

# INVESTIGACIONES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Jesús Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra

Editores

## Capítulo 7



*Investigaciones en educación matemática*

Jesús Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra, editores

© Jesús Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra, 2016

© Pontificia Universidad Católica del Perú, Fondo Editorial, 2016

Av. Universitaria 1801, Lima 32, Perú

[feditor@pucp.edu.pe](mailto:feditor@pucp.edu.pe)

[www.fondoeditorial.pucp.edu.pe](http://www.fondoeditorial.pucp.edu.pe)

Diseño, diagramación, corrección de estilo  
y cuidado de la edición: Fondo Editorial PUCP

Primera edición: octubre de 2016

Tiraje: 500 ejemplares

Prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio,  
total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores.

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2016-12807

ISBN: 978-612-317-201-5

Registro del Proyecto Editorial: 31501361601055

Impreso en Tarea Asociación Gráfica Educativa

Pasaje María Auxiliadora 156, Lima 5, Perú

# LA ELIPSE: PROCESO DE INSTRUMENTALIZACIÓN MEDIADO POR EL SOFTWARE GEOGEBRA<sup>1</sup>

*Ellipse: instrumentation process mediated by the GeoGebra software*

José Carlos León Ríos<sup>2</sup>  
Jesús Victoria Flores Salazar<sup>3</sup>

## RESUMEN

Este artículo tiene por objetivo analizar los procesos de instrumentalización de la elipse al utilizar el GeoGebra como mediador. La experiencia está dirigida a estudiantes de un primer curso de matemáticas de una universidad particular de la ciudad de Lima. El proceso de instrumentalización se basó en el enriquecimiento de las propiedades de la elipse durante una secuencia de actividades que permitieron el surgimiento de la elipse como instrumento, en el sentido de Rabardel. Es así que la teoría instrumental nos permitió analizar las acciones de los estudiantes, mediante la identificación de esquemas de los posibles esquemas de utilización que los estudiantes construyeron o movilizaron cuando interactuaron con la elipse, como la condición geométrica de la elipse, la relación entre sus parámetros, la excentricidad, la ubicación de los vértices, focos, vinculando la representación gráfica a la expresión algebraica correspondiente.

**Palabras-clave:** *Instrumentalización; Elipse; GeoGebra.*

---

<sup>1</sup> Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de Matemática en Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT participación PUC-SP/Brasil y PUCP/Perú. IREM-PUCP, Proyecto Integrado Internacional: PI0272. Fondo concursable desarrollo de líneas de investigación de la Escuela de Posgrado 2013.

<sup>2</sup> Pontificia Universidad Católica del Perú – Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. a19801146@pucp.edu.pe

<sup>3</sup> Pontificia Universidad Católica del Perú – DIMAT-PUCP. jvflores@pucp.pe

**ABSTRACT**

This article aims to analyze the instrumentation processes of the ellipse by using the GeoGebra software as a mediator. The experience is aimed at students in their first course of Mathematics at a private university in the city of Lima. The instrumentation process was based on the enrichment of the properties of an ellipse during a sequence of activities that allowed the ellipse to emerge as a tool, in Rabardel's sense. Thus, the instrumental theory allowed us to analyze students' actions by identifying possible utilization schemes that students built or mobilized while interacting with the ellipse, like the geometric condition of the ellipse, the relationship between its parameters, eccentricity, the location of the vertices, focuses, linking the graphic representation to the corresponding algebraic expression.

*Keywords: Instrumentation; Ellipse; GeoGebra.*

**CONSIDERACIONES INICIALES**

Algunas investigaciones en educación matemática como la de Fernández (2011) reconocen distintas categorías de problematización, como la tendencia a separar en el currículo las cónicas del contenido geométrico, la omisión de las construcciones geométricas y la escasez de estudios sobre lugares geométricos.

En ese estudio, el investigador sugirió la necesidad de fomentar las construcciones geométricas de dichas curvas e integrarlas al enfoque analítico actual. De igual forma, aparece el trabajo de Santa (2011), que busca una complementariedad de la enseñanza tradicional de la geometría analítica, ya que analiza la comprensión de la elipse como lugar geométrico a través de un objeto concreto: el doblado del papel. Además, con el objetivo de obtener la condición geométrica de la elipse, la investigadora realizó construcciones previas de los lugares geométricos de las mediatrices y circunferencias.

Basados en nuestra experiencia docente, hemos detectado que dicho problema también es percibido en los estudiantes de la escuela



de Arquitectura donde realizamos el estudio. Es así que hemos observado una desatención en las construcciones y lugares geométricos en los programas curriculares, lo cual ocasiona la restricción del uso de las construcciones geométricas que los estudiantes traen consigo, como el trazo de la mediatriz, la determinación del punto medio de un segmento, que en otro caso, permitirían el reforzamiento y la reutilización de estos constructos geométricos. Pensamos también que la permanente vinculación entre las secciones cónicas y el sistema de coordenadas cartesianas contribuye a que el alumno considere a la elipse como una curva dependiente de dicho sistema, y que en otros contextos de referencia, o incluso prescindiendo de estos, el alumno no considere las propiedades de dicha curva como propiedades invariantes.

Finalmente, debido a la permanente predominancia algebraica en los primeros contactos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la elipse, reconocemos la necesidad de promover el fomento de las construcciones geométricas en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Resaltamos el uso del GeoGebra, como ambiente de la geometría dinámica (AGD), el cual tuvo un rol protagónico en nuestra investigación por tratarse de una fuente de apoyo en la enseñanza y aprendizaje de la elipse. En relación con el uso paulatino de dicho AGD, Laborde, Kynigos, Hollebrands y Strasser (2006) señalan que en las últimas décadas se observa involucrada a toda la comunidad educativa en la que estamos inmersos los docentes como protagonistas del cambio. Precisamente, los autores indican que existe una carencia de representaciones gráficas vinculadas a sus significados geométricos y que dichos problemas con los que la enseñanza se ha enfrentado en las pasadas décadas están ligados a la dualidad de los procesos axiomáticos deductivos y el de las representaciones gráficas— geométricas, empíricas. En ese sentido, dichos investigadores mencionan que algunos intentos en la enseñanza y aprendizaje de la geometría han llevado a sus pares a centrarse en el rol que juegan las representaciones gráficas proporcionadas por los ambientes de geometría dinámica.

## ASPECTOS DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

La metodología de la investigación fue la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), la cual nos permitió mostrar las conclusiones de nuestras actividades y confrontar nuestros supuestos elaborados en la fase de concepción y análisis *a priori* con los datos recolectados en la fase de experimentación, con lo cual pudimos elaborar un análisis *a posteriori* y una validación interna. En esta investigación realizamos un análisis preliminar en el que describimos el desarrollo histórico de la elipse, los conocimientos previos requeridos por el alumno y los textos que la institución consigna para el desarrollo del curso.

Ciertamente, en la aproximación histórica consideramos a Boyer (1987) como referencial histórico e incluimos las primeras manifestaciones griegas hasta sus aplicaciones en el campo de la astronomía en el siglo XVII aproximadamente. En la parte cognitiva, elaboramos una prueba de diagnóstico en la que consideramos como conocimiento preexistente el lugar geométrico de la circunferencia, la parábola, la mediatriz de un segmento y las propiedades de un triángulo isósceles. Finalmente, en la secuencia didáctica, elaboramos una revisión a los textos referidos al capítulo de elipse, los cuales mostraron cómo se continúa privilegiando el enfoque tradicional de la geometría analítica.

## TEORÍA INSTRUMENTAL

Con el fin de analizar el enriquecimiento de la condición geométrica de la elipse por parte de los estudiantes, hemos considerado presentar el enfoque instrumental de Rabardel (1995). En ese sentido, describimos algunos términos que consideramos nos permitirán analizar cómo los estudiantes interactúan con la elipse.

Rabardel (1995) afirma que en toda situación de actividad o de utilización de artefactos existe siempre una tríada de elementos relacionados de manera explícita o implícita, formada por el sujeto, el instrumento y el objeto; siendo el instrumento un intermediario entre el sujeto y el objeto.

Para el autor, *sujeto* puede entenderse como un usuario, alumno, operario, trabajador, agente, individuo, grupo de individuos o estudiantes que desarrollan una determinada acción con un instrumento.

*Instrumento* puede ser una herramienta, máquina, incluso una propiedad, que sirve como mediador entre el sujeto y el objeto a donde va dirigida la acción con ayuda del instrumento.

*Artefacto*, en cambio, no especifica un tipo de relación particular con el objeto al cual se dirige. El autor señala que el artefacto es elaborado para inscribirse en actividades intencionales, siendo la intencionalidad la causa de su existencia. Es decir, que el artefacto, material o no, puede transformar a los objetos y concreta una solución a un problema o a una clase de problemas sociales.

Entonces, el artefacto solamente pasará a ser instrumento, cuando el sujeto le asigna los esquemas de utilización correspondientes, es decir esquemas relacionados con la utilización de un artefacto. Por lo tanto, dichos esquemas tendrán una relación dual: por un lado, se relaciona con los artefactos pues los convierten en medios; y por otra parte, con los objetos sobre los cuales estos artefactos permiten actuar. Entonces, el instrumento no existe en sí, es el resultado de asociar el artefacto a la acción del sujeto, cuya característica principal sea la de adaptarse al sujeto y al objeto. El autor señala que el término instrumento designa el artefacto en situación, inscrito en su uso, en una relación instrumental entre dos entidades que son el sujeto y el objeto sobre el cual se actúa.

Así, de acuerdo con Salazar (2009), en relación con la investigación de Rabardel, dichos esquemas comprenden diferentes variantes. La primera, referida a las acciones que se focalizan en las características, propiedades y actividades específicas del artefacto, llamadas esquemas de uso (EU); y la segunda, que son las acciones orientadas hacia el objeto de la actividad, hacia la tarea principal del sujeto, llamadas esquemas de acción instrumentada (EAI).

Además, Salazar (2009) indica que un mismo esquema puede, dependiendo de la situación, ser un esquema de uso y en otra circunstancia



un esquema de acción instrumentada. En ese sentido, León (2014) muestra un ejemplo en su investigación de la elipse, que indica que si se desea hallar la longitud del lado recto en términos de sus semiejes, la condición geométrica de la elipse podría ser un esquema de uso o podría tratarse también de un esquema de acción instrumentada para un alumno que inicia el estudio de la elipse.

De igual forma, Rabardel (1995) señala que es necesario considerar un esquema adicional a los mencionados, y describe al esquema de actividad colectiva instrumentada (EACI) que corresponde a la utilización de un instrumento en un contexto de actividades compartidas con otros usuarios, ya que como individuos no estamos solos, sociabilizamos constantemente e interactuamos con otros individuos, incluso con los creadores del artefacto, quienes implícitamente forman parte del surgimiento de nuestros esquemas.

En ese sentido, el investigador indica que las dos dimensiones que componen el instrumento, artefacto y esquema están relacionadas pero mantienen independencia, es decir un esquema puede aplicarse a otros esquemas de la misma clase, clases vecinas o diferentes. Por ejemplo, según León (2014) los esquemas de utilización de una elipse pueden ser llevados también a un esquema de clase vecina como el de la hipérbola. De manera correlativa, un artefacto puede ser insertado en otros esquemas de utilización como la elipse insertada en la construcción de elipsoides.

En conclusión, Rabardel (1995) puntualiza la *Génesis Instrumental* como la elaboración o construcción de un instrumento, que permite la continuidad de las acciones en los distintos artefactos, materiales o simbólicos, por parte de los sujetos. Existen dos procesos que contribuyen, según el autor, al surgimiento y a la evolución del instrumento, y los cuales se distinguen por la orientación de la actividad: las acciones que se dirigen a la componente artefactual o aquellas que se orientan hacia el sujeto mismo.

Acerca del proceso de *instrumentalización*, este está compuesto por las funciones constitutivas del artefacto (definidas por el diseñador),



las funciones constituidas (elaboradas por el usuario) y las nuevas funciones inscritas en una nueva clase de artefactos a partir de estas funciones constituidas por el usuario. El usuario elabora dichas funciones porque sus acciones están volcadas hacia la componente artefactual, de tal forma que surgen nuevas características, producen e instituyen funciones y le atribuyen propiedades al artefacto.

De manera similar, el proceso de *instrumentación* se caracteriza cuando la actividad está orientada hacia el mismo sujeto. Corresponde a la emergencia y evolución de los esquemas de utilización y de acción instrumentada. Se inicia cuando, paralelamente al descubrimiento progresivo de las propiedades, nuevos esquemas se van constituyendo, los cuales se acomodan, se coordinan y se asimilan con otros esquemas ya constituidos. Así, dichos esquemas evolucionan y luego son movilizados en otras situaciones. En este ciclo participan los modos operatorios (previstos por los diseñadores), los esquemas de utilización (elaborados por los usuarios) y sus nuevos modos de operar, elaborados por los esquemas que movilizaron o elaboraron los usuarios.

## DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS

Presentamos las dos primeras actividades de toda la investigación que desarrollamos. En esta experiencia participaron seis estudiantes del curso de Matemática I, quienes conformaron tres equipos integrados por dos estudiantes. Hicimos un análisis *a priori* y *a posteriori* de dos de los tres equipos.

Nuestro experimento fue canalizado en tres encuentros, cada uno de noventa minutos. El primer encuentro, el cual no fue foco de nuestra investigación, fue dirigido a explorar las herramientas del GeoGebra; en el segundo encuentro, los estudiantes hicieron surgir la condición geométrica de la elipse y enriquecieron las propiedades de sus otras componentes; en el tercer encuentro, se vinculó la elipse a los ejes coordenados, se le identificó con una expresión algebraica y se elaboró una aplicación animada de la elipse para movilizarla como instrumento.

La condición geométrica de la elipse, razón de la experiencia de este artículo, indica que *dado un punto de la elipse, la suma de sus distancias a otros dos puntos fijos es una constante, igual a la longitud del eje mayor*. Dicha componente artefactual fue desarrollada en dos actividades y luego construida como un posible esquema de acción instrumentada (EAI), que evolucionó como instrumento para determinar la relación entre los parámetros de la elipse. Para constituir el EAI de la condición geométrica, los estudiantes movilizaron sus esquemas de uso (EU): mediatriz de un segmento, circunferencia, triángulo, entre otros, los cuales fueron consignados en el análisis cognitivo como saberes previos al tema de la elipse.

Además verificamos que los estudiantes estaban instrumentados en relación con la mediatriz de un segmento, pues movilizaron la propiedad que indica que *si un punto pertenece a una mediatriz de un segmento entonces equidista de los extremos del segmento*.

Respecto a la primera actividad, los estudiantes que ya estaban instrumentados con la circunferencia como lugar geométrico, continuaron instrumentalizándola, debido a que la enriquecieron con una nueva propiedad, que fue construida movilizando esquemas de uso como la mediatriz de un segmento, circunferencia y triángulo isósceles. A continuación se detalla una breve descripción al respecto.

En la figura 1, se muestra una circunferencia con centro en  $C$ , que contiene al punto interior fijo  $Q$ . Se les pide determinar un punto  $A$  sobre el radio  $\overline{CP}$ , de tal forma que dicho punto equidiste de  $P$  y  $Q$ .

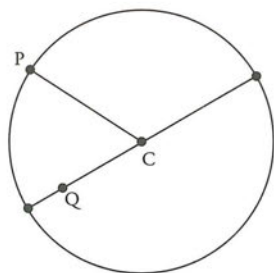


Figura 1. Actividad 1

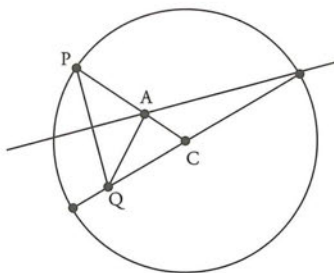


Figura 2. El punto A

Ninguno de los dos equipos tuvo dificultades en movilizar sus esquemas previos. De acuerdo con el análisis *a priori*, movilizaron la propiedad de la mediatriz del segmento  $\overline{PQ}$ , como un conjunto de puntos que equidistan de los extremos de dicho segmento, la noción de segmento, el uso de algunas herramientas del GeoGebra, como la intersección de objetos, el trazo de segmentos, y de la recta mediatriz, de acuerdo con lo previsto en el análisis *a priori* de la Ingeniería Didáctica.

En la figura 2, los estudiantes de ambos equipos determinaron el punto  $A$  correspondiente. Luego movilizaron sus esquemas de uso pre-existentes de triángulo y clasificaron al triángulo  $APQ$  como triángulo isósceles.

En las figuras 3 y 4, los estudiantes desplazaron el punto  $P$  sobre la circunferencia de tal forma que el triángulo  $APQ$  mantuvo sus características invariantes; es decir, los lados  $\overline{AP}$  y  $\overline{AQ}$  permanecieron iguales, por lo que señalaron que resulta lo mismo sumar las medidas de los segmentos  $\overline{CA}$  y  $\overline{AP}$  que las medidas de los segmentos  $\overline{CA}$  y  $\overline{AQ}$ , siendo además esa suma una constante.

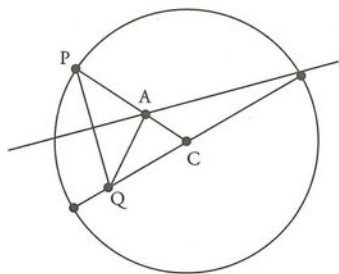


Figura 3. 1° Desplazamiento de P

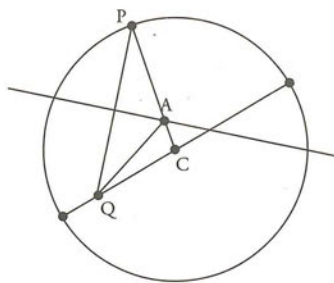


Figura 4. 2° Desplazamiento de P

De acuerdo con el análisis *a priori*, ambos equipos construyeron un posible esquema de acción instrumentada, específicamente la existencia de un punto  $A$  perteneciente al radio  $CP$  de la circunferencia con centro en  $C$  y un punto interior  $Q$ , de tal forma que resulta lo mismo

sumar la medida de los segmentos  $\overline{CA}$  y  $\overline{AP}$  que la medida de los segmentos  $\overline{CA}$  y  $\overline{AQ}$ .

La figura 5 representa la segunda actividad, en la que creemos hubo indicios para suponer que la circunferencia continuó instrumentalizándose porque vincularon el punto  $A$  a la trayectoria de una elipse haciendo uso de la herramienta rastro del GeoGebra.

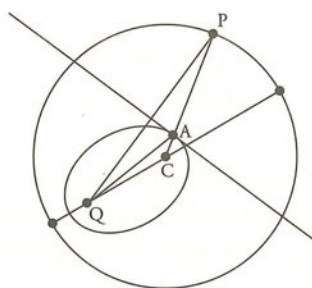


Figura 5. Trayectoria de la elipse

Además, pensamos que el artefacto elipse dejó de ser un artefacto abstracto para los estudiantes pues creemos que hay reconocimiento de que *la suma de las distancias de los segmentos  $\overline{CA}$  y  $\overline{AQ}$  es una constante*, con lo cual la elipse inicia el proceso de instrumentalización. Los esquemas que movilizaron fueron los de noción de circunferencia, de triángulo isósceles y mediatriz de un segmento. La herramienta «Activa Rastro» del GeoGebra permitió la interacción con la elipse, de acuerdo con el análisis *a priori*.

Subrayamos que los esquemas de acción colectiva instrumentada fueron producto de la emergencia que detectamos del trabajo colectivo de los estudiantes y que fueron ejemplificadas en muchos pasajes de nuestra secuencia de actividades cuando los integrantes de cada equipo intercambiaron esquemas de utilización y los ejemplificaron en la redacción de sus textos.



Seguidamente, en la tercera actividad, los estudiantes continuaron instrumentalizando la elipse y la enriquecieron con las propiedades referidas al eje focal, eje mayor, eje normal y eje menor. De este modo, dicha condición geométrica de la elipse continuó instrumentalizándose, ya que la enriquecieron con otra característica, y los estudiantes indicaron que *la suma de las medidas de los segmentos  $\overline{PF_1}$  y  $\overline{PF_2}$  corresponde a la longitud del eje mayor de la elipse.*

Es importante señalar que este nuevo instrumento permitió expresar la condición geométrica de la elipse omitiendo el radio de la circunferencia. Además, la condición geométrica de la elipse evolucionó de EAI a EU, ya que permitió construir otro nuevo esquema en términos de los parámetros de una elipse, cuya *relación geométrica se expresa como  $a^2 = b^2 + c^2$ .* Este descubrimiento progresivo de las propiedades de la elipse le va dando cierto significado al instrumento elipse.

## CONSIDERACIONES FINALES

Mediante las acciones de los estudiantes en las actividades que fueron orientadas a determinar la condición geométrica de la elipse, logramos identificar los posibles esquemas de utilización que construyeron o movilizaron cuando trabajaron dicha secuencia de aprendizaje. Por tal motivo, creímos conveniente hacer uso del enfoque instrumental como referente para la orientación de nuestra investigación.

Puntualizamos que en la actividad 1 los estudiantes continuaron instrumentalizando la circunferencia al enriquecerla con una propiedad adicional; es decir, dada la circunferencia con centro  $C$ , que contiene al punto interior fijo  $Q$ , es posible encontrar un punto  $A$  en el radio  $\overline{CP}$ , de tal forma que la suma de las medidas de los segmentos  $\overline{CA}$  y  $\overline{AQ}$  sea una constante, movilizándolo para ello esquemas de uso preexistentes como la mediatriz de un segmento, circunferencia y triángulo isósceles.

En la actividad 2, dicha propiedad de la circunferencia evolucionó de esquema de acción instrumentada a esquema de uso ya que la movilización del punto A favoreció la identificación del lugar geométrico de la elipse, con lo cual se inició el proceso de instrumentalización de dicha curva.

Asumimos que el proceso de la génesis instrumental sucedió cuando la propiedad descrita en la actividad 1 se movilizó como instrumento para favorecer la identificación del lugar geométrico de la elipse. Este descubrimiento progresivo de las propiedades de la elipse le va dando cierto significado al instrumento elipse.

*La elipse* dejó de ser un artefacto abstracto porque los estudiantes señalaron que la suma de sus distancias desde un punto de la elipse a otros dos puntos fijos en el interior de dicha curva es una constante igual al radio de la circunferencia. Debemos resaltar que la movilización de los esquemas por parte de los estudiantes de cada equipo fue coordinada y adaptada como esquemas de acción colectiva instrumentada.

Mencionamos además que el GeoGebra fue un programa integrador en la enseñanza y aprendizaje de la elipse. El conocimiento progresivo de las herramientas y comandos, en cuanto a sus potencialidades, permitió que los estudiantes interactuaran con la elipse. Por ejemplo, el rastro que traza un conjunto de puntos que cumplen determinada propiedad y que fue usada para marcar el lugar geométrico de los puntos que conformaron la elipse.

En último lugar, queremos señalar que aunque algunas de las funciones señaladas en la elipse fueron conservadas de manera durable para cierta clase de acciones, dichas funciones deben ser observadas nuevamente en actividades posteriores para comprobar tal nivel de instrumentalización.

## REFERENCIAS

- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en Educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Boyer, C. (1987). *Historia de la matemática*. Versión española de Mariano Martínez Pérez. Madrid: Alianza Editorial.
- Fernández, E. (2011). *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global. Integrando Cabri Géometre II Plus*, (Tesis de Maestría en Educación Matemática). Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Santiago de Cali, Colombia.
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. & Strasser, R. (2006). *Teaching and Learning Geometry with Technology*. Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education A. Gutiérrez, P. Boero (eds.), 275-304, Sense Publishers. Recuperado de <https://www.sensepublishers.com/media/457-handbook-of-research-on-the-psychology-pdf>.
- León, José (2014). *Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el Geogebra en estudiantes de arquitectura y administración de proyectos*. (Tesis de Maestría en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú.
- Rabardel (1995). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. Traducido por M. Acosta. Santander, Colombia: Universidad Nacional de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas.
- Salazar, J. V. F. (2009). *Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo das transformações geométricas no espaço*. (Tesis de doctorado en Educación Matemática). Programa de Estudos Pós Gradua-dos em Educação Matemática. Pontificia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.
- Santa, Z. (2011). *La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele*. (Tesis de Maestría en Educación Matemática). Universidad de Antioquía, Facultad de Educación, Departamento de Educación Avanzada. Medellín, Colombia.