CIENCIA CONTABLE: VISIÓN Y PERSPECTIVA

Libro homena… 5 años de
la Facultad de Ciencias C… e la PUCP

Capítulo 21

Óscar Alfredo Díaz Becerra
José Carlos Dextre Flores
Editores

BIBLIOTECA NACIONAL DEL PERÚ
Centro Bibliográfico Nacional

657 C4 Ciencia contable: visión y perspectiva / Óscar Alfredo Díaz Becerra, José Carlos Dextre Flores, editores.-- 1a ed.-- Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú, Fondo Editorial, 2017 (Lima: Tarea Asociación Gráfica Educativa).
405 p.: il., diagrs.; 24 cm.

«Libro homenaje por los 85 años de la Facultad de Ciencias Contables de la PUCP».
Incluye bibliografías.

D.L. 2017-15495
ISBN 978-612-317-308-1

1. Contabilidad - Ensayos, conferencias, etc. 2. Contabilidad - Normas 3. Contadores - Ética profesional 4. Auditoría - Normas 5. Finanzas públicas - Contabilidad 6. Contabilidad tributaria I. Díaz Becerra, Óscar Alfredo, 1962-, editor II. Dextre Flores, José Carlos, 1944-, editor III. Pontificia Universidad Católica del Perú

BNP: 2017-2877

Ciencia contable: visión y perspectiva
Libro homenaje por los 85 años de la Facultad de Ciencias Contables de la PUCP
Óscar Alfredo Díaz Becerra y José Carlos Dextre Flores, editores

Av. Universitaria 1801, Lima 32, Perú
feditor@pucp.edu.pe
www.fondoeditorial.pucp.edu.pe

Diseño, diagramación, corrección de estilo
y cuidado de la edición: Fondo Editorial PUCP

Primera edición: noviembre de 2017
Tiraje: 500 ejemplares

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú Nº 2017-15495
ISBN: 978-612-317-308-1
Registro del Proyecto Editorial: 31501361701192

Impreso en Tarea Asociación Gráfica Educativa
Pasaje María Auxiliadora 156, Lima 5, Perú

Punto de equilibrio, modelo lineal y no lineal, y el apoyo de las matemáticas para su análisis

Leopoldo Sánchez Castaños

El artículo trata sobre el punto de equilibrio, modelo que se analiza desde el punto de vista lineal y desde el punto de vista no lineal. Ello se estudia usando herramientas matemáticas, como la solución de ecuaciones, la derivada (cálculo diferencial), la evaluación de puntos máximos y el análisis de regresión estadística. El modelo no lineal tiene dos puntos de equilibrio, y también tiene una utilidad o beneficio máximo, el cual se produce en el punto en que el ingreso marginal se iguala al costo marginal.

En el artículo se plantean ejemplos de cómo encontrar las funciones de ingreso total y costo total usando regresión estadística, a partir de lo cual también se halla el coeficiente de determinación o R^2. Asimismo, se da un ejemplo de cómo se determina la utilidad máxima usando la derivada y el concepto de la igualdad de ingreso marginal y costo marginal, así como se puede encontrar dicha utilidad usando la opción Solver del Excel.

Palabras clave: igualdad de ingreso total y costo total, regresión, derivadas.

El concepto de punto de equilibrio es mucho más amplio de lo que algunos creen. Hay quienes solo lo asocian a la venta de productos de una empresa industrial con sus costos respectivos. Sin embargo, el concepto de punto de equilibrio también es aplicable en el mundo de los instrumentos financieros derivados, en concreto, con las opciones (*call* o *put*) en que el punto de equilibrio se consigue cuando el precio *spot* (precio contado) se iguala al *strike* (precio de ejercicio) más la prima de la opción. En otras palabras, a ese nivel de precios con la opción no se gana ni se pierde.

De lo dicho en el párrafo anterior, podemos generalizar que el punto de equilibrio existe cuando la utilidad o la perdida es cero o, dicho de otra manera, es el punto en el que el total de ingresos es igual al total de costos.

Esto puede expresarse matemáticamente de la siguiente forma asumiendo la siguiente terminología:

- Precio de venta = P
- Costo total = CT
- Costo fijo = CF
- Costo variable total = CV
- Costo total = costo fijo + costo variable
- Cantidad = Q
- Costo variable unitario = CVu
- Ingreso total = IT

El punto de equilibrio se da cuando el ingreso total es igual al costo total, lo cual se expresa así:

$$IT = CT \quad (\mathbf{I})$$

Si detallamos los componentes de costos variable total más costos fijos la expresión en (I) quedaría de la siguiente forma:

$$IT = CV + CF \quad (\mathbf{II})$$

1. Modelo lineal

Por otro lado, sabemos que el ingreso total es igual al precio por cantidad y que el costo variable total es igual al costo unitario variable por cantidad. Estas definiciones se pueden expresar de la siguiente manera:

$$P \times Q = CVu \times Q + CF \quad (\mathbf{III})$$

Si entendemos que el punto de equilibrio es encontrar la cantidad «Q» donde los ingresos totales se igualan con los costos totales, entonces, en la expresión (III), nuestra incógnita a despejar es Q. Esto implica que se tendrá que realizar los siguientes acomodos algebraicos, pues nos encontramos ante una ecuación.

$$P \times Q - CVu \times Q = CF$$

$$Q\,(P - CVu) = CF$$

$$Q = \frac{CF}{(P - CVu)} \quad (\mathbf{IV})$$

La expresión anterior (IV) es lo que conocemos como el punto de equilibrio en unidades, que se obtiene al dividir el costo fijo (CF) entre el margen de contribución, que es el precio de venta menos el costo variable unitario (P – CVu).

Por ejemplo, si el costo fijo fuera S/. 100 000; el precio de venta, S/. 98; y el costo variable unitario, S/. 45, se tendrían las siguientes funciones [f(x)] de ingreso total y costo total reemplazado dichos datos en (III):

$$IT \rightarrow 98Q \rightarrow f(q) = 98Q$$

$$CT \rightarrow 45Q + 100\ 000 \rightarrow f(q) = 45Q + 100\ 000$$

De lo anterior, se observa que se obtienen dos funciones lineales, a las cuales se les denomina el modelo lineal del punto de equilibrio o modelo de corto plazo.

Las funciones matemáticas de ingreso total (IT) y costo total (CT) también se pueden obtener a partir de datos del pasado usando regresión estadística, lo cual será explicado con el siguiente ejemplo y usando la hoja de cálculo Excel.

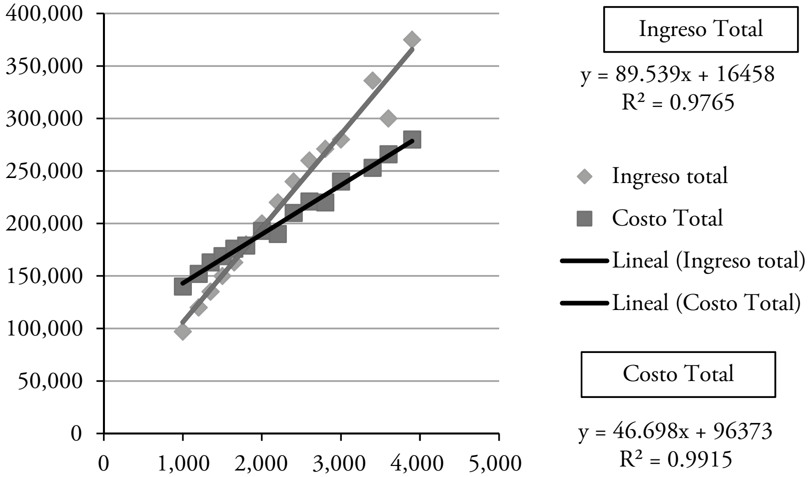
Supongamos los siguientes datos históricos:

Tabla 1. Total ingresos y costos

	Q	IT	CT
	Cantidad	**Ingreso total**	**Costo total**
1	1000	97 000	140 000
2	1200	120 000	152 000
3	1350	135 000	163 000
4	1500	150 000	169 000
5	1650	163 000	176 000
6	1800	180 000	179 000
7	2000	200 000	193 000
8	2200	220 000	190 000
9	2400	240 000	210 000
10	2600	260 000	221 000
11	2800	271 000	220 000
12	3000	280 000	240 000
13	3400	336 000	253 000
14	3600	300 000	266 000
15	3900	375 000	280 000

Con estos datos, se usan las opciones del Excel para realizar una regresión estadística y se obtiene el siguiente resultado:

Gráfico 1. Regresión de ingresos y costos totales



Es decir, la función lineal que mejor se ajusta a los datos de ingresos totales es Y = 89,539X + 16 458, cuyo coeficiente de determinación o R^2 0,9765 y la función lineal para los costos totales sería Y = 46,698X + 96 373, y cuyo coeficiente de determinación o R^2 0,9915. En el gráfico, en el eje de las X, van las cantidades o «Q», y, en el eje de las Y, van los soles que generan los ingresos o los costos.

El coeficiente de determinación explica la calidad del modelo (la función encontrada) para replicar los resultados y la proporción de las variaciones que son explicados por el modelo. El R^2 puede tomar valores entre 0 y 1; cuanto más cerca esté a 1 la función encontrada, mejor explicará la realidad de los datos.

Si igualamos las dos funciones encontradas, encontraremos el punto de equilibrio de la siguiente manera:

$$89{,}539\,X + 16\,458 = 46{,}698X + 96\,373$$

$$42{,}841X = 79\,915$$

$$X = \frac{79\,915}{42{,}841}$$

$$X = 1\,865{,}385962 \text{ unidades}$$

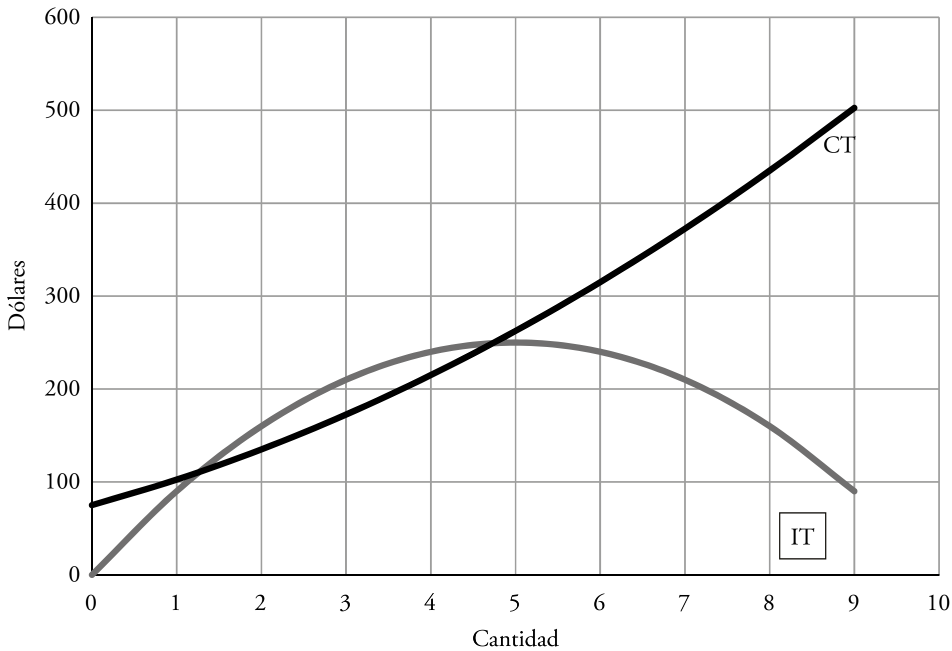
Hasta aquí, hemos revisado el modelo lineal del punto de equilibrio que, como repito, es un modelo de corto plazo. Ahora, veamos cómo funciona el modelo de largo plazo del punto de equilibrio, que también es conocido como modelo económico o no lineal.

2. Modelo no lineal

Mientras el modelo lineal solo tiene un solo punto de equilibrio y a partir de allí asume que la utilidad aumentará por siempre, en el modelo de largo plazo o no lineal existen dos puntos de equilibrio y, por lo tanto, la utilidad no aumentará de forma indefinida, puesto que los productos cumplen un ciclo de nacimiento, crecimiento y decadencia. En esta última etapa, los productos vuelven a generar pérdidas. Asimismo, en este modelo no lineal existe un punto en que se logra la utilidad máxima, que es cuando el ingreso marginal se iguala con el costo marginal. Esto quiere decir que «Recién entonces se está listo para explicar cómo deciden los gerentes cuánto producir para maximizar los beneficios. Y este es el punto en el cual el IMg[1] = CMg[2]» (Court, 2009, p. 108).

El gráfico de este modelo es el siguiente:

Gráfico 2. Ingresos y costos totales

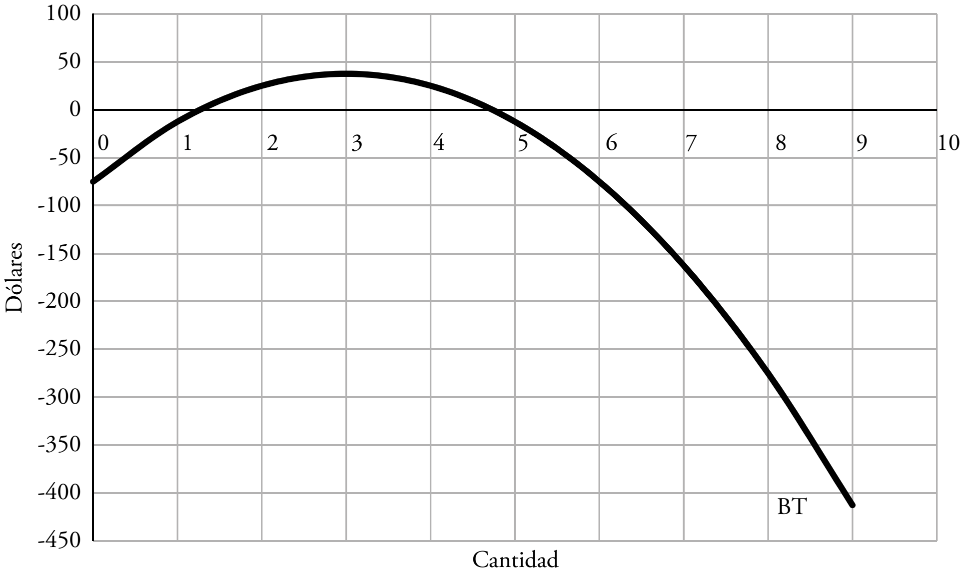


Fuente: Samuelson, 1974.

1 Ingreso marginal.

2 Costo marginal.

Gráfico 3. Beneficios



Fuente: Samuelson, 1974.

Como se puede apreciar en los gráficos anteriores, existen dos puntos de equilibrio (en los puntos que IT se intersecta con CT), y, además, existe un beneficio o utilidad máxima en el punto en el que las unidades son tres. El beneficio máximo se puede interpretar matemáticamente de dos formas: una es que el beneficio máximo se da en el punto en que las tangentes de las funciones IT y CT se hacen paralelas o, dicho de otra forma, cuando las pendientes se igualan o de la otra forma que la utilidad se hace máxima cuando la función de beneficio total (BT) tiene un punto máximo.

La función de beneficio total es la diferencia de las funciones IT (ingreso total) menos CT (costo total). Si la utilidad máxima se quiere hallar igualando las tangentes de las funciones IT y CT, eso implica encontrar las derivadas[3] de las funciones IT y CT, y, luego, igualar ambas derivadas para encontrar el punto «Q», que hace que la utilidad sea máxima. Recordemos por conceptos económicos que las derivadas de las funciones IT y CT son el ingreso marginal y el costo marginal respectivamente, y, como indicamos anteriormente, cuando el ingreso marginal se hace igual al costo marginal, la utilidad o beneficio se hace máximo.

La otra forma de encontrar la utilidad máxima es teniendo la función del beneficio total (BT), que se deduce a partir de las funciones IT y CT, y, después, encontrado

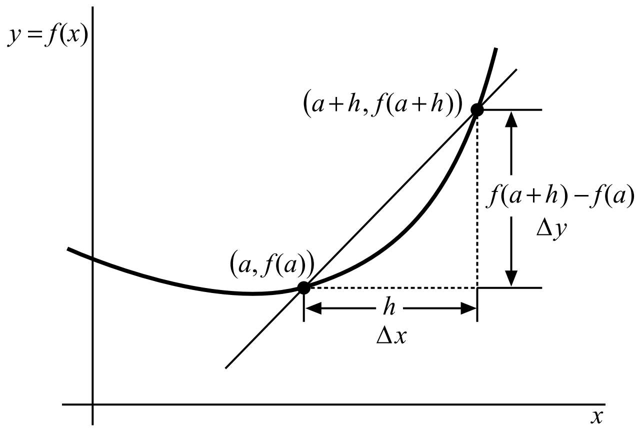
[3] Las derivadas pertenecen al cálculo diferencial e integral, que es parte del análisis matemático.

un punto máximo, se analizar la primera derivada de la función BT. La derivada se expresa matemáticamente de la siguiente forma y una de sus notaciones es $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Esto evidencia cómo varía la función «Y» al incrementar un número «h» cuando ese número «h» tiende a cero (0). Gráficamente, la derivada se expresa de la siguiente manera:

Gráfico 4. Representación de la derivada



Fuente: Spivak, 1996.

Si observamos la figura anterior, veremos que la variación «Y» (ΔY sobre la variación de «X» (ΔX que es el número «h» que tiende a cero – concepto de límites), es la tangente del ángulo en el punto (a, f(a)) correspondiente al triangulo rectángulo que se forma con la secante a la curva ($\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ = tangente)

A continuación, presento algunas fórmulas de derivadas elementales que usaremos para desarrollar un ejemplo numérico del modelo no lineal del punto de equilibrio:

1.- $\frac{d}{dx} = 0$

2.- $\frac{dx}{dx} = 1$

3.- $\frac{d}{dx}(cv) = c\frac{dv}{dx}$

4.- $\frac{d}{dx}(u+v+w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}$

5.- $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$

6.- $\frac{d}{dx}(v^n)=nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$

7.- $\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$

8.- $\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right]=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

9.- $\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{c}\right]=\frac{\frac{du}{dx}}{c}$

10.- $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}$

11.- $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

2.1. Ejemplo del punto de equilibrio no lineal

La empresa ABC S.A. puede vender su producto PQR a un precio de S/. 100 por unidad. Diariamente, se produce X unidades y el costo total de la producción diaria está dado por un costo fijo de S/. 700, y dos grupos de costos variables cuya regla de variación es la siguiente:

- El primer grupo varía en veinte veces las unidades producidas.
- El segundo grupo varía en el producto de las unidades por sí mismas.

Se requiere lo siguiente:

- Hallar el número de unidades que deben producir diariamente para que la empresa obtenga la máxima utilidad total diaria.
- Hallar los puntos de equilibrio.

2.2. Solución

$$IT = 100X$$

$$CT = CV + CF$$

$$CT= (20X + X^2) + 700$$

$$f(X) = 100X$$

$$g(X) = X^2 + 20X + 700$$

Encontramos las derivadas de las funciones f (X) (Ingreso total) y g (X) (Costo total) usando las fórmulas de derivación mostradas líneas arriba:

$$f'(X) = 100\, X^{1-1} = 100$$

$$g'(X) = 2\, X^{2-1} + 20\, X^{1-1} = 2X + 20$$

Como las derivadas representan el ingreso marginal[4] y el costo marginal[5] respectivamente, y sabemos que, cuando el ingreso marginal es igual al costo marginal, la utilidad o beneficio se hace máximo, procedemos a igualar las derivadas encontradas

$$100 = 2X + 20$$

$$80 = 2X$$

$$X = 40$$

Es decir, cuando los ingresos alcanzan las cuarenta unidades, la utilidad alcanza su punto máximo.

Otra forma de hallar la utilidad máxima es encontrando un punto máximo en la función de beneficio total, la cual ya indicamos cómo se determina.

El proceso de encontrar el punto máximo se sigue del criterio de la primera derivada que implica realizar los siguientes pasos:

- Se encuentra la derivada de la función de beneficio total.
- Se iguala la derivada del punto anterior con cero y se determinan los puntos críticos.
- Si un número anterior al punto crítico reemplazado en la derivada da positivo y un número posterior al punto crítico reemplazado en la derivada da negativo, entonces, el punto crítico será un máximo.

4 El ingreso marginal se define como el incremento experimentado por el ingreso total al elevar Q en una unidad

5 El costo marginal es el costo adicional que resulta de producir una unidad adicional

$$BT = IT - CT$$

$$BT = 100X - (X^2 + 20X + 700)$$

$$BT = -X^2 + 80X - 700$$

$$h(X) = -X^2 + 80X - 700 \text{ (función de beneficio total)}$$

Obtenemos la derivada de función de BT:

$$h'(X) -2\,X^{2-1} + 80\,X^{1-1} = -2X + 80$$

Igualamos la derivada a cero para encontrar los puntos críticos:

$$-2x + 80 = 0$$

$$X = 40 \text{ unidades}$$

Evaluamos el punto crítico para saber si es un máximo, para lo cual usamos las cantidades 39 (anterior al punto crítico) y 41 (posterior al punto crítico).

$$h'(39) = -2(39) + 80 = +2$$

$$h'(41) = -2(41) + 80 = -2$$

Puesto que la derivada cambia de signo positivo (+2) a signo negativo (–2), el punto crítico de 40 unidades es un máximo de la función h(x), que es la función de beneficio total.

La utilidad, o beneficio total, será la siguiente:

$$BT = -(40)^2 + 80(40) - 700 = 900 \text{ (utilidad máxima)}$$

Sobre los puntos de equilibrio, estos se determinan igualando IT con CT y serán los siguientes:

$$100X = X^2 + 20X + 700$$

$$X^2 - 80X + 700 = 0$$

Se debe factorizar e igualar los factores a cero:

$$(X - 70)\ (X - 10) = 0$$

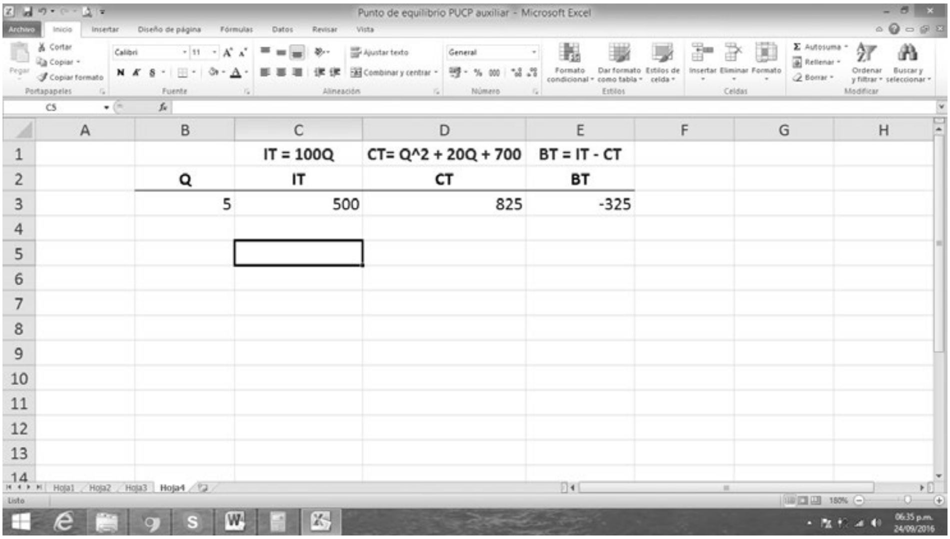
$$X - 70 = 0 \rightarrow X = 70$$

$$X - 10 = 0 \rightarrow X = 10$$

Por lo tanto, los puntos de equilibrio están en las diez unidades y en las setenta unidades.

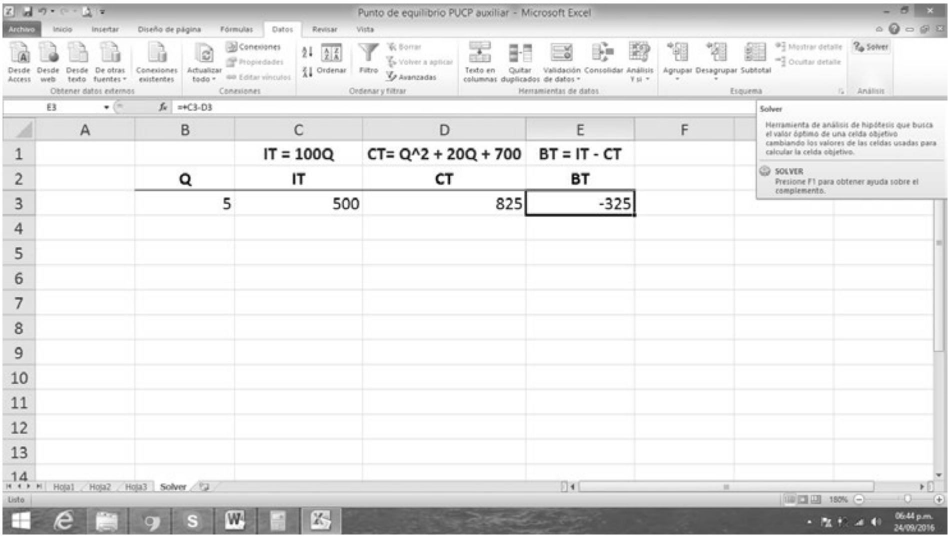
Otra forma de obtener en qué punto la utilidad se hace máxima es usando la opción «Solver» de Excel, para lo cual seguiremos los siguientes pasos. Primero, se establece en el Excel las fórmulas de IT, CT y BT, tal como se muestra en la imagen abajo. Para nuestro ejemplo, vemos que, si las unidades (Q) son solo cinco unidades, se tiene un ingreso total de S/. 500, un costo total de S/. 825 y una pérdida de S/. 325.

Gráfico 5. Solver paso 1



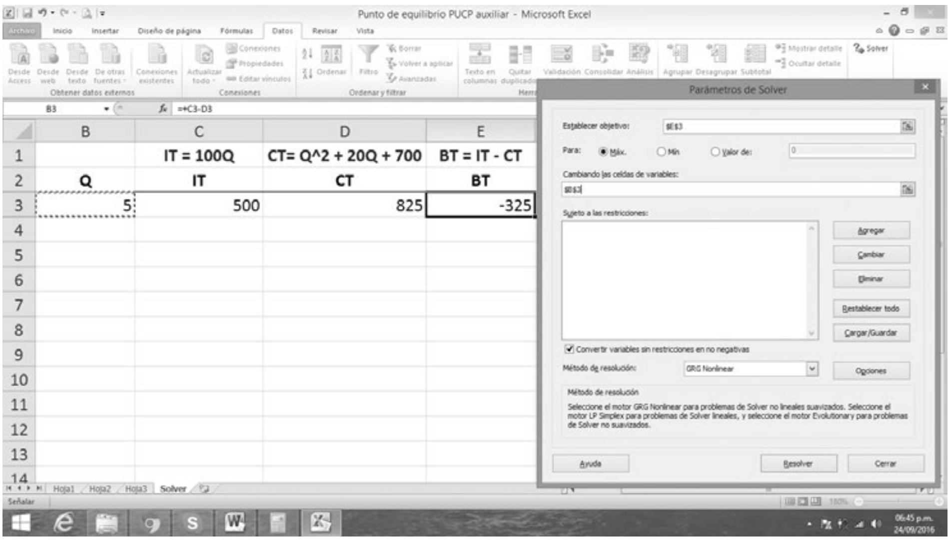
Mediante «Solver», vamos a fijar como nuestra función objetivo BT, es decir, la celda E3, y le vamos indicar que sea un valor máximo, para lo cual deberá cambiar Q (la celda B3).

Gráfico 6. Solver paso 2



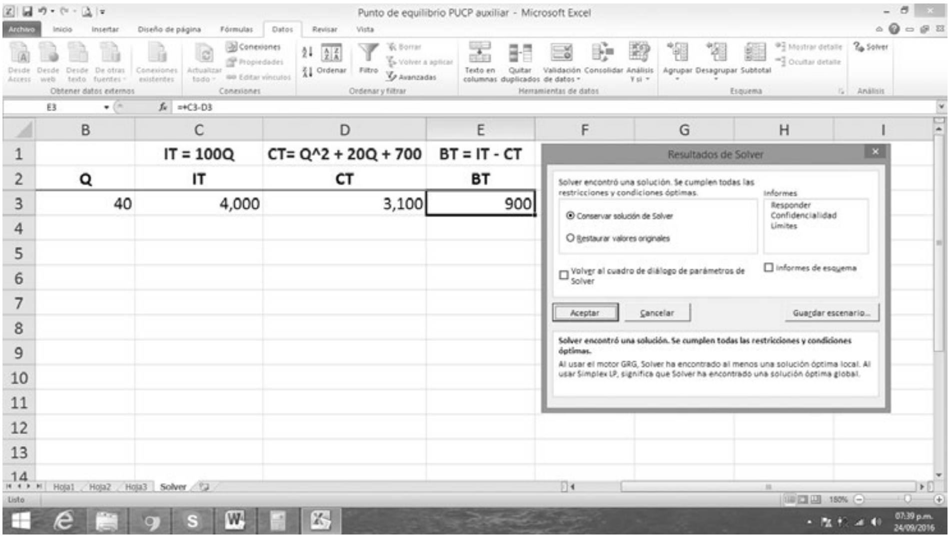
En la pantalla que se muestra abajo, se hace clic en «Resolver».

Gráfico 7. Solver paso 3



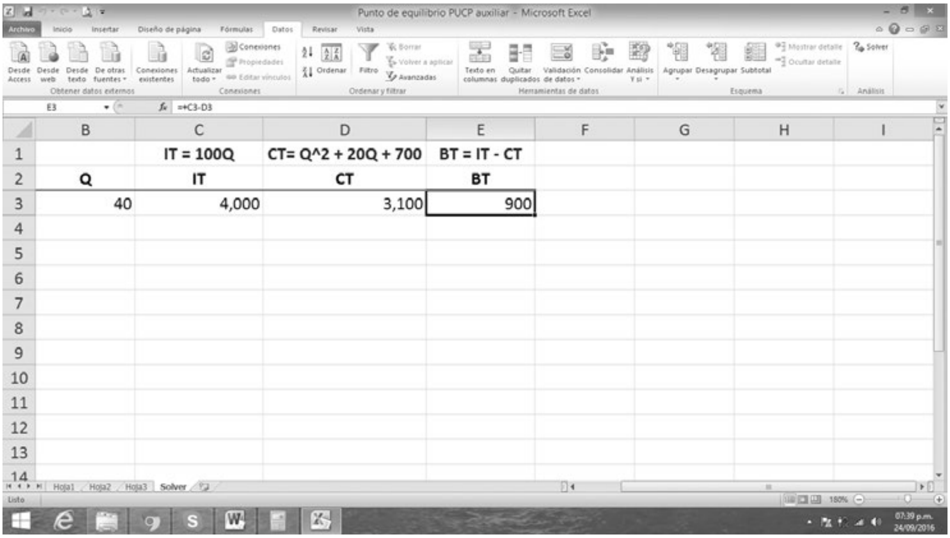
Luego de la opción «Resolver», aparece la ventana de abajo y se hace clic en «aceptar».

Gráfico 8. Solver paso 4



Una vez que se ha aceptado, figura como resultado final que el beneficio total se hace máximo cuando la cantidad corresponde a cuarenta unidades.

Gráfico 9. Solver paso 5



3. Conclusiones

- El modelo lineal del punto de equilibrio es una herramienta muy útil para varios fines, pero hay que tener presente que es un modelo de corto plazo. En contraste con este modelo lineal, está el modelo no lineal, que es un modelo de largo plazo y, por lo tanto, mucho más rico en lo que respecta a la información que nos puede dar, como, por ejemplo, cuál es el punto en que se logra la máxima utilidad.
- El apoyo de las matemáticas —incluidas las estadísticas— es muy importante para realizar el análisis de estos modelos, en especial en el caso del modelo no lineal. Gracias a este, mediante el conocimiento de las funciones y del uso de las derivadas, se puede obtener la utilidad o beneficio máximo.
- Lo anterior refuerza lo que varios entendidos afirman y es que, en la formación del contador de hoy, se debe reforzar el estudio de las matemáticas para ser competitivos con otras profesiones.

Bibliografía

Barfield, Jesse T.; Cecily A. Raiborn & Michael R. Kinney (2004). Costeo absorbente/variable y análisis costo-volumen-utilidad. En *Contabilidad de costos: tradiciones e innovaciones* (pp. 442-480). Ciudad de México: Thomson.

Court, Eduardo (2010). Aspectos microeconómicos para la toma de decisiones gerenciales. En *Finanzas corporativas* (pp. 87-126). Lima: Cengage Learning / Centrum.

Horngren, Charles T.; Gary L. Sundem & Frank H. Selto (1993). Introducción al comportamiento de los costos y a las relaciones costo-volumen. En *Introducción a la contabilidad administrativa* (pp. 36-63). México: Prentice-Hall.

Haeussler, Ernest F.; Richard S. Paul & Richard J. Wood (2008). Diferenciación. En *Matemáticas para administración y economía* (pp. 480-521). Ciudad de México: Pearson.

Levin, Richard & David S. Rubin (2004). Regresión simple y correlación. En *Estadística para administradores y la economía* (pp. 509-555). Ciudad de México: Pearson.

Polimeni, Ralph S.; Frank J. Fabozzi & Arthur H. Adelberg (2005). Análisis del punto de equilibrio y análisis de costo-volumen-utilidad. En *Contabilidad de costos* (pp. 613-634). Bogotá: McGraw-Hill.

Stewart, James (2009). Aplicaciones de la derivación. En *Cálculo trascendente temprano* (pp. 270-344). Ciudad de México: Cengage Learning.

Samuelson, Paul (1974). *Curso de economía moderna*. Madrid: Aguilar.

Spivak, Michael (1996). *Cálculo infinitesimal*. Ciudad de México: Reverte.