

# INVESTIGACIONES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Jesús Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra

Editores

## Capítulo 14



*Investigaciones en educación matemática*

Jesús Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra, editores

© Jesús Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra, 2016

© Pontificia Universidad Católica del Perú, Fondo Editorial, 2016

Av. Universitaria 1801, Lima 32, Perú

[feditor@pucp.edu.pe](mailto:feditor@pucp.edu.pe)

[www.fondoeditorial.pucp.edu.pe](http://www.fondoeditorial.pucp.edu.pe)

Diseño, diagramación, corrección de estilo  
y cuidado de la edición: Fondo Editorial PUCP

Primera edición: octubre de 2016

Tiraje: 500 ejemplares

Prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio,  
total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores.

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2016-12807

ISBN: 978-612-317-201-5

Registro del Proyecto Editorial: 31501361601055

Impreso en Tarea Asociación Gráfica Educativa

Pasaje María Auxiliadora 156, Lima 5, Perú

# ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O USO DO BÁCULO (*BACULUM*) NA ELABORAÇÃO DE ATIVIDADES QUE ARTICULAM HISTÓRIA E ENSINO DE MATEMÁTICA<sup>1</sup>

*Some remarks concerning the use of cross-staff (baculum)  
for developing activities linking history and math teaching*

Ana Rebeca Miranda Castillo<sup>2</sup>  
Fumikazu Saito<sup>3</sup>

## RESUMO

Neste artigo apresentamos algumas considerações a respeito de um instrumento matemático, muito utilizado no século XVI, com vistas a explorar potenciais recursos didáticos. Tendo por base o tratado *Del modo di misurare*, publicado por Cosimo Bartoli (1503-1572) em 1564, apresentamos dois procedimentos de medição utilizando o báculo (*baculum*). Além das questões relativas ao conhecimento matemático implicado no instrumento e nos procedimentos de medição, os dois casos de uso do instrumento apontaram para interessantes questões não só de ordem matemática, mas também epistemológica, na articulação entre conhecimentos teóricos e práticos.

*Palavras-chave: história da matemática; educação matemática; instrumento matemático.*

---

<sup>1</sup> Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT Parceria PUC-SP e PUC-PERU. FAPESP: 2013/23228-7; CNPq: 404411/2013-4.

<sup>2</sup> Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) – anacastillo467@gmail.com

<sup>3</sup> Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) – fsaito@puccsp.br

## ABSTRACT

In this paper we make some remarks on a mathematical instrument, widely used in the sixteenth century, in order to explore potential teaching resources. We present two different ways to measure using the cross-staff (baculum) based on a treatise published in 1564, entitled *Del modo di misurare*, by Cosimo Bartoli (1503-1572). Besides the issues related to the mathematical knowledge implied in the instrument and the measuring procedures, the two use cases of the instrument raised not only interesting mathematical issues, but also epistemological questions on theoretical and practical grounds.

**Keywords:** *history of mathematics; mathematics education; mathematical instruments.*

## INTRODUÇÃO

O estudo de antigos instrumentos matemáticos nos dá acesso a interessantes questões de ordem epistemológica (e também ontológica e axiológica) que podem ser exploradas pelo educador matemático, uma vez que está ligado ao saber matemático e suas interfaces com outros segmentos de conhecimento.<sup>4</sup> A compreensão contextualizada desses instrumentos, tendo por base tratados que lidam com sua construção e seu uso, pode ser bastante útil para a elaboração de atividades de ensino. Contudo, é preciso ter cautela para não reduzi-los a meros artefatos que servem apenas para medir, pois os instrumentos matemáticos são mais do que meros objetos e ferramentas. Eles são construtores de conhecimento e revelam interessantes aspectos do saber matemático.<sup>5</sup>

Neste artigo, apresentamos alguns desses aspectos a partir do estudo de uma obra publicada no século XVI. Dedicada à fabricação e ao uso

---

<sup>4</sup> Vide: Monteiro (2012), Santos (2014) e Saito (2014). Sobre instrumentos matemáticos, consulte: Bennett (2003, 1998 e 1991).

<sup>5</sup> Sobre a concepção de instrumentos como construtores de conhecimento, vide: Van Helden e Hankins (1994), Hankins e Silverman (1995), Saito (2009 e 2011).

de instrumentos matemáticos úteis para a arte de medir terras ou à carpintaria, essa obra apresenta, em poucas páginas, uma série de questões que nos fazem refletir sobre o significado de medida, tendo em consideração o processo de mensuração. Para tanto, selecionamos um único instrumento, o báculo (*baculum*), e buscamos explorar dois casos muito pontuais de seu uso.

Esses dois casos, à primeira vista, parecem ser bastante triviais. Contudo, uma análise mais aprofundada do procedimento de medição descrito na obra revela-nos que são muito mais complexos e ricos do que imaginamos. Além de propiciar novos conhecimentos, esses dois casos servem para ilustrar como articular história e ensino de matemática sem cair nas tradicionais formulações em que a narrativa histórica é apenas reproduzida ou utilizada em sala de aula. O báculo e o conhecimento matemático nele incorporado podem levar o educador matemático a elaborar interessantes atividades na interface entre história e ensino de matemática.

## DOIS USOS E DUAS MEDIDAS

Dentre inúmeros instrumentos matemáticos fabricados e utilizados no século XVI, o báculo parece ter tido ampla repercussão, visto que aparece descrito em diferentes tratados. Sua origem é desconhecida, porém a sua primeira descrição sistemática remonta ao século XIV e é atribuída a Levi ben Gerson (1288-1344).<sup>6</sup> Embora fosse um instrumento muito utilizado em astronomia, no século XVI, vemos sua aplicação na agrimensura e, em alguns casos, na navegação, visto que que esses dois campos de saber adquiriram importância naquela época em virtude da descoberta de novas terras e o «cercamento» de propriedades.<sup>7</sup>

---

<sup>6</sup> A esse respeito consulte estudos de Simonson (2013) e Roche (1981).

<sup>7</sup> Sobre o «cercamento» de terras, vide: Fischer (1996) e Richeson (1966).

Entre os séculos XVI e XVIII, o número de tratados que buscavam instruir sobre técnicas de medida e de mapeamento de terras aumentara significativamente. Naquela época, muitos «praticantes de matemáticas» e outros estudiosos dedicados às «matemáticas» investiram não só na fabricação de diferentes instrumentos, mas também na publicação de tratados a seu respeito.<sup>8</sup> Esses tratados geralmente apresentavam diferentes técnicas de medidas para diferentes situações em que instrumentos específicos eram utilizados.<sup>9</sup>

No caso do báculo, ele era utilizado ao lado de outros instrumentos matemáticos, tais como o quadrante num quarto de círculo, o quadrante geométrico, o bastão, o esquadro geométrico, o astrolábio e toda sorte de instrumentos topográficos, para medir distâncias (altura ou largura) inalcançáveis.<sup>10</sup> Cosimo Bartoli (1503-1572), em *Del modo di misurare* (1564), por exemplo, recomenda o seu uso para «*medir distâncias, tal como uma linha reta, das quais não é possível se aproximar*» (Bartoli, 1564, p. 5r sic).

O báculo foi descrito por Bartoli como um instrumento composto de duas hastes, uma maior (AB), denominada bastão e outra menor (CD), transversal. Essas duas hastes eram dispostas perpendicularmente em forma de «cruz» (figura 1). A transversal (CD), tomada como unidade de medida, servia de guia para marcação no bastão (AB), e era nela encaixada, podendo deslizar-se para frente e para trás convenientemente.

<sup>8</sup> Sobre os «praticantes de matemáticas», vide: Mosley (2009), Higton (2001) e Taylor (1954). Convém observar que antes do século XIX a matemática ainda não era um corpo autônomo e unificado de conhecimentos matemáticos, mas envolvia outros segmentos de conhecimento, tais como a astronomia, a óptica, a música, a mecânica etc., que eram consideradas disciplinas matemáticas. A esse respeito, consulte Saito (2015) e Roux (2010).

<sup>9</sup> Informações a respeito destes tratados podem ser consultadas em Saito (2012).

<sup>10</sup> Vide exemplos em Bartoli (1564) e Digges (1556).

*mente per il regolo A B, facendo sempre angoli a squadra, & chiamisi questo regolo misore C D, come vedere si puo nel disegno.*

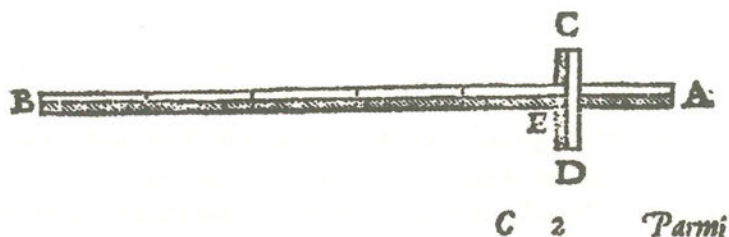
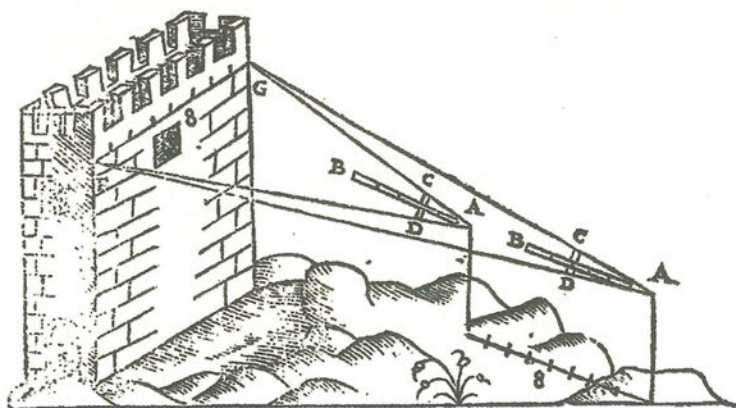


Figura 1. O báculo e suas partes (Bartoli, 1564, p. 10r).

Esse instrumento bastante simples e engenhoso era muito versátil e útil visto que era fácil de transportá-lo e de ser manuseado. Para se obter uma medida, utilizando o instrumento, bastava apenas apontá-lo para o objeto a ser medido em duas diferentes posições (figura 2).



*Conc sarebbe se volesimo misurare una larghezza, o altezza di una canoniera, o una finestra alta in una muraglia, o qualche*

Figura 2. O uso do báculo para se obter a medida da largura de um muro.





a medida com a mínima interferência de quem os manuseia (como uma régua, por exemplo), o báculo a fornece por um procedimento em que o sujeito que mede participa da própria medida.<sup>11</sup> Além disso, embora o procedimento pareça bastante simples, executá-lo não é muito fácil, pois, além do conhecimento matemático que está incorporado no instrumento, ou seja, as propriedades e as relações métricas nos triângulos isósceles, requer treino no manuseio do instrumento.

O processo de mensuração por meio do báculo envolve considerar não só a habilidade e destreza de quem o manuseia, mas também outros obstáculos que impeçam a realização da medida. Vamos aqui nos referir apenas a dois deles, um relacionado às condições materiais e outro, ao conhecimento matemático implícito no processo de mensuração.

Sem entrarmos em muitos detalhes, uma das condições materiais que deve ser observada é o espaço disponível para realizar a medição, uma vez que o observador deverá afastar-se para obter a medida (o afastamento de uma posição à outra na figura 2). Assim, para medir grandes distâncias, será necessário não só um espaço maior para o observador se locomover, mas também um espaço livre de obstáculos que impeçam a realização da medida.

No que diz respeito ao conhecimento matemático implícito no processo de medição, é preciso observar a disposição do bastão, que deverá estar posicionado perpendicularmente à distância que se deseja medir em seu ponto médio (no ponto médio de FG na figura 3). Enquanto a primeira condição depende de aspectos físicos e materiais, o segundo requer que o sujeito que mede conheça algumas propriedades geométricas de triângulos. E, nesse particular, o observador pode apenas estimar o ponto médio da distância que deseja medir, tentando posicionar o bastão perpendicularmente a ele. Além disso, o afastamento para se obter a medida deve ser realizado de modo a manter as relações

---

<sup>11</sup> A esse respeito, vide: Dias e Saito (2011) e Saito (2013).

triangulares sempre no mesmo plano de observação. Ou seja, ao se deslocar de uma posição para outra, o observador deve tomar o cuidado de fazê-lo sempre mantendo os dois triângulos, formados no processo de medida, no mesmo plano geométrico.

Devemos aqui observar que o tratado não instrui nada a esse respeito. As relações métricas nos triângulos são apresentadas por Bartoli de forma bastante simplificada de modo que, com um só golpe de olhar, reconhecemos tratar-se de uma relação de semelhança de dois triângulos isósceles (figura 2 e 3). Contudo, se os dois triângulos AGF nas duas posições (figura 3) estiverem em diferentes planos, a distância de afastamento não corresponderá à largura FG que se deseja obter. Portanto, os dois triângulos devem ser coplanares.

Bartoli não fornece essas instruções em seu tratado porque tais conhecimentos faziam parte do repertório do «saber-fazer» matemático dos agrimensores. Essas instruções, bem como outras de ordem mais prática, eram transmitidas oralmente para aqueles que praticavam o ofício. Isso significa que *Del modo di misurare* não era um mero manual (do tipo faça-você-mesmo) que instruía o leitor na arte de medir. As instruções fornecidas por Bartoli eram dirigidas para um público que tinha conhecimentos em geometria prática, além do conhecimento prático do ofício.<sup>12</sup> Um exemplo bastante ilustrativo a esse respeito é o uso do báculo para se medir «a altura de uma canhoneira, ou uma janela no alto de uma muralha, ou qualquer outra coisa semelhante colocada no topo de um monte» (Bartoli, 1564, p. 11v).

---

<sup>12</sup> Sobre *practica geometriae* e a prática do ofício, cf. Homann (1991); Shelby (1972), Hugh of Saint Victor (1956, 1961 e 1991). Sobre as diferentes vias de transmissão, vide estudos em Kusakawa e MacLean (2006).

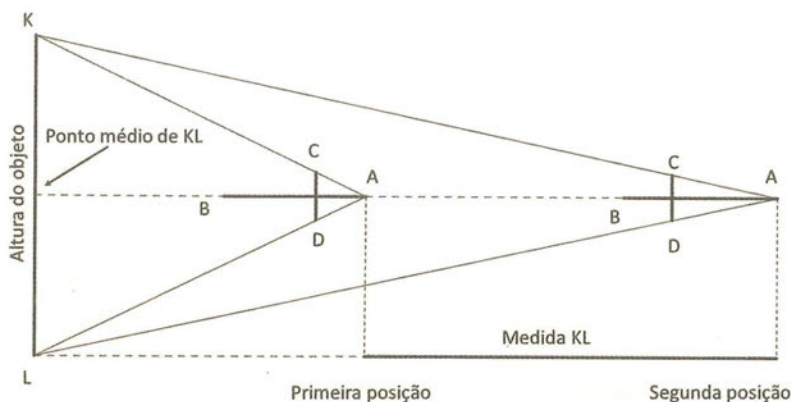


Figura 4. O uso do báculo para medir a altura de objetos (figura nossa).

À primeira vista, esse procedimento é essencialmente o mesmo que aquele descrito anteriormente. A única diferença é a orientação do instrumento que, no primeiro caso, é posicionado horizontalmente e, nesse segundo, verticalmente. Para se medir a largura do muro, a transversal é posicionada horizontalmente, paralela ao plano do solo (portanto, paralelamente a  $FG$ ) e, para se medir altura de objetos, ela é posicionada perpendicularmente ao plano do solo, mantendo-a paralela à altura de um objeto (figura 4). Assim, todas as condições físicas e materiais, bem como o conhecimento matemático necessário para obter a medida no primeiro caso, se aplicam a esse segundo. Contudo, a realização da medição nesse segundo caso parece ser muito mais complexa do que a do anterior, visto que posicionar perpendicularmente o bastão no ponto médio da altura do objeto que se quer medir é muito mais difícil de ser executada na prática (figura 5).

Embora o esquema (figura 4) não ofereça nenhuma dificuldade de compreensão do ponto de vista matemático, a obtenção da medida por meio do báculo, entretanto, encerra novas dificuldades de ordem prática, já que as condições materiais para se obter a medida não poderão

ser satisfeitas (figura 5). Essas dificuldades por sua vez, introduzem novos problemas matemáticos, conduzindo a discussões não só de ordem matemática, mas também prática, pois a sua resolução requisitará a mobilização de outros conhecimentos matemáticos ou mesmo o uso de outro instrumento mais adequado para se obter a medida de altura de objetos.

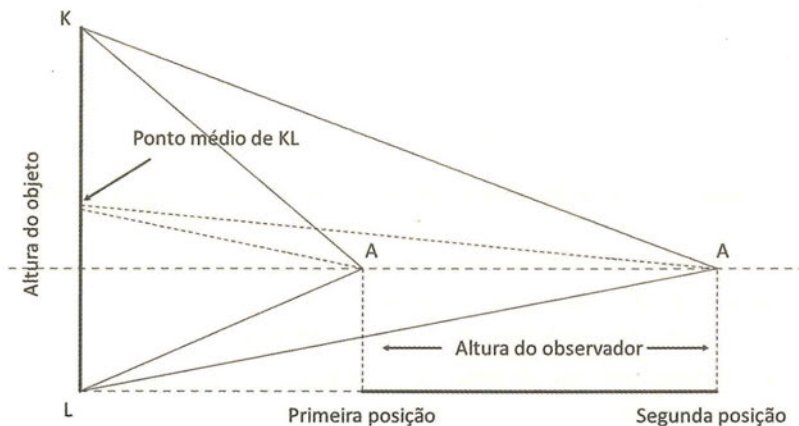


Figura 5. Medindo altura de objetos com o báculo (figura nossa).

Além disso, esse caso é interessante do ponto de vista epistemológico. A observação feita por Bartoli, isto é, que o báculo permite medir «a altura de uma canhoneira, ou uma janela no alto de uma muralha, ou qualquer outra coisa semelhante colocada no topo de um monte» (Bartoli, 1564, p. 11v), refere-se a um caso em que as condições materiais e, portanto, espaciais, que são encontradas numa situação prática, são descartadas. Do ponto de vista matemático, o primeiro e o segundo casos são idênticos, visto que as relações matemáticas neles implicados são as mesmas. No entanto, do ponto de vista prático, o segundo caso não pode ser resolvido concretamente, uma vez que a situação idealizada teoricamente na figura 4 não pode ser aplicada a uma outra, real e concreta.

O confronto dessas duas situações (figuras 3 e 4) levanta interessantes questões de ordem epistemológica, relativas à relação entre conhecimento teórico e prático, que podem ser exploradas pelo educador matemático.

Isso é notório também no caso do primeiro uso do báculo (figura 2). Lembremos que, para obtermos a medida da distância FG é necessário que o deslocamento do observador, de uma posição para outra, seja realizado no mesmo plano de observação de tal modo que os dois triângulos formados em suas respectivas posições sejam coplanares (figura 3). No entanto, mesmo que essas condições não sejam satisfeitas, a medida FE pode ser encontrada. Note que nesse caso os problemas de ordem prática podem, novamente, ser solucionados teoricamente com a exploração de outras relações matemáticas. Além disso, do ponto de vista epistemológico e matemático, transformam um problema de geometria plana em outro, espacial, enriquecendo as discussões didáticas. Os problemas práticos, nesse caso, reintegram a medida e o processo de medição ao seu lugar de origem, isto é, ao espaço tridimensional, ampliando o escopo de investigação didática. A medida deixa desse modo, de ser mera definição e adquire amplo significado matemático.

Note que Bartoli nada menciona a esse respeito, nem aborda sobre essas questões. Seu tratado apenas apresenta relações matemáticas bastante triviais e elementares. Porém, é justamente a esse aspecto que queremos aqui chamar a atenção. O que é mais interessante nesse tratado não é o que nele encontra-se descrito. Ele é potencialmente rico não por aquilo que instrui, mas por aquilo que pode revelar. O báculo, dessa maneira, torna-se interessante instrumento a ser explorado didaticamente se for empregado além de seu caráter meramente instrumental. Utilizá-lo apenas como uma ferramenta para confirmar uma medida, ou para se chegar a um resultado por meio das relações métricas implicadas no processo de medição, ofuscará outros atributos e características que fazem dele um construtor de conhecimento.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

As relações matemáticas implicadas no uso do báculo, bem como o conhecimento matemático nele incorporado, são bastante elementares. Explorar essas relações pode ser um bom começo, porém o que é mais enriquecedor do ponto de vista didático são os procedimentos de medição e suas implicações práticas e teóricas. Como vimos, desses procedimentos emergem questões de ordem não só matemática, mas também epistemológica. Questões estas que estão na base da própria noção de medida, que hoje é aceita acriticamente.

Não nos referimos aqui à mera definição de medida («o que é medida»), mas ao seu significado. Os procedimentos de medição por meio do báculo conduzem a uma compreensão mais completa de medida porque a restituí ao seu processo («como é que se mede»). Além disso, como vimos a medida não é mero resultado de aplicação de conhecimentos matemáticos bem estabelecidos, mas de um conjunto de ações em que aspectos práticos, bem como teóricos, do ato de medir convergem para o processo de mensuração. Assim, é na articulação entre esses diferentes aspectos, historicamente contextualizados, que encontramos recursos que possam ser apropriados para desenvolver novos caminhos e estratégias que integrem história e ensino de matemática.

## REFERÊNCIAS

- Bartoli, C. (1564). *Cosimo Bartoli Gentil'huomo, et accademico Fiorentino, Del modo di misurare le distantie, le superficie, i corpi, le piante, le province, le prospettive (...)*. Venetia: Francesco Franceschi Sanese.
- Bennett, J. A. (1991). The challenge of practical mathematics. In: Pumfrey, S., Rossi, P. L. & Slawinski, M. (eds.). *Science, Culture and Popular Belief in Renaissance Europe, 176-190*. Manchester, New York: Manchester University Press.
- Bennett, J. A. (1998). Practical Geometry and Operative Knowledge. *Configurations*, 6, 195-222.

- Bennett, J. A. (2003). Knowing and doing in the sixteenth century: what were instruments for? *British Journal for the History of Science*, 36(2), 129-150.
- Dias, M. S. & Saito, F. (2011). História e ensino de matemática: o báculo e a geometria. In: *Anais do Profmat 2011 e XII SIEM (Seminário de Investigação em Educação Matemática) – Lisboa: 5 a 8 de setembro de 2011*. Lisboa: Associação dos professores de matemática.
- Digges, L. (1556). *A boke named Tectonicon. Briefelye shewynge the exacte, and speedy rekenynge all manner lande, squared tymber, stone, steaples, pyllers, globes, etc...* London: Iohn Daye for Thomas Gemini.
- Fischer, D. H. (1996). *The Great Wave: Price, Revolution and the Rhythm of History*. New York, Oxford: Oxford University Press.
- Hankins, T. L. & Silverman, R. J. (1995). *Instruments and the Imagination*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Higton, H. (2001). Does using an instrument make you mathematical? Mathematical practitioner of the 17th century. *Endeavour*, 25(1) 18-22.
- Homann s.j., F. A. (1991). Introduction. In: Hugh of Saint Victor. (1991). *Practical Geometry [Practica Geometriae] attributed to Hugh of St. Victor*, 1-30. Milwaukee, Wisconsin: Marquette University Press.
- Hugh of Saint Victor (1956). Hvgonis de Sancto Vitore: *Practica Geometriae*. Ed. R. Baron. *Osiris*, 12, 186-224.
- Hugh of Saint Victor (1961). *The Didascalicon of Hugh of St. Victor: A medieval guide to the arts*. Ed. J. Taylor. New York, London: Columbia University Press.
- Hugh of Saint Victor (1991). *Practical Geometry [Practica Geometriae] attributed to Hugh of St. Victor*. Trad. F. A. Homann. Milwaukee, Wisconsin: Marquette University Press.
- Kusukawa, S. & Maclean, I. (2006). *Transmitting Knowledge: Words, Images, and Instruments in Early Modern Europe*. Oxford: Oxford University Press.

- Monteiro, W. (2012). *Alguns elementos que reforçam a importância da história da matemática na formação de professores* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: PUCSP.
- Mosley, A. (2009). Early Modern Cosmography: Fine's *Sphaera Mundi* in Content and Context. In: Marr, A. (ed.). *The Worlds of Oronce Fine: Mathematics, Instruments and Print in Renaissance France*, 114-136. Donington: Shaun Tyas.
- Richeson, A. W. (1966). *English Land Measuring to 1800: Instruments and Practices*. Cambridge, London: The Society for the History of Technology/The MIT Press.
- Roche, J. J. (1981). The Radius Astronomicus in England. *Annals of Science*, 38, 1-32.
- Roux, S. (2010). Forms of mathematization (14th-17th centuries). *Early Science and Medicine*, 15/4-5, 319-337.
- Saito, F. (2009). Algumas considerações historiográficas para a história dos instrumentos e aparatos científicos: o telescópio na magia natural. In: Alfonso-Goldfarb, A. M., Goldfarb, J. L., Ferraz, M. H. M. & Waisse, S. (eds.). *Centenário Simão Mathias: documentos, métodos e identidade da história da ciência*, 103-120. São Paulo: PUCSP.
- Saito, F. (2011). *O telescópio na magia natural de Giambattista della Porta*. São Paulo: Educ/Ed. Livraria da Física/FAPESP.
- Saito, F. (2012). Possíveis fontes para a História da Matemática: Explorando os tratados que versam sobre construção e uso de instrumentos «matemáticos» do século XVI. In: Siva, M. R. B. da & Haddad, T. A. S. (eds.). *Anais do 13 Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia – FFLCH USP – 03 a 06 de setembro de 2012*, 1099-1110. São Paulo: EACH/USP.
- Saito, F. (2013). Instrumentos e o «saber-fazer» matemático no século XVI. *Revista Tecnologia e Sociedade*, 18/especial, 101-112.
- Saito, F. (2014). Instrumentos matemáticos dos séculos XVI e XVII na articulação entre história, ensino e aprendizagem de matemática. *Rematec*, 9/16, 25-47.



- Saito, F. (2015). *História da Matemática e suas reconstruções contextuais* [forthcoming book].
- Santos, L. R. (2014). *Leon Battista Alberti (1404-1472) e a medida do tempo em sua obra Matemática Lúdica* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: PUCSP.
- Shelby, L. R. (1972). The Geometrical Knowledge of Medieval Master Masons. *Speculum*, 47, 395-421.
- Simonson, S. (2013). The Mathematics of Levi ben Gershon, the Ralbag. Acesso em: 6 julho 2013, em: <http://u.cs.biu.ac.il/~tsaban/Pdf/MathofLevi.pdf>.
- Taylor, E. G. R. (1954). *The Mathematical Practitioners of Tudor & Stuart England*. Cambridge: Institute of Navigation/Cambridge University Press.
- Van Helden, A. & Hankins, T. L. (1994). Introduction: Instruments in the History of Science. *Osiris*, 9, 1-6.