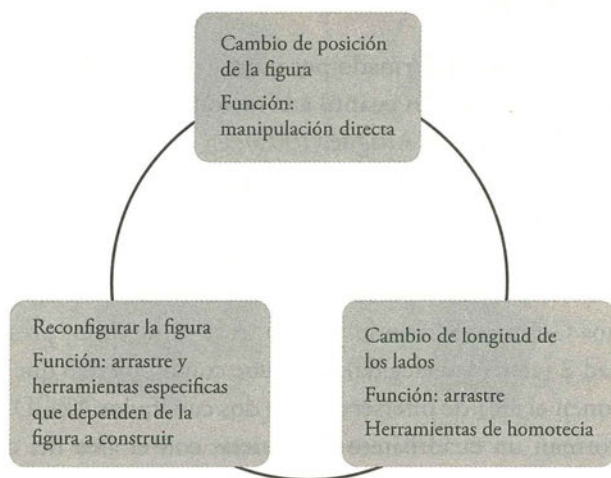


Figura 1. Tratamientos en AGD.

Sin embargo, debemos señalar que esos tratamientos no se realizan necesariamente por separado o de manera secuencial, porque en AGD se pueden realizar estos de manera simultánea.

En el caso de la conversión, Duval (2011) menciona que es una transformación externa de una representación en otra y que conserva una parte o la totalidad del contenido de la representación inicial. En ese sentido, la conversión que se realiza de lengua natural a una representación figural es llamada conversión de ilustración; mientras que la conversión inversa es una descripción. Señala también que la ilustración, a pesar de no ser una conversión compleja, sí es pertinente porque permite a los sujetos solucionar un determinado problema.

Por ejemplo, para dar solución a un problema de geometría que es dado en lengua natural, el sujeto que interactúa con AGD utiliza las diferentes herramientas del *software*, así como las funciones arrastre y manipulación directa que le permiten realizar la representación figural y validar sus conjeturas para solucionar el problema dado.

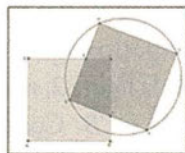
LA INVESTIGACIÓN

El grupo elegido fue conformado por quince profesores de matemática en formación continua. En cuanto a la metodología, nos apoyamos en la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995); en ese sentido, realizamos el análisis *a priori* y *a posteriori* de cada actividad. Las actividades propuestas fueron estructuradas en una secuencia de cuatro actividades. En el artículo presentaremos la segunda actividad de la secuencia y analizaremos las acciones, por separado, de tres profesores participantes que llamaremos Gustavo, Fernando y Lidia. A continuación, presentamos la actividad 2 (actividad elegida) que tiene como objetivo que los sujetos relacionen el área de intersección de dos cuadrados ABCD y EFSH cuando forman un cuadrilátero cualquiera, con el área del cuadrado ABCD.

Abra el archivo Actividad_2 en la que los cuadrados ABCD y EFSH son congruentes y el cuadrado EFSH que está inscrito en una circunferencia, gira alrededor del centro del cuadrado ABCD

Manipule el punto S de tal manera que la intersección de las figuras forme la configuración de un cuadrilátero cualquiera.

¿Cuál es la relación dd área formada por la intersección de las figuras con el área del cuadrado ABCD? Justifique su respuesta haciendo uso del Geogebra (puede hacer trazos auxiliares y usar todas las herramientas que conoce, menos la herramienta de medida de área dd software).



Pensamos *a priori* que los profesores utilizarán la función arrastre del GeoGebra, la que les ayudará a tener diferentes configuraciones de la intersección de las figuras, ya sea en la forma, posición e invariantes geométricos (relación de medidas angulares) y esto podría facilitar el desarrollo de las aprehensiones perceptivas y operatorias del registro figural. Como se puede observar en las posiciones I, II, III y IV de la figura 2, el cuadrilátero de medida de área M gira alrededor del punto E, ningún par de lados es paralelo y las invariantes son dos ángulos internos que miden 90° .

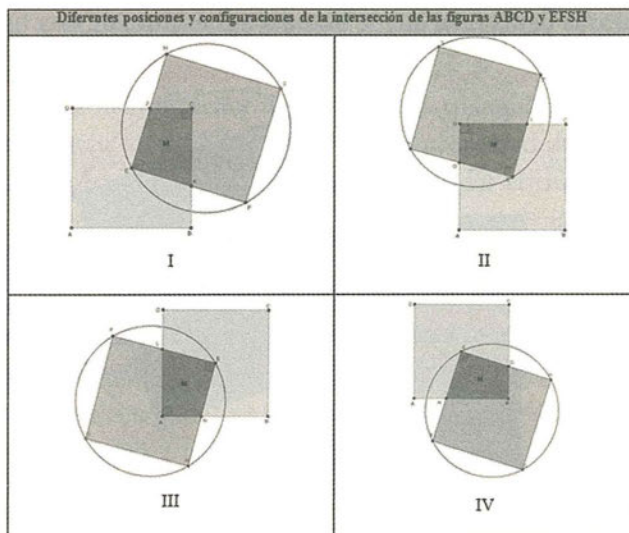


Figura 2. Diferentes posiciones y formas de intersección de las figuras ABCD y EFSH.

En la situación propuesta, los profesores deben establecer la relación de la medida del área de la intersección de las figuras ABCD y EFSH con respecto a la del cuadrado ABCD. Pensamos que si toman la posición I de la figura 2, realizarán el trazo de la mediatriz de dos lados consecutivos \overline{CD} y \overline{CB} . Como consecuencia, las mediatrices dividirán al cuadrado ABCD y al cuadrilátero EJCK en subfiguras; pero, con el arrastre del vértice S, podrán modificar el número de subconfiguraciones del cuadrilátero ABCD y EFSH como figuras superpuestas. Por ejemplo, en la figura 3, observamos en el cuadrado ABCD las siguientes subfiguras: dos cuadrados, dos triángulos y dos trapezios y si observamos el cuadrilátero EJCK (como área de intersección de los cuadriláteros ABCD y EHSF) se subdivide en un cuadrilátero cualquiera y un triángulo. En este caso, ellos habrán realizado una modificación mereológica para establecer una relación entre las nuevas subfiguras (regiones triangulares y cuadrangulares). De acuerdo con Duval (2011) la secuencia de subfiguras (triángulos y cuadriláteros) de la misma dimensión los conducirá a identificar la figura final que se muestra a continuación (ver figura 3).

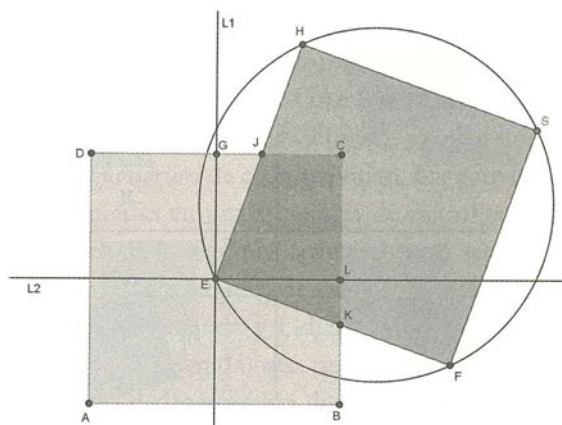


Figura 3. Trazo de mediatrices L1 y L2 sobre el cuadrado ABCD.

Esperamos que al arrastrar el vértice S puedan discriminar las regiones triangulares y cuadrangulares, lo que nos indicaría que están desarrollando su aprehensión operatoria como mostramos en la figura 4.

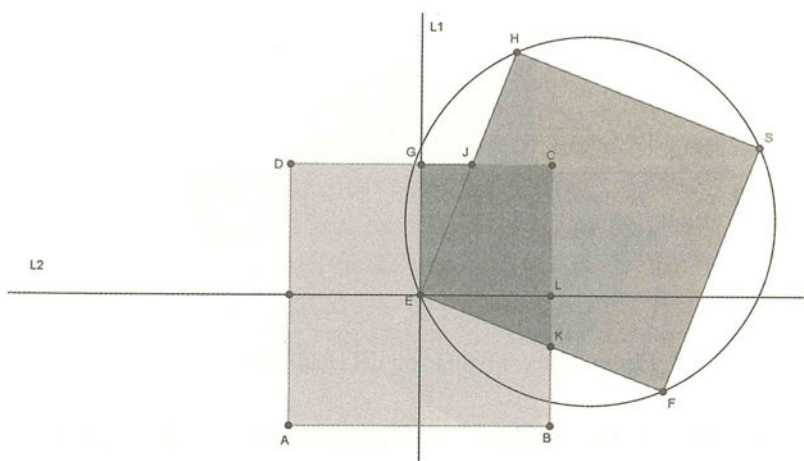


Figura 4. Modificación mereológica en los cuadrados ABCD y EFSH.

A partir de la identificación de las regiones triangulares, suponemos que relacionarán los ΔEKL y ΔEJG con la propiedad de congruencia de triángulos (caso ALA), al comparar y trasladar el triángulo ΔEKL sobre la zona triangular ΔEJG . Esta acción caracteriza una aprehensión operatoria de reconfiguración, construyendo un contorno diferente al anterior, como se puede apreciar en la figura 5. La figura cumple su función heurística por la diversidad de operaciones que los profesores pueden realizar sobre ella.

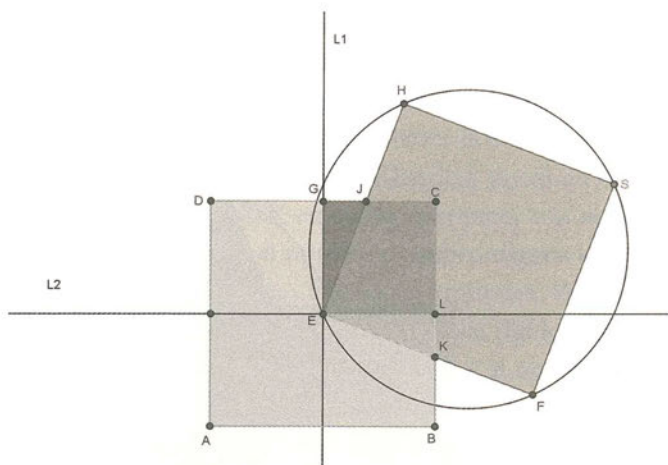


Figura 5. Reconfiguración del cuadrilátero ELCJ.

Esperamos que los profesores en el proceso articulen las aprehensiones perceptivas, operatorias y discursivas, para lograr una articulación global, y desarrollen la visualización como condición necesaria para el aprendizaje de la geometría.

ANÁLISIS A POSTERIORI DE LA PRODUCCIÓN DEL PROFESOR GUSTAVO

El profesor Gustavo, como se observa en la figura 6, ha tomado una estrategia diferente a lo previsto *a priori*. Él agrega nuevos elementos sobre el área del cuadrado ABCD y realiza las siguientes acciones: marca los puntos medios de los lados BC y DC, traza el polígono MCNE, relaciona los segmentos MJ, NK, EJ y EK midiendo cada segmento, los triángulos MEJ y ENK nombrándolos como «S» y «T» respectivamente, y el polígono EJC� nombrándolo «V». Lo que implica que la figura cumple su función heurística y el profesor Gustavo, apoyándose en las herramientas del GeoGebra —puntos medios y la función «arrastre»—,

puede reevaluar sus acciones, tal como lo afirma Laborde (1994). Según Duval (2011), la secuencia de subfiguras lo conducirá a la solución del problema. Pensamos que la medición de segmentos es para confirmar la congruencia de triángulos EMJ y ENK.

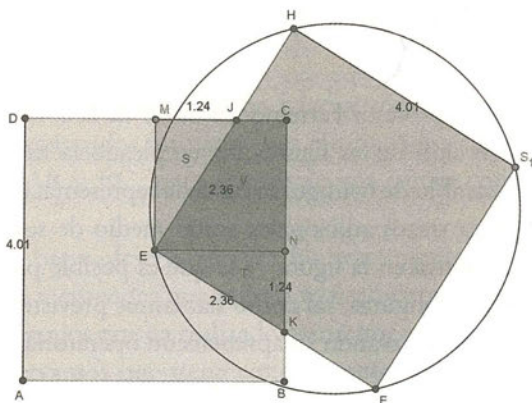


Figura 6. Representación figural realizada por el profesor Gustavo.

En el discurso que describe Gustavo evidenciamos que describe las aprehensiones operatorias como: el cuadrilátero EJKH tiene como medida de área la suma de V y T e igual a la cuarta parte del cuadrado, las áreas S y V forman un cuadrado, entonces las áreas S y T son iguales, lo que demuestra una asociación de subfiguras y concluye de la siguiente manera: las áreas T y V suman la cuarta parte del área del cuadrado.

Observamos que no ha recurrido a definición o teorema alguno, pero sí a una descripción de los procesos deductivos, apoyado en los tratamientos realizados en la representación que lo justifican. Además, existe una congruencia entre la representación figural y la descripción que realiza.

Su justificación argumentativa⁴, fundamentada en la aprehensión operatoria, no implica que esté a la altura de demostrar el resultado, tal como lo afirma Duval (2011); pero, la reconfiguración realizada en la figura implica que ha visualizado la solución del problema.

ANÁLISIS A POSTERIORI DE LA PRODUCCIÓN DEL PROFESOR FERNANDO

Observamos que el profesor Fernando, a partir de la configuración inicial de la intersección de las figuras, ha empleado la función arrastre porque hay un cambio de configuración de la representación propuesta. El profesor realiza trazos adicionales como medio de soporte perceptivo, según se muestra en la figura 7, lo que es posible para identificar una secuencia de subfiguras, tal como habíamos previsto *a priori*, ello implica que está desarrollando su aprehensión operatoria.

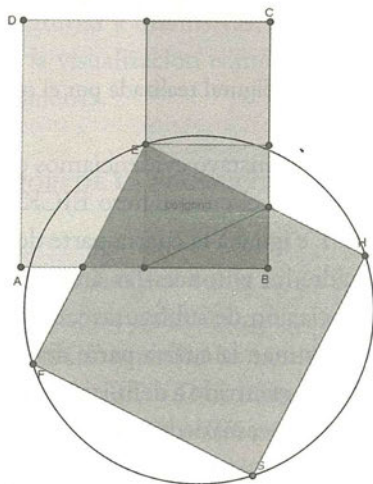


Figura 7. Representación figural realizada por el profesor Fernando.

⁴ Justificación argumentativa: descripción que tiene congruencia entre la aprehensión operatoria y la actividad discursiva.

En su discurso, realizado en el GeoGebra, el profesor Fernando (ver figura 8) escribió lo siguiente:

Formo un cuadrilátero y ubico puntos medios de los lados y trazo segmentos, así puedo visualizar triángulos que, cuando los uno, formo un cuadrado.

Figura 8. Discurso del profesor Fernando.

En el discurso, se observa que ha relacionado y reconfigurado mentalmente los triángulos formados por el punto E y los puntos medios de los lados AB y BC, para encontrar una nueva configuración: un cuadrado.

Con una breve descripción de los tratamientos realizados en la figura, nos da a entender que trabaja básicamente en el registro figural en el que pensamos que ha realizado mentalmente una reconfiguración. Aunque observamos que tiene conocimientos matemáticos, notamos que desarrolla pocos tratamientos en el registro discursivo. Pensamos que el profesor Fernando ha visualizado la solución del problema, pero tiene dificultades para expresar la solución del problema.

ANÁLISIS A POSTERIORI DE LA PRODUCCIÓN DE LA PROFESORA LIDIA

En el caso de la profesora Lidia, creemos que, con la ayuda del arrastre del GeoGebra, realizó diferentes configuraciones de las áreas de las figuras ABCD y EFSH y tomó una configuración como punto de partida; para realizar el análisis de la figura, trazó mediatrices y adicionó otro elemento, una recta que pasa por los puntos A y C. Creemos que realizó estas acciones como medio de apoyo perceptivo y desarrolló de su aprehensión operatoria, lo que permitió identificar otras subconfiguraciones, como regiones triangulares.

Estas acciones demuestran la función mediadora del GeoGebra, además, suponemos que, al aplicar el arrastre, percibió la congruencia de los lados de algunas subconfiguraciones y la relación de los triángulos EOJ y EKG.

Al emplear la herramienta «compás», verificó su percepción y trasladó la distancia del segmento OJ al segmento GK con el fin de comprobar su congruencia (ver figura 9). A diferencia de lo que pensamos *a priori*, la profesora compara y verifica la congruencia solo de dos lados de los triángulos EOJ y EKG para fundamentar la congruencia de los triángulos con el caso LLL. Finalmente realiza reconfiguraciones tal cual lo menciona en su discurso: *haciendo un traslado del triángulo rectángulo GEK a la posición del triángulo EOJ, ya que ambos triángulos son congruentes por el caso LLL.*

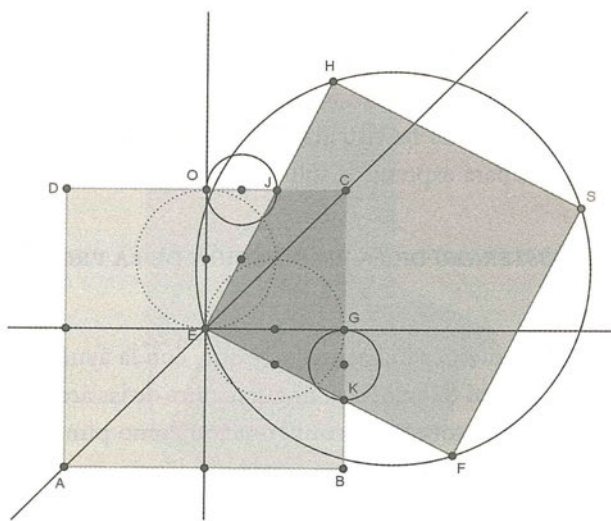


Figura 9. Representación figural realizada por la profesora Lidia.

En comparación con el profesor Gustavo, ambos recurrieron a la medición para relacionar la medida de los lados de los triángulos.

El profesor Gustavo midió y relacionó las subfiguras como suma de áreas; la profesora Lidia empleó la herramienta compás para trasladar distancias y relacionar los triángulos por congruencia de sus lados. Solo la profesora mencionó la propiedad que los relaciona. En cuanto al profesor Fernando, él también realizó trazos, pero su justificación, según se puede observar en el discurso que da, se guio de su percepción y realizó mentalmente operaciones de reconfiguración.

En los tres casos, los profesores han desarrollado la articulación de su aprehensión perceptiva y operatoria, por lo que podemos conjeturar que han visualizado la solución del problema; sin embargo, pensamos que su aprehensión discursiva es aún incipiente.

CONSIDERACIONES FINALES

Los conocimientos matemáticos previos tales como congruencia de triángulos y el conocimiento de los profesores de herramientas y funciones del AGD GeoGebra facilitaron los procesos de visualización de cuadriláteros.

Cada profesor recurrió a diferentes estrategias para encontrar la solución del problema. El profesor Gustavo, luego de relacionar triángulos congruentes a partir de mediciones, recurrió a la suma de áreas; el profesor Fernando solo se guio de su percepción y reconfiguraciones hechas en la mente; mientras que la profesora Lidia recurrió a mediciones, empleando la herramienta «compás», ello sustentado con propiedades de congruencia para luego reconfigurarlas en una nueva figura, lo que nos indica que han desarrollado y articulado su aprehensión perceptiva, operatoria.

El empleo de las herramientas «punto medio», «segmento» y «recta» del GeoGebra permitió que los participantes realicen tratamientos para descomponer la figura en subfiguras y, a partir de la relación de ellas, buscar una solución al problema planteado. En ese sentido, el registro figural dinámico facilitó el desarrollo de estos tratamientos dinámicos.

Por otro lado, la función «arrastre» también cumplió un papel importante porque, a través de los cambios de configuración, los participantes podían relacionar unidades de dimensión 2 y luego relacionar unidades de dimensión 1 y 0.

Finalmente, la investigación permitió comprender cómo los profesores participantes articulan sus aprehensiones en el registro figural dinámico y cómo el AGD GeoGebra influyó en el desarrollo de la visualización de cuadriláteros.

REFERENCIAS

- Almeida, I. & Santos, M. C. (2007). A visualização como fator de ruptura nos conceitos geométricos. *XVIII Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico—GRAPHICA*. Paraná.
- Duval, R. (2011). *Semiósis y pensamiento humano*. Myriam Vega Restrepo (traducción). Cali: Merlin I.D.
- Flores, C., Moretti, M. (2006). As Figuras geométricas suporte para a aprendizagem em geometria: um estudo sobre a heurística e a reconfiguração. *REVEMAT*, 1(1), 5-13.
- Laborde, C., Capponi, B. (1994). Aprender a ver e a manipular o objeto geométrico além do traçado no cabri-geomètre. *Em Aberto*, 14(62). Recuperado de <http://emaberto.inep.gov.br/index.php/emaberto/search/results>
- Larios, V. (2006). La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. *RELIME*, 9(3), 361-382. Recuperado de <http://dialnet.unirioja.es/>
- Salazar, J. V. F. (2009). *Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de Transformações geométricas no espaço*. (Tesis de Doctorado en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.