INVESTIGACIONES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Jesús Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra
Editores

Capítulo 4

Investigaciones en educación matemática
Jesús Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra, editores

Av. Universitaria 1801, Lima 32, Perú
feditor@pucp.edu.pe
www.fondoeditorial.pucp.edu.pe

Diseño, diagramación, corrección de estilo
y cuidado de la edición: Fondo Editorial PUCP

Primera edición: octubre de 2016
Tiraje: 500 ejemplares

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú Nº 2016-12807
ISBN: 978-612-317-201-5
Registro del Proyecto Editorial: 31501361601055

Impreso en Tarea Asociación Gráfica Educativa
Pasaje María Auxiliadora 156, Lima 5, Perú

La igualdad: distintos significados en geometría[1]

Equality: different meanings in Geometry

Rubén Jara Sánchez[2]
Cecilia Gaita Iparraguirre[3]

Resumen

El presente trabajo emplea algunas herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) que permiten identificar los significados de la igualdad que surgen de su empleo en la solución de problemas en el contexto de la geometría euclidiana. El diseño de las configuraciones epistémicas hace posible comprender la ontología establecida entre las definiciones y propiedades, mientras se resuelven problemas de un tipo en particular, con procedimientos de solución propios y, argumentos que los justifican, empleando la terminología que le es inherente, en el seno de la institución matemática. Del estudio realizado se identifican al menos tres significados, dos de ellos compartidos con otros contextos y uno exclusivo de la geometría euclidiana.

Palabras-clave: *igualdad, igualdad geométrica, significado.*

---

[1] Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de Matemática en Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT participación PUC-SP/Brasil y PUCP/Perú. IREM-PUCP, Proyecto Integrado Internacional: PI0272.

[2] Pontificia Universidad Católica del Perú – Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. a20147005@pucp.pe

[3] Pontificia Universidad Católica del Perú – DIMAT-PUCP. cgaita@pucp.edu.pe

ABSTRACT

This paper uses some theoretical and methodological tools from the Onto-Semiotic Approach to Mathematical Cognition and Instruction (OSA) to identify the different meanings of equality that emerge from its use in problem solving in the context of Euclidean geometry. The design of the epistemic configurations allow us to understand the ontology established between the definitions and properties, while problems of a specific type are solved with geometrical procedures and arguments that justify them by using terminology that is inherent within the mathematical institution. The results show that there are at least three different meanings, two of them shared with other contexts and one exclusive to Euclidean geometry.

Keywords: *equality, geometric equality, meaning.*

INTRODUCCIÓN

La definición más empleada de igualdad nos refiere que lo que se encuentra en cada miembro del signo igual son dos maneras de designar lo mismo, «cuando se escribe a=b, esto significa que a y b son símbolos usados para designar el mismo objeto» (Lima, Carvalho, Wagner & Morgado, 2000, p. 16). Sin embargo, Wilhelmi, Godino y Lacasta (2004) muestran que esa no es la única interpretación que se puede hacer de la igualdad. Los autores indican que los distintos sistemas de prácticas determinan un modelo de la noción de igualdad; este es asumido como una definición y se concluye que:

> La noción de igualdad no puede ser restringida a un dominio matemático único. En efecto, el signo «=» viene determinado por el conjunto de relaciones que se establecen entre los modelos asociados a él y que emergen de las practicas usuales en las instituciones educativas actuales. (p. 21).

Luego señalan que:

> Con relación a la noción de igualdad, el objetivo consistiría en establecer un sistema de prácticas institucionales que posibilite

> la interacción explicita del modelo aritmético de igualdad con el resto de modelos y, muy en particular, con el modelo analítico de tal forma que la noción de igualdad, comprendida como sistema, reequilibre los pesos que los modelos tienen con relación al significado personal que los sujetos le atribuyen. (p. 23).

Los mismos autores muestran que, solo en el conjunto de los números reales, se pueden identificar al menos ocho definiciones distintas de igualdad que surgen precisamente de su uso en distintas situaciones.

Una de estas indica que, dos números reales a y b serán iguales, a = b, si y solo si, a ≤ b y b ≤ a; esta es una igualdad basada en el concepto de orden (≤) en R. Asimismo, en un contexto topológico, se señala que dos números reales a y b serán iguales, si la distancia entre ellos es cero, es decir, a = b si y solo sí $d(a, b) = |a - b| = 0$. En ninguno de estos casos la definición de igualdad hace referencia a que la expresión a la izquierda del «=» se refiera a lo mismo que la expresión de la derecha.

Por otra parte, la solución de un problema nos permitirá identificar otros significados que se atribuyen al signo igual, el cual está íntimamente relacionado con la igualdad.

En la figura 1 se muestra un problema y su solución, en el cual se pueden identificar diferentes significados de la igualdad.

En una urna hay 6 bolas blancas, 4 rojas y 7 azules. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer 1 bola sea de color rojo?

Aplicando la regla de Laplace para resolver este problema se obtiene:

$$P(\textit{bola sea de color rojo}) = \frac{\textit{n.° de casos favorables}}{\textit{n.° de casos posibles}} = \frac{4}{6+4+7} = \frac{4}{17}$$

La probabilidad de extraer una bola de color rojo es 4/17.

Figura 1. Ejemplo con diferentes significados de la igualdad y del signo igual

En este caso, el signo igual posee distintos significados, según la clasificación hecha por Molina (2006). El primer signo = cumple la función de definir la probabilidad de eventos finitos y equiprobables. El segundo signo = cumple la función de asignar un valor numérico. Finalmente, el tercer signo = expresa el resultado de una acción, que en este caso es realizar una adición.

Lo anterior nos permite afirmar que, con la igualdad, también debe cumplirse lo señalado por Godino y Batanero (1994), según lo cual a los objetos matemáticos se les puede atribuir diferentes significados y estos están condicionados de manera institucional, personal o temporal. En particular, en el contexto de la geometría, se podrá identificar más de un significado para la igualdad.

En esta investigación se plantea reconocer la mayor cantidad de significados que adopta la igualdad en geometría; ello permitirá reconocer su complejidad y entender el origen de las dificultades derivadas de su uso.

Problema de investigación

Los estudios revisados nos permiten suponer que, al igual que en los contextos del álgebra y la aritmética, en el ámbito de la geometría, la igualdad adoptará diferentes significados y estos se pondrán de manifiesto en las definiciones, propiedades, ejemplos, ejercicios y problemas en las que esté involucrada.

Por ello, revisaremos diversos textos de matemáticas con la finalidad de identificar los significados particulares que adquiere la igualdad en geometría.

Esto nos permite formular la siguiente pregunta de investigación: ¿cuáles son los significados que surgen del empleo de la igualdad en el contexto de la geometría euclidiana en libros formales?

Para dar respuesta a la pregunta planteada, nos trazamos como objetivo identificar el significado institucional de referencia para la igualdad en el contexto de la geometría. De esa manera se pretende poner en evidencia que la igualdad posee diferentes significados que surgen de los usos que se hace de esta cuando se resuelven diversas situaciones problema.

Metodología de investigación

Nuestra investigación será de corte cualitativo ya que, como indican Hernández, Fernández y Baptista (2010), la recolección de datos no pretende un análisis numérico o estadístico de estos, sino que, empleamos procesos inductivos y recurrentes para las diferentes etapas de nuestra investigación. No se seguirá una secuencia lineal ya que se buscará amplitud y profundidad de significados del objeto de estudio, con la finalidad de contar con una riqueza interpretativa que nos permita alcanzar el objetivo planteado.

Asimismo, la investigación será bibliográfica ya que se basará en el estudio de textos ya elaborados, como libros o artículos científicos (Gil, 2002). Por ello, se siguen las siguientes etapas.

- Identificación, localización y obtención de las fuentes bibliográficas adecuadas a la investigación que son de dos tipos: históricas y recientes.
- Lectura del material, que se realiza tomando en cuenta la identificación de las informaciones y datos referidos a la igualdad en gometría, estableciendo relaciones y analizando la consistencia entre los datos e informaciones dados por los diversos autores. La lectura es exploratoria, selectiva, analítica e interpretativa.
- Identificación de los objetos primarios que permitirán construir el significado de referencia de la igualdad en el contexto de la geometría euclidiana.
- Organización de la información recogida a través de la noción de configuración epistémica.

Como fuentes históricas consideramos dos libros que son fundamentales en el estudio de la geometría, *Elementos*, de Euclides en una edición en castellano de 1991. En dicho libro se presenta, por primera vez, a la geometría como un sistema estructurado de axiomas, postulados y teoremas. También se considera el libro *Fundamentos de la Geometría*, de David Hilbert, en una edición en castellano de 1953, en el cual el autor establece un sistema completo y sencillo de axiomas (los cinco grupos de axiomas) que permiten deducir los teoremas de la geometría.

Para las fuentes recientes se acudirá a una serie de textos de diferentes enfoques. En la tabla 1 se presenta el detalle de los textos seleccionados.

Tabla 1

Textos seleccionados para el análisis

Descripción de los textos empleados para la construcción del significado de referencia.

Título	Autores	Año edición	Descripción
Elementos	Euclides	1991	Edición del más famoso libro de matemática, en el que se presenta por primera vez a la geometría como un sistema estructurado de axiomas, postulados y teoremas.
Fundamentos de la Geometría	David Hilbert	1953	Ensayo en el cual se establece un sistema completo y sencillo de axiomas (los cinco grupos de axiomas) que permiten deducir los teoremas de la geometría.
Matemática para la escuela secundaria	Frank B. Allen, Edwin C. Douglas, Donald E. Richmond, Charles E. Rickart, Henry Swain y Robert J. Walker	1965	Este texto es un manual elaborado para apoyar a los docentes de matemática de las escuelas de Estados Unidos con aspectos metodológicos y matemáticos sobre la enseñanza de la geometría.

Título	Autores	Año edición	Descripción
Medida e Forma em Geometria. Comprimento, Área, Volume e Semelhança	Elon Lages Lima	1991	Este texto fue elaborado como apoyo de un curso de formación de docentes de secundaria de Río de Janeiro.
Geometría Básica. Curso 1	Teódulo Verástegui Ch.	2003	Este texto es elaborado para apoyar la enseñanza de geometría para alumnos universitarios empleando el método axiomático para su estructura formal.
Geometría Moderna	Edwin E. Moise y Floyd L. Downs Jr.	1986	Este texto está dirigido a estudiantes que requieren «leer» matemáticas, está redactado en un lenguaje directo y sencillo, y emplea figuras o gráficos y ejemplos concretos de los teoremas.
Geometría con Aplicaciones y solución de problemas	Stanley R. Clemens, Phares G. Odaffer, Thomas J. Cooney	1989	Este texto está dirigido a estudiantes de todo nivel que requieren aprender los principios de la geometría básica partiendo de su aplicación en la solución de situaciones concretas

Elementos teóricos considerados

Consideramos que es el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) el que nos brinda las herramientas teóricas y metodológicas para abordar las distintas etapas de esta investigación.

Desde la perspectiva del EOS, para identificar los significados de la igualdad en contextos geométricos se requiere reconocer los conceptos, propiedades, argumentos, procedimientos y el lenguaje matemático involucrados al enfrentar situaciones problema.

Además, tal como indican Pino-Fan, Godino y Font (2011), el objeto matemático alcanza su significado cuando es considerado junto con todos estos objetos emergentes primarios propios; esto significa que solo se puede comprender el significado del objeto matemático si es que se comprenden sus definiciones y propiedades, mientras se resuelven problemas de un tipo en particular, con procedimientos de solución propios y argumentos que justifiquen estos procedimientos, empleando la terminología que le es inherente.

En el seno de las instituciones educativas se realizan determinados tipos de prácticas, lo que determina la emergencia progresiva de los «objetos matemáticos». El «significado» de estos objetos está íntimamente ligado a los problemas y a la actividad realizada para su resolución, sin que pueda reducirse este significado del objeto a su mera definición matemática (Godino & Batanero, 1994, p. 5).

Para el EOS, un problema es asumido como «toda situación que requiera analizar la información, establecer relaciones lógicas y obtener conclusiones» (Malaspina, 2007, pp. 369-370). En los problemas matemáticos, en particular, intervienen objetos matemáticos o símbolos que están explícitos o implícitos en el enunciado del problema o en las tareas que se realizan para su solución.

El EOS define institución como «las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas» (Godino & Batanero, 1994, p. 9). Se puede identificar a la institución como una comunidad de prácticas donde sus miembros se encuentran comprometidos con los mismos problemas y esto es lo que promueve la realización de prácticas sociales similares pero condicionadas por los instrumentos con los que cuentan, sus reglas y su modo de funcionamiento.

El objeto matemático institucional se diferenciará del objeto matemático personal por el hecho de que el primero será un emergente de las prácticas institucionales que están asociadas a un determinado campo de problemas, mientras el segundo será un emergente de las prácticas personales.

Todas estas definiciones permiten al EOS definir el significado de un objeto matemático institucional OI como «el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge OI en un momento dado» (Godino & Batanero, 1994, p. 13). En esta definición se debe considerar que el significado del objeto matemático está referido a la acción que se realiza con él, por lo que su significado depende de la institución, así como de su evolución temporal.

Debemos hacer notar que los problemas, o situaciones problemas, constituyen el origen de la actividad, mientras el lenguaje sirve como instrumento para realizar las acciones necesarias para su resolución.

La cuestión del significado de un objeto matemático es importante para el EOS y en este sentido se asume que el sistema de prácticas, que incluye componentes operativos y discursivos, se constituye en el significado sistémico o praxeológico del objeto matemático. Se puede afirmar que el significado abarca todo el contenido asignado a una expresión y es aquello a lo que hace referencia un sujeto en un lugar y tiempo determinado. Los objetos matemáticos primarios son precisamente los que permitirán determinar el significado de un objeto matemático, estos son:

1. Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual).
2. Situaciones problemas (aplicaciones intra o extra matemáticas, ejercicios).
3. Conceptos-definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) como recta, punto, numero, media función.
4. Proposiciones (enunciados sobre conceptos).
5. Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
6. Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones, deductivos a de otro tipo) (Malaspina, 2007, p. 371).

Estos objetos primarios son estructurados en un esquema denominado Configuración Epistémica, donde se puede apreciar a todos los objetos primarios que están involucrados en la asignación del significado del objeto en una institución. Dado que el significado estará asociado al objeto matemático emergente de una situación problema, estas se constituyen en las unidades de análisis. El significado institucional de referencia es construido por el investigador a partir de textos de matemática especializados, así como de investigaciones y artículos científicos.

En este trabajo en particular identificamos los significados de la igualdad en el contexto de la geometría euclidiana a partir de la identificación de sus objetos primarios. Con estos elementos se elaboraron distintas configuraciones, las que ponen en evidencia la existencia, al menos de tres significados diferentes para la igualdad en contextos de geometría euclidiana.

RESULTADOS DEL ANÁLISIS REALIZADO

Luego del análisis realizado se han encontrado diferentes significados de la igualdad en geometría euclidiana. Así por ejemplo, si L es la recta perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio y L' es el conjunto de puntos equidistantes de A y B, entonces $L=L'$ (Lima, Carvalho, Wagner & Morgado, 2000), los objetos geométricos L y L' son iguales, porque los puntos que conforman el objeto geométrico L, son los mismos que conforman el objeto geométrico L', lo cual equivale a afirmar que un objeto geométrico es igual a sí mismo.

Por otra parte, Allen, Douglas, Richmond, Rickart, Swain y Walker (1965) señalan que se suele afirmar que dos triángulos son iguales cuando tiene la misma área, o dos poliedros son iguales si tienen el mismo volumen. En este caso, una interpretación plausible de la igualdad hace referencia a la «cantidad de materia» que contienen los triángulos o los poliedros respectivos. Esta igualdad es de naturaleza distinta a la del ejemplo anterior pues no es en el sentido de representar al mismo objeto.

Adicionalmente, los mismos autores afirman que, cuando se dice que dos ángulos son iguales, se quiere indicar que ambos ángulos tienen la misma medida; mientras que si se afirma que dos segmentos son iguales, se refiere a que tienen la misma longitud o si dos circunferencias son iguales, significa que tienen el mismo radio.

Aquí observamos que existe otro significado para la igualdad en geometría, que no aparece en otros contextos; se trata de la congruencia. Cuando una figura, ya sea un ángulo, un segmento o una circunferencia, sufre una transformación (un movimiento rígido) que la hace coincidir con su par respectivo, se establece una diferencia entre este tipo de igualdad y las de los ejemplos anteriores; dicha «movilidad» es la que justifica el empleo de la congruencia en lugar de la igualdad, al tratar con objetos geométricos.

Así, hemos identificado tres significados de referencia de la igualdad geométrica que hemos denominado: igualdad como identidad, igualdad por asignación de medidas de áreas o volúmenes, e igualdad como congruencia.

Para describir cada uno de estos significados hemos construido las configuraciones epistémicas, organizadas a partir de tipos de situaciones problema o campo de problemas en los que aparece la igualdad en textos de geometría euclidiana de nivel superior.

Significado 1: Igualdad como Identidad

Para el caso de la identidad geométrica se ha identificado como un tipo de situaciones problemas aquellas en las que es necesario establecer una igualdad entre un objeto geométrico y él mismo. Es equivalente a la igualdad numérica, en la que $a=b$ significa que los símbolos a y b hacen referencia al mismo objeto. En el caso de la geometría tendremos dos objetos geométricos que en realidad son el mismo ya que son conjuntos formados por los mismos puntos; es en ese sentido que consideramos que esta igualdad es equivalente a la igualdad de conjuntos en álgebra.

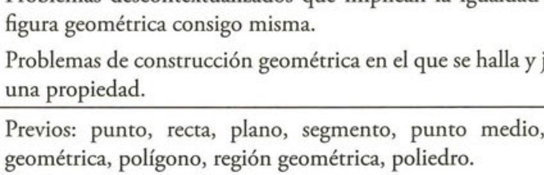
La figura 2 muestra dos rectas coincidentes L_1 y L_2, las cuales contienen a los mismos puntos, por ello se puede afirmar que $L_1 = L_2$.

Figura 2. Rectas coincidentes.

Fuente. Verástegui (2003, p. 80).

Otro tipo de situaciones en donde aparece este significado son las que se refieren a la determinación de lugar geométrico. En la tabla 2 se presentan los objetos primarios asociados a este significado.

Tabla 2
Configuración epistémica de la igualdad como identidad

Lenguaje	Verbal: igualdad, igual, identidad, equivalencia, punto, recta, plano, segmento, ángulo, triángulo, cuadrilátero, polígono, poliedro, conjunto, lugar geométrico, definición, propiedad, circunferencia, radio. Simbólico: =, P, AB, $\overline{AB}$, $\angle$ABC. Gráfico: 
Situaciones problemas	Problemas descontextualizados que implican la igualdad de una figura geométrica consigo misma. Problemas de construcción geométrica en el que se halla y justifica una propiedad.
Conceptos-definición	Previos: punto, recta, plano, segmento, punto medio, figura geométrica, polígono, región geométrica, poliedro. Emergentes: igualdad, como igualdad de conjuntos de puntos.

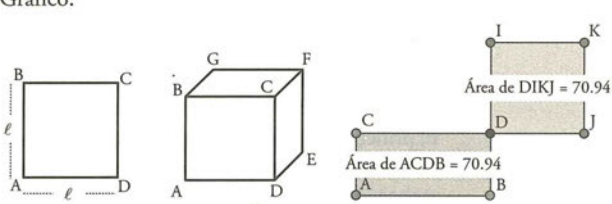
Proposiciones-propiedades	Espacio es el conjunto de todos los puntos. Todo cuerpo, superficie o línea es un conjunto de puntos. Figura es un conjunto de puntos o una parte del espacio. Recta es un conjunto de puntos.
Procedimientos	Identificar y aplicar los axiomas y teoremas de la geometría sintética. Aplicar las definiciones de objetos geométricos distintos. Justificar lo hecho a partir de teoremas o axiomas.
Argumentos	Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. Demostración deductiva.

Significado 2: Igualdad por asignación de una medida

En un tipo de situación problema para la igualdad de áreas o volúmenes, la expresión «igual» se refiere a que ambas regiones poligonales tienen la misma área (Lima, 1991) o ambos solidos poseen el mismo volumen, aunque no necesariamente la misma forma. En la tabla 3 se presentan los objetos primarios asociados con este significado.

Tabla 3
Configuración epistémica de la igualdad como asignación de una medida

Lenguaje	Verbal: región, área, base, altura, cuadrado, suma de áreas, resta de áreas, igual, congruente, descomposición, arista, volumen, suma de volúmenes, resta de volúmenes, espacio, poliedro, sólido, etcétera. Simbólico: =, ≡, R(ΔABC), A(P), V(P), etc. Gráfico:



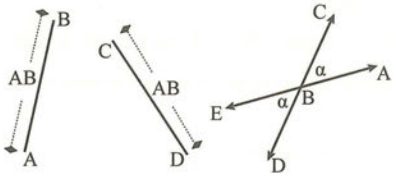
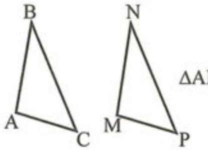
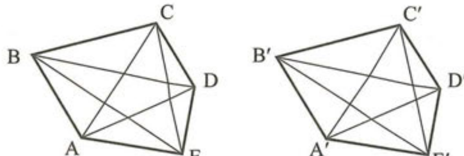
Situaciones problemas	Problemas de determinación del área de una región poligonal o del volumen de un sólido. Problemas que implican la transformación de un polígono en otro con la misma área o de un sólido en otro con el mismo volumen. Por ejemplo, construir un cuadrado cuya área sea la misma que la del rectángulo ACDB mostrado en la figura.
Conceptos-definición	Previos: punto, plano, segmento, figura geométrica, polígono, región geométrica, función, espacio. A cada sólido se le asigna un único número positivo llamado volumen. Tanto un punto como un segmento son conjuntos acotados a los cuales les corresponde Área 0. Emergentes: área de una región, fórmulas del área de cuadriláteros, composición y descomposición de regiones poligonales, suma de áreas, resta de áreas, poliedro, arista, volumen, composición y descomposición de sólidos, suma de volúmenes, resta de volúmenes.
Proposiciones-propiedades	Existe una función A llamada Área, definida para todos los conjuntos acotados en el plano de modo que, a cada conjunto acotado S se le asigna un número no negativo A(S). Dados dos conjuntos S y T del plano, que no tienen punto en común, entonces, el área de la reunión de S y T es igual a la suma de las áreas de S y T. Si S es un conjunto de puntos del plano, S es acotado y $S \equiv T$ entonces el área de S es igual al área de T. Si S es el conjunto formado por un cuadrado de lado 1 y su interior, entonces el área de S es 1. El área de un rectángulo es el producto de la longitud de su base por la de su altura. Volumen de un sólido rectangular o paralelepípedo: el volumen de un sólido rectangular o paralelepípedo es el producto del área de su base por su altura. Suma de volúmenes: si un sólido es la unión de dos dolidos que no tienen puntos interiores comunes entonces su volumen es la suma de los dos volúmenes. El principio de Cavalieri: según el cual dados dos cuerpos solidos S y T sobre un plano X, si todo plano paralelo al plano X, interseca a ambos sólidos en secciones transversales que tienen la misma área, entonces ambos sólidos tienen el mismo volumen.

Procedimientos	Deducir fórmulas que permitan obtener el área de cuadriláteros a partir de su descomposición en triángulos o cuadrados. Emplear las fórmulas de áreas. Componer y descomponer regiones poligonales en triángulos o cuadrados. Realizar operaciones numéricas. En particular para el ejemplo propuesto el procedimiento es el siguiente: Trazar las rectas que contienen unos lados del rectángulo ACDB, emplear suma de segmentos, punto medio y trazado de circunferencia, establecer relaciones numéricas entre las medidas de segmentos para obtener un cuadrado DIKJ, que tiene la misma área del rectángulo.
Argumentos	El área de un cuadrado es la medida de su lado al cuadrado. El volumen de un cubo es igual a la medida de la longitud de su lado al cubo. Demostración deductiva.

Significado 3: Igualdad como Congruencia

Hemos identificado hasta cuatro diferentes clases de situaciones problemas para el caso de la congruencia, las que se refieren a congruencia de segmentos, de ángulos, de triángulos y de polígonos en general, aunque estas comparten las mismas definiciones y conceptos, propiedades, argumentos y lenguaje por ello presentamos una configuración epistémica para ellos. En la tabla 4 se presentan los objetos primarios asociados con este significado.

Tabla 4
Configuración epistémica de la igualdad como congruencia

Lenguaje	Verbal: punto, recta, plano, espacio, segmento, punto entre otros dos, punto medio, longitud del segmento, igualdad, congruencia, transformación, simetría, traslación, rotación, ángulo, bisectriz, medida de ángulos, ángulo recto, ángulo agudo, grado, ángulos opuestos, ángulos alternos, igualdad, triángulo, lado, criterios, isósceles, equilátero, correspondencia biunívoca, polígono, vértice, etcétera. Simbólico: =, ≡, P, AB, $\overline{AB}$, m(A,B), $\angle$ABC, $\widehat{ABC}$, m($\widehat{ABC}$), $\overrightarrow{AB}$, ABC, ALA, LAL, LLL, A↔A' Gráfico:   $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ A↔A′, B↔B′, C↔C′, D↔D′, E↔E′  AB=A′B′, AC=A′C′, AD=A′D′, AE=A′E′, BC=B′C′, BD=B′D′, BE=B′E′, CD=C′D′, CE=C′E′, DE=D′E′
Situaciones problemas	Problemas donde se debe determinar la congruencia de figuras geométricas, en particular entre segmentos, ángulos y polígonos.

Conceptos-definición	Previos: punto, recta, plano, espacio, segmento, punto medio, medida de segmentos, unidad de medida. Dados dos puntos de una recta los puntos que están entre ambos puntos incluidos estos forman un segmento de recta. La longitud de un segmento es la distancia entre sus extremos. Tres o más puntos no alineados de un plano definen segmentos que se intersecan dos a dos en esos puntos, la unión de estos segmentos es un polígono. Los puntos donde se intersecan los segmentos son los vértices del polígono. Los segmentos que forman el polígono son los lados del polígono. Si los vértices de un polígono determinan segmentos que tienen la misma longitud que los generados por los vértices de otro polígono, entonces se dice que los vértices se corresponden de manera biunívoca. El punto medio de un segmento divide al segmento en dos segmentos congruentes. Emergentes: congruencia de segmentos, igualdad de medida de segmentos, ángulos congruentes, igualdad de medida de ángulos, ángulos opuestos por el vértice, bisectriz, ángulos alternos, triángulos congruentes, criterios de congruencia correspondencia biunívoca de puntos, transformación rígida, polígonos congruentes.
Proposiciones-propiedades	A cada punto de una recta le corresponde un único número real. Dados tres puntos A, B y C en ese orden, sobre una recta, entonces AB + BC = AC Si todos los vértices de dos polígonos se corresponden de manera biunívoca entonces los polígonos son congruentes.
Procedimientos	Establecer una correspondencia biunívoca entre dos conjuntos de puntos (figuras geométricas) en el plano. Emplear la definición de longitud de un segmento para determinar si son congruentes. Emplear la definición de congruencia de segmentos para determinar la longitud de otro segmento. Aplicar transformaciones rígidas a segmentos. Justificar lo hecho a partir de teoremas o axiomas.
Argumentos	Dos segmentos congruentes tienen la misma medida. Demostración deductiva.

Consideraciones finales

Se ha encontrado que la igualdad en geometría euclidiana es empleada al menos en tres sentidos diferentes: como identidad, cuando se asigna una medida de área o volumen a un objeto geométrico y como congruencia. Solo en los dos primeros casos se emplea el signo «=»; en el caso de la congruencia se emplea un signo distinto «≡».

Por otra parte, se ha identificado que la igualdad en geometría euclidiana tiene algunos significados que pueden ser asumidos como equivalentes a los significados que se le da en contextos algebraicos y aritméticos. Ese es el caso de la igualdad como identidad y la igualdad como asignación de una medida (igualdad funcional en algebra). En estos casos los objetos geométricos se pueden considerar semejantes a los algebraicos o aritméticos.

Sin embargo, no ocurre lo mismo con la igualdad como congruencia; este es un significado que solo tiene sentido en geometría euclidiana ya que implica propiedades que son propias de los objetos geométricos.

Referencias

Allen, F., Douglas, E., Richmond, D., Rickart, Ch., Swain, H. & Walker, R. (1965). *Matemática para la escuela secundaria. Geometría (Parte 2.). Comentario*; EE.UU.

Borba, M. & Araújo, J. (2004) *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Carranza, C. (1968). *Algebra*. Lima: UNI.

Ceballos, L. (2012). Matemáticas para todos: la relación de igualdad y sus implicaciones en la solución de ecuaciones. *Cuaderno Activa*, (2), 79-81. Recuperado de http://ojs.tdea.edu.co/index.php/cuaderno activa/issue/view/7/showToc

Euclides. (1991). *Elementos. Libros I-IV.* Madrid: Gredos.

Gil, A. (2002). *Como Elaborar Projetos de Pesquisa*. 4ta Edición. São Paulo: Atlas.

Godino, J. & Batanero, C. (1994). Significado Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, M. (2010). *Metodología de la Investigación.* 5ta edición. México.

Hilbert, D. (1953). *Fundamentos de la Geometría.* Madrid: Instituto Jorge Juan.

Lima, E. (1991). *Medida y forma en geometría. Longitud, área, volumen y semejanza.* Río de Janeiro: IMCA.

Lima, E., Carvalho, P., Wagner, E. & Morgado, A. (2000). *La matemática de la enseñanza media. Volumen 1.* Lima: IMCA.

Malaspina U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(3), 365-399.

Moise, E. & Downs, F. (1986). *Geometría Moderna.* México: Mc Graw-Hill.

Molina, M. (2006). *Desarrollo del Pensamiento Relacional y Comprensión del signo Igual por Alumnos de Tercero de educación Primaria.* (Tesis Doctoral). Universidad de la Rioja. Granada, España. Recuperado de: http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=1210

Pino Fan, L., Godino, J. & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educ. Matem. 13*(1), 142-178. Recuperado de http://www.ugr.es/

Stanley, R., Clemens, S., O'Daffer, P. & Cooney, T. (1989). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas.* Washington: Addison-Wesley.

Verástegui, T. (2003). *Geometría Básica. Curso 1.* Lima: Moshera.

Wilhelmi, M., Godino, J. y Lacasta, E. (2004). *Configuraciones Epistémicas asociadas a la noción de Igualdad.* Granada: Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/igualdad_wilhelmi.pdf