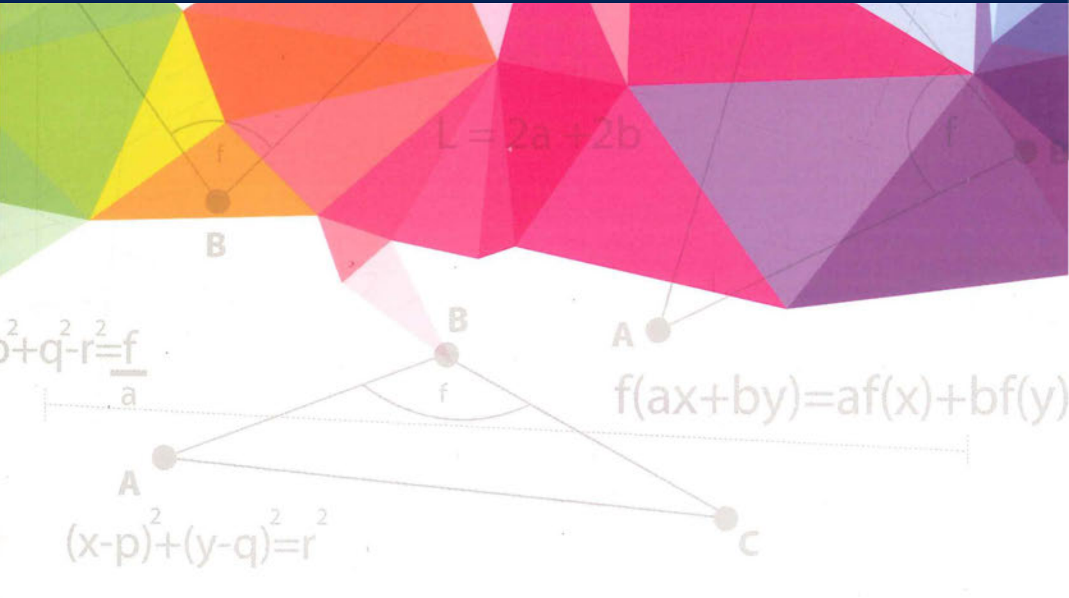
INVESTIGACIONES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Jesús Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra

Editores

Capítulo 10



Investigaciones en educación matemática
Jesús Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra, editores

© Pontificia Universidad Católica del Perú, Fondo Editorial, 2016
Av. Universitaria 1801, Lima 32, Perú
feditor@pucp.edu.pe
www.fondoeditorial.pucp.edu.pe

Diseño, diagramación, corrección de estilo
y cuidado de la edición: Fondo Editorial PUCP

Primera edición: octubre de 2016
Tiraje: 500 ejemplares

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú Nº 2016-12807
ISBN: 978-612-317-201-5
Registro del Proyecto Editorial: 31501361601055

Impreso en Tarea Asociación Gráfica Educativa
Pasaje María Auxiliadora 156, Lima 5, Perú

Paradigmas geométricos, tipos de prova e esquemas de prova como referências teóricas em pesquisas em Educação Matemática[1]

Geometric paradigms, types of proof and proof schemes as theoretical references in researches on Mathematics Education

Jacinto Ordem[2]
Saddo Ag Almouloud[3]

Resumo

Este capítulo tem como objetivo apresentar alguns referenciais teóricos que consideramos úteis na análise e interpretação de dados coletados em pesquisas voltadas à Educação Matemática, particularmente em estudos acerca de provas e demonstrações em geometria plana. Recorte de uma parte de tese de doutorado de um dos autores deste artigo, nesse capítulo apresentamos exemplos cuja análise e a interpretação fazem apelo a esses construtos teóricos.

Palavras-chave: *Paradigmas geométricos. Tipos de prova. Esquemas de prova. Prova e demonstração*

[1] Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT Parceria PUC-SP e PUC-PERU. FAPESP: 2013/23228-7; CNPq: 404411/2013-4

[2] Universidade Pedagógica, Delegação da Beira - jc.ordem@gmail.com
[3] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) saddo@gmail.com

Abstract

This chapter aims to present some theoretical references that we consider useful in the analysis and interpretation of data collected in researches focused on Mathematics Education, particulary in studies related to proofs and demonstrations in plane geometry. As a part of the doctoral thesis of one of the authors of this article, in this chapter we present examples whose analysis and interpretation appeal to these theorical constructs.

Keywords: *Geometrical paradigms. Types of proof. Proof schemes. Proof and demonstration*

Introdução

Este trabalho é um recorte de uma parte da tese de doutorado de um dos autores, que tem como objetivo analisar as concepções de prova e demonstração em geometria plana de estudantes de Licenciatura em matemática da Universidade Pedagógica de Moçambique. Visou-se nessa tese, essencialmenete:

1. Estudar as estratégias e/ou justificativas que os estudantes de licenciatura em matemática utilizam em tarefas que exigem provas ou demonstrações.

2. Identificar o papel que estudantes de licenciatura em matemática atribuem à prova e demonstração em matemática.

3. Analisar o significado de prova e demonstração que possuem os estudantes de licenciatura em matemática.

4. Analisar que critérios utilizam para avaliar provas e demonstrações ou argumentos que lhes convencem de que uma propriedade em geometria é verdadeira.

Neste texto, focalisaremos nosso estudo sobre os aspectos teoricos relacinados com a diferenciação entre provar e demonstrar em matemática. Achamos pertinente, pois a demonstração é o principal meio pelo qual a comunidade dos matemáticos valida os resultados de suas descobertas e, consequentemente, decide sobre que resultados serão aceitos como válidos.

Discutiremos os tipos e esquemas de prova segundo Balacheff (1987) e Harel; Sowder (1998, 2007), respectivamente; os conceitos de paradigma e espaço de trabalho geométricos segundo Houdement e Kuzniak (2003, 2006); a relação entre a classificação de Balacheff e de Harel e Sowder (1998, 2007).

Paradigmas[4] geométricos

Tomando como base a forma como são validados os conceitos geométricos em diferentes níveis de aprendizagem e de escolaridade, Houdement e Kuzniak (2003, 2006) propõem três categorias de Geometrias, a que dão o nome de paradigmas, conforme os meios utilizados na validação de propriedades e conceitos: (a) Geometria I (ou Geometria Natural): assim se diz quando a validação das propriedades e conceitos geométricos se baseia em objetos materiais manipuláveis (régua graduada, compasso, transferidor, dobras, etc.). As conclusões apoiam-se em percepção imediata, ou experimentos. A relação entre o modelo e a realidade é permanente, sendo o meio principal de validação de conjecturas. A dedução vem, muitas vezes, acompanhada de experimentos mecânicos tais como dobrar, cortar ou manipular na tela do computador, e a demonstração de propriedades óbvias é dispensada.

[4] Kuhn (2009, pp. 312-313) destaca que «[...] o termo «paradigma» ocorre em estreita proximidade, física e lógica, com a expressão «comunidade científica». Um paradigma é aquilo que os membros de uma comunidade, e apenas eles, compartilham. Reciprocamente, é a posse de um paradigma em comum que institui a comunidade científica a partir de um grupo de pessoas com outras disparidades.»

As evidências constituem o aspecto mais privilegiado, sendo a figura tomada como objeto de estudo e de validação, o que faz com que muitas vezes evidências visuais e perceptivas sejam consideradas como argumentos suficientes na validação de propriedades e relações em detrimento de relações conceituais. (b) Geometria II (ou Geometria axiomática Natural): quando a validação das propriedades e conceitos se baseia em regras hipotético-dedutivas, porém, com uma axiomatização parcial. O privilégio no raciocínio é sobre propriedades geométricas e deduções, mas há limitações nos axiomas, pois, a sintaxe formal continua tendo algum vínculo forte com a realidade material – em geral os conceitos geométricos são uma modelação de problemas espaciais. Seus objetos são teóricos, porém, representações e modelações de objetos reais e concretos. Como salientam Houdement e Kuzniak (2006, p. 181) «geometria II se exerce por meio de uma axiomatização parcial, como ilhas de axiomatização». O exemplo principal deste paradigma é a geometria euclidiana. (c) Geometria III (ou Geometria axiomática formalista): é quando se trabalha com objetos teóricos sem qualquer relação com a realidade material; seu sistema de validação é bastante formal, com um conjunto de axiomas o mais completo possível e independente do mundo material. O princípio a observar nas deduções é a coerência interna entre os axiomas, isto é, a ausência de contradições entre os axiomas e independência entre eles. Fazem parte deste paradigma as geometrias não euclidianas.

Segundo Houdement e Kuzniak (2006) cada paradigma comporta um ambiente particularmente complexo de objetos visíveis e palpáveis, ou objetos conceituais. Esse aparato de objetos visíveis ou conceituais, recebe o nome de espaço de trabalho geométrico (ETG).

Espaço de trabalho geométrico

O **Espaço de trabalho geométrico** (ETG) é o ambiente organizado por e para o geômetra articular de forma adequada três componentes:

- um conjunto de objetos, eventualmente materializáveis em um espaço real e local;
- um conjunto de artefatos que serão instrumentos e ferramentas a serviço do geômetra;
- um referencial teórico que pode ser tomado como modelo teórico (Houdement Kuzniak, 2006, p. 184. Tradução de Ordem, 2015).

Consoante a relação com o saber, ou a prática de ensino, ou como um sujeito particular lida com um problema geométrico, podemos estabelecer a seguinte categorização dos Espaços de Trabalho geométrico: **ETG de referência**: é o espaço de trabalho determinado unicamente baseando-se em critérios puramente matemáticos. É o espaço de trabalho geométrico institucional dos matemáticos profissionais. Esse espaço de trabalho geométrico determina o quadro teórico matemático que norteia a comunidade. **ETG adequado**: é o espaço de trabalho concebido e operacionalizado para responder e satisfazer a uma dada instituição específica. Um dos principais utilizadores é o professor, portanto, é o espaço de trabalho geralmente que se vê refletido em livros didáticos. **ETG pessoal ou personalizado**: é o espaço de trabalho refletido em cada indivíduo particular (aluno ou professor) como resultado de uma reflexão de conhecimentos postos em ação para resolver um dado problema geométrico por esse indivíduo segundo suas habilidades matemáticas e cognitivas.

Convém destacar que o quadro de ETG compreende três componentes principais: (1) **a realidade do espaço** – objetos reais e eventos existentes fora do pensamento do sujeito; (2) **artefatos** – ferramentas e instrumentos tais como régua, esquadro, dobras, etc. Como destacam Houdement e Kuzniak (2006, apud ORDEM, 2015, p. 95) «um instrumento é um artefato sob o domínio de alguém graças a esquemas de ação». Daí a grande importância de que se revestem os artefatos na determinação do ETG dado que constituem a faceta mais visível e mais privilegiada pelos alunos. Assim, reside a importância de que se revestem as construções com régua e compasso na geometria euclidiana, uma vez que a chave está nas justificativas teóricas para uma dada técnica de construção, fato que em muitos casos constitui o grande entrave na aprendizagem das provas e demonstrações uma vez que evidências visuais são vistas como argumentos plausíveis para o estabelecimento de propriedades. (3) **referencial teórico** – compreendendo definições, propriedades e relações – determina o sistema lógico-dedutivo que permite dar sentido aos objetos e artefatos por meio de uma articulação entre essas definições, propriedades e relações entre propriedades. É essa articulação que permite que os objetos e artefatos geométricos tenham um estatuto teórico perdendo o polo empírico.

Chácon e Kuzniak (2011, apud ORDEM 2015, p. 97) salientam que a importância do quadro de ETG reside no fato de ele determinar as condições que permitem a um sujeito (aluno, professor, estudante, pesquisador, etc.) materializar a atividade como um geômetra, dado que permite a reorganização dos níveis epistemológico e cognitivo estabelecendo uma rede de relações de três gêneses: a gênese figural (do ponto de vista da visualização da intuição do espaço); a gênese instrumental (processo de construção mediante o uso de artefatos); e, a gênese discursiva (que tem a ver com o registro discursivo em estreita colaboração com o processo de prova), rede essa apresentada na figura 1.

Neste esquema da figura 1, destacamos a importância de instrumentos de construções geométricas pelo seu grande impacto na manifestação do ETG, uma vez que, constituindo a parte mais visível, acabam ditando em grande parte a formulação de conjecturas que, muitas vezes, são aceitas pelos alunos como propriedades estabelecidas, sem terem sido validadas de acordo com as regras matematicamente reconhecidas como instrumentos de validação de afirmação.

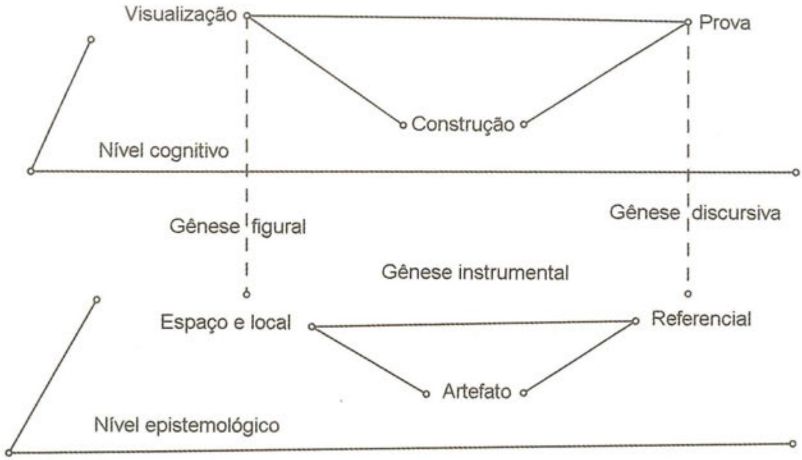


Figura 1. Esquematização do espaço de trabalho geométrico baseado na gênese do raciocínio discursivo

Fonte: Chacón e Kuzniak (2011, apud Ordem 2015, p. 98)

O trabalho de Houdement e Kuzniak ou de Chacón e Kuzniak está voltado aos processos de validação em Geometria. Outros construtos teóricos de referência nas pesquisas sobre o processo de aprendizagem da demonstração são os trabalhos de Balacheff (1987) e Harel e Sowder (1998, 2007).

A tipologia de provas de Balacheff (1987)

Balacheff (1987) começa por fazer distinção entre provas e demonstrações: uma prova é uma explicação aceita por uma comunidade em um dado momento. Certas explicações podem ter estatuto de prova para um determinado grupo social, mas para outro não. As demonstrações são provas da comunidade dos matemáticos e, portanto, respeitam rigorosamente certos critérios. A prova apenas terá estatuto de demonstração se for uma sequência organizada de enunciados segundo certas regras: ou o enunciado é assumido como verdadeiro (axioma), ou é deduzido dos que lhe precedem com ajuda de uma regra de dedução tomada num conjunto bem definido de regras. Almouloud (2007), apresenta uma descrição muito clara sobre «prova» e «demonstração» que consideramos pertinente:

> [...] A explicação reconhecida como convincente por uma comunidade, adquire um estatuto social, constituindo-se uma **prova** para esta comunidade, seja a proposição «verdadeira» ou não. Quando a prova se refere a um enunciado matemático, Balacheff a chama, somente neste caso, de **demonstração**.
>
> - As **provas** são explicações aceitas por outros num determinado momento, podendo ter estatuto de prova para determinado grupo social, mas para outro não. As **demonstrações** são provas particulares com as seguintes características:
>
> - São as únicas aceitas pelos matemáticos
>
> - Respeitam certas regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados a partir de regras tomadas num conjunto de regras lógicas
>
> - Trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, não pertencentes ao mundo sensível, embora a ele façam referência (Almouloud 2007, apud Ordem 2010, p. 55, grifo nosso).

Convém ressaltar que quando Almouloud afirma que as demonstrações são provas particulares, quer dizer são provas que respeitam critérios lógico-matemáticos; explicações que se baseiam, por exemplo, em verificações empíricas não podem ser consideradas de demonstração.

Na perspectiva cognitiva, Balacheff (1987) identificou duas categorias de provas manifestadas por alunos até compreenderem o sentido matemático de demonstração. Trata-se de provas pragmáticas e provas intelectuais.

As **provas pragmáticas** são explicações em que se servem de manipulação de exemplos, figuras, ou observação de exemplos concretos para a validação de propriedades; enquanto as **provas intelectuais** são explicações baseadas na formulação de conceitos e relações dedutivas entre conceitos na validação de propriedades. Na categoria de provas pragmáticas, Balacheff distingue entre empirismo ingênuo, experiência crucial e exemplo genérico; enquanto as provas intelectuais compreendem experiência mental e cálculo simbólico. A prova é «empirismo ingênuo» (*empirisme naïf*) quando a tentativa de validação de uma propriedade se baseia na verificação de vários casos particulares, normalmente escolhidos de forma aleatória; a prova é de natureza «experiência crucial» (*expérience cruciale*), se a tentativa de validação da propriedade se baseia em um exemplo cuidadosamente escolhido. Se o aluno constatar que o exemplo verifica a conjectura, então, conclui que é uma propriedade válida para qualquer objeto daquela classe. Este tipo de prova difere do anterior, pelas intenções: neste, a preocupação centra-se na generalização da propriedade, enquanto no primeiro (empirismo ingênuo) essa preocupação não existe, apenas a ideia é testar se a conjectura funciona ou não. «Exemplo genérico» (*exemple générique*) é uma forma de tentativa de validação de uma conjectura por meio de operações ou transformação de um exemplo de modo a deixá-lo com uma característica que representa uma classe de objetos; nessa transformação do exemplo, o aluno busca uma generalização tentando justificá-la com uma teoria. A prova é «experiência mental» quando o aluno toma exemplos particulares não como elementos de convicção, mas sim meio de apoio à organização da justificação, isto é, as justificações são dissociadas de exemplos específicos. Finalmente, a prova é «cálculo simbólico» quando as justificações se baseiam unicamente em transformações de símbolos formais.

ESQUEMAS DE PROVA (HAREL E SOWDER, 1998; 2007)

Concentrando-se no modo como os alunos verificam conjecturas matemáticas para se convencerem ou convencerem a outros, Harel e Sowder (1998, 2007) propõem um outro quadro teórico que se baseia em «esquemas de prova». Esses autores consideram «esquemas de prova» como argumentos que os alunos utilizam para se convencer ou convencer a outros alunos ou professor e, estendem essa descrição afirmando que «esquema de prova» de um indivíduo (ou comunidade) é aquilo que para esse indivíduo (ou comunidade) representa meio de justificação, argumento a recorrer para esclarecer suas dúvidas (averiguação), ou de outros (persuasão), acerca da veracidade de uma conjectura. Esses autores propõem três categorias de esquemas de prova: (i) esquema de prova de convicção externa – forma de prova na qual tanto o que convence o proponente como o que recorre para persuadir a outros está fora do problema; (ii) esquema de prova empírica – quando a tentativa de validação da conjectura depende de fatos físicos ou experiências manipuláveis; e, (iii) esquema de prova analítica – quando a validação de conjecturas se baseia em argumentos abstratos e deduções lógicas. Tal como Balacheff (1987), que sugeriu tipos de prova e defende que cada um deles represente uma fase de desenvolvimento cognitivo para a apropriação do sentido de demonstração, Harel e Sowder (1998, 2007) destacam também que cada um dos esquemas representa uma faceta de desenvolvimento cognitivo, portanto, ilustra uma forma de entender e interpretar o sentido de demonstração.

Cada um dos esquemas apresentados subdivide-se em algumas subcategorias. **Os esquemas de prova de convicção externa** dividem-se em (1) esquema de prova autoritária – quando em sua justificação, o aluno invoca professor, livro de texto, etc. para validar a conjectura. (2) esquema de prova ritual – quando o aluno justifica a validade de um argumento estritamente pela aparência do argumento e não pela correção do raciocínio envolvido. Por exemplo, achar que, ao apresentar uma prova em geometria recorrendo a duas colunas, por si é condição de sua validade. (3) esquema de prova simbólica não-referencial – quando o aluno trata os símbolos como se não tivessem relação com as situações em que surgem. Por exemplo, considerar como legitimo e, portanto, correta, a seguinte simplificação errada: $(a + b)/(c + b) = (a + \cancel{b})/(c + \cancel{b}) = a/c$. Por sua vez, **os esquemas de prova empírica** são subdivididos em: (1) esquema de prova indutiva – quando a tentativa de validação da conjectura se baseia na avaliação quantitativa, isto é, se o aluno julga que verificando uma conjectura a partir de um exemplo particular, ou talvez vários exemplos diferentes, é suficiente para assegurar sua validade. Por exemplo, a partir de substituição por alguns números ímpares, concluir que a expressão $n^2 - 1$ é divisível por 8, para qualquer n ímpar. (2) esquema de prova perceptiva – quando a tentativa de validação de uma conjectura se apoia em uma ou várias figuras, isto é, quando julga que as aparências dos desenhos por si só são suficientes como meios de argumento. Finalmente, entre **os esquemas de prova analítica**, distinguem-se: (1) esquemas de prova transformacional – quando os argumentos se fundamentam em operações sobre objetos e antecipação de resultados que são convertidos em argumentos dedutivos. (2) esquemas de prova axiomática – quando as validações são tomadas de um sistema axiomático para formar uma cadeia dedutiva. Harel e Sowder afirmam que as duas subcategorias dos esquemas de provas analíticas (transformacionais e axiomáticas) gozam de três características essenciais: a generalidade – que tem a ver com a compreensão pessoal de que todos os argumentos devem ser justificados sem exceção; pensamento operacional – que tem a ver com as tentativas de antecipar os resultados durante o processo de prova; e, inferência lógica – tem a ver com a apresentação de justificações baseadas em regras de inferência que observam princípios lógicos aceitos.

Os quatro construtos teóricos (paradigmas geométricos; espaço de trabalho geométrico; tipos de prova e esquemas de prova) apresentam coerência, mas também especificidades ímpares entre si. Essa consistência permite que cada um deles seja útil para análise e interpretação de fenómenos observáveis em pesquisas de processos de ensino e aprendizagem da geometria e de provas e demonstrações e, as especificidades fazem que cada um deles possa ser utilizado sem que haja ruptura na análise e, às vezes, podemos estabelecer relações entre alguns desses referenciais teóricos obtendo algumas equivalências entre eles. É assim que Harel e Sowder (2007) dão-nos a seguinte equiparação entre suas propostas de esquemas de prova com os tipos de prova propostos por Balacheff: as provas do tipo «empirismo ingênuo» e «experiência crucial» correspondem às provas da categoria «esquemas de prova empírica», enquanto as provas do tipo «exemplo genérico», «experiência mental» e «cálculo simbólico» correspondem aos esquemas de «prova dedutiva» e «prova transformacional». Contudo, mais do que procurar estabelecer equivalências entre os dois referenciais teóricos, entendemos que as duas classificações de provas de Balacheff (1987) e de Harel e Sowder (1998, 2007) – apesar de categorizarem provas produzidas por alunos no seu processo de aprendizagem da noção de demonstração em matemática - diferem em nível epistemológico: Balacheff cataloga a evolução do sentido de demonstração nos alunos e, Harel e Sowder concentram-se nas justificativas tomadas por alunos para considerar que uma dada prova seja vista como apresentação de uma demonstração. Nesse ponto de vista podemos dizer os dois sistemas de classificação não se contradizem, mas sim, se complementam. Agora vejamos como os referenciais teóricos aqui apresentados podem ser utilizados na análise e interpretação de resultados de pesquisas.

Por exemplo, Ordem (2015) em sua pesquisa pediu aos sujeitos, participantes do estudo, que demonstrassem que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado do triângulo e sua medida é metade da medida desse terceiro lado. Eis a resposta de Tarcísio, um dos participantes da pesquisa (Figura 2):

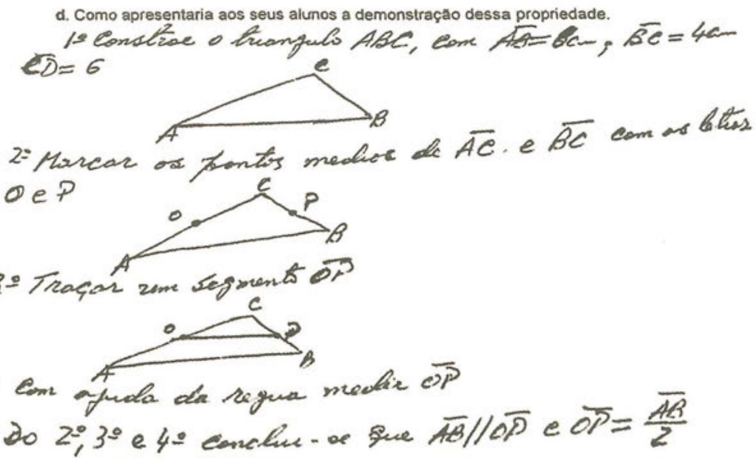


Figura 2. Produção do aluno Tarcísio

Fonte: Ordem (2015, p. 177)

Como vemos pelas descrições apresentadas, Tarcísio baseou-se em evidências empíricas (desenho e medições) para tirar conclusões. Desse modo, do ponto de vista dos paradigmas geométricos, dizemos que ele agiu sob GI (ou Geometria natural), porque nesse paradigma, desenho e evidências empíricas são meios de validação de propriedades geométricas. Quanto ao ETG podemos afirmar que, nesta resolução, comporta as próprias construções (desenhos), as medições, e as relações de paralelismo e de igualdade obtidas empiricamente (mas sem um modelo teórico bem fundamentado). Se formos apenas nos concentrar na prova em si, podemos classificá-la como prova pragmática na sua forma mais elementar, isto é, empirismo ingênuo, na terminologia de Balacheff (1987), pois Tarcísio limitou-se em verificar o paralelismo e a medida, sem manifestar a intenção de generalizar a propriedade para todos os triângulos (na sua produção não chega a expressar explicitamente essa conclusão). Na terminologia de Harel e Sowder (1998, 2007), podemos dizer que se trata de esquema de prova indutiva, porque Tarcísio se baseou na manipulação de régua e avaliação quantitativa.

Por outro lado, se explicitamente Tarcísio mostrasse a intenção de generalizar a propriedade que constatou em exemplos particulares para todos os triângulos, diríamos que a prova é pragmática em sua forma de experiência crucial segundo a classificação de Balacheff (1987), já que a propriedade é estendida para todos os triângulos. Esse tipo de prova é ilustrado por meio da figura 3 e, mas relativamente a uma das partes da propriedade: a do paralelismo entre o terceiro lado do triângulo em relação ao segmento determinado por dois pontos médios de outros dois lados do triângulo.

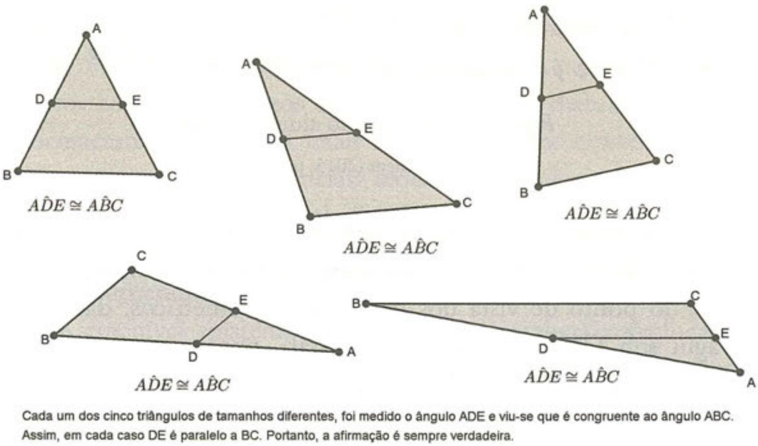
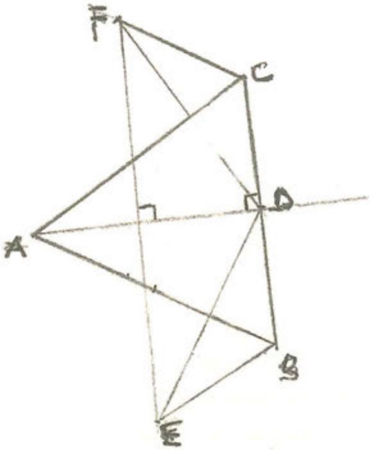


Figura 3. Exemplo de prova pragmática

Fonte: Ordem (2015, p. 162)

Consideremos outra situação que também Ordem (2015, p. 248) apresentou aos seus sujeitos de pesquisa: «considere um triângulo ABC e D o ponto médio do segmento BC. Seja E o simétrico de D em relação à reta AB e seja F o simétrico de D em relação à reta AC. (a) Que relação existe entre os segmentos CF e BE? Por quê? ». Em sua tentativa de resolução, Herculano, um dos participantes da pesquisa, apresentou o seguinte:



«Dado ABC um triângulo e D o ponto médio do segmento BC, E e F simétricos a D em relação a AB e AC respectivamente. C é simétrico a B em relação a D visto que a simetria conserva as medidas [...] D é ponto médio de BC. Se D é simétrico a E e F em relação a AB e AC respectivamente e C e B são simétricos em relação a D, então FC e EB também são simétricos em relação a AD.» (Herculano)

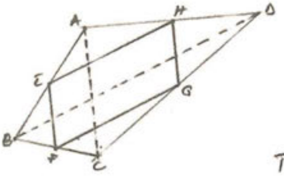
Figura 4. Produção de Herculano

Fonte: Ordem (2015, p. 253)

Herculano faz um desenho com certas condicionantes que acabam deixando o desenho com as propriedades de um tipo especial de triângulos: os triângulos isósceles. Quer dizer, ele fez umas transformações em seu desenho que lhe permitem desenvolver um discurso que valida o que constata só naquele tipo triângulo, mas que exclui outros triângulos que gozam da formulação inicial da tarefa. Por ter buscado um discurso teórico (propriedades), então dizemos que a prova de Herculano é também pragmática, mas em sua forma «exemplo genérico», apesar da propriedade que ele enuncia não ser correta. Quanto à classificação de Harel e Sowder, dizemos que a prova apresentada por Herculano se enquadra em esquema de prova dedutiva. Por Herculano desenvolver um discurso para justificar sua conjectura baseado em propriedades envolvendo simetria, dizemos que agiu sob GII (geometria axiomática natural) e, quanto ao ETG, comporta as propriedades da simetria para além do próprio desenho.

Vamos apresentar mais um exemplo de como utilizar os construtos dados anteriormente para avaliar produções dos alunos. Em mais uma tarefa de sua investigação, Ordem (2015) pediu que seus sujeitos desenhassem vários quadriláteros ABCDE e, em cada um deles, marcassem os pontos médios E, F, G, H dos seus lados. Em seguida, deveriam formular uma conjectura que observassem sobre o quadrilátero determinado por esses pontos médios dos lados e, finalmente, deveriam demonstrar que essa conjectura é uma propriedade válida para qualquer quadrilátero.

Uma das poucas resoluções corretas é de Herculano que passamos a apresentar. Em sua resolução, Herculano traça as diagonais AC e BD do quadrilátero ABCD a partir das quais consegue obter uma reconfiguração que lhe permite recorrer a propriedades e conceitos geométricos como ferramentas conceituais de argumentação, obtendo uma coerência em sua produção, produção essa que do ponto de vista matemático não apresenta erros conceituais nem lógicos, portanto, é uma prova com estatuto de demonstração. Sob a classificação de Balacheff (1987) a prova apresentada por Herculano é intelectual e, na classificação de Harel e Sowder (1998, 2007) trata-se de esquema de prova analítica ou transformacional, uma vez que a argumentação se baseou em propriedades e conceitos válidos: propriedade da base média de um triângulo, definição de paralelogramo, diagonal de um quadrilátero. Do ponto de vista dos paradigmas geométricos, a produção de Herculano se baseou em GII e o ETG, manifestamente apresentado por Herculano, consiste das propriedades e conceitos geométricos utilizados por ele em sua argumentação, incluído o próprio desenho que serviu de meio de apoio. A produção de Herculano é reproduzida na íntegra na figura 5 que se segue.



Sendo [ABCD] um quadrilátero qualquer e E,F,G,H pontos médios dos lados [AB]; [BC]; [CD] e [DA].

[AC] e [BD] diagonais do quadrilátero

Temos [ABD] e [BCD]; [ABC] e [ACD] Triangulos pertencentes ao quadrilátero [ABCD].

Pela propriedade da tarefa 2 todos os triangulos possuem segmentos unindo os pontos médios e estes segmentos são paralelos ao terceiro lado: [EF]//[AC]//[GH] e [EH]//[BD]//[FG] se [EF]//[GH] e [EH]//[FG] sendo [EFGH] um quadrilátero podemos concluir que este quadrilátero é um paralelogramo por possuir lados paralelos dois a dois.

Figura 5. Prova de Herculano sobre os pontos médios dos lados de um quadrilátero.

Fonte: Ordem (2015, p. 202)

Ainda em relação à mesma tarefa, Ofélia, um dos participantes da pesquisa, deu a seguinte explicação que se apresenta na figura 6.

Todas as figuras feitas, apresentam caracteristicas tipicas do losango.
Elas apresentam 4 angulos opostos dois a dois e iguais, lados paralelos dois a dois, unindo os vertices teremos duas mediatrizes que seram perpendiculares.

Figura 6. Prova apresentada por Ofélia acerca dos pontos médios dos lados de um quadrilátero

Fonte: Dados de pesquisa

Perguntada, em entrevista, como havia chegado àquelas conclusões, Ofélia respondeu: «a observação das figuras» (Ordem, 2015, p. 209). Por sua vez, Dário, outro participante da pesquisa, limitou-se a apresentar um desenho e, em seguida a afirmar que a figura era um losango, portanto, também um paralelogramo, como apresentamos o extrato na figura 7.

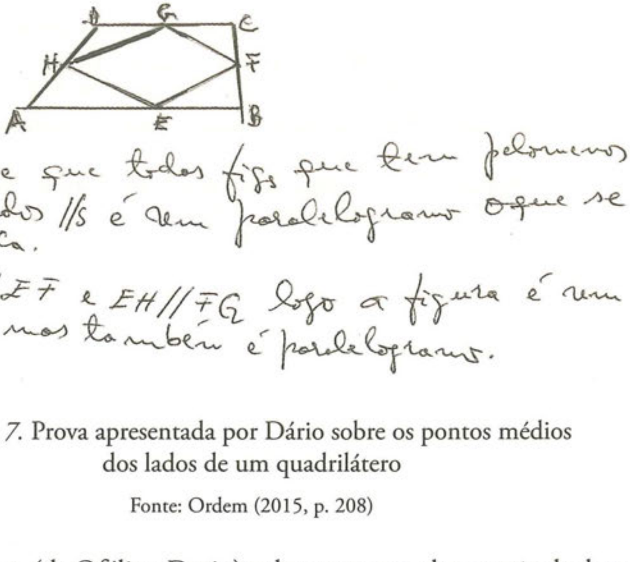


Figura 7. Prova apresentada por Dário sobre os pontos médios dos lados de um quadrilátero

Fonte: Ordem (2015, p. 208)

Por essas provas (de Ofélia e Dario) se basearem na observação de desenhos, dizemos que elas ilustram uma manifestação de esquemas de prova perceptiva, segundo Harel e Sowder (1998, 2007). Por conseguinte, seus autores se basearam nos princípios de GI (Geometria natural) para validar a propriedade. Polos argumentos apresentados se limitarem a polo empírico, desenhos, dizemos que o ETG comporta os desenhos, os instrumentos de construção utilizados e os conceitos geométricos apresentados apesar de não ter havido um modelo teórico que sustenta as conclusões apresentadas. Do ponto de vista de conhecimentos, as duas produções mostram que seus autores manifestaram não saber que exemplos não são aceitos como provas válidas em matemática, isto é, não são demonstrações.

Conclusões e considerações finais

Neste artigo apresentamos alguns referenciais teóricos vigentes em educação matemática e alguns exemplos que ilustram como esses constrututos teóricos podem ser utilizados na análise de dados obtidos em uma pesquisa, exemplos esses baseados em nossa própria experiência de seu uso. Ao mesmo tempo, entendemos que essas análises embasadas por esses referenciais teóricos permitem interpretar os resultados na ótica de concepções manifestadas pelos sujeitos acerca de provas e demonstrações em geometria plana, objeto de pesquisa nesse estudo de onde extraímos os exemplos. Por exemplo, as duas últimas ilustrações apresentadas manifestam explicitamente a concepção de que evidências empíricas podem ser tomadas por algumas pessoas como argumentos de uma demonstração, concepção essa que se desvia do sentido de demonstração aceito em matemática - um processo segundo o qual uma proposição é inferida de outra baseando-se unicamente em axiomas ou propriedades previamente estabelecidas. Por sua vez, o exemplo apresentado na figura 5 expressa a concepção de prova segundo os princípios matemáticos, isto é, uma cadeia de proposições que se inferem umas das outras baseando-se unicamente em conceitos matemáticos, em que o desenho simplesmente serve de meio de apoio ao raciocínio, mas nunca de argumento. Com os dois exemplos de concepções, como conclusões de um estudo, tentamos apenas ilustrar como os construtos teóricos podem ser utilizados para tirar conclusões dos dados sobre um problema em estudo numa pesquisa.

Referências

Almouloud, S. A. (2007). *Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino aprendizagem.* In: REUNIÃO ANUAL DE ANPED, 30: Caxambu. Disponível em <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes_30/prova.pdf>. Acesso em: 25 de maio 2008.

Balacheff, N. (1987). *Processus de prevuve et situations de validation.* Educational Studies in Mathematics, 18, 147-176.

Chacón, I. Mª. G., Kuzniak, A. (2011). Les espaces de travail géométrique de futurs professeurs em contexte de connaissances. *Annales de didactique e de sciences cognitives.* IREM de Strasbour, 187-216.

Gidden, A. (2013). *Sociologia.* 9.ed. Tradução de Alexandre Figueiredo et al. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Harel, G.; Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: results from exploratory studies. In: Alan H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsk (Eds.), *Research in College Mathematics Education III,* 234-283.

Harel, G.; Sowder, L. (2007). Toward comprehensive on the learning and teaching of proof. In: F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on Mathematics teaching and learning.* National Council of Teachers of mathematics.

Houdement, C., Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradgms. In: *Proceedings of European Research in Mathematics Education III. Working Group 7.* Disponível em: <http://ermeweb.free.fr/CERME3/Groups/TG7/TG7_houdement_cerme3.pdf>. Acesso em 24 de julho de 2011.

Houdement, C., Kuzniak, A. (2006). Paradigmes Géométriques et enseignement de la géométic. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* IREM de Strasbourg, 11, pp. 175-193.

Kuhn, T. S. (2011). *A tensão essencial: estudos selecionados sobre tradição e mudança científica.* Tradução Marcelo Amaral Penna-Forte – São Paulo: Editora Unesp, 408p.

Ordem, J. (2010). *Prova e demonstração em geometria: uma busca da organização Matemática e Didática em Livros didáticos de 6ª a 8ª séries de Moçambique*. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Ordem, J. (2015). *Prova e demonstração em geometria plana: concepções de estudantes da Licenciatura em Ensino de Matemática em Moçambique*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.