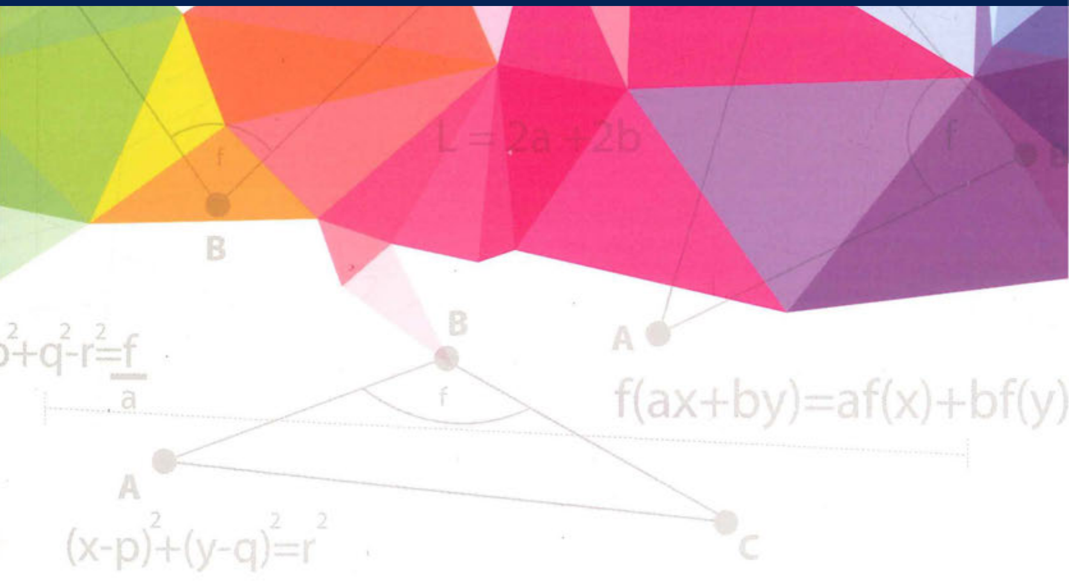
INVESTIGACIONES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Jesús Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra
Editores

Capítulo 8



Investigaciones en educación matemática
Jesús Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra, editores

Av. Universitaria 1801, Lima 32, Perú
feditor@pucp.edu.pe
www.fondoeditorial.pucp.edu.pe

Diseño, diagramación, corrección de estilo
y cuidado de la edición: Fondo Editorial PUCP

Primera edición: octubre de 2016
Tiraje: 500 ejemplares

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú Nº 2016-12807
ISBN: 978-612-317-201-5
Registro del Proyecto Editorial: 31501361601055

Impreso en Tarea Asociación Gráfica Educativa
Pasaje María Auxiliadora 156, Lima 5, Perú

Diseño de tareas que contribuyan a un aprendizaje significativo del concepto de derivada en estudiantes de Ciencias Administrativas[1]

Task design contributing to a meaningful learning of the concept of derivative in Management Sciences students

Erick Pozsgai Hernani[2]
Uldarico Malaspina Jurado[3]

Resumen

Diseñamos una secuencia de tareas con el objetivo de ayudar a mejorar la comprensión del concepto de derivada de una función f, como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(a; f(a))$. Identificamos algunas dificultades en el aprendizaje de la derivada y deficiencias en los conocimientos previos. La metodología del presente trabajo de investigación fue cualitativa, exploratoria y descriptiva. Se observó en el grupo participante que predomina un nivel de comprensión instrumental del concepto de derivada. Se encontraron dificultades en la recuperación de los conocimientos previos necesarios para iniciar el estudio de la derivada, así como con el lenguaje formal. También se pudo notar una desconexión entre las diversas representaciones de la derivada.

Palabras-clave: *Derivada; diseño de tareas; aprendizaje significativo.*

---

[1] Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de Matemática en Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT participación PUC-SP/Brasil y PUCP/Perú. IREM-PUCP, Proyecto Integrado Internacional: PI0272.

[2] Pontificia Universidad Católica del Perú – Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. a19791226@pucp.edu.pe

[3] Pontificia Universidad Católica del Perú –DIMAT-PUCP. umalasp@pucp.edu.pe

Abstract

We designed a sequence of tasks aiming to help improve the understanding of the concept of derivative of a function f as the slope of a tangent line to the graph of the function at the point $(a; f(a))$. Some difficulties were identified in learning the derivative, as well as some deficiencies in previous knowledge. The methodology of this research work was qualitative, exploratory and descriptive. It was observed that a level of instrumental understanding of the concept of derivative prevails in the participating group. Difficulties were found in the recovery of necessary previous knowledge to start studying the derivative, as well as difficulties with formal language. Also, a disconnection was evident between the different representations of the derivative.

Keywords: *Derivative; task design; meaningful learning.*

Introducción

Uno de los seis «principios» a partir de los cuales el National Council of Teachers of Mathematics describe las características particulares de una educación matemática de calidad es el denominado The Learning Principle (NCTM, 2000) en el que, entre otras cosas, se afirma que los estudiantes deben aprender matemáticas con comprensión conceptual y construir activamente los nuevos conocimientos a partir de la experiencia y aprendizajes previos (p. 20). Además, afirma que los profesores deben conocer qué es lo que los estudiantes ya saben, para poder diseñar experiencias y lecciones que construyan nuevos conocimientos, sobre la base de lo que ellos ya conocen (p. 18).

Para lograr un aprendizaje conceptual se deben usar tareas matemáticas (*mathematical tasks*) «valiosas» o «que valgan la pena», que permitan introducir ideas matemáticas importantes y retar a los estudiantes intelectualmente.

Dado este reconocimiento a la importancia de las tareas matemáticas (*mathematical tasks*) que son propuestas a los estudiantes, muchos investigadores tanto en los Estados Unidos como en otras partes del mundo, trabajan sobre la idea de «diseñar» las tareas matemáticas y así surge un nuevo concepto que es el de diseño de tareas (*task design*). En esa línea, nuestro trabajo se enfoca en diseñar, aplicar y analizar una secuencia de tareas que, partiendo de conceptos conocidos por los estudiantes, como son las funciones, pueda estimular una reflexión en ellos y les permita una mejor comprensión del concepto de derivada, y que además haga posible explorar algunas dificultades en el aprendizaje de dicho concepto.

Aprendizaje significativo

Dentro del diseño de tareas en general, muchos investigadores están de acuerdo en que, ya sea para introducir un nuevo concepto o para reforzar uno ya aprendido por los alumnos, es importante que el punto de partida sean los conocimientos previos de los estudiantes. Sobre este particular, Orton (2005) señala que el aprendizaje significativo es un proceso en el cual cualquier nuevo conocimiento es aprendido de manera significativa, al lograr conectar este conocimiento con algunos aspectos relevantes ya existentes en la estructura de conocimientos del individuo. Los nuevos conocimientos pueden modificar los conocimientos anteriores o establecer nuevas relaciones entre ellos.

Ausubel (2000) indica que si el aprendizaje es significativo, los conocimientos están más disponibles en la estructura cognitiva. Una de las condiciones que se requieren para este fin es la presencia en el sujeto de algunas ideas previas, denominadas «de anclaje», con las que el nuevo material pueda ser relacionado.

Evidentemente, como Ausubel lo hace notar, una de las condiciones para un aprendizaje significativo es la existencia de materiales potencialmente significativos para el aprendizaje. Pero su sola presencia no garantiza un aprendizaje significativo, pues cada componente de la «tarea», así como la tarea en su conjunto, tiene que ser lógicamente significativo (Ausubel, 2000, p.1).

Comprensión instrumental vs. comprensión relacional

Skemp (2005) habla sobre estos dos conceptos para diferenciar dos formas diferentes de aprender matemáticas. Comprensión relacional significa «saber lo que hay que hacer y por qué» (p. 89). Por otra parte, según el mismo autor, comprensión instrumental se puede explicar como un conjunto de reglas sin razones. Se pueden dar diversos ejemplos de comprensión instrumental, como por ejemplo cuando un estudiante es capaz de calcular el área de un rectángulo, pero no sabe por qué esa fórmula funciona para ese cálculo. Igual caso es el de la regla de «prestar» en la resta; los docentes no explican la razón o el origen de dicha regla, probablemente sienten que no es necesario decírselo a los niños. En el caso de la derivada podemos imaginarnos perfectamente a un estudiante que es capaz de determinar el máximo absoluto de una función, en un problema de modelación, pero incapaz de explicar el porqué de su resultado.

Diseño de tareas

El marco teórico que elegimos para nuestro trabajo es el diseño de tareas (*task design*), algunos de cuyos principios se pueden visualizar en los siguientes trabajos de los investigadores de este enfoque.

El término «tarea matemática» (*mathematical task*) suele evocar la idea de una actividad que se solicita a los alumnos, ya sea para realizar en la casa o en la clase, solos o en grupo (Breen & O'Shea, 2010).

Sierpinska (2004) considera que el diseño, análisis y prueba empírica de tareas matemáticas, ya sea para propósitos de investigación o enseñanza, es una de las más importantes responsabilidades de la educación matemática.

Debemos aclarar que la extensión y detalle del diseño de tareas varía enormemente entre los que trabajan en diseño de tareas (Watson & Ohtani, 2013).

Bokhove (2014) propone un modelo que se basa en algunos principios del diseño de tareas. En su modelo menciona que existen tres etapas o componentes en una secuencia de tareas, que considera «tareas muy similares»: crisis, retroalimentación y desvanecimiento (*crises, feedback and fading*). Además sugiere la repetición de ejercicios, aunque con cierta variación, como un medio para que los alumnos puedan lograr una mejor comprensión. Este mismo principio es enunciado por Watson y Mason (2005).

Mason y Johnston–Wilder (2006) hablan de «dimensiones de posible variación». Se pueden variar algunas dimensiones o aspectos del problema:

- ¿Qué aspectos de la tarea son fijos?
- ¿Qué aspectos son particulares, y pueden ser variados?

Por ende, las tareas no deben ser vistas aisladamente sino dentro de un panorama mucho más amplio; una secuencia de tareas, que puede incluir ejercicios repetitivos, con pequeñas variaciones.

Ron, Zaslavsky y Zodik (2013) señalan que el proceso de diseño de tareas con frecuencia está formado por tres etapas:

- Afirmar los objetivos y conectar la tarea con los objetivos.
- Diseñar una actividad genérica que nos dirija a dichos objetivos.
- Escoger cuidadosamente los ejemplos específicos para implementar la tarea genérica.

Watson y Mason (2005) propusieron una teoría denominada «Teoría del aprendizaje a través de la ejemplificación», que consiste en solicitar a los alumnos realizar tareas de construcción de ejemplos, a partir de sus conocimientos previos.

En esta teoría se utiliza mucho el concepto de *scaffolding*, que puede ser traducido como una construcción gradual de los estudiantes, que a partir de objetos accesibles o familiares para ellos, sus propiedades y asistencia apropiada, pueden alcanzar a completar la tarea, sin que haya necesidad de reducir la complejidad cognitiva (Stein, Grover & Henningsen, 1995).

Damos un ejemplo de una pequeña secuencia de tareas en este enfoque:

Task 7a: How Different?

Give an example of a linear equation.
Change your example in some way to give a different straight line.
Make further *similar* alterations to get new straight lines.
Now make a different kind of change. How does the new straight line differ from those achieved so far?
What other kinds of change can be made, and what is the effect of these changes?

Figura 1. Una secuencia de tareas, tomada de Watson y Mason (2005).

Podemos observar que la secuencia está compuesta de ejemplos, en los que el alumno debe construir objetos matemáticos. En esta secuencia se pueden apreciar varios principios del diseño de tareas, como empezar de conocimientos previos, avanzar gradualmente y además la posibilidad de proponer preguntas con pequeñas variaciones, que induzcan a los estudiantes a reflexionar sobre lo que van construyendo.

La repetición «aparente» de ejemplos con pequeños cambios, según esta teoría, contribuye a que el alumno comprenda un nuevo concepto a partir de la observación de una característica o un principio que se mantiene válido para una variedad de ejemplos. En ese tipo de tareas el estudiante hace lo que naturalmente hacen las personas, observar qué es igual y qué es diferente en cada caso (Watson & Mason, 2005).

En resumen podemos sintetizar algunos principios del marco teórico en el que nos basamos:

- Es importante que la secuencia de tareas considere los conocimientos previos de los alumnos.

- Es importante proporcionar *feedback* cuando sea necesario para superar las etapas de crisis.
- Es valioso usar diversas representaciones de los objetos matemáticos.
- Es importante pedir que los alumnos construyan ejemplos repetidos con pequeñas variaciones, para lograr que comparen cada caso.

Nuestra investigación se enmarca dentro del diseño de tareas, principalmente en la teoría desarrollada por Watson y Mason (2005), que creemos incluye la mayor parte de los principios generales del diseño de tareas y está más cercana a lo que pretendemos llevar a cabo.

Objetivos

Pregunta de investigación: ¿de qué manera el diseño de tareas puede ayudar a un aprendizaje significativo del concepto de derivada?

Objetivo general

Diseñar una secuencia de tareas que ayude a una mejor comprensión del concepto de derivada por los estudiantes y permita identificar dificultades en el aprendizaje del concepto.

Objetivos específicos

- Diseñar una secuencia de tareas que contribuya a una mejor comprensión del concepto de derivada y de su interpretación geométrica como pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto.
- Identificar posibles deficiencias en la comprensión de conceptos previos que son necesarios para el aprendizaje significativo del concepto de derivada.
- Identificar algunas dificultades en el aprendizaje del concepto de derivada.

METODOLOGÍA

La metodología es cualitativa, exploratoria y descriptiva. Mencionamos algunas características de la investigación cualitativa, relacionadas con el presente trabajo.

- Las preguntas de investigación pueden ser cambiadas y ser refinadas.
- Usa métodos interactivos con participación activa de los individuos investigados.
- Es fundamentalmente interpretativa.
- El investigador puede conducir entrevistas personales a los participantes.

Se realizó la investigación en el marco del curso de Lógica Matemática, de la carrera de Administración de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC), que incluye tópicos de Cálculo y de Lógica. Se escogió a 15 alumnos de una sección de 40, de la cual el autor era el docente. Todos los alumnos llevaban el curso por primera vez. Los estudiantes ya habían terminado el estudio de la derivada de funciones de una variable. Además, ya habían tenido una evaluación del tema de derivadas.

La secuencia es coherente con el enfoque expuesto por Watson y Mason (2005), de diseño de tareas, las que son presentadas como «ejemplos», en los que se pide a los alumnos la construcción de objetos matemáticos, familiares para ellos, y se realizan variaciones en los ejemplos, para que los alumnos analicen los cambios y puedan ir obteniendo relaciones, entre la derivada de la función f en un punto, con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en tal punto.

Diseño de la secuencia de tareas

- La secuencia al inicio evoca y explora los conocimientos previos de los participantes (función lineal y pendiente).
- Los ítems solicitan a los participantes construir ejemplos de objetos matemáticos familiares para ellos, pero que tengan cierto comportamiento que requiera una reflexión conceptual.
- Dentro de los ítems se solicita que los participantes expliquen de manera verbal y concisa el comportamiento de los objetos.
- La demanda cognitiva va gradualmente en aumento.
- Se relacionan tres representaciones diferentes del objeto matemático derivada: gráfica, algebraica y simbólica.
- Se presenta un conjunto de ítems con similitudes y variaciones relacionadas con el concepto de derivada, para inducir a los estudiantes a comparar y reflexionar.

Secuencia de tareas

En los ítems 1 y 2 se pide construir algunos ejemplos que sirven para evocar y explorar los conceptos previos de función lineal y funciones crecientes y decrecientes. Los ítems del 3 al 6 (uno de las cuales mostramos a continuación) se diseñaron como una secuencia de tareas, en las que se proponían actividades similares de graficar funciones, pero con pequeñas variaciones respecto al carácter creciente o decreciente de la función y a la velocidad de tal crecimiento o decrecimiento, y en las que los participantes debían expresar simbólica y verbalmente sus percepciones sobre los objetos matemáticos que habían dibujado.

Ítem 3.

Grafique una función continua, cuyo dominio sea R, que sea solo creciente, pero cada vez más rápidamente.

Subítems:

3ª. Cuando la variable x crece, entonces la variable y ..../

3b. Cuando la variable x crece entonces la derivada de la función

Es positiva ( ) Es negativa ( )

3c. Complete el espacio :

Si $x_1 < x_2$ entonces $f'(x_1)$ ...... $f'(x_2)$

3d. ¿Para algún valor de la variable x se cumple que $f'(x) = 0$? ¿Por qué?

3e. ¿La función podrá tener un máximo? Sí ( ) No ( ) ¿Por qué?

En los ítems 7 y 8 se consolida la secuencia de las cuatro preguntas anteriores:

Ítem 7.- Grafique una función continua $y = f(x)$ que sea creciente cada vez más lentamente para todo $x < 2$, y que sea decreciente cada vez más rápidamente para todo $x > 2$.

Sigue un ítem en el que se pide modificar las condiciones y crear una nueva gráfica. La actividad finaliza con un problema contextualizado en el que se solicita optimizar una función de costo promedio y luego modificar las condiciones para obtener un resultado preestablecido.

Resultados

- Se elaboraron cuadros para el registro de la información, asignando a cada participante un número del 1 al 15.
- Posteriormente se formularon preguntas aclaratorias, dirigidas a algunos alumnos con el objetivo de tener una idea más clara de cuáles habían sido las motivaciones de algunas de sus respuestas.

Los resultados obtenidos para el ítem 3 se muestran en la tabla 1.

Tabla 1
Resumen de respuestas a los subítems del ítem 3.

	Gráfica			3a		3b		3c			3d					3e				
	Formas	Dom OK	Dom X	Crece	Otra	Posit.	Negat.	<	>	NR	Si/J	Si/XJ	No/J	No/XJ	NR	Si/J	Si/XJ	No/J	No/XJ	NR
3		1,2,3 4,6,7 8,10	9 14 15	1,2,3,4 6,7,8,9 10,14 15		1,2,3 4,5,6 7,8,9 10,14,15		1,2,4 6,8,9 10 14,15	3,7		2,4	14 15, 9	1,3 6,8 10		7	9 14	8 15	1,2,3 4,5,6 7,10		
			5	5					5				5					5		
		12		12		12				12			12					12		
		13	11	11 13		11 13		13	11						13	11 13				

Consideraciones finales

Con base en el análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de la secuencia didáctica consideramos que esta ayudó a mejorar la comprensión de los estudiantes del concepto derivada, por varias razones:

Se reforzaron y evocaron los conocimientos previos, que según los resultados de las preguntas 1 a 6, estaban por debajo de lo requerido, con respecto a pendiente de una recta, funciones lineales y funciones crecientes y decrecientes.

Se pudo observar una evolución en un grupo de estudiantes, en cuanto a la asociación de la derivada con la pendiente de la recta tangente, que es una de las principales conexiones que queríamos que los estudiantes establezcan.

Se logró en la mayor parte de los estudiantes una asociación entre el signo de la derivada y el comportamiento de la función.

La resolución del problema contextualizado mostró en algunos casos los albores de una comprensión del tipo relacional.

Pendiente de una recta

La comprensión de los estudiantes del concepto de pendiente es, en muchos casos, solo instrumental, lo que no les permite poder determinar la pendiente a partir de una gráfica, ni tampoco hacer estimaciones sobre su magnitud o sobre su evolución, en curvas.

Funciones creciente o decreciente

Algunos alumnos no comprenden que una función puede ser creciente o decreciente para valores de x en todo el conjunto de los números reales, sin que necesariamente tengan que alcanzar un extremo (ítems 3, 4, 5, 6, la parte inicial).

Función lineal

Algunos de los alumnos que llegan al curso de Cálculo no son capaces de hallar la ecuación de una recta. En nuestra secuencia se les pedía dar un ejemplo de una función lineal pero no se les proporcionaban los puntos de paso y tenían que inventarlos ellos, actividad en la que tuvieron dificultades.

Predomina un nivel de comprensión instrumental del concepto de derivada

Se pidió a los estudiantes que investiguen el comportamiento de la derivada de una función lineal y al derivar la función (comprensión instrumental), obtuvieron naturalmente, una constante. Eso los desconcertó, ya que no sabían o ya habían olvidado que la derivada de una función lineal en cualquier punto es numéricamente igual a la pendiente de su gráfica.

Dificultades para relacionar lo conceptual con lo simbólico, en relación con la derivada de una función

El uso de un lenguaje riguroso, con diferentes representaciones semióticas, puede generar conflictos en el aprendizaje de los conceptos. La notación $f'(x)$ usada en los sub ítems 3c, 4c, 5c, 6c, junto con la desigualdad $x_1 < x_2$, generó un conflicto semiótico insalvable, como demuestran las respuestas a las preguntas aclaratorias. La mayoría de los alumnos ignoró el superíndice y respondió como si este no existiera, y en consecuencia no examinaban, observando la gráfica, una relación entre los valores de la derivada de la función, para x_1 y x_2, sabiendo que $x_1 < x_2$

Dificultades para relacionar lo conceptual con lo gráfico en relación con la derivada

En las preguntas 3, 4, 5 y 6 cuando se pidió dibujar las funciones con características cambiantes, se vio que varios alumnos no relacionaban la condición de creciente o decreciente de la función con la derivada, ni con la recta tangente. Sus producciones revelan más un manejo estereotipado (creciente es la que va para arriba y decreciente la que va para abajo), que es residual del curso precedente y no distinguen en las gráficas cuándo hay un crecimiento «cada vez más rápido» o «cada vez más lento».

Para poder realizar las gráficas o para poder decir si la derivada era mayor o menor en x_1 o en x_2 se hacía necesario que dibujen las rectas tangentes a la gráfica en dos puntos diferentes y comparen las pendientes, por estimación, cosa que pocos pudieron hacer.

Recomendaciones

Es necesario que hagamos un análisis sobre la calidad de los conocimientos previos de los alumnos, que se requieren para acometer el estudio de la derivada.

Recomendamos establecer las relaciones entre los diversos registros de representación de la derivada, en vez de quedarnos solo en el registro algebraico. Algunos estudiantes que acaban de terminar de estudiar el tema de derivadas no son capaces de relacionar la pendiente de la recta tangente con la derivada y con el crecimiento de la función. Menos aún con el tipo de crecimiento o decrecimiento.

Se recomienda tomar en cuenta la complejidad semiótica del concepto de derivada, ya que constituye un obstáculo insalvable para algunos estudiantes.

Algunos estudiantes no son capaces de aprender los conceptos y los símbolos al mismo tiempo. Es menester, pues, trabajar primero los conceptos intuitivamente con palabras y gráficos, hasta que sean interiorizados por los estudiantes y, gradualmente, ir introduciendo el lenguaje formal.

En esa línea de investigación ya están trabajando algunos investigadores como Idris (2009), quien menciona una tercera forma de comprensión, además de las dos discutidas por Skemp (2005), la comprensión lógica, gracias a la cual el estudiante es capaz de explicar y justificar sus procedimientos y razonamientos verbalmente o por escrito.

Referencias

Ausubel, D. (2000). *The adquisition and retention of knowledge: A cognitive view*. Nueva York: Springer.

Bokhove, C. (2014). Using crises, feedback and fading for online Task Design. PNA, 8(4), 127-138. Recuperado de: http://digibug.ugr.es/bitstream /10481/31597/1/140505BokhoveUsing_PNA8(4).pdf

Breen, S. & O'Shea, A. (2010). Mathematical Thinking and Task Design. *Irish Math. Society. Bulletin* 55, 39-49. Recuperado de: http://www.maths.tcd.ie/pub/ims/bull55/ME5501.pdf

Creswell, J. W., (2003). *Research Design: Qualitative, Quantitative and Mixed Methods Approaches.*

Recuperado de: http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic1334586.files/2003_Creswell_A%20Framework%20for%20Design.pdf

Idris, N., (2009). Enhancing students' understanding in calculus trough writing. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 4*(1). Recuperado de: www.iejme.com

Mason, J. & Johnston–Wilder, S. (2006). *Designing and using Mathematical Tasks.* Walton Hall: The Open University. Tarquin Publications.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for school mathematics. Virginia: NCTM.

Orton, A. (2005): *Learning Mathematics: Issues, theory and classroom practices.* Nueva York: Continuum.

Ron, G., Zaslavsky, O., & Zodik, I. (2013). Engaging teachers in the web of considerations underlying the design of tasks that foster the need for new mathematical concepts or tools: The case of Calculus. En Margolinas, C. (Ed.), *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22* (Vol. 1) (pp. 543-549) Oxford. Recuperado de: http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/83/74/88/PDF/ICMI_STudy_22_proceedings_2013-FINAL_V2.pdf

Sierpinska, A. (2004). Research in mathematics education through a keyhole: Task problematization. *For the learning of mathematics, 24*(2), 7-15. Recuperado de: http://flm-journal.org/Sierpinska.pdf

Skemp, R. (2005). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, 12*(2), 88-95. Recuperado: http://www.jstor.org/discover/10.2307/41182357?uid=2134&uid=2&uid=70&uid=4&sid=21104050033147

Stein, M., Grover, B., & Henningsen, M. (1995). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms Bosch, M. & Gascón, J. (2006). *Twenty Five Years of the Didactic Transposition*. Recuperado de: http://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/Publications/ICMI_bulletin/58.pdf

Swan, M. (2008). Design of multiple representation tasks to foster conceptual development. ICME 11. México 2008. *11th International Congress on Mathematical Education.* Recuperado de: http://tsg.icme11.org/document/get/289

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity. Learners Generating Examples*. Nueva Jersey y Londres: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. Mahwah.