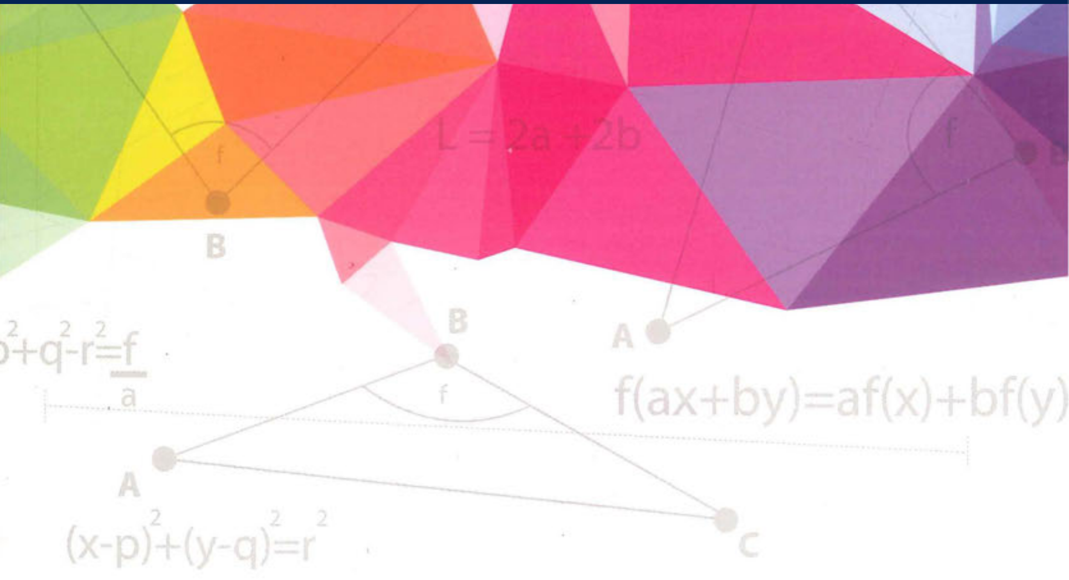
INVESTIGACIONES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Jesús Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra

Editores

Capítulo 6



Investigaciones en educación matemática
Jesús Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra, editores

Av. Universitaria 1801, Lima 32, Perú
feditor@pucp.edu.pe
www.fondoeditorial.pucp.edu.pe

Diseño, diagramación, corrección de estilo
y cuidado de la edición: Fondo Editorial PUCP

Primera edición: octubre de 2016
Tiraje: 500 ejemplares

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú Nº 2016-12807
ISBN: 978-612-317-201-5
Registro del Proyecto Editorial: 31501361601055

Impreso en Tarea Asociación Gráfica Educativa
Pasaje María Auxiliadora 156, Lima 5, Perú

El Aprendizaje de los Valores Máximos y Mínimos Locales de Funciones de Dos Variables a partir de la noción de Registros de Representación Semióticas[1]

Learning local maxima and minima of two-variable functions from the notion of Registers of Semiotic Representation

Katia Vigo Ingar[2]
Maria José Ferreira Da Silva[3]

Resumen

En este artículo presentamos y discutimos algunos elementos relacionados a la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Su pertinencia en la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial de dos variables es tal, puesto que esta teoría nos permite describir y analizar diversos fenómenos relacionados a las representaciones de los objetos matemáticos del cálculo. El objetivo del artículo es analizar el tránsito por los diferentes registros de representación semiótica en el aprendizaje de los valores máximos y mínimos locales. Para esto, utilizamos como metodología la Ingeniería Didáctica. Por consiguiente, afirmamos que la articulación entre el registro en lengua natural, el registro gráfico CAS y el algebraico fueron esenciales para la comprensión de los máximos y mínimos locales de funciones de dos variables.

Palabras-clave: *Registros de Representación Semiótica; Cálculo; Ingeniería Didáctica.*

---

[1] Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT Parceria PUC-SP e PUC-PERU. FAPESP: 2013/23228-7; CNPq: 404411/2013-4

[2] Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) – kvigo@pucp.pe
[3] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) – zeze@pucsp.br

ABSTRACT

The following article presents and argues some elements concerning the Theory of Registers of Semiotic Representation. Its relevance in teaching and learning differential calculus of two variables is so important that this theory enables us to describe and analyze different phenomena related to representations of mathematical objects of calculus. This article aims to analyze the transit through different registers of semiotic representation while learning local maxima and minima. For that purpose, we use Didactic Engineering as our methodology. Therefore, we affirm that the articulation between natural language, CAS graphic register and algebraic register is essential to understand the local maxima and minima of two-variable functions.

Keywords: *Registers of Semiotic Representation, Calculus, Didactic Engineering.*

INTRODUCCIÓN

La actividad matemática presenta una gran riqueza de contenidos representables gráfica y geométricamente, cuya representación resulta favorable para comprenderla. Según Duval (2004), la actividad matemática necesita modos de funcionamiento cognitivos que demandan la movilización de sistemas específicos de representación, puesto que su integración a la arquitectura cognitiva de los sujetos es una condición necesaria para tener una comprensión en matemática.

Debido a que, para el autor, la representación semiótica es el núcleo de esa comprensión, vale la pena cuestionarnos sobre el papel de la representación en el pensamiento matemático y en el aprendizaje de la matemática, particularmente, en relación con las funciones de dos variables, porque uno de los problemas encontrados en la enseñanza de esas funciones, es la dificultad de representarlas gráficamente en el sistema cartesiano R^3. En este sentido tanto Imafuku (2008) como Trigueros y Martínez (2010) observaron la dificultad de los estudiantes en la comprensión de funciones de dos variables en relación con la interpretación de su significado y su representación gráfica, lo que puede estar relacionado, según Trigueros y Martínez (2010) con la construcción propia de los estudiantes del sistema cartesiano R^3.

Así, el objetivo del artículo es analizar el tránsito por los diferentes registros de representación semiótica en el aprendizaje de los valores máximos y mínimos locales de funciones de dos variables. En relación con el *software*, el Sistema Algebraico Computacional (*CAS*) *Mathematica* será utilizado por ser un CAS que permite la manipulación de representaciones gráficas en R^3, y preserva propiedades y permite el tratamiento de la representación del objeto matemático. Para el análisis, utilizamos como metodología la Ingeniería Didáctica, la cual nos permite conocer los registros de representación semiótica, movilizados en la situación didáctica por los estudiantes de ingeniería de alimentos.

Registros de Representación Semiótica

Duval (1995) afirma que lo peculiar del aprendizaje de las matemáticas considera que las actividades cognitivas esenciales, como la conceptualización, el raciocinio, la resolución de problemas y la comprensión de textos, requieren la utilización de sistemas de expresión y de representación, además de la lengua natural o de las imágenes. Para el autor, el uso frecuente de símbolos propios de la matemática constituye una manera particular de comunicar y generalizar determinadas concepciones relacionadas a sus diversas áreas, tales como: aritmética, geometría, álgebra, cálculo, estadística, etcétera.

Para el autor es fundamental no confundir en ningún momento los objetos matemáticos con sus representaciones, pues un mismo objeto matemático puede tener diferentes representaciones, porque lo que importa es el objeto representado y no sus diversas representaciones semióticas posibles.

Además, el autor considera que las representaciones pueden ser mentales, computacionales y semióticas. Las mentales consisten en un conjunto de imágenes y de las concepciones que una persona puede tener sobre un objeto o sobre una situación. Las computacionales son aquellas cuyo significante (el elemento perceptible o material del signo) no requieren visión del objeto, y con ello permiten transformaciones algorítmicas de una secuencia de significantes a otra. En otras palabras, es un conjunto de instrucciones necesarias para ejecutar una tarea, a fin de producir una adecuada respuesta a la situación. «Se trata de una codificación de la información» (Duval, 1995, p. 16).

Las representaciones semióticas, por otra parte, son determinadas por un sistema particular de signos, lenguaje, escritura algebraica o de gráficos, y pueden ser transformadas en representaciones equivalentes en otro sistema semiótico, lo que posibilita que el sujeto le atribuya significados diferentes. Duval (2004) resalta la importancia de la noción de sistema semiótico en el estudio de las representaciones semióticas,

> Un sistema semiótico considera reglas, más o menos explícitas, que permiten combinar los signos entre sí, de modo que la asociación formada tenga también sentido. Las posibilidades de combinación son las que dan la capacidad inventiva al sistema semiótico permitiendo efectuar, en su interior, transformaciones de expresión o de representaciones. Esas reglas determinan el funcionamiento del sistema, su sintaxis en sentido amplio [...] (p. 43).

Para el autor, una representación semiótica no puede ser entendida de forma independiente del sistema que la produce. Las especificidades del sistema semiótico que permiten la producción de una representación son las que determinan la relación entre el contenido de la representación y el objeto representado.

Las representaciones semióticas no pueden ser completadas por las representaciones metales, porque ellas representan un papel primordial en la realización de diferentes funciones cognitivas y en la producción de conocimientos. Más aún, «el desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones semióticas, de la misma manera que las imágenes mentales son la interiorización de las percepciones» (Duval, 2009, p. 17).

Según el autor, para que un sistema semiótico sea un registro de representación semiótica debe permitir tres actividades cognitivas fundamentales relacionadas con la semiosis: la formación, el tratamiento y la conversión.

La formación de una representación dentro de un registro semiótico particular, sea para expresar una representación mental, sea para evocar un objeto real, implica siempre una selección en un conjunto de caracteres y de especificaciones, lo cual constituye lo que queremos representar e involucra la selección de relaciones y de datos en el contenido por representar. Es la actividad que permite representar de alguna forma un determinado conjunto de conocimientos. Salvo en casos particulares, lo signos utilizados pertenecen a un sistema semiótico ya constituido y ya utilizado por otros: el enunciado de una frase en cierta lengua natural, el diseño de una figura geométrica, la expresión de una fórmula, entre otros.

Para Duval (1993), esta actividad implica una selección de relaciones y de datos en el contenido por ser representado, que es hecha en función de unidades y de reglas de conformidad que son propias del sistema empleado en que la representación es producto. Las reglas de conformidad son aquellas que definen un sistema de representación y, por ello, los tipos de unidades que forman parte de todas las representaciones posibles en un registro.

El tratamiento de una representación semiótica es la transformación de una representación en otra representación en relación con una cuestión, un problema o una necesidad. Para el autor, «un tratamiento es una transformación de la representación interna en un registro de representación o en un sistema» (Duval, 1995, p. 39). Por ejemplo, el cálculo es un tratamiento interno en el registro de una escritura simbólica de dígitos y de letras, y la inferencia es una forma de tratamiento en lengua natural. Duval (1995) afirma que existen reglas de tratamiento propio a cada registro y que su naturaleza y su número varían considerablemente de un registro para otro.

La conversión de una representación semiótica es la transformación de un objeto dado en un registro, en una representación del mismo objeto en otro registro. La conversión, según Duval (1995), es una transformación externa en relación con el registro de partida.

En vista de que los registros de representación semiótica discutidos por Duval son indispensables para comunicar la matemática; para la enseñanza y aprendizaje de la matemática resulta importante la articulación entre los registros de representación semiótica.

Registros de representación remiótica en el cálculo diferencial de dos variables

Explicaremos las tres actividades cognitivas fundamentales relacionadas con la semiosis que se presentan en el cálculo de dos variables.

Una formación de una representación semiótica, relacionada con la derivada parcial de funciones respecto a x en un punto es dada conforme la representación $f_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$. Esta formación es hecha en función de las reglas de conformidad propias del sistema algebraico del cálculo diferencial de dos variables reales donde el estudiante evoca su conocimiento previo de límite de una función de dos variables y su relación con la noción con la de derivada parcial.

Estamos de acuerdo con Duval (2011) cuando afirma que la contribución del computador con su *software* es otro modo de producción de representaciones semióticas. Para producir estas representaciones, el sujeto precisará comprender los comandos básicos del *software* en cuestión, además de conocer las nociones matemáticas incluidas para una representación adecuada, lo que es motivo suficiente para diferenciar el uso de *software* del uso de lápiz y papel. Como el autor menciona, «los computadores constituyen un modo fenomenológico de producción radicalmente nuevo» (Duval, 2011, p. 137).

Para explicar la formación de una representación gráfica de una función de dos variables, con el uso del *software Mathematica*, Ingar (2014) afirma que este, por medio de su propio menú de comandos, manda instrucciones a su núcleo para exhibir en la pantalla del computador, específicamente en el cuaderno del *Mathematica*, la representación gráfica de una función de dos variables reales. Por ejemplo, para formar una representación gráfica de una función representada algebraicamente por $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, se escribe el comando con sus opciones respectivas: *Plot3D*[$x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, {x, –3,3}, {y, –3,3}, *AxesLabel* → {"X", "Y", "Z"}], luego se presiona la tecla *shift* y *enter*, con lo cual se genera la gráfica mostrada en la figura 1.

Plot3D[$x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, {x, –3,3}, {y, –3,3}, *AxesLabel* → {"X", "Y", "Z"}]

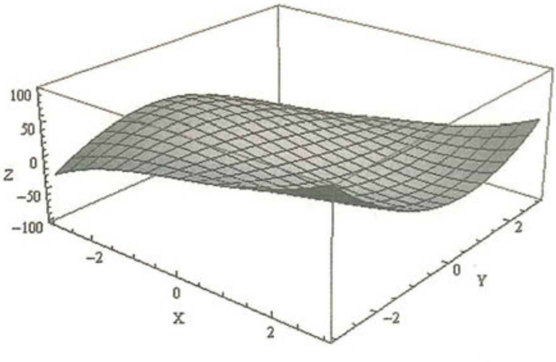


Figura 1. Formación de una representación gráfica en el *Mathematica.*

También, Ingar (2014) afirma que, con ayuda del mismo comando del *Mathematica* pero con otras opciones, se formará otra representación gráfica de la función representada algebraicamente por $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, conforme se muestra en la figura 2. Para eso digitamos el comando *Plot3D*[$x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, {x, –3,3}, {y, –3,3}, *AxesLabel* → {"X", "Y", "Z"}, *AxesOrigin* → {0,0,0}, *Boxed* → *False*], luego se presionan las teclas *shift* y *enter*.

Plot3D$[x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y, \{x, -3,3\}, \{y, -3,3\},$
AxesLabel $\rightarrow$ {"X", "Y", "Z"}, *AxesOrigin* $\rightarrow$ {0,0,0}, *Boxed* $\rightarrow$ *False*]

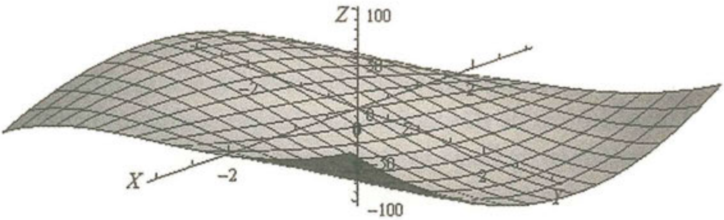


Figura 2. Otra formación de una representación gráfica en el *Mathematica.*

En relación con el registro algebraico del cálculo diferencial de funciones de dos variables, dicho registro ofrece, a modo de ejemplo, el siguiente tratamiento para encontrar los puntos críticos de la función representada por $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1 : f_x(x,y) = -3x^2 + 4y = 0$ y $f_y(x,y) = 4x - 4y = 0$, luego de la segunda ecuación obtenemos $x = y$ que sustituyendo en la primera, da dos soluciones $y = x = 0$ e $y = x = \frac{4}{3}$. Es decir, este tratamiento utiliza un sistema de escritura de las derivadas parciales de primer orden y las reglas operacionales intrínsecas a la noción de derivadas parciales, donde esas operaciones se constituyen mediante operaciones posibles en ecuaciones y expresiones algebraicas.

Según Duval (2011), cuando afirma que el computador constituye un modo fenomenológico de producción de representaciones semióticas, muestra que está fundamentada en la aceleración de los tratamientos.

> Ellas exhiben el monitor tan rápido como la producción mental, pero con la potencia ilimitada de tratamiento en comparación con las posibilidades de modalidad gráfico-visual. Obtenemos, inmediatamente, mucho más que todo lo que podríamos obtener a mano libre después, tal vez, varios días de escritura y cálculos o construcción de figuras. (p. 137).

Más aún, el autor sustenta que «la novedad fenomenológica se debe al hecho de que las representaciones semióticas no discursivas se tornan manipulables como objetos reales» (Duval, 2011, p. 137). Para el autor, el aspecto dinámico de moverlos, girarlos y extenderlos desde un punto, permite la función de simulación.

Para explicar el tratamiento de una representación gráfica de una función de dos variables con utilización del *software Mathematica*, Ingar (2014) afirma que es hecho por medio del menú de comandos y/o moviendo manualmente el *mouse*. Por ejemplo, para transformar la representación gráfica, mostrada en la figura 1, en otra representación, la autora afirma que se escribe el comando *ContourPlot3D*[*z*==28, {*x*,−3,−1}, {*y*,−2,0}, {*z*,0,29}, *AxesLabel*→ {«*X*», «*Y*», «*Z*»}], luego se digita el comando *Show* para mostrar los dos gráficos juntos y se teclea *shift* y *enter*, conforme se muestra en la figura 3.

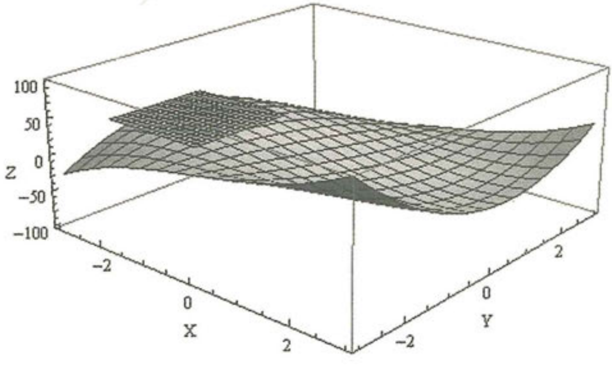


Figura 3. Tratamiento en una representación gráfica.

Así, observamos que el tratamiento es el mismo dentro de las dos diferentes representaciones gráficas generadas por el *Mathematica*, de una misma función de dos variables.

Duval (1995) afirma que por la forma de tratamiento, los registros son caracterizados como: multifuncionales (tratamientos no algoritmizables) y monofuncionales (tratamientos son algoritmizables), y sus formas, en discursiva (lengua natural, sistema de escritura) y no discursiva (figuras geométricas, gráficos cartesianos).

La conversión en el sistema de representación del cálculo diferencial de dos variables, por ejemplo, del objeto matemático punto mínimo local, en tres diferentes registros: lengua natural, del sistema de escritura y gráfico cartesiano, se muestra en la figura 4.

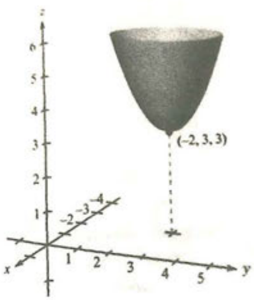
Registro en lengua natural	Registro en el sistema de escritura	Registro gráfico cartesiano
La función tiene un valor mínimo local en $(-2, 3)$.	$\forall(x, y) \in B((-2,3), \delta)$, $f(x,y) \geq f(-2,3)$	

Figura 4. Representaciones de un mismo objeto en tres registros diferentes.

Además, expondremos la conversión del registro algebraico de una función de dos variables para el registro gráfico, utilizando el *Mathematica*. Para Ingar (2014), dicha conversión comienza, conforme la figura 5, considerando una expresión algebraica de una función de dos variables, por ejemplo, $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, posteriormente, por medio de una lista de términos propios del sistema semiótico del *Mathematica* digitamos el respectivo comando, es decir, *Plot3D*$[x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, $\{x, -3,3\}$, $\{y, -3,3\}$, *AxesLabel* $\rightarrow$ {"X", "Y", "Z"}], luego tecleamos *shift* y *enter* para mostrar en la pantalla del computador la representación gráfica de esa función de dos variables.

$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$	$Plot3D[x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y, \{x, -3, 3\}, \{y, -3, 3\}, AxesLabel \rightarrow \{"X", "Y", "Z"\}]$

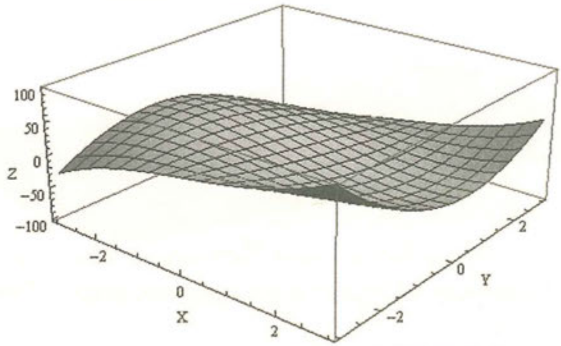


Figura 5. Conversión del registro algebraico para el registro gráfico *Mathematica.*

Según Ingar (2014), en esta etapa en que representamos una función de dos variables en dos representaciones diferentes: la algébrica y la representación propia del *Mathematica*, movilizamos actividades cognitivas al conocer los términos matemáticos en relación con la elección de los términos del comando. Estamos de acuerdo con Duval (2011), cuando afirma que «un menú de comandos privilegia un registro de representación para obtener la representación correspondiente en otro registro» (p. 138).

Para la autora, el software *Mathematica* genera otra representación gráfica de la función de dos variables representada por $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$. Así, la conversión considera la expresión algebraica de la misma función de dos variables mencionada anteriormente. Posteriormente, por medio de una lista de términos propios del sistema semiótico del *software Mathematica*, digitamos el mismo comando con dos opciones más, es decir, $Plot3D[x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y, \{x, -3,3\}, \{y, -3,3\}, AxesLabel \rightarrow \{"X", "Y", "Z"\}$, AxesOrigin $\rightarrow \{0, 0, 0\}$, Boxed $\rightarrow$ False], luego tecleamos la tecla *shift* y *enter* para mostrar en la pantalla del computador otra representación gráfica de esa función de dos variables, conforme se muestra en la figura 6.

$f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$	$Plot3D[x^3+3xy^2-15x-12y, \{x,-3,3\}, \{y,-3,3\}, AxesLabel \to \{"X","Y","Z"\}, AxesOrigin \to \{0,0,0\}, Boxed \to False]$

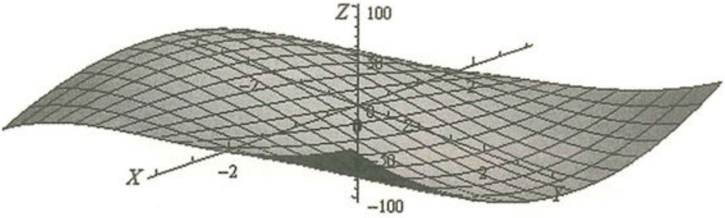


Figura 6. Conversión del registro gráfico para otro gráfico *Mathematica.*

Ingar (2014) denomina a estos registros gráficos de Registro Gráfico CAS_MATH y Registro Gráfico CAS respectivamente.

De acuerdo con Duval (1999), el estudiante comienza a entender los objetos y los conceptos matemáticos en el momento en que es capaz de movilizar y de coordinar espontáneamente dos registros de representación para un mismo objeto. Es por esto que nos preguntamos, en el caso del cálculo diferencial de funciones de dos variables, específicamente el objeto matemático valores máximos y mínimos locales, ¿cómo los estudiantes articulan los diferentes registros de representación semiótica para ese objeto matemático?

Para responder nuestra pregunta, y sobre la base de la teoría de Registros de Representación Semiótica, la cual sirvió como eje para diseñar y aplicar situaciones didácticas con las que interactuaron los estudiantes de ingeniería de alimentos de la Universidad Nacional del Callao, utilizamos como metodología de investigación la Ingeniería Didáctica de Artigue (1988), porque se caracteriza como un esquema experimental basado en realizaciones didácticas en salón de clase.

Los estudiantes trabajaron tanto con el *CAS Mathematica,* como con las nociones de funciones de dos variables reales. Utilizaron los recursos del *software*, en especial los comandos que permiten representar gráficamente puntos, planos y superficies en $\mathbb{R}^3$. El tiempo de duración de la situación didáctica fue de tres horas. En este artículo presentamos la segunda situación didáctica correspondiente al segundo encuentro con los estudiantes del grupo 03, la cual tuvo como objetivo maximizar la función lucro en relación con los precios.

Los estudiantes trabajaron en parejas y cada cual fue llamada de grupo, utilizaron una *laptop* y una ficha de trabajo durante el encuentro. El esclarecimiento del texto, solo cuando fuera solicitado, y la mediación del profesor se hicieron por medio de preguntas que estimularon a movilizar los conocimientos previos de los estudiantes.

Situación 2

La permanente necesidad de atender la demanda de productos variados y saludables a todo tipo de consumidores llevó a una empresa a elaborar galletas naturales. Para esto lanzó al mercado dos tipos de galletas: la galleta integral y la galleta de avena, cuya presentación es en bolsas de 24 unidades. Los costos totales de producción son de 2 y 3 soles por bolsa, respectivamente. La demanda (en miles de bolsas) de galletas integrales que pueden venderse cada semana es cuatro veces la diferencia del precio del segundo producto con relación al primero y la demanda (en miles de bolsas) de galletas de avena es cuatro veces la diferencia del precio del primer producto con relación al doble del segundo; pero la preferencia de los consumidores por esta galleta, incrementa su demanda siempre en 36 miles de bolsas. ¿Cuál será la mayor utilidad que obtiene la empresa y cuáles serían los precios de venta de cada tipo de galleta? Justifique su respuesta.

Las variables didácticas consideradas fueron:

- La función costo total de producción de bolsas de galletas;
- La función demanda de bolsas de galletas;
- Los precios de venta de bolsas de galletas;
- La función lucro, cuya representación algebraica es una función de dos variables del tipo $f(x,y) = ax^2 + bxy + + cy^2 + dx + ey + f$.

Análisis *a priori*

Esta situación tiene por finalidad llevar al estudiante a comprender la noción de valor máximo local de una función de dos variables representada por $f(x, y) = ax^2 + bxy + + cy^2 + dx + ey + f$, lo cual permite que los estudiantes movilicen sus conocimientos en relación con el plano tangente a una superficie y derivadas parciales en un punto que ya fuer construido por los estudiantes.

Esperamos que todos los grupos, después de leer el enunciado del problema, realicen la conversión del registro en lengua natural para el registro algebraico, pudiendo representar el objeto costo total de la producción con la letra **C**; el objeto función demanda, por ejemplo, por $q = f(p_1, p_2)$ debido a que según los datos de la situación, este relaciona la cantidad de bolsas de galletas (en miles de bolsas) con los precios unitarios de cada bolsa de galleta, y el objeto ingreso total por la venta de bolsas lo representen por R_T. Para representar algebraicamente cada uno de los objetos, los grupos podrían representarlos, tanto para las galletas integrales como para las de avena, es decir: para la galletas integrales, la función de demanda de galletas sería representada por $q_1 = 4(p_2 - p_1)$, y la función ingreso total sería representada como $R_1(p_1, p_2) = 4(p_2 - p_1)p_1$.

De manera semejante para las galletas de avena, la función de demanda de galletas sería representada por $q_2 = 36 + 4(p_1 - 2p_2)$, y la función ingreso podría ser representada como $R_2(p_1, p_2) = [36 + 4(p_1 - 2p_2]\, p_2$. Esperamos que los grupos, por medio de tratamiento en el registro algebraico (operaciones posibles en ecuaciones y expresiones algebraicas), expresen de manera algebraica la función lucro representada por: $l(p_1, p_2) = 8p_1p_2 + 52p_2 - 4p_1^2 - 4p_1^2 - 4p_1 - 8p_2^2 - 108$.

Los estudiantes podrían expresarla de forma canónica, pero observarían que no es posible y que esa representación algebraica no es conocida. Luego, suponemos que los grupos realicen la conversión del registro algebraico para el registro gráfico utilizando como medio el *Mathematica*, pudiendo escribir, por ejemplo, el comando $Plot3D[8p_1p_2 - 4p_1^2 - 8p_2^2 + 52p_2 - 4p_1 - 108, \{p_1, 0{,}10\}, \{p_2, 0{,}10\}, PlotRange \to \{0{,}50\}, AxesLabel \to \{"p_1", "p_2", "l"\}$.

Suponemos que los grupos realicen tratamientos en el registro gráfico, identificando la relación de los puntos de la superficie con respecto al eje z y a la curvatura de la superficie, lo que permitirá tener una percepción del posible valor máximo de la función lucro. Es más, esperamos que los grupos, por medio de tratamientos dentro del registro gráfico *CAS_MATH*, tracen planos perpendiculares al eje l, por ejemplo, los planos $l = 30$ y $l = 35$, conforme se muestra en la figura 7.

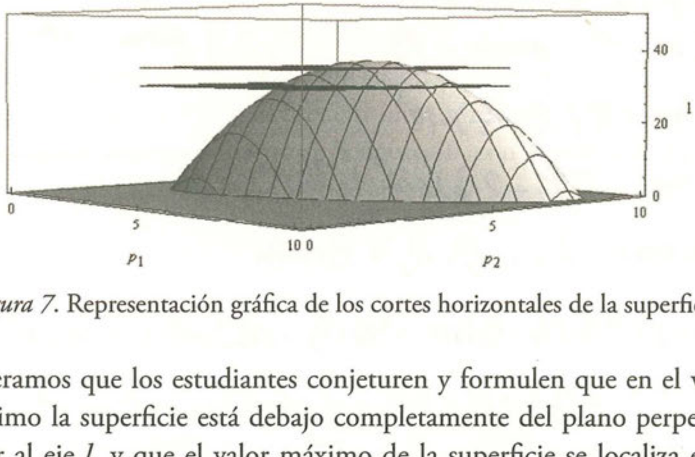


Figura 7. Representación gráfica de los cortes horizontales de la superficie.

Esperamos que los estudiantes conjeturen y formulen que en el valor máximo la superficie está debajo completamente del plano perpendicular al eje l, y que el valor máximo de la superficie se localiza en el punto donde el plano perpendicular al eje l es tangente a la superficie. Luego, los grupos podrían, en el registro gráfico, encontrar las derivadas parciales de la función lucro e igualarlas a cero, por medio de tratamientos algebraicos. En vista de que el tratamiento en el registro algebraico se da por las operaciones posibles en ecuaciones y expresiones algebraicas, los grupos resolverían un sistema de ecuaciones como resultado de igualar a cero las derivadas parciales y encontrar el punto representado por (5.5,6), sustituyendo en la representación algebraica de la función lucro, tenemos respuesta a la situación.

Análisis *a posteriori*

En el inicio de la situación didáctica, el grupo 03 leyó el enunciado del problema y sus miembros comenzaron a intercambiar ideas. Luego realizaron la conversión del registro en lengua natural para el registro algebraico de cada una de las variables y funciones involucradas en el problema. Dentro del registro algebraico realizaron tratamientos para representar algebraicamente la función lucro tal como lo habíamos supuesto en el análisis *a priori*, conforme de muestra en la figura 8.

Cp Galleta integral = S/2 , Precio de la integral = P_I
Cp // avena = S/3 " " G. avena: P_A.

$$Q_I = 4(P_A - P_I)\times 10^3$$

$$Q_A = 4(P_I - 2P_A)\times 10^3 + 36\times 10^3.$$

Entonces $I_T = P_I \times Q_I + P_A \times Q_A.$

$$I_T = 4P_I(P_A - P_I)\times 10^3 + 4P_A(P_I - 2P_A)\times 10^3 + 36P_A\times 10^3$$

$$I_T = 8P_IP_A\times 10^3 - 4P_I^2\times 10^3 - 8P_A^2\times 10^3 + 36P_A\times 10^3$$

$$C_T = 8(P_A - P_I)\times 10^3 + 12(P_I - 2P_A)\times 10^3 + 108\times 10^3$$

$$C_T = 4P_I\times 10^3 - 16P_A\times 10^3 + 108\times 10^3$$

Figura 8. Tratamientos en el registro algebraico.

Dentro del registro algebraico realizaron tratamientos para representar algebraicamente la función lucro tal como lo habíamos supuesto en el análisis *a priori*, conforme de muestra en la figura 9.

$$U_T = I_T - C_T$$

$$U_T = 8P_I P_A \times 10^3 - 4P_I^2 \times 10^3 - 8P_A^2 \times 10^3 + 36P_A \times 10^3 - (4P_I \times 10^3 - 16P_A \times 10^3 + 108 \times 10^3)$$

$$U_T = 8P_I P_A \times 10^3 - 4P_I^2 \times 10^3 - 8P_A^2 \times 10^3 + 52P_A \times 10^3 - 4P_I \times 10^3 - 108 \times 10^3$$

\# Utilidad en miles de soles:

$P_I = x$, $P_A = y$

$$U_{(x,y)} = 8xy - 4x^2 - 8y^2 + 52y - 4x - 108.$$

Figura 9. Tratamiento en el registro gráfico para hallar la función lucro.

Además, el grupo 03 realizó la conversión del registro algebraico para el registro gráfico *CAS* de la función lucro y realizó en dicho registro tratamientos, como se muestra en la figura 10, con la finalidad de tener una percepción del máximo valor de la función lucro.

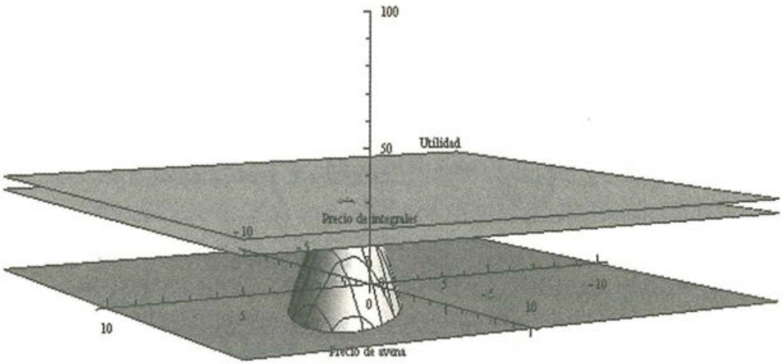


Figura 10. Registro gráfico *CAS.*

En seguida el grupo 03 regresa al registro en lengua natural para formular lo que por medio de tratamientos en el registro gráfico percibió en relación con el máximo valor de la función lucro, como se muestra en la figura 11.

Utilizando el software. matemático graficamos la función $Z = U_{(x,y)}$, trazamos planos paralelos al plano xy. hasta encontrar un plano tangente aproximado

Figura 11. Registro en lengua natural.

Asimismo, el grupo 03 consideró necesario regresar al registro algebraico y realizó el tratamiento en dicho registro para hallar el punto crítico donde existe el máximo valor, como se muestra en la figura 12.

Entonces formando la ecuación del plano tangente obtendremos: $P = (x, y, z)$ y $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in P_T$

$$P_T : \vec{n}_{PT} \cdot [P - P_0] = 0 \,,$$

Pero la normal del plano tangente es igual a.

$$\vec{n}_{PT} = \left(\frac{dU_{(x_0,y_0)}}{dx} ; \frac{dU_{(x_0,y_0)}}{dy} , 1 \right) = (0, 0, 1)$$

entonces.: $\frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow 8y - 8x - 4 = 0$

$\frac{dU}{dy} = 0 \Rightarrow 9x - 16y + 52 = 0$ $+$

$y = 6 - x = \frac{11}{2}$

Figura 12. Tratamientos en el registro algebraico para hallar el punto crítico.

Esto nos permite afirmar que el grupo 03 relacionó el plano tangente horizontal representado en la figura 8 con la noción de derivadas parciales mostradas en la figura 13.

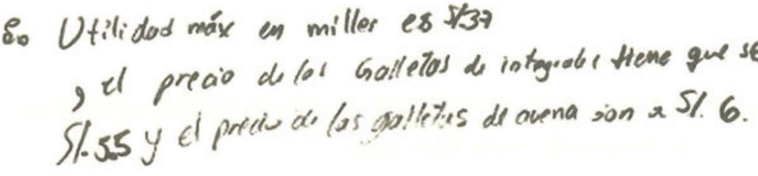


Figura 13. Registro en lengua natural.

Luego, el grupo regresa al registro de lengua natural para formular su respuesta, conforme se muestra en la figura 13. De esta manera podemos decir que el objetivo de la situación didáctica fue alcanzado y que el grupo transitó por los tres registros de representación semiótica: lengua natural, algebraico y *CAS*.

Consideraciones finales

Los tratamientos en el registro gráfico y la articulación entre este registro y el registro algebraico fueron esenciales para la comprensión de los máximos y mínimos locales de funciones de dos variables. Así, el estudio del cálculo en dos variables por medio de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval mostró ser un medio para la comprensión de dicha noción matemática. Además, el uso del *CAS Mathematica* facilitó la representación gráfica de la función de dos variables y los tratamientos en ese registro. En los registros algebraicos, los tratamientos se dieron por las operaciones posibles con las derivadas parciales y en la solución de sistemas de ecuaciones de dos variables. Además, la situación didáctica presentó una cuestión abierta cuya respuesta se dio por caminos propios de los estudiantes.

Referencias

Artigue, M. (1988). Ingénierie Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9/3, 281-308.

Duval, R. (1993). Registres de representation sémiotique et fonctionnement cognitive de la pensé. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

Duval, R. (1995). *Semiósis et pensé humaine: Registres sémiotiques et appretissages intellectuels*. Berna: Peter Lang.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic Issues for learning. In F. Hitt and M. Santos (Eds.), *Proceedings of the XXI Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 311-335. Columbus, OH: ERIC.

Duval, R. (2004). *Los problemas Fundamentales en el Aprendizaje de la Matemáticas y las Formas Superiores en el Desarrollo Cognitivo*. Traducción de Myriam Vega Restrepo. Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Duval,R.(2009). *Semiósis e Pensamento Humano. Registros semióticos e aprendizagens intelectuais.* 1a ed. São Paulo: Livraria da Física.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma.* 1a edición. São Paulo: PROEM

Imafuku, R. (2008). Sobre a passagem do estudo de uma variável real para o caso de duas variáveis (Tesis de Maestria en Educación Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Ingar, K. (2014). A visualização na Aprendizagem dos Valores Máximos e Mínimos Locais da Função de Duas Variáveis Reais. (Tesis doctoral en Educación Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Trigueiros, M., & Martínez, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studyies Mathematical* 73, pp. 3-19.