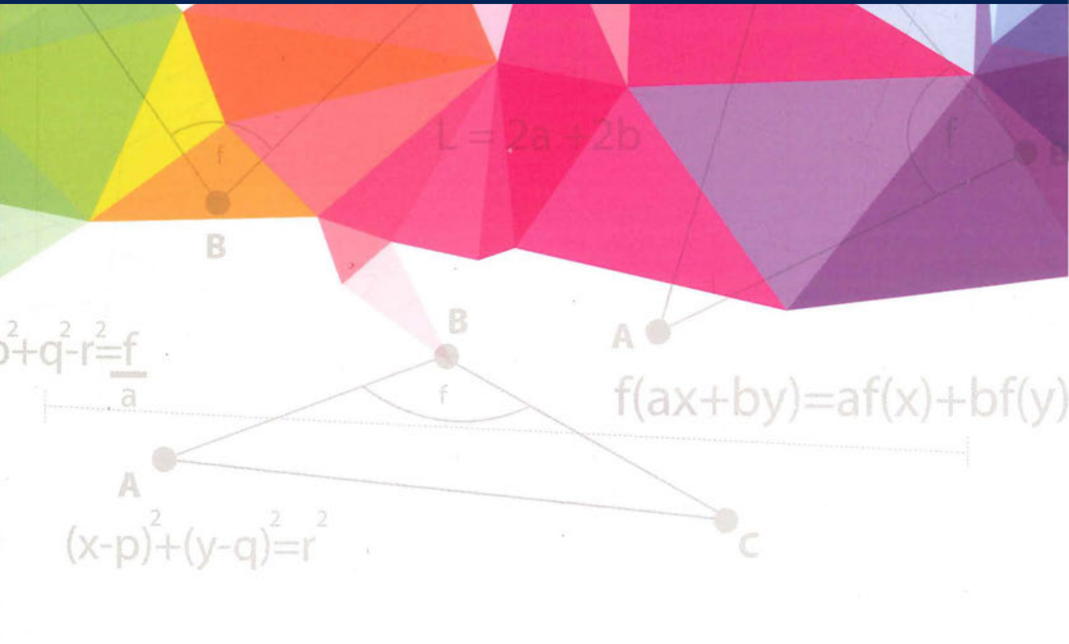
INVESTIGACIONES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Jesús Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra
Editores

Capítulo 9



Investigaciones en educación matemática
Jesús Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra, editores

Av. Universitaria 1801, Lima 32, Perú
feditor@pucp.edu.pe
www.fondoeditorial.pucp.edu.pe

Diseño, diagramación, corrección de estilo
y cuidado de la edición: Fondo Editorial PUCP

Primera edición: octubre de 2016
Tiraje: 500 ejemplares

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú Nº 2016-12807
ISBN: 978-612-317-201-5
Registro del Proyecto Editorial: 31501361601055

Impreso en Tarea Asociación Gráfica Educativa
Pasaje María Auxiliadora 156, Lima 5, Perú

Una situación didáctica para la aproximación del área por acotación[1]

Didactic situation for the approximation of the area for boundedness

Mihály Martínez Miraval[2]
Francisco Ugarte Guerra [3]

Resumen

En este artículo presentamos el análisis de las dialécticas por las que transitan universitarios durante una situación didáctica, mediada por el GeoGebra. Durante las interacciones producidas, los estudiantes manipularon un procedimiento que les permitió expresar la aproximación de la medida de un área, como una adición de términos. El contraste entre los resultados esperados y los obtenidos muestra que los estudiantes tienen dificultades para identificar la altura de un rectángulo con la imagen de una función y para trabajar con números racionales, lo que derivó en planteamientos erróneos de la aproximación que se redujeron al identificar las fracciones mediante variables con índices naturales. De esta manera, nuestra propuesta favoreció la comprensión de la definición de área y pensamos que plantea un camino para introducir el área como el límite de una suma infinita (integral definida).

Palabras clave: *GeoGebra, medida del área, dialécticas.*

---

1 Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de Matemática en Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT participación PUC-SP/Brasil y PUCP/Perú. IREM-PUCP, Proyecto Integrado Internacional: PI0272. Fondo concursable desarrollo de líneas de investigación -Escuela de Posgrado 2013.

2 Pontificia Universidad Católica del Perú – Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. martinez.ma@pucp.edu.pe

3 Pontificia Universidad Católica del Perú – DIMAT-PUCP. fugarte@pucp.edu.pe

Abstract

This paper presents an analysis of the dialectics young university students go through during a didactic situation mediated by GeoGebra. During the produced interactions, students manipulated a procedure that allowed them to express the approximation of the measurement of an area as an addition of terms. The contrast between the expected results and the ones obtained shows that students have difficulties identifying the height of a rectangle with the image of a function and working with rational numbers, which resulted in mistaken approaches of the approximation that were reduced when identifying the fractions through variables with natural indexes. This way, our proposal favored the understanding of the definition of area, and we believe that it paves the way to introduce the area as the limit of an infinite sum (definite integral).

Keywords: *GeoGebra, area measurement, dialectics.*

Introducción

El concepto de área se presenta de forma transversal en todos los niveles educativos: primaria, secundaria y universidad. Sin embargo, los estudiantes no logran construir completamente este concepto, lo que dificulta la aprehensión de otros conceptos matemáticos, como el de integral definida y problemas de optimización, tal como señala Corberán (1996). Las investigaciones que reportan que la construcción del concepto de área es complicada se refieren casi en su totalidad al trabajo de Freudenthal (1999), quien señala que la dificultad radica, en particular, en la variedad de enfoques para su construcción: la repartición equitativa, la comparación y reproducción, y la medición. Los dos primeros son tratados en la escuela sin la necesidad de utilizar procesos infinitos, mientras que el último puede requerir un refinamiento (subdivisión), estrategia que, dependiendo de la superficie, deberá repetirse muchas veces o indefinidamente; este proceso infinito es el obstáculo que dificulta la compresión de la medida del área.

El enfoque por medición refleja la situación que vamos a presentar en este artículo, específicamente centrado en la aproximación a la medida del área a partir de un proceso por acotación, caracterizado por el uso de unidades de área cada vez más finas que no se superponen unas con otras y que se basa en el método de *exhausción*, de Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.), conocido también como Axioma de Arquímedes (Boyer, 1986). Los otros procesos de medida del área utilizan el método por agotamiento (proceso de aproximación por acotación interior) y transformaciones del área para utilizar fórmulas de geometría (procesos vistos en secundaria).

La situación didáctica que planteamos propone la comprensión del enfoque del área por acotación con miras a presentar la definición de medida de área como límite de una suma de Riemann, esto sería una alternativa a la estrategia habitual según la cual el área es una aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo (Artigue, 2003). De esta manera, se espera disminuir las dificultades que genera el tratamiento tradicional que permite que los estudiantes tengan un dominio algebraico del cálculo de antiderivadas, pero no logren conceptualizar el proceso de límite involucrado.

Para el planteamiento de la situación asumimos que la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se asemeja al trabajo de un matemático, en el que se experimenta, dialoga, contrasta, sistematiza, discute, valida, etcétera. Por eso hemos elegido a la Teoría de las Situaciones Didácticas como marco teórico, ya que busca a partir de situaciones didácticas crear un modelo de interacción entre el estudiante, el saber y el medio en el cual el aprendizaje se debe desarrollar (Brousseau, 2007).

Siguiendo la metodología de Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995), diseñamos e implementamos una situación didáctica, mediada por el GeoGebra, cuya actividad central sería la aproximación de la medida del área a través de rectángulos de igual base. En ese proceso, los estudiantes se aproximarían tanto como quisieran a dicha medida a través de la suma de las medidas de las áreas de rectángulos. Al modificar la variable didáctica *número de rectángulos de aproximación* para mejorar la aproximación, los estudiantes debían conceptualizar la noción de límite infinito subyacente al cálculo de su medida por acotación, y al mismo tiempo, se debía facilitar la comprensión del área.

Problemática

Del análisis del Diseño Curricular Nacional (Minedu, 2010) vigente y de la colección de textos que son repartidos gratuitamente por el Estado peruano, podemos afirmar que el área es un concepto que se trabaja en los diferentes niveles educativos. En las escuelas públicas peruanas se tratan los distintos enfoques propuestos por Freudenthal (1999), pero el proceso de medición por acotación se trabaja en secundaria superficialmente, al refinar el área con un número pequeño de subdivisiones.

Es habitual que los textos de cálculo integral en una variable presenten a la integral definida asociada al problema del área, es decir, la presenten como el límite de una suma de Riemann (Stewart, 2001; Haeussler, 2004; Leithold, 1998). Sin embargo, no se suelen presentar actividades para que el estudiante aproxime la medida del área; los problemas que se plantean requieren la aplicación directa del teorema fundamental del cálculo y de las propiedades de integral definida.

Nosotros proponemos retomar el enfoque por medición en el nivel universitario; esto se haría con procesos de acotación que consideren subdivisiones cada vez más finas, y con aproximaciones tan pequeñas como se quiera. De esta manera la definición de área se obtendrá de manera natural como resultado de un procedimiento de subdivisión infinita en donde se requiere la noción de límite de una suma infinita.

Marco teórico

Por la forma en la que concebimos la enseñanza y el aprendizaje en la educación, tratamos de centrar la enseñanza en el estudiante, de modo que lo hagamos partícipe de su aprendizaje. Esto implica colocar al estudiante en una situación en la que pueda utilizar sus conocimientos previos para actuar sobre un problema y así generar nuevos aprendizajes e idear nuevas estrategias de resolución. Por este motivo, consideramos que el marco teórico más adecuado a nuestra investigación es la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986).

La teoría de las situaciones didácticas busca crear un modelo de interacción entre el estudiante, el saber y el medio en el cual el aprendizaje se debe desarrollar. El aprendizaje del estudiante se produce a partir de situaciones (que pueden ser ejercicios, problemas, retos, etcétera) que acepta desarrollar y que conducen a modificaciones en su comportamiento que lo lleven a obtener el aprendizaje esperado.

Para que los estudiantes sean capaces de expresar la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos como una adición de términos, planteamos trabajar con la variable didáctica *número de rectángulos de aproximación*. Por ejemplo, cuando se pida calcular la medida del área de solo un rectángulo, los estudiantes tendrán que multiplicar la longitud de la base por la altura, de modo que la altura se represente por la imagen de una función. Sin embargo, si el número de rectángulos se incrementa, el número de términos de la adición aumentará, la medida de la base de cada rectángulo cambiará y las alturas de los rectángulos variarán. Las respuestas, procedimientos y justificaciones realizados por los estudiantes, a partir de los cambios en la variable didáctica, brindan información sobre las dialécticas por las que transita. Estas dialécticas pueden ser de acción, formulación y validación.

Brousseau (2007) señala que los estudiantes en la dialéctica de acción actúan sobre la situación didáctica y relacionan la información obtenida con sus decisiones por tomar; en la dialéctica de formulación expresan lo que están aprendiendo o comunican la estrategia que están utilizando, a fin de estandarizar el lenguaje; y en la dialéctica de validación demuestran a otras personas la validez de sus estrategias, procedimientos y resultados referidos al desarrollo de los problemas de la situación.

En nuestra investigación, hemos diseñado *applets* en GeoGebra, para que los estudiantes los utilicen como un instrumento generador de interacciones a-didácticas, de modo que les permitan desarrollar la situación didáctica y, a partir de sus resultados, podamos analizar en qué dialéctica se ubican.

Para introducir a los estudiantes en el trabajo con *applets*, y en el reconocimiento de las dimensiones de un rectángulo, diseñamos un punto móvil P el cual manipulan de forma exploratoria deslizándolo por la curva (utilizando el *mouse*). Esto les permite relacionar las coordenadas del punto P con las dimensiones del rectángulo (ver figura 1). Observamos que el valor de nuestra variable didáctica es 1, ya que solo se ha dibujado un rectángulo. En las siguientes tareas lo modificaremos para que el estudiante realice planteamientos que involucren otro tipo de cálculos.

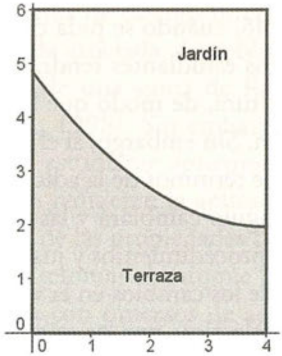
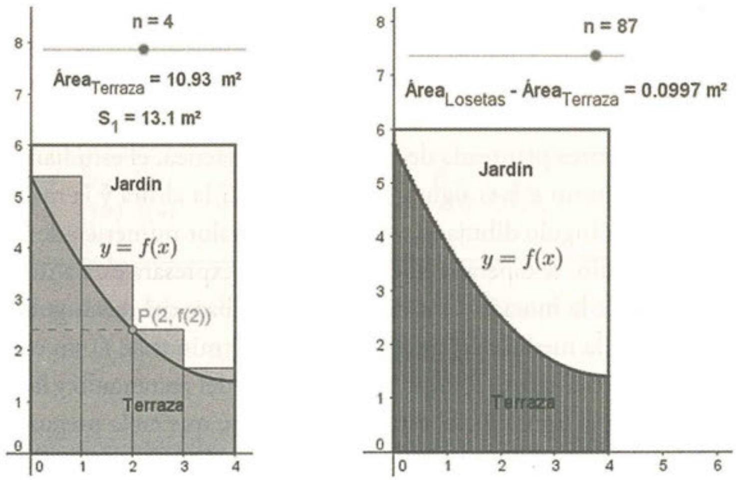


Figura 1. Loseta de base igual a 2 m y altura $f(2)$.

Del mismo modo, hemos diseñado un deslizador que modifica el número de rectángulos de aproximación, de modo que se dibujen hasta 2000 rectángulos. Cuando se dibujan dos o cuatro rectángulos, los estudiantes formulan que la adición presenta 2 o 4 términos respectivamente, que las bases miden 2 m. o 1 m. en cada caso, y que las alturas son las imágenes de la función en el extremo derecho o izquierdo de cada base, siendo estos números enteros (ver figura 2a).

Pero cuando el número de rectángulos de aproximación es mayor (por ejemplo, más de 80, ver figura 2b), ya no se aprecian los rectángulos ni la partición regular generada en el intervalo; esto hace que los estudiantes validen que la partición depende de la amplitud de la base, y en función a ella determinen las alturas de cada rectángulo. Se espera que utilicen símbolos que representen a la base y a la partición de modo que les permita generalizar una adición de *n* términos.



Medida del área A de los cuatro rectángulos:	Medida del área A de los 87 rectángulos:
$m(A) = 1 \times f(0) + 1 \times f(1) \times f(2) + 1 \times f(3)\mathrm{u}^2$	$m(A) = b \times f(x_0) + b \times f(x_1) + \ldots + b \times f(x_{85}) + b \times f(x_{86})\mathrm{u}^2$
(a)	(b)

Figura 2. Aproximación.

El diseño de las tareas no se restringe a una dialéctica en particular. El análisis que realicemos de la información dada por los estudiantes (respuestas, procedimientos, justificaciones), contrastando los análisis *a priori* y *a posteriori*, nos permitirá deducir qué dialéctica alcanzaron.

ANÁLISIS DE ALGUNAS DE LAS TAREAS DE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA

El análisis de los resultados obtenidos de las preguntas de algunas tareas de la situación didáctica lo hicimos confrontando las respuestas que esperábamos obtener de los estudiantes (análisis *a priori*) y lo que realmente respondieron (análisis *a posteriori*), para poder observar si los resultados fueron o no previstos por el investigador. Por esta manera de analizar los resultados, elegimos como referencial metodológico ciertos aspectos de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995).

La investigación se realizó con cuatro estudiantes y se obtuvieron distintas respuestas en varias de las tareas. A continuación presentamos el análisis de las respuestas de uno de los estudiantes.

En una tarea planteada de la situación didáctica, el estudiante debía deslizar el punto P (ver figura 1) y determinar la altura y la medida del área del rectángulo dibujado. Al no tener el valor numérico de la altura del rectángulo, se esperaba que el estudiante expresara esta altura como la imagen de la función *f* para un valor de *x* (base del rectángulo) y formulara que la medida del área quedaría en términos de *f*; sin embargo, solo movilizó el punto P y aproximó la altura del rectángulo y la medida de su área (ver figura 3). El estudiante justificó que en la pregunta no le pedían expresar la altura como la imagen de la función. Afirmamos que el estudiante alcanzó la *dialéctica de acción* ya que solo actuó sobre el punto P y no consiguió relacionar por sí mismo la altura del rectángulo con la imagen de la función.

b. (i) Mueva el punto *P* y complete la tabla:

x	1	2,5	3,2
Altura de la loseta	3,6	1,9	1,53
Área de la loseta	3,6	4,75	4,9

Figura 3. Tabla para diferentes valores de *x*.

Luego, en otra tarea de la situación didáctica el estudiante debía dibujar cuatro rectángulos con el deslizador *n* y expresar la suma de las medidas de sus áreas como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos. Al aplicar el proceso de medición por acotación de Freudental (1999), se esperaba que el estudiante, a partir de sus conocimientos previos sobre funciones e intervalos, fuera capaz de plantear la adición de términos reconociendo que la altura de cada rectángulo era igual a la imagen de la función en el extremo izquierdo de cada base; sin embargo, tomó el extremo derecho (el estudiante observó el dibujo de la figura 2(a) y respondió lo que muestra la figura 4).

(ii) Exprese S_1 como la adición de las áreas de cada una de las cuatro losetas dibujadas.

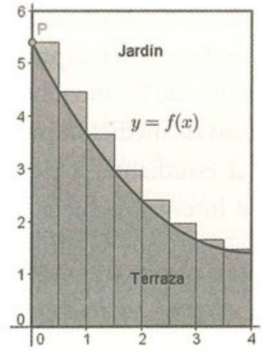
A_{L1}: $1 \times f_{(1)}$
A_{L2}: $1 \times f_{(2)}$ (+) $S_1 = f_{(1)} + f_{(2)} + f_{(3)} + f_{(4)}$
A_{L3}: $1 \times f_{(3)}$
A_{L3}: $1 \times f_{(4)}$

Figura 4. Adición de las medidas de las áreas de cuatro rectángulos.

Fuente: Martínez (2015, p. 140).

El investigador intervino y le indicó al estudiante que colocara el punto P en uno de los vértices superiores del segundo rectángulo y observara las coordenadas del punto; en ese momento el estudiante se dio cuenta por sí mismo del error cometido.

Cuando se modificó el *número de rectángulos de aproximación* y se le asignó el valor de 8, se esperaba que presentara como respuesta la siguiente adición de términos: $0{,}5 \times f(0) + 0{,}5 \times f(0{,}5) + 0{,}5 \times f(1) + 0{,}5 \times f(1{,}5) + 0{,}5 \times f(2) + 0{,}5 \times f(2{,}5) + 0{,}5 \times f(3) + 0{,}5 \times f(3{,}5)$; sin embargo no consideró la partición regular generada por los rectángulos en el intervalo $[0; 4]$ del eje x, y presentó como respuesta lo que se muestra en la figura 5.



$$S_7 = f_{(0)} \times 0{,}5 + f_{(1)} \times 0{,}5 + f_{(2)} \times 0{,}5 + f_{(3)} \times 0{,}5 + f_{(4)} \times 0{,}5 + f_{(5)} \times 0{,}5 + f_{(6)} \times 0{,}5 + f_{(7)} \times 0{,}5$$

Figura 5. Adición de las medidas de las áreas de ocho rectángulos.

Fuente: Martínez (2015, p. 147).

El estudiante justificó su respuesta señalando que había considerado como alturas las imágenes de los números de rectángulos pero no de los valores de *x*. Notamos que para valores pequeños y naturales pudo realizar la tarea, identificando en el plano las alturas directamente; sin embargo, para valores grandes del número de rectángulos y por tanto, intervalos con extremos fraccionarios, no pudo hacerlo, es decir, no logró identificar ni validar un procedimiento que le permitiera expresar la suma de las medidas de áreas como una adición de términos, por ese motivo afirmamos que el estudiante solo alcanzó a la *dialéctica de acción*.

En una siguiente tarea de la situación didáctica, el estudiante señaló correctamente que con 87 rectángulos se cumplía cierta condición dada y calculó sin dificultad la medida de la base de cada rectángulo (0,046 m), pero nuevamente se equivocó con las alturas (ver figura 6) y no consiguió validar el procedimiento que le permitiera plantear correctamente la adición de términos. Nuevamente la dificultad parece estar en identificar los extremos de los intervalos cuando son números racionales. El investigador le preguntó cuál había sido su razonamiento; el estudiante respondió que no se acordaba cómo se obtenían las alturas de los rectángulos, que recordó que estaba mal evaluar f de 0 a 86 (por eso lo tachó), pero luego no supo qué hacer.

$$\cancel{S = \left(f_{(0)} + f_{(1)} + f_{(2)} + f_{(3)} + \ldots + f_{(86)}\right) 0.46}$$

$$S = \left(f_{(0{,}046)} \times 0{,}46\right)(86)$$

Figura 6. Adición de las medidas de las áreas de 87 rectángulos.

Fuente: Martínez (2015, p. 175).

Durante el desarrollo de la actividad, cuando el estudiante trabajó con 87 rectángulos, el investigador intervino para proponerle que empleara una notación simbólica que le permitiera obtener una forma generalizada. El estudiante denotó con la letra b a la base de cada rectángulo, $b \approx 0{,}045$m. Cuando se le preguntó por los valores que tomaban los extremos de los tres primeros intervalos de la partición regular; señaló que estos eran 0; 0,045; 0,09 y 0,135. El investigador asignó a cada número respectivamente los símbolos x_0; x_1; x_2 y x_3. Luego, el estudiante calculó correctamente la medida del área del primer rectángulo, del segundo y expresó oralmente lo siguiente:

$$m(\mathrm{A}) = b \times f(x_0) + b \times f(x_1) + \ldots + b \times f(x_{85}) + b \times f(x_{86})\ \mathrm{m}^2.$$

Pensamos que el uso de la notación simbólica con índices números naturales disminuye la dificultad al momento de identificar la altura de cada rectángulo. En otra tarea de la misma situación, el estudiante tuvo que plantear la suma de las medidas de las áreas de 873 rectángulos, como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos, pero esta vez de forma simbólica; sin embargo, volvió a presentar dificultades en lo referido a las alturas de cada rectángulo, aunque por una desconcentración, como él mismo afirmó. La figura 7 muestra su respuesta.

(ii) ¿Cuánto mide la base de cada loseta hallada en (i)?

$$\frac{4}{873} = 0{,}0045$$

(iii) Exprese la suma de las áreas de las losetas halladas en (i), como la adición de las áreas de cada una de ellas.

$$S = f_{x(0)} \cdot b + f_{(x_1)} b + \ldots + f_{(x_{89})} \cdot b$$

Figura 7. Adición de las medidas de las áreas de 873 rectángulos.

Finalmente, en la última tarea, el estudiante comentó que con infinitos rectángulos se podría acercar a la medida del área, «creo que no se puede calcular el área exacta pero sí la que más se aproxima» (Martínez, 2015, p. 192). La figura 8 muestra la forma en que representa dicha aproximación.

(iii) Para el número indicado en (ii), plantee la suma de las áreas de todas las losetas como la adición de las áreas de cada una de ellas.

$$S = b \cdot f_{(x_0)} + b \cdot f_{(x_1)} + \ldots + b \cdot f_{(x_\infty)}$$

Figura 8. Adición de las medidas de las áreas cuando *n* tiende al infinito.

Apreciamos que luego de introducir la notación simbólica, el estudiante fue capaz de expresar la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos como una adición de términos; y observar el último sumando que aparece en la figura 8 favoreció a su comprensión del proceso infinito involucrado. Por ello afirmamos que alcanzó las *dialécticas de formulación* y *validación*.

A continuación presentamos la conclusión a la que llegamos en nuestro artículo.

Conclusión

A partir del desarrollo de la secuencia didáctica, del recojo de la información de cada una de las tareas y del análisis en conjunto de todas ellas, hemos llegado a la siguiente conclusión:

Inicialmente, el estudiante desconocía un procedimiento de aproximación a la medida del área, no sabía que la altura de un rectángulo podía expresarla como la imagen de una función y no pensaba en realizar procesos infinitos. A medida que fue desarrollando la situación didáctica, pudimos observar que las dificultades al plantear la adición de términos y al relacionar la altura de cada rectángulo con la imagen de la función se superaron en tanto que el estudiante reemplazaba los valores numéricos correspondientes a los extremos de los intervalos de la partición regular por la representación simbólica. Este cambio de estrategia redundó en la disminución de errores y le permitió replicar el procedimiento para distintos valores del número de rectángulos de aproximación.

Consideración final

La articulación del área con la integral definida, a través del proceso de medida por acotación, favoreció la comprensión del área como una suma de términos, y preparó el camino para introducir su definición como una integral definida. De otro lado, se propone construir situaciones didácticas similares en las que los estudiantes consigan verbalizar el procedimiento de *exhausción*, pero enfocados a un proceso de límite, y de esa manera logren expresar la medida del área como el límite de una suma de Riemann o la medida del área como integral definida.

Referencias

Artigue, M., Douady, R, Moreno, L. & Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X*(2), 117-134. Recuperado de http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/ vol10/artigue.pdf

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Corberán, R. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad.* [Tesis Doctoral]. Universidad de Valencia. España. Recuperado de www.uv.es/aprengeom/archivos2/Corberan96.pdf

Freudenthal, H. (1999). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Nueva York: Kluwer Academic Publishers.

Haeussler, E. & Paul, R. (2004). *Matemáticas para administración y economía.* México, D. F: Prentice Hall.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo.* México, D. F.: Oxford.

Martínez, M. (2015). *Una propuesta para articular área y medida usando la tsd, en alumnos de nivel superior.* [Tesis de Maestría]. Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/61133.

Ministerio de Educación del Perú [Minedu], Dirección de Educación Básica (2010). *Diseño Curricular Nacional.* Lima: Minedu.

Stewart, J (2001). *Cálculo de una variable. Trascendentes Tempranas.* México, D. F.: Thomson Editores.