

INVESTIGACIONES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Jesús Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra

Editores

Capítulo 2



Investigaciones en educación matemática

Jesús Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra, editores

© Jesús Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra, 2016

© Pontificia Universidad Católica del Perú, Fondo Editorial, 2016

Av. Universitaria 1801, Lima 32, Perú

feditor@pucp.edu.pe

www.fondoeditorial.pucp.edu.pe

Diseño, diagramación, corrección de estilo
y cuidado de la edición: Fondo Editorial PUCP

Primera edición: octubre de 2016

Tiraje: 500 ejemplares

Prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio,
total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores.

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2016-12807

ISBN: 978-612-317-201-5

Registro del Proyecto Editorial: 31501361601055

Impreso en Tarea Asociación Gráfica Educativa

Pasaje María Auxiliadora 156, Lima 5, Perú

ANÁLISIS DE LA ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA REFERIDA A LOS NÚMEROS ENTEROS PRESENTE EN LIBROS DE TEXTO¹

*Mathematical organization analysis used in textbooks
for dealing with integers*

Fernando Medina Carruitero²
Cecilia Gaita Iparraguirre³

RESUMEN

El presente trabajo toma en consideración los obstáculos epistemológicos asociados a la evolución del número entero y los reconoce en textos didácticos empleados en la educación básica. En la introducción de los números enteros se identifican problemas en contexto aritméticos, similares a los empleados con números naturales, de modo que no se evidencia la naturaleza distinta que tiene el nuevo conjunto numérico. Esta situación generará obstáculos didácticos que se pondrán de manifiesto cuando los estudiantes realicen operaciones en los enteros.

Palabras-clave: *números enteros; obstáculos epistemológicos; obstáculos didácticos.*

¹ Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de Matemática en Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT participación PUC-SP/Brasil y PUCP/Perú. IREM-PUCP, Proyecto Integrado Internacional: PI0272.

² Pontificia Universidad Católica del Perú. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – fmedinac@pucp.edu.pe

³ Pontificia Universidad Católica del Perú – DIMAT-PUCP – cgaita@pucp.edu.pe

ABSTRACT

This paper takes into account the epistemological obstacles associated with the evolution of the integer and recognizes them in didactic texts used in basic education. In the introduction of integers, problems are identified in arithmetic contexts, similar to those used with natural numbers, so the different nature of the new numerical set is not shown. This situation will cause educational obstacles that will emerge when students perform operations on integers.

Keywords: integers; epistemological obstacles; educational obstacles.

INTRODUCCIÓN

La introducción de los números naturales, fraccionarios y decimales en la educación primaria se hace como expresión de tamaño o numerosidad (cardinalidad) de los conjuntos finitos, del lugar que ocupa un elemento dentro de un conjunto ordenado y de la medida de diferentes cantidades de magnitud, respectivamente (Cid, Godino & Batanero, 2002). Además, las operaciones que se definen en estos conjuntos numéricos se corresponden con cierto tipo de acciones: agrupar (adición), separar (sustracción), reiterar (multiplicación) y repartir (división). Por este motivo, el estudio de los números naturales, fraccionarios y decimales y de sus operaciones entre ellos, se apoya sobre situaciones concretas.

A medida que se progresa en el estudio de las matemáticas aparecen objetos más complejos que han sido construidos para responder a necesidades internas de la propia matemática. Este es el caso de los números con signo (positivos y negativos), cuya construcción se debe, no tanto a la necesidad de modelizar matemáticamente situaciones del mundo sensible, sino a la problemática que plantea el desarrollo de una rama de las matemáticas: el álgebra. Para ilustrar esta afirmación se hace referencia al trabajo de Diofanto, en el cual tuvo que enunciar la regla de los signos para resolver ecuaciones con coeficientes y soluciones enteras que corresponden al campo algebraico y no al aritmético.

Luego, es en el entorno algebraico en el que aparecen las condiciones que hacen posible y que favorecen la introducción de los números enteros, «números con signo». Todo ello plantea dudas respecto a introducir los números enteros negativos en el ámbito aritmético. Además se señala que la resolución aritmética de un problema se caracteriza por que el contexto está presente en cada etapa de la solución, mientras que en la solución de un problema algebraico, en particular al resolver una ecuación, el contexto se deja de lado.

Así, el número negativo es la primera noción matemática de la enseñanza elemental cuya génesis histórica no se produjo por una necesidad de modelizar el mundo físico y social. Por ello, buscar una justificación para la aparición de los números enteros a través de modelos concretos no es la más acertada (Cid, 2003).

De otro lado, con la aparición de los números negativos en la escuela se da «el primer paso de la matemática práctica a la matemática formal» y, por consiguiente, el tratamiento didáctico que se le dé deberá ser consecuente con estas ideas. Es decir, la justificación de las propiedades de los números enteros no podrá ser respaldada por modelos concretos. La utilización del modelo concreto por parte de los alumnos para deducir las propiedades del número entero y de sus operaciones puede fomentar la aparición de creencias erróneas (Cid, 2010). Por ejemplo, el modelo de deudas y haberes puede propiciar que los estudiantes indiquen que -7 es mayor que -2 ya que una deuda de 7 unidades es mayor que una de 2.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Las investigaciones revisadas y explicadas anteriormente permiten suponer que las dificultades en el aprendizaje de los números enteros estarán vinculadas con el modo en el que está organizado este tema en los libros de texto de matemáticas en la educación básica.

En esta investigación se plantea analizar la organización matemática de los números enteros en los textos de sexto grado de primaria

y de primer año de secundaria de una editorial peruana y reconocer si esta responde al modelo epistemológico de referencia que se adoptará en la investigación.

Así, el objetivo de investigación será identificar la manera en la que los libros de texto seleccionados introducen los números enteros, justifican su aparición, así como los diferentes significados que dan al signo negativo, presentan la teoría, justifican las propiedades, los distintos tipos de problemas resueltos y propuestos que presentan y la relación que existe entre este nuevo conjunto numérico y el álgebra.

Se plantea como hipótesis de investigación que el tratamiento que se da a los números enteros en los libros de texto seleccionados será similar al que se da a los números naturales, lo que mostrará que no se reconoce la complejidad de este nuevo conjunto numérico y que no existe correspondencia con el modelo epistemológico de referencia adoptado.

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

La investigación será de tipo bibliográfica ya que se basará en el estudio de textos ya elaborados (Gil, 2002), y en este caso en particular se trata de textos didácticos. En la primera etapa se hace necesario identificar las fuentes bibliográficas; para ello se consideraron los dos textos oficiales de matemáticas, distribuidos por el Ministerio de Educación del Perú a las escuelas públicas de todo el país. Esto se hizo dado el nivel de impacto que tienen dichos libros. Para la segunda etapa de la investigación bibliográfica, se procedió a realizar una lectura analítica del capítulo de números enteros en ambos textos. Se tuvieron en cuenta las investigaciones descritas previamente y el marco teórico adoptado, y se establecieron criterios para analizar la organización matemática de los capítulos referidos a los números enteros en los dos libros de texto seleccionados. De esa manera, se obtuvo información a partir de los datos presentes en los libros. Finalmente, se organizó de manera lógica la información recogida.

ELEMENTOS TEÓRICOS CONSIDERADOS

Como parte del marco teórico se presentarán obstáculos epistemológicos identificados en el desarrollo histórico de los números enteros. A partir de ellos, luego se podrán identificar obstáculos didácticos que podrían estar presentes en los textos que serán analizados y que posteriormente podrían tener una influencia negativa en la comprensión de número entero.

Según Cid (2000), fue Glaeser el primero en hacer referencia a los obstáculos epistemológicos asociados a los números negativos, entendiendo obstáculo como dificultad. Por ejemplo, se tuvo dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas; así, si bien en la obra de algunos matemáticos se reconoce la existencia de soluciones negativas de algunas ecuaciones, también se constata que estas fueron consideradas como cantidades ficticias que expresaban un defecto en el enunciado del problema.

Avanzando en el desarrollo histórico del concepto, se encontró dificultad para unificar la recta real ya que algunos matemáticos concebían que «lo negativo» neutralizaba o se oponía a «lo positivo». Esto favorecería la idea del modelo de dos semirrectas opuestas que funcionaban separadamente.

Otro obstáculo epistemológico identificado se refiere a la ambigüedad de los dos ceros, es decir, a la dificultad de modificar el significado inicial de que el cero se refería a la ausencia de cantidad, por un significado de un cero elegido arbitrariamente. Desde la perspectiva anterior, no tendría sentido que algo fuera menos que la nada; mientras que desde la nueva perspectiva, el cero sería un punto de referencia en la recta numérica.

La superación de los obstáculos anteriores permitió aceptar a los números negativos como cantidades reales y justificar su estructura aditiva, pero no así la estructura multiplicativa. Para ello sería necesario superar el estadio de las operaciones concretas. Esto significa que no se buscarían ejemplos en la naturaleza para explicar la regla de los signos;

los números enteros no responden a la experiencia, son inventados (Glaeser, 1981).

De otro lado, en el trabajo de Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca (1991) se identifican otros factores que explican las dificultades en la comprensión de los números enteros. Entre ellas destacan concebir a la suma como aumento, a la multiplicación como multiplicación natural, a la sustracción como disminución, al orden entre los negativos como lo mismo que el orden natural; así como ignorar el signo, la identificación de los símbolos literales con números positivos: «a no puede ser un número negativo, sería -a», entre otras.

A partir de lo anterior, Cid (2010) explicita un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos que contempla:

- La introducción simultánea de los números negativos y del álgebra elemental ya que por un lado, los números negativos necesitan un entorno algebraico que ponga de manifiesto su razón de ser y contribuya a la superación de posibles obstáculos epistemológicos; mientras que, por otro lado, las técnicas de cálculo algebraico solo pueden avanzar si se establecen las reglas de los signos.
- Utilizar la modelización algebraica pues permite resaltar las diferencias entre el trabajo algebraico y el aritmético; el primero tiene en cuenta desde sus inicios la consideración de las letras como parámetros y variables y obtiene como solución de los problemas un modelo algebraico que, a su vez, se convierte en objeto de estudio.
- La construcción escolar del número negativo requiere pasar de las operaciones entre números a las operaciones entre sumandos y sustraendos, así como del significado operativo de los signos «+» y «-» al significado predicativo y operativo unario. Es decir, el signo deja representar una operación para ser ahora parte del mismo número.

Con base en las investigaciones descritas previamente y considerado el marco teórico adoptado, se establecieron criterios para analizar la organización matemática de los capítulos referidos a los números enteros en los dos libros de texto seleccionados. Dichos criterios, así como los posibles resultados, se presentan en la tabla 1.

Tabla 1
Criterios para analizar la organización de los números enteros

Criterio	Posibles resultados
La manera en la que se inicia el tratamiento de los números enteros	Con elementos teóricos, problemas contextualizados, ejercicios rutinarios, etcétera.
La forma en la que se justifica la aparición de los números enteros	Para dar respuesta a modelos concretos. Como una herramienta para otros contenidos matemáticos. A través de la modelización algebraica. No se justifica.
Los significados que se atribuyen al signo negativo	En un contexto: Significado de pérdidas, posición respecto a un origen, etcétera. Descontextualizado: significado operativo, significado o predicativo.
La ubicación de la teoría	Al inicio del capítulo, después de los ejercicios o problemas, no hay teoría.
La forma en la que se justifican las propiedades	A partir de ejemplos, o como un conjunto de reglas que dan coherencia a este nuevo sistema numérico.
La naturaleza de los problemas que se abordan	Abarcan distintos modelos concretos o solo algunos.
La relación de los números enteros y el álgebra	Se utiliza el álgebra para justificar la aparición de los números enteros. El álgebra aparece como una aplicación de los números enteros y sus operaciones: se realizan operaciones con expresiones algebraicas como si fueran enteros. No hay relación entre los números enteros y el álgebra; el álgebra aparece como un lenguaje.

RESULTADOS DEL ANÁLISIS REALIZADO

En la tabla 2 se muestra el resultado de analizar los textos de sexto de primaria y primer año de secundaria, teniendo en cuenta los criterios descritos previamente.

Tabla 2
Análisis del tratamiento de los números enteros en los textos a partir de los criterios definidos

Criterio	Libro de sexto grado	Libro de primer año
La manera en la que se inicia el tratamiento de los números enteros	Con una pregunta: ¿Cuánto es $8 - 9$? Luego expresa esta pregunta del siguiente modo: $8 - 9 = x$, para después indicar que esa ecuación es equivalente a $x + 9 = 8$.	Con una pregunta: ¿Qué número sumado con 5 resulta 2? Después plantea la ecuación $x + 5 = 2$, para dar inmediatamente la respuesta: -3 .
La forma en la que se justifica la aparición de los números enteros	Los números enteros surgen ante la necesidad de resolver ecuaciones.	Los números enteros surgen ante la necesidad de dar respuesta a modelos concretos: Para indicar una temperatura menor que cero, para describir pérdidas en un negocio, para ubicar una posición bajo el nivel del mar.
Los significados que se atribuyen al signo negativo	El signo negativo está asociado a los contextos, ya sea de pérdidas o de posición respecto de un punto de referencia. Significado operativo	El signo negativo está asociado a los contextos, ya sea de pérdidas o de posición respecto de un punto de referencia.
La ubicación de la teoría	Al inicio de cada apartado. Luego se presentan actividades para realizar operaciones con los números enteros.	La teoría aparece después algunos ejercicios resueltos pero también antes de una lista de ejercicios que reforzarán la técnica aprendida.

Criterio	Libro de sexto grado	Libro de primer año
La forma en la que se justifican las propiedades	No se justifican formalmente. Se verifican mediante ejemplos.	No se justifican formalmente. Se verifican mediante ejemplos.
La naturaleza de los problemas que se abordan	Pocos problemas y son referidos a temperaturas, a descender o ascender, haciendo más énfasis en el segundo caso. También se presentan problemas para cuya solución realmente no se requieren números enteros, sería suficiente considerar a los naturales.	Se presenta un gran número de problemas. Estos se refieren a pérdidas, ubicación respecto a un punto de referencia, distancias. En la mayoría de los casos presenta problemas para cuya solución es necesario emplear las propiedades de los números enteros.
La relación de los números enteros y el álgebra	El álgebra aparece como una generalización de la aritmética con enteros. Inicialmente se traduce una pregunta de tipo aritmético a una ecuación. El álgebra permite expresar algunas propiedades de los números enteros	El álgebra aparece como una aplicación de los números enteros y sus operaciones: se realizan operaciones con expresiones algebraicas como si fueran enteros

A partir del estudio realizado, también se han podido identificar algunos conflictos potenciales tales como no encontrar sentido a preguntas como *hallar un número que sumado a 5 de 2* si es que se sigue concibiendo a la suma como aumento; o el señalar que -1 es menor que -2 porque está más cerca del cero, argumento que era válido en los naturales; o señalar que en la expresión $(+3) - (-2)$ hay tres operaciones y no una, si es que no se asume que los números tienen signo; o el tratar de atribuir un significado concreto a la regla de los signos para la multiplicación.

CONSIDERACIONES FINALES

El tratamiento que se brinda a los números enteros en los dos textos analizados es similar al que se dio a los números naturales. Así, la justificación para la introducción de este nuevo conjunto numérico se lleva a cabo desde un entorno aritmético, asociándola a dar solución a problemas que corresponden a modelos concretos. Desde el modelo epistemológico de referencia adoptado, esto no es conveniente ya que el objeto matemático número entero no surge para dar solución a problemas de la vida real sino que aparece para dar solución a problemas intramatemáticos.

En la misma línea, la mayoría de problemas que aparecen en los textos corresponden a modelos concretos que pueden ser resueltos en el conjunto de los números naturales. Esto ocasiona que los estudiantes no encuentren utilidad al nuevo conjunto numérico, y que no identifiquen el carácter predicativo que adquieren los signos $+$ y $-$.

La teoría aparece en forma de propiedades que serán aplicadas para resolver ejercicios. La justificación de las propiedades se realiza a través de la verificación para ejemplos concretos.

Se observa que no se aprovecha el contexto algebraico para introducir este conjunto numérico por lo que se recomienda introducir el tema para resolver ecuaciones, de modo que en este entorno se definan nuevas reglas, enfatizando en que algunas de estas no tendrían sentido en los naturales. De manera similar, posteriormente se podrán generar modelos algebraicos que justificarán la ampliación del conjunto de números enteros hacia los números racionales.

REFERENCIAS

- Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números enteros. *XIV Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, Abril, Cangas, España.
- Cid, E. (2003). La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión. *Pre-publicaciones del Seminario Matemático «García de Galdeano»*, (25), 1-40.
- Cid, E., y Bolea, P. (2010). *Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico*. Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action. Montpellier: IUFM de Montpellier.
- Cid, E., Godino, J. y Batanero, C. (2002). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros*. Extraído el 30 de noviembre de 2013 desde http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/2_Sistemas_numericos.pdf
- Coveñas, M. (2010). *Matemática 1*. Lima. Coveñas.
- Coveñas, M. (2010). *Megamatic 6*. Lima. Coveñas.
- Gil, A. (2002). *Como Elaborar Proyectos de Pesquisa*. 4ta Edición. São Paulo: Atlas.
- Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs, *Recherches en Didactique des mathématiques*, 2(3), 303-346.
- Iriarte, M., Jimeno, M., & Vargas-Machuca, I. (1991). Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. *Suma*, 7, 13-18.