

# SISTEMAS DINÁMICOS PARA EL ANÁLISIS ECONÓMICO

.....

Jorge Chávez



**PUCP**

Departamento  
Académico de Ciencias

# SISTEMAS DINÁMICOS PARA EL ANÁLISIS ECONÓMICO



Jorge Chávez



**PUCP**

Departamento  
Académico de Ciencias

Autor  
Jorge Chávez

@Pontificia Universidad Católica del Perú  
Departamento Académico de Ciencias  
Sección Matemáticas  
Av. Universitaria 1801, San Miguel  
Teléfono: 6262000  
Correo electrónico: publicacionesdac@pucp.edu.pe

***Sistemas Dinámicos para el Análisis Económico***  
Lima, Departamento Académico de Ciencias -  
Sección Matemática, 2022

Diseño y diagramación: Elit León Atauqui  
elit.leon@gmail.com

Primera edición digital: noviembre de 2022  
<https://departamento.pucp.edu.pe/ciencias/investigaciones-y-publicaciones/publicaciones-del-departamento/?q=0>

ISBN:978-612-48974-3-6  
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú:2022-10857

Derechos reservados, prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores.

A Juana, Manuel y Elba, tres trayectorias hacia el infinito  
A Rocío, la condición inicial



## PRÓLOGO

La presente obra forma parte de las publicaciones del Departamento Académico de Ciencias (DAC) de la Pontificia Universidad Católica del Perú, el cual agrupa a profesores que cultivan el interés por ciencias como la física, las matemáticas y la química. Como parte de sus funciones el DAC se encarga de publicar textos, guías, libros y actas de divulgación y/o investigación con el objetivo de compartir con el público interesado los trabajos académicos desarrollados por los profesores del Departamento. Desde el 2020, sus publicaciones son digitales y se encuentran alojadas en el repositorio institucional de la PUCP.

*Sistemas dinámicos para el análisis económico* es un libro orientado a profesores y estudiantes tanto de economía como de matemáticas aplicadas que posean una buena formación en álgebra lineal y análisis matemático, y que tengan un interés especial por la teoría y los modelos matemáticos de la economía. El texto cubre los temas de sistemas dinámicos que más aparecen en la teoría económica.



# Índice general

<b>I</b>	<b>TIEMPO CONTINUO</b>	<b>1</b>
<b>1.</b>	<b>Introducción a los sistemas dinámicos</b>	<b>3</b>
1.1.	Introducción . . . . .	3
1.2.	Preliminares . . . . .	5
1.3.	Ecuación diferencial lineal de primer orden . . . . .	21
1.4.	Ecuaciones diferenciales no lineales . . . . .	36
1.5.	Solución maximal y dependencia continua . . . . .	48
1.6.	Análisis cualitativo . . . . .	57
1.7.	Bifurcaciones . . . . .	81
<b>2.</b>	<b>Sistemas dinámicos lineales</b>	<b>99</b>
2.1.	Introducción . . . . .	99
2.2.	La exponencial de una matriz . . . . .	106
2.3.	Sistemas lineales en el plano . . . . .	118
2.4.	Subespacios invariantes . . . . .	159
2.5.	Sistemas lineales no homogéneos . . . . .	167
<b>3.</b>	<b>Sistemas dinámicos no lineales</b>	<b>185</b>
3.1.	Introducción . . . . .	185



3.2. Linealización y el teorema de Hartman-Grobman . . . . .	197
3.3. Variedades estables y soluciones estacionarias tipo silla . . . . .	232
<b>II TIEMPO DISCRETO</b>	<b>243</b>
<b>4. Sistemas dinámicos discretos</b>	<b>245</b>
4.1. Introducción . . . . .	245
4.2. Ecuaciones lineales de primer orden . . . . .	246
4.3. Sistemas lineales de ecuaciones en diferencia . . . . .	255
4.4. Una aplicación interesante . . . . .	264
<b>5. Sistemas dinámicos discretos escalares no lineales</b>	<b>273</b>
5.1. Introducción . . . . .	273
5.2. Ecuaciones escalares . . . . .	274
5.3. Análisis cualitativo . . . . .	276
<b>Anexo</b>	<b>291</b>
<b>A. Conceptos básicos</b>	<b>293</b>
<b>B. Espacios vectoriales normados</b>	<b>297</b>

## INTRODUCCIÓN

Estimado lector,

El texto que se dispone a leer a continuación es fruto de varios años de dictado del curso Matemáticas para economistas en el Departamento de Economía de la Pontificia Universidad Católica de Perú. Sin embargo, debido a su profundidad y formalidad matemática, no puede considerarse estrictamente que este sea un libro texto para un curso de pre grado en economía. Está más bien orientado a profesores y estudiantes tanto de economía, como de matemáticas aplicadas, que posean buena formación en cursos de Álgebra Lineal y Análisis matemático y que tengan un interés especial por la teoría y los modelos matemáticos de la economía.

El libro cubre los temas de sistemas dinámicos que más aparecen en la teoría económica, y está dividido en dos partes, una en tiempo continuo y otra en tiempo discreto. En general son cinco capítulos con diverso número de secciones conteniendo cada una de estas una lista de ejercicios orientada a que el lector refuerce lo aprendido en la sección correspondiente. Con el propósito de hacer el libro autosuficiente se han elaborado dos apéndices, donde se presentan algunos conceptos básicos de análisis matemático que son usados en el texto. Aun cuando los ejemplos y modelos son casi en su totalidad de inspiración económica, la teoría es de propósito general. En este sentido, el libro también puede ser usado para el dictado de un curso de sistemas dinámicos para Teoría de control o sistemas dinámicos para Biología y en general en todas aquellas áreas donde los sistemas dinámicos juegan un rol importante.

El texto tiene abundante figuras que ayudan en la tarea de explicar conceptos e ideas a veces un tanto abstractas. Para elaborar estas figuras se han usado los software GeoGebra y Mathematica de Wolfram, que brindan amplias posibilidades para el trabajo computacional cuando este

sea necesario.

Un curso típico de Matemáticas para economistas normalmente contiene también algunos tópicos de optimización. Estos tópicos no se cubren aquí y, más bien, son dejados para una posterior edición.

Espero que este libro cubra un vacío en la literatura que podríamos llamar economía-matemática de nuestro país. Espero que este material sea de mucha utilidad sobre todo para aquellos a quienes está fundamentalmente orientado. Todo comentario futuro será bienvenido y enriquecerá una posterior edición del texto.

Quiero agradecer al revisor de este libro por sus valiosas sugerencias para la edición final y también un agradecimiento especial a mi estudiante Marcelo Gallardo por sus importantes observaciones en todos los aspectos de este material. Al terminar de leer este libro, Marcelo tomó la decisión de dejar la física y dedicarse a las matemáticas aplicadas con énfasis en economía. La decisión de Marcelo fue el primer impacto importante de este libro.

Jorge Chávez

Profesor del Departamento de Ciencias  
de la Pontificia Universidad Católica del Perú

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$ : Conjunto de números naturales,  $\mathbb{N} \triangleq \{1, 2, \dots\}$ .

$\mathbb{Z}$ : Conjunto de números enteros,  $\mathbb{Z} \triangleq \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

$\mathbb{Z}_0^+$ : Conjunto de números enteros positivos incluido el cero,  $\mathbb{Z}_0 \triangleq \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

$\mathbb{R}$ : Conjunto de números reales.

$A^c$ : Si  $A$  es un conjunto,  $A^c$  denota el complemento de dicho conjunto.

$A \subset B$ : El conjunto  $A$  está incluido en el conjunto  $B$ .

$\mathbb{R}^n$ : Espacio euclidiano de dimensión  $n \in \mathbb{N}$ .

$\|x\|$ : Si  $x$  es un vector del espacio vectorial  $V$ ,  $\|x\|$  denota la norma de dicho vector.

$\mathcal{B}(x_0, \epsilon)$ : Bola abierta centrada en  $x_0$  y de radio  $\epsilon$ .

$\mathcal{N}_x$ : Vecindad del punto  $x$ ; es decir, un conjunto que contiene una bola abierta centrada en dicho punto.

$\sup\{A\}$ : Supremo del conjunto  $A$ .

$\preceq$ : Relación de orden.

$\partial A$ : Borde o frontera del conjunto  $A$

$x \cong y$ :  $x$  es aproximadamente igual a  $y$ .

$\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ : Espacio de matrices de orden  $n \times n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  sobre  $\mathbb{R}$ .

$\text{Nu}(A)$ : Núcleo de la matriz  $A$ .

$|A|$ : Determinante de la matriz  $A$ .

$\text{Span}(A)$ : Si  $A$  es un conjunto del espacio vectorial  $V$ ,  $\text{Span}(A)$  denota el espacio generado por el conjunto  $A$ .

$C^n(A)$ : Espacio de funciones con  $n$ -ésima derivada continua.

$\sigma(A)$ : Conjunto de los valores característicos de la matriz  $A$ , también conocido como *espectro*.



Parte I

**TIEMPO CONTINUO**



# Capítulo 1

## Introducción a los sistemas dinámicos

### 1.1. Introducción

Llamamos sistema dinámico (en tiempo continuo) a una ecuación diferencial que contiene una variable de interés que cambia con el tiempo. A dicha variable, que describe el estado del sistema en cada instante, se le llama «variable de estado». La manera cómo esta variable cambia con respecto al tiempo se expresa por medio de la ecuación diferencial o, si acaso la variable de estado es una variable vectorial, por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales. En este capítulo se introducen los conceptos básicos y principios fundamentales de la teoría de los sistemas dinámicos. Aun cuando el énfasis está puesto en la teoría cualitativa, se presentan, algunas técnicas de cálculo que permiten obtener la solución explícita de ciertos tipos de sistemas dinámicos.

La teoría cualitativa de los sistemas dinámicos la introdujo el matemático francés Henri Poincaré (1854-1912), que en su trabajo



«Mémoires sur les courbes définies par une équation différentielle» (1881) ya provee herramientas de análisis para estudiar los sistemas dinámicos desde una perspectiva cualitativa. Dejando de lado el enfoque cuantitativo que busca obtener soluciones explícitas, se aplica más bien un enfoque geométrico basado en las propiedades topológicas del sistema. Este enfoque «moderno» ha probado ser largamente superior al cuantitativo y es de amplia aplicación en diversas áreas de la ciencia, como la biología, la ingeniería, la economía, etc.

A lo largo del texto veremos que un sistema dinámico es una descripción matemática de un proceso económico. Existen sistemas que, a pesar de su sencillez, contienen ideas fundamentales, y el análisis de estos constituye una buena oportunidad para entender la teoría desde sus principios. Esto es particularmente cierto, por ejemplo, con muchos modelos de la macroeconomía o los modelos de la teoría del crecimiento económico. Algunos de estos modelos, ya clásicos, se revisan a lo largo de este texto.

La organización de este capítulo es como sigue. En la sección 1.2 se presenta formalmente el concepto de ecuación diferencial y lo que se entiende por su solución. La condición inicial con la que se inicia un proceso muchas veces determina el futuro de dicho proceso. Marca un cierto derrotero, una senda, una trayectoria. Lo mismo ocurre con los sistemas dinámicos; su evolución depende de la condición inicial. Esto justifica que en esta sección se introduzca el concepto de problema de valor inicial, que consiste en encontrar una trayectoria del sistema que satisfaga dicha condición inicial. La sección termina con un teorema fundamental, el teorema de existencia y unicidad, que da condiciones suficientes que permiten asegurar la existencia y unicidad de soluciones de una ecuación diferencial. La demostración de este

teorema es constructiva en el sentido de que provee un procedimiento que permite obtener la solución de la ecuación. Se verá que el teorema está ligado intrínsecamente a la condición inicial. En la sección 1.3 se estudian las ecuaciones diferenciales lineales y se presentan varios ejemplos prácticos donde estas aparecen naturalmente. La sección 1.4 está dedicada al estudio de la ecuación de variables separables y la ecuación de Bernoulli. Aunque estas ecuaciones son no lineales, pueden resolverse algebraicamente por métodos muy sencillos basados en métodos lineales. En la sección 1.5 se discute la existencia de soluciones maximales, que son soluciones con el dominio más grande posible sobre el cual se puede definir una solución. El análisis cualitativo de los sistemas dinámicos comienza propiamente en la sección 1.6, donde se introducen varias nociones fundamentales como campo vectorial, diagrama de fases, solución de equilibrio y estabilidad. La sección termina con el modelo de Solow, que es de fundamental importancia en el estudio de los modelos de crecimiento económico. La ecuación fundamental de este modelo es no lineal y se presta muy bien para mostrar el análisis cualitativo. Los modelos suelen poseer parámetros que muchas veces son determinantes en las características cualitativas del fenómeno que se estudia. El análisis de cómo una alteración de los valores de los parámetros puede cambiar el comportamiento cualitativo del sistema se conoce en la literatura como teoría de bifurcaciones. En la sección 1.7 se hace una introducción a este tema de fundamental importancia teórica y práctica.

## 1.2. Preliminares

Como se ha dicho antes, entenderemos que un sistema dinámico es simplemente una ecuación diferencial. Para definir formalmente una

ecuación diferencial, denotemos por  $x^{(k)}(t)$  la  $k$ -ésima derivada de  $x$  con respecto a  $t$ :

$$x^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k} x(t).$$

**Definición 1.** Una ecuación diferencial de orden  $k \in \mathbb{N}$  y de dimensión  $n \in \mathbb{N}$  es una relación de la forma

$$x^{(k)}(t) = F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(k-1)}(t)), \quad (1.1)$$

donde  $t \in \mathbb{R}$  es típicamente una variable temporal,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es la variable de estado en el instante  $t$  y  $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua definida sobre un conjunto abierto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{nk}$ . La Figura 1.1 describe esquemáticamente el sistema (1.1).

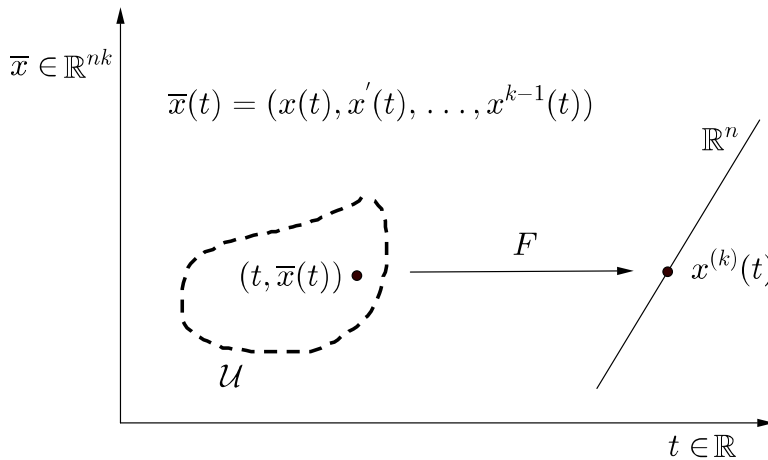


Figura 1.1 Esquema de una ecuación diferencial

Se dice que la ecuación diferencial (1.1) es de orden  $k$  porque la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación es  $k$ , y se dice

que es de dimensión  $n$  porque la variable de estado vive en  $\mathbb{R}^n$ . La ecuación (1.1) indica cómo se relacionan las diversas tasas de cambio de la variable de estado en cada instante  $t$ . Muchos fenómenos de naturaleza física, biológica, social, etc. se desarrollan en el tiempo con una dinámica específica. La ecuación (1.1) representa un modelo matemático de tal dinámica, siendo  $F$  la función que describe sus particularidades. Por ejemplo, si  $x(t)$  denota la temperatura de un determinado ambiente en el instante  $t$ , la tasa de cambio de dicha temperatura en ese instante, esto es,  $x'(t)$ , puede depender de  $t$  y de la temperatura en ese momento. La variable de estado  $x(t)$  podría también representar, por ejemplo, la cantidad de población en el instante  $t$ , en cuyo caso  $x'(t)$  mediría la tasa de crecimiento poblacional en dicho instante.

Si  $F$  solo depende de  $t$  y de  $x(t)$ , entonces la ecuación es de primer orden y (1.1) se reduce a la ecuación

$$\boxed{x'(t) = F(t, x(t))} \quad (1.2)$$

Gran parte de los fundamentos de la teoría de los sistemas dinámicos se basan en los diversos resultados que se pueden establecer para una ecuación del tipo (1.2). Esta es la ecuación que estudiaremos en este capítulo.

Si la ecuación (1.1) no involucra explícitamente a la variable temporal se dice que es autónoma; en caso contrario, se dice que es no autónoma. Por ejemplo, es muy razonable suponer que el cambio de temperatura de un ambiente dependa no solo de la temperatura, sino también del momento en que esta se observa. En este caso, el modelo estaría descrito por una ecuación no autónoma; por el contrario, la tasa de crecimiento poblacional depende en gran medida solamente de la cantidad de población en el momento que se mide y, por consiguiente, en este caso

el modelo sería autónomo. Si la función  $F$  es lineal con respecto a la variable de estado, se dice que la ecuación diferencial es lineal y, en caso contrario, se dice que es no lineal.

Por la complejidad de los fenómenos reales, la mayoría de los modelos son no lineales; sin embargo, veremos más adelante que el análisis de tales fenómenos implica aproximarse a ellos a través de un modelo lineal. Para simplificar la notación, normalmente suprimiremos el argumento temporal de la variable de estado y escribiremos (1.2) en la forma más concisa:

$$x' = F(t, x).$$

Las siguientes ecuaciones son ejemplos de sistemas dinámicos de primer orden y de dimensión 1.<sup>1</sup> Note que las ecuaciones (1.3) y (1.4) son lineales y que solo la ecuación (1.5) es autónoma.

### Ejemplo

**Ej. 1.** Cada uno de los ejemplos que se presentan a continuación son ecuaciones diferenciales del tipo (1.2). Se identifica la función  $F$ .

$$x' = x + t, \quad F(t, x) = x + t \quad (1.3)$$

$$x' = 2tx + 3, \quad F(t, x) = 2tx + 3 \quad (1.4)$$

$$x' = x(x - 1), \quad F(t, x) = x(x - 1). \quad (1.5)$$



**Definición 2. (Solución).** Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo abierto. Se dice que la función  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $k$  veces diferenciable, es una solución de la ecuación (1.1) si satisface la ecuación puntualmente; esto es, para todo  $t \in I$  se

<sup>1</sup>Generalmente, llamaremos «ecuaciones escalares» a las ecuaciones de dimensión 1.

cumplen las siguientes condiciones:

- a)  $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t)) \in \mathcal{U}$
- b)  $\varphi^{(k)}(t) = F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t))$ .

La condición realmente importante es la segunda, y la primera solo se establece para que la segunda tenga sentido. A la gráfica de la función  $\varphi$ , que vive en  $\mathbb{R}^{nk+1}$ , se le llama «trayectoria solución» o simplemente «trayectoria».

Por ejemplo, las funciones  $\varphi(t) = -t - 1$  y  $\psi(t) = e^t - t - 1$ ,  $t \in I$  son soluciones de (1.3), pues satisfacen la ecuación en el sentido descrito anteriormente. Más generalmente, para cualquier constante  $C \in \mathbb{R}$ , la función  $\xi(t) = Ce^t - t - 1$  también es una solución de (1.3), por lo que la ecuación tiene infinitas soluciones. Observe que si se toma  $C = 0$ , se obtiene  $\varphi$ , y si se toma  $C = 1$ , se obtiene  $\psi$ , de donde estas funciones son casos particulares de la función  $\xi$ . Más adelante se verá que cualquier solución de la ecuación (1.3) tiene la forma de la función  $\xi$ , por lo que a esta se le llama «solución general». En las secciones 1.3 y 1.4 se muestran las técnicas que permiten resolver ecuaciones del tipo (1.3)-(1.5).

### PROBLEMA DE VALOR INICIAL, PVI

Un «problema de valor inicial» es un problema en el que hay que obtener la solución  $\varphi$  de una ecuación diferencial que satisfaga la condición  $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ , donde  $x_0$  es un punto dado. Al punto  $(t_0, x_0)$  se le llama «condición inicial» o «punto de paso de la solución». Resolver un PVI consiste en encontrar la trayectoria específica que pase por dicho punto. En general, un PVI de primer orden tiene la siguiente forma:

$$PVI : \begin{cases} x' &= F(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

Por ejemplo, en relación con la ecuación (1.3) del Ej. 1, si el punto de paso es  $(t_0, x_0) = (0, 1)$ , entonces el PVI es

$$\begin{cases} x' &= x + t, \\ x(0) &= 1 \end{cases}$$

Puesto que todas las soluciones de la ecuación son de la forma  $\xi(t) = Ce^t - t - 1$ , para encontrar la solución del PVI hay que encontrar el valor específico de la constante  $C$ . Esto se hace reemplazando en la función  $t$  por 0:  $\xi(0) = C - 1 = 1$ , de donde  $C = 2$ ; luego, la función  $\gamma(t) = 2e^t - t - 1$  es una solución del PVI (en realidad, la única solución, como veremos más adelante). La Figura 1.2 muestra la solución del PVI y diversas trayectorias para diferentes puntos de paso.<sup>2</sup>

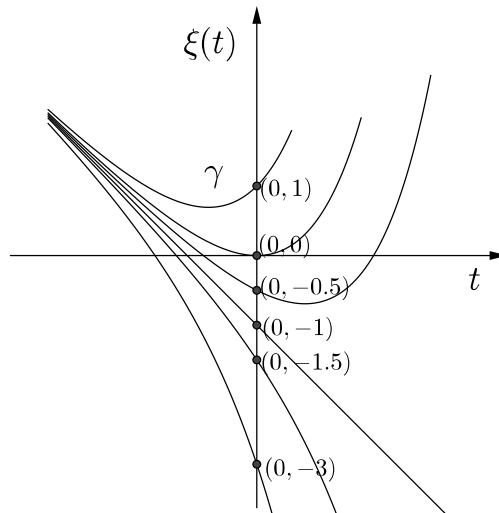


Figura 1.2 Diversas trayectorias con sus puntos de paso

<sup>2</sup>En todos los casos se ha considerado  $t_0 = 0$ . Sin embargo,  $t_0$  podría ser cualquier otro instante.

EXISTENCIA Y UNICIDAD

Ya hemos visto que una ecuación diferencial puede tener una o más soluciones, ¡incluso infinitas soluciones! Dada una ecuación diferencial, una pregunta pertinente es bajo qué condiciones puede asegurarse la existencia de una solución y, más aún, la existencia de una única solución. Esta cuestión, que es de fundamental importancia teórica y práctica, se aborda más adelante en el teorema 1, también conocido como teorema de Piccard. Este teorema constituye el primer paso en el estudio de la teoría de los sistemas dinámicos, y para presentarlo necesitamos introducir previamente el concepto de función lipschitziana.

**Definición 3.** Se dice que la función  $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es localmente lipschitziana con respecto a la variable  $x$  si para todo  $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$  existen  $L > 0$  y  $\epsilon > 0$ , tales que para todo  $t \in \mathcal{B}(t_0; \epsilon)$  y para todo  $x_1, x_2 \in \mathcal{B}(x_0; \epsilon)$  se cumple

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| < L\|x_1 - x_2\|. \quad (1.6)$$

La constante  $L$  se llama «constante de Lipschitz». Si esta constante es la misma para todo par de puntos  $(t_1, x_1), (t_2, x_2)$  en  $\mathcal{U}$  y la desigualdad (1.6) se conserva, se dice que la función es globalmente lipschitziana. Note que si  $F$  es una función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ , la ecuación (1.6) significa que las rectas secantes de la gráfica de  $F$  tienen pendientes acotadas.

**Ejemplos**

**Ej. 2.** La función  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(x) = |x|$  es globalmente lipschitziana con constante de Lipschitz  $L = 1$ . En efecto,

$$|F(x_2) - F(x_1)| = ||x_2| - |x_1|| \leq 1 \cdot |x_2 - x_1| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$



**Ej. 3.** La función  $F(x) = \sqrt{|x|}$  no es localmente lipschitziana, pues no se satisface la desigualdad (1.6) en una vecindad de  $x = 0$ . Para probar esto, procedemos por contradicción. Supongamos que la función es localmente lipschitziana. Entonces, existen  $L > 0$  y  $\epsilon > 0$ , tales que para  $x_1 \neq x_2$ , con  $|x_1| < \epsilon$  y  $|x_2| < \epsilon$ , se tiene

$$\frac{|F(x_2) - F(x_1)|}{|x_2 - x_1|} < L.$$

Esta desigualdad implica que  $|F'(x)| < L$  para todo  $x$ , tal que  $|x| < \epsilon$ ; es decir, la derivada de la función está acotada en una vecindad de  $x = 0$ . Pero esto no es cierto, pues  $\lim_{x \rightarrow 0} F'(x) = \infty$ .

**Ej. 4.** Consideremos la ecuación  $x' = F(t, x)$ ,  $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\mathcal{U}$  es un conjunto abierto. Si  $F$  es de clase  $C^1$ , entonces  $F$  es localmente lipschitziana con respecto a  $x$ . En efecto, por ser  $F$  de clase  $C^1$ , la derivada  $\partial F / \partial x$  es continua, de donde para cualquier punto específico  $(t_0, x_0)$  dentro de una cierta vecindad compacta de  $\mathcal{U}$  existe  $L$  tal que

$$|F(t, x_2) - F(t, x_1)| \leq \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) \right| dx \leq L|x_2 - x_1|.$$

◇◇◇

Si la función  $F$  que define la ecuación (1.2) es relativamente sencilla, entonces eventualmente podría obtenerse una solución por simple inspección. Al obtener una solución se estaría probando indirectamente que la ecuación tiene solución. Por ejemplo, consideremos la ecuación  $x'' = -x$ . Una función  $\varphi$  es solución de esta ecuación si es que su segunda derivada coincide con la propia función. Por nuestros conocimientos previos de cálculo, sabemos que una función que satisface tal propiedad es, por ejemplo, la función trigonométrica  $\varphi(t) = -\sin t$ . Así, se ha verificado que la ecuación diferencial tiene solución. Sin embargo, esta

forma de proceder no es la más adecuada, pues la mayoría de ecuaciones son bastante complejas y no es fácil encontrar una solución por simple inspección. Es necesario disponer de un resultado general que asegure la existencia de soluciones, sin tener que resolver la ecuación para saber que tal solución existe. El siguiente teorema, que es fundamental en la teoría de los sistemas dinámicos, proporciona condiciones suficientes que garantizan la existencia y unicidad de una solución para la ecuación (1.2).

**Teorema 1. (Existencia y unicidad)**

Sea  $\mathcal{U}$  un conjunto abierto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Si  $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua y localmente lipschitziana con respecto a la variable  $x$ , entonces:

a) Para cada  $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$  existe una función

$$\varphi : I_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

que es solución de la ecuación  $x' = F(t, x)$  con  $\varphi(t_0) = x_0$ .

b) Si  $\phi : I_\phi \rightarrow \mathbb{R}^n$  es otra solución de la ecuación  $x' = F(t, x)$  con  $\phi(t_0) = x_0$ , entonces

$$\phi(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in I_\varphi \cap I_\phi.$$

La afirmación (a) asegura que el PVI

$$PVI : \begin{cases} x' &= F(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad (1.7)$$

tiene solución en un cierto intervalo. La afirmación (b) básicamente dice que tal solución es única. Para enfatizar la condición inicial, la función  $\varphi$  suele escribirse incorporando el punto de paso

$$\boxed{\varphi(t; t_0, x_0); t \in I} \quad (1.8)$$

La prueba del teorema 1 es elegante y está basada en un argumento de *punto fijo*. Además de su elegancia, la prueba es constructiva y provee

un método que permite obtener la solución de una ecuación que pasa por un punto específico. Veamos.

*Demostración.* Enseguida probamos la afirmación **a**). Sea  $\delta > 0$ , tal que  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(t_0, \delta) \times \mathcal{B}(x_0, \delta) \subset \mathcal{U}$  y definamos

$$M_\delta = \sup_{(t,x) \in \mathcal{B}} |F(t,x)|.$$

Ya que  $F$  es lipschitziana con respecto a la variable  $x$ , para  $\delta$  suficientemente pequeño existe  $L_\delta > 0$ , tal que

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq L_\delta \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{B}.$$

Sea  $\epsilon > 0$ , tal que  $\epsilon < \min\{\delta, \delta/M_\delta, 1/L_\delta\}$ . Sea  $I_{t_0}$  el intervalo  $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$  y definamos el siguiente espacio de funciones (véase la Figura 1.3).

$$\mathcal{E} = \left\{ \varphi : I_{t_0} \rightarrow \mathbb{R}^n; \varphi \text{ continua, } \varphi(t_0) = x_0, \varphi(t) \in \mathcal{B}(x_0, \delta) \quad \forall t \in I_{t_0} \right\}$$

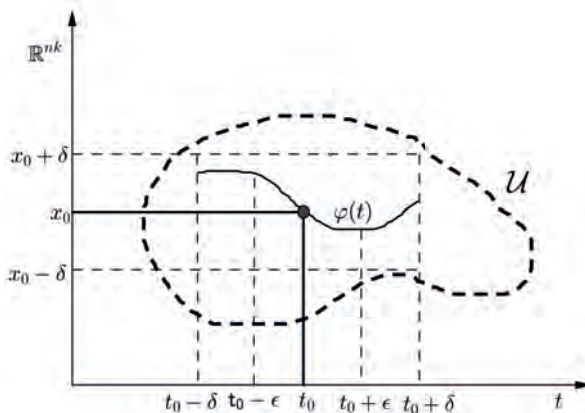


Figura 1.3 Teorema de existencia y unicidad

Como sabemos, dotando al espacio  $\mathcal{E}$  con la métrica

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in I_{t_0}} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|,$$

entonces el espacio métrico  $(\mathcal{E}, d)$  es completo.

Definamos ahora el operador  $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  por

$$T(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \varphi(s)) ds. \quad (1.9)$$

Note que  $T(\varphi)(t_0) = x_0$  y que  $T(\varphi)$  es continua. Además,

$$\|T(\varphi)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t F(s, \varphi(s)) ds \right\| \leq M_\delta |t - t_0| < M_\delta \epsilon < \delta.$$

Veamos que  $T$  es una contracción. Para esto, tomemos  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , dos elementos cualesquiera de  $\mathcal{E}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \|T(\varphi_1)(t) - T(\varphi_2)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t F(s, \varphi_1(s)) - F(s, \varphi_2(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t L_\delta \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\| ds \\ &\leq L_\delta |t - t_0| d(\varphi_1, \varphi_2) \\ &\leq L_\delta \epsilon d(\varphi_1, \varphi_2) \\ &< d(\varphi_1, \varphi_2). \end{aligned}$$

Luego,

$$d(T(\varphi_1), T(\varphi_2)) = \sup_{t \in I_{t_0}} \|T(\varphi_1)(t) - T(\varphi_2)(t)\| \leq d(\varphi_1, \varphi_2).$$

Puesto que  $T$  es una contracción, por el teorema del punto fijo existe una única función  $\bar{\varphi} \in \mathcal{E}$ , tal que  $T(\bar{\varphi}) = \bar{\varphi}$ . Más específicamente, existe una única función  $\bar{\varphi} : I_{t_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $\bar{\varphi}(t_0) = x_0$  y  $\bar{\varphi}(t) \in \mathcal{B}(x_0, \delta)$  para todo  $t \in I_{t_0}$ , tal que  $T(\bar{\varphi}) = \bar{\varphi}$ ; esto es,

$$\bar{\varphi}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \bar{\varphi}(s)) ds, \quad t \in I_{t_0}.$$

Ahora bien, por el teorema fundamental del cálculo, esta igualdad implica que  $\bar{\varphi}'(t) = F(t, \bar{\varphi}(t))$ , lo que prueba que el PVI (1.7) tiene solución.

Enseguida probamos la afirmación **b)**. Sean  $\varphi : I_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\phi : I_\phi \rightarrow \mathbb{R}^n$  dos soluciones de la ecuación (1.2), tales que  $t_0 \in I_\varphi \cap I_\phi$  con  $\varphi(t_0) = \phi(t_0) = x_0$ . Vamos a probar que  $\varphi$  y  $\phi$  coinciden en toda la intersección de sus dominios. Definamos el conjunto

$$I = \{t \in I_\varphi \cap I_\phi, \varphi(t) = \phi(t)\}.$$

Note que  $I$  es un intervalo no vacío y cerrado. Es no vacío porque  $t_0$  pertenece a  $I$  y es cerrado porque es la pre imagen del cero de la diferencia entre  $\phi$  y  $\varphi$ , que son funciones continuas. Para concluir que  $I = I_\varphi \cap I_\phi$ , probaremos que  $I$  es también abierto, pues siendo  $I$  conexo, los únicos subconjuntos de  $I$  que son abiertos y cerrados a la vez son el vacío y el propio intervalo  $I$ . Para esto, sea  $s_0 \in I$ , tal que  $y_0 = \varphi(s_0) = \phi(s_0)$ . Siguiendo el mismo argumento de punto fijo para  $(s_0, y_0)$ , existe  $\epsilon > 0$  (caracterizado como antes), tal que

$$\varphi(t) = \phi(t), \forall t \in ]s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon[,$$

pues el punto fijo es único. Esto implica que  $I_{s_0} \subset I$ , de donde  $I$  es abierto.  $\square$

Observe que este resultado impide que dos soluciones diferentes se puedan intersectar. De ser así, se estaría violando la unicidad de soluciones, que es garantizada por el teorema (¿por qué?).

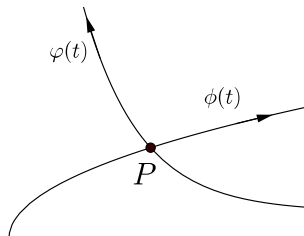


Figura 1.4 Las trayectorias no se intersectan

Los ejemplos que se dan a continuación muestran cómo se puede aplicar el teorema 1 para obtener la solución de una ecuación diferencial a partir de la condición inicial. El procedimiento consiste en partir de una solución inicial  $\varphi_0$  a la que se le aplica el operador  $T$  definido en (1.9). Luego, por el teorema del punto fijo, la solución  $\varphi(t)$  viene dada por aproximaciones sucesivas:

$$\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(\varphi_0)(t).$$

Este límite da la solución de la ecuación diferencial aun cuando no necesariamente bajo una fórmula cerrada. Veamos los siguientes ejemplos.

### Ejemplos

**Ej. 5.** Consideremos la ecuación del ejemplo 1:

$$x' = x + t.$$

Para simplificar, tomemos el punto inicial  $(t_0, x_0) = (0, 0)$ . La función  $F(t, x) = x + t$  es localmente lipschitziana por ser de clase  $C^1$ . Para obtener las aproximaciones sucesivas, comenzamos por definir el operador  $T$ , de acuerdo con (1.9):

$$T(\varphi)(t) = 0 + \int_0^t F(s, \varphi(s)) ds = \int_0^t (\varphi(s) + s) ds.$$

Luego, tomando  $\varphi_0 \equiv 0$  tenemos

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= T(\varphi_0)(t) = \int_0^t (\varphi_0(s) + s) ds = \int_0^t s ds = (1/2!)t^2 \\ \varphi_2(t) &= T^2(\varphi_0)(t) = T(\varphi_1)(t) = \int_0^t (\varphi_1(s) + s) ds = \int_0^t ((1/2!)s^2 + s) \\ &= (1/2!)t^2 + (1/3!)t^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_3(t) = T^3(\varphi_0)(t) = T(\varphi_2)(t) &= \int_0^t (\varphi_2(s) + s) ds \\
 &= \int_0^t ((1/3!)s^3 + (1/2!)s^2 + s) ds \\
 &= \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4.
 \end{aligned}$$

Por inducción se puede verificar que

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + \dots + \frac{1}{(n+1)!}t^{n+1},$$

de donde, tomando límites cuando  $n \rightarrow \infty$ , se obtiene la solución

$$\varphi(t; 0, 0) = e^t - t - 1.$$

Recordemos que la solución general de la ecuación dada es  $\xi(t) = Ce^t - t - 1$ . Tomando  $x(0) = 0$  como condición inicial, obtenemos  $C = 1$ , de donde  $\xi(t) = e^t - t - 1$ . Esta solución coincide con la que hemos obtenido por el procedimiento constructivo.

**Ej. 6.** Consideremos ahora la ecuación

$$x' = 2tx.$$

con  $(t_0, x_0) = (0, 1)$ . La función  $F(t, x) = 2tx$  es localmente lipschitziana por ser de clase  $C^1$ . De nuevo, comenzamos definiendo el operador  $T$  dado en (1.9).

$$T(\varphi)(t) = 1 + \int_0^t F(s, \varphi(s)) ds = 1 + \int_0^t 2s\varphi(s) ds.$$

Luego, tomando  $\varphi_0 \equiv 1$  tenemos

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(t) &= T(\varphi_0)(t) = 1 + \int_0^t 2s ds = 1 + t^2 \\
 \varphi_2(t) &= T^2(\varphi_0)(t) = T(\varphi_1)(t) = 1 + \int_0^t 2s(1 + s^2) ds = 1 + \frac{1}{1!}t^2 + \frac{1}{2!}t^4 \\
 \varphi_3(t) &= T^3(\varphi_0)(t) = T(\varphi_2)(t) = 1 + \int_0^t 2s \left( 1 + \frac{1}{1!}s^2 + \frac{1}{2!}s^4 \right) ds \\
 &= 1 + \frac{1}{1!}t^2 + \frac{1}{2!}t^4 + \frac{1}{3!}t^6.
 \end{aligned}$$

Por inducción se puede verificar que

$$\varphi_n(t) = 1 + \frac{1}{1!}t^2 + \frac{1}{2!}t^4 + \frac{1}{3!}t^6 + \cdots + \frac{1}{n!}t^{2n},$$

de donde, tomando límites cuando  $n \rightarrow \infty$ , se obtiene la solución

$$\varphi(t; 0, 1) = e^{t^2}.$$



### LISTA DE EJERCICIOS

**1.2.1.** Sea  $x$  una función diferenciable de  $t$ . La derivada  $x'(t)$  es la tasa de cambio instantánea de  $x$  con respecto a  $t$ . Es decir, es la velocidad o rapidez con la que cambia la variable  $x$  precisamente en el instante  $t$ . Uno podría preguntarse por qué sería de interés conocer esta tasa de cambio instantánea en lugar de saber, más bien, cuál es la tasa de cambio en un lapso de tiempo mayor, digamos una hora, un día, etc. Aquí hay un ejemplo que podría ayudar. Si usted está interesado en coger la tarifa más económica de un vuelo de avión para ir de un lugar a otro; entonces, si está dentro de sus posibilidades, debería aceptar la mejor oferta que se le presente en un instante determinado, pues dependiendo del día, la hora y los destinos, los costos cambian casi instantáneamente (podría haber miles de personas que están interesadas en el mismo vuelo). ¿Podría dar otro ejemplo?

**1.2.2.** Se denota la tasa porcentual de una variable  $x$  por  $\gamma_x(t)$  y se define por

$$\gamma_x(t) \triangleq x'(t)/x(t).$$

Este cociente mide en cada instante la velocidad de cambio de la variable  $x$  como proporción del valor de la variable en dicho instante. En la



literatura económica,  $\gamma_x$  muchas veces es referida simplemente como tasa de cambio, lo que, con apego a la justeza, no es correcto, pues la tasa de cambio es  $x'$ . Observe que  $\gamma_x$  no tiene las unidades de  $x$ ; es un cambio instantáneo proporcional o porcentual por unidad de tiempo.

- a) Si  $\gamma_x(t) = 0.4$ , ¿cuál es la dinámica que describe a la variable  $x$ ?
- b) Si  $\gamma_x(t) = 0.4$  y  $\gamma_y(t) = 0.2$  y la unidad de tiempo es la misma para ambas variables, ¿se puede decir que  $x$  cambia más rápido que  $y$ ? ¿Se puede decir que  $x(t) = 2y(t)$ ?
- c) Si  $\gamma_x(t) = 0.4$  y  $\gamma_y(t) = 0.2$  y la unidad de tiempo es la misma para ambas variables, ¿se puede decir que  $x$  cambia respecto de sí misma más rápido que  $y$  respecto de sí misma?
- d) Si  $x'(t) = 0.4$  e  $y'(t) = 0.2$  y la unidad de tiempo es la misma para ambas variables, ¿se puede decir que  $x$  cambia más rápido que  $y$ ?

**1.2.3.** Con respecto a las ecuaciones  $x' = 3x$ ,  $x' = 3t$  y  $x' = 3$ , discuta la diferencia entre ellas. Por ejemplo, ¿qué expresa cada una de ellas?, ¿cuál de todas expresa un cambio instantáneo mayor que la variable  $x$ ? Por simple inspección, obtenga las soluciones y verifique su intuición con respecto a las respuestas que dio.

**1.2.4.** Hemos visto que una solución de la ecuación diferencial  $x'' = -x$  es la función  $\varphi(t) = -\sin t$ . Proponga una solución más que no sea la solución trivial.

**1.2.5.** Con respecto a la ecuación diferencial

$$x' = \frac{4}{e^x + 12x^2},$$

- a) Identifique la función  $F$  y verifique que se cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad.
- b) Pruebe que la función  $x = x(t)$  que satisface la ecuación algebraica

$e^x = -4x^3 + 4t$  es una solución de la ecuación diferencial.

**1.2.6.** Sean  $a(t)$  y  $b(t)$  funciones continuas. ¿Por qué puede asegurarse que el problema  $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ ,  $x(t_0) = x_0$  tiene solución única?

**1.2.7.** (Sydsaeter) La función  $\varphi = \varphi(t)$  satisface  $\varphi(0) = 0$  y la ecuación diferencial  $x' = (1 + x^2)t$ , para todo  $t$ . Pruebe, sin resolver la ecuación, que  $t = 0$  es un mínimo global de la función  $x = x(t)$  y que  $x$  es convexa.

**1.2.8.** Resuelva la ecuación  $x' = 2t + 5$  sabiendo que  $x(0) = 3$ .

**1.2.9.** Pruebe que si  $F$  es localmente lipschitziana, entonces es continua.

**1.2.10.** Aplique el método de aproximaciones sucesivas para obtener la solución del problema  $x' = 2x$  con  $x(0) = 5$ .

Sugerencia. Recuerde que  $\sum_{k=0}^{\infty} t^k/k! = e^t$ .

**1.2.11.** Con respecto a la ecuación  $x' = ax$ , aplique el método de aproximaciones sucesivas para obtener la trayectoria que en el instante  $t = 0$  pasa por el punto  $x_0$ .

## 1.3. Ecuación diferencial lineal de primer orden

Un caso importante de la ecuación (1.2) es aquel en el que la función  $F$  tiene la forma específica  $F(t, x) = a(t)x + b(t)$ , donde  $a(t)$  y  $b(t)$  son funciones continuas y la variable de estado  $x$  es escalar. En este caso se dice que la ecuación es lineal. Así pues, una ecuación diferencial lineal de primer orden es una expresión de la siguiente forma:

$$\boxed{x' = a(t)x + b(t)} \quad (1.10)$$

La solución general de la ecuación (1.10) está dada por

$$\boxed{\varphi(t) = e^{\int a(t)dt} \left[ C + \int e^{-\int a(t)dt} b(t)dt \right]} \quad (1.11)$$

En efecto, derivando  $\varphi$  se obtiene  $\varphi' = a(t)\varphi + b(t)$ ; es decir, es una solución de la ecuación. Recíprocamente, cualquier solución de (1.10) tiene la forma dada en (1.11). Para ver esto, sea  $\phi = \phi(t)$  una solución de la ecuación y sea  $A(t) = \int a(t)dt$ . Multiplicando ambos términos de (1.10) por  $e^{-A(t)}$ , tenemos

$$\begin{aligned} e^{-A(t)}\phi'(t) &= e^{-A(t)}a(t)\phi(t) + e^{-A(t)}b(t) \\ e^{-A(t)}\phi'(t) - e^{-A(t)}a(t)\phi(t) &= e^{-A(t)}b(t) \\ \frac{d}{dt} (e^{-A(t)}\phi(t)) &= e^{-A(t)}b(t) \\ e^{-A(t)}\phi(t) &= \int e^{-A(t)}b(t)dt + C. \end{aligned} \quad (1.12)$$

De aquí se obtiene que  $\phi$  tiene la forma (1.11).<sup>3</sup>

Como sabemos por el teorema (1), cuando existe una condición inicial, la solución de la ecuación (1.10) es única. En este caso, la constante  $C$  de (1.11) adquiere un valor específico.

La condición inicial  $x(t_0) = x_0$  se puede incorporar directamente en el proceso de solución. En efecto, partiendo de la ecuación (1.12):

$$\frac{d}{dt} (e^{-A(t)}\varphi(t)) = e^{-A(t)}b(t).$$

se obtiene

$$e^{-A(\tau)}\varphi(\tau)\Big|_{\tau=t_0}^{\tau=t} = \int_{t_0}^t e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau,$$

que es equivalente a

$$\varphi(t) = e^{A(t)-A(t_0)}\varphi(t_0) + e^{A(t)} \int_{t_0}^t e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau.$$

<sup>3</sup>El factor  $e^{-A(t)}$  se conoce como factor integrante.

De aquí, la solución específica de (1.10) está dada por

$$\varphi(t; t_0, x_0) = e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{\tau}^t a(s) ds} b(\tau) d\tau \quad (1.13)$$

### Ejemplo

**Ej. 7.** Consideremos el siguiente PVI:

$$\begin{cases} x' &= (t+1)x + 2e^{\frac{1}{2}t^2} \\ x(0) &= x_0. \end{cases}$$

Para aplicar (1.11), primero identificamos los términos  $a(t)$  y  $b(t)$ :

$$a(t) = t + 1, \quad b(t) = 2e^{\frac{1}{2}t^2}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= e^{\int (t+1) dt} \left[ C + \int e^{-\int (t+1) dt} 2e^{\frac{1}{2}t^2} dt \right] \\ &= e^{\frac{1}{2}t^2+t} \left[ C + 2 \int e^{-\frac{1}{2}t^2-t} e^{\frac{1}{2}t^2} dt \right] \\ &= e^{\frac{1}{2}t^2+t} \left[ C + 2 \int e^{-t} dt \right] \\ &= e^{\frac{1}{2}t^2+t} [C - 2e^{-t}] \\ &= Ce^{\frac{1}{2}t^2+t} - 2e^{\frac{1}{2}t^2}. \end{aligned}$$

Para encontrar  $C$ , evaluamos  $\varphi$  en  $t = 0$ .

$$\varphi(0) = x_0 = C - 2 \quad \Rightarrow \quad C = x_0 + 2.$$

Por consiguiente, la solución específica del PVI es

$$\varphi(t; 0, x_0) = (x_0 + 2)e^{\frac{1}{2}t^2+t} - 2e^{\frac{1}{2}t^2}.$$

También podría haberse obtenido la solución aplicando (1.13) directamente.

$$\begin{aligned}
 \varphi(t; 0, x_0) &= e^{\int_0^t (\tau+1) dt} x_0 + \int_0^t e^{\int_\tau^t (s+1) ds} 2e^{\frac{1}{2}\tau^2} d\tau \\
 &= e^{\frac{1}{2}t^2 + \tau|_0^t} x_0 + 2 \int_0^t e^{\frac{1}{2}s^2 + s|_\tau^t} e^{\frac{1}{2}\tau^2} d\tau \\
 &= e^{\frac{1}{2}t^2 + t} x_0 + 2 \int_0^t e^{\frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{2}\tau^2 - \tau} e^{\frac{1}{2}\tau^2} d\tau \\
 &= e^{\frac{1}{2}t^2 + t} x_0 + 2e^{\frac{1}{2}t^2 + t} \int_0^t e^{-\tau} d\tau \\
 &= e^{\frac{1}{2}t^2 + t} x_0 + 2e^{\frac{1}{2}t^2 + t} (-e^{-\tau}|_0^t) \\
 &= e^{\frac{1}{2}t^2 + t} x_0 - 2e^{\frac{1}{2}t^2 + t} (e^{-t} - 1) \\
 &= e^{\frac{1}{2}t^2 + t} x_0 - 2e^{\frac{1}{2}t^2} + 2e^{\frac{1}{2}t^2 + t} \\
 &= (x_0 + 2)e^{\frac{1}{2}t^2 + t} - 2e^{\frac{1}{2}t^2}.
 \end{aligned}$$

◇◇◇

Un caso muy frecuente de la ecuación (1.10) se presenta cuando  $a(t)$  y  $b(t)$  son constantes, digamos  $a(t) = a$  y  $b(t) = b$  para todo  $t$ . En este caso, la ecuación diferencial es

$$\boxed{x'(t) = ax(t) + b} \tag{1.14}$$

Usualmente, esta ecuación es referida como «ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes», y su solución general es

$$\boxed{\varphi(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a}} \tag{1.15}$$

Dada la condición inicial  $x(t_0) = x_0$ , la solución específica es

$$\boxed{\varphi(t; t_0, x_0) = \left(x_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a}} \tag{1.16}$$

Observe que cuando  $t = t_0$ ,  $\varphi(t; t_0, x_0) = x_0$ . Si  $b = 0$ , la ecuación diferencial (1.14) se reduce a

$$\boxed{x'(t) = ax(t)} \quad (1.17)$$

En este caso, la solución general es

$$\boxed{\varphi(t) = Ce^{at}} \quad (1.18)$$

Si la condición inicial es  $x(t_0) = x_0$ , entonces  $C = e^{-at_0}x_0$ , de donde la solución específica es

$$\boxed{\varphi(t; t_0, x_0) = x_0e^{a(t-t_0)}} \quad (1.19)$$

Observe que (1.19) habría podido obtenerse directamente de (1.16) haciendo  $b = 0$ .

En los siguientes ejemplos se muestran algunos modelos sencillos, pero interesantes, donde aparecen naturalmente ecuaciones diferenciales lineales y no lineales. Estos modelos son ampliamente conocidos en la literatura y han tenido y siguen teniendo mucho interés académico y práctico. Por ejemplo, la ecuación fundamental del modelo de Domar que se presenta a continuación es una ecuación del tipo (1.17). Resulta sorprendente que un modelo tan sencillo haya sido muy utilizado en la práctica durante muchos años, por las instituciones financieras internacionales, para impulsar el crecimiento de los países pobres a través de la inversión (Easterly, 2003).

### **Ejemplo**

**Ej. 8. (Modelo de Domar).** En 1946 aparece en *Econometría* el artículo «Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment» de Evsey Domar. En este trabajo, Domar introduce el concepto de capacidad

productiva o potencial productivo, que es todo lo que una economía es capaz de producir usando como factores de producción no solo máquinas y tecnología, sino considerando también factores como la distribución del ingreso, las preferencias del consumidor, los precios, etc. Domar propone que la inversión tiene efectos directos tanto en la producción como en la capacidad productiva. Además, define una situación de equilibrio como aquella en la cual la capacidad productiva es igual a la producción. Uno de los objetivos de su artículo es obtener la trayectoria de inversión que conduce a esta situación de equilibrio. Como veremos, el modelo resulta en una ecuación diferencial lineal del tipo (1.17).

Sean  $Y(t)$  e  $I(t)$  la producción y la inversión en el instante  $t$ , respectivamente. De acuerdo con las hipótesis del modelo, el efecto de la inversión sobre la producción viene dada por la ecuación

$$Y'(t) = \frac{1}{s} I'(t), \quad (1.20)$$

donde  $s$  es un parámetro exógeno que denota la propensión marginal al ahorro. La ecuación (1.20) indica que un cambio en la inversión induce un cambio proporcional en la producción. La proporción de este cambio está medida por el factor  $(1/s)$ .<sup>4</sup>

Para explicar la manera cómo se relacionan la inversión y la capacidad productiva, necesitamos introducir en el modelo dos variables más. Sean  $\kappa(t)$  y  $K(t)$  la capacidad productiva y el capital en el instante  $t$ , respectivamente. Domar asume que la relación entre estas dos variables es constante a lo largo del tiempo:

$$\frac{\kappa(t)}{K(t)} = \rho.$$

Esta ecuación indica que, con un capital  $K(t)$ , la economía es capaz de producir potencialmente una cantidad  $\kappa(t)$ , que es proporcional a dicho

---

<sup>4</sup>Al término  $(1/s)$  se le conoce en la literatura como «multiplicador keynesiano».

capital,  $\kappa(t) = \rho K(t)$ . Derivando esta ecuación, obtenemos la relación

$$\kappa'(t) = \rho K'(t) = \rho I(t). \quad (1.21)$$

La ecuación (1.21) mide el efecto de la inversión sobre la capacidad productiva de la economía.

La condición de equilibrio establecida por Domar exige que la producción sea igual a la capacidad productiva en todo instante:

$$Y'(t) = \kappa'(t); \quad Y_0 = \kappa_0.$$

De aquí, y considerando (1.20) y (1.21), se obtiene la ecuación fundamental del modelo

$$I'(t) = s\rho I(t); \quad I(0) = I_0.$$

Esta ecuación es del tipo (1.17), donde la variable de estado es la inversión  $I$ . Por lo tanto, de acuerdo con (1.18), la trayectoria de inversión que genera el equilibrio de Domar es exponencial e igual a

$$I(t) = I_0 e^{s\rho t}.$$

Reemplazando  $I(t)$  en (1.20), se obtiene la ecuación  $Y'(t) = I_0 \rho e^{s\rho t}$ , cuya solución para la condición inicial  $Y(0) = Y_0$  es

$$Y(t) = (I_0/s) e^{s\rho t} + Y_0 - (I_0/s).$$

Similarmente, reemplazando  $I(t)$  en (1.21), se obtiene la ecuación  $K'(t) = I_0 e^{s\rho t}$ , cuya solución para la condición inicial  $K(0) = K_0$  es

$$K(t) = (I_0/s\rho) e^{s\rho t} + K_0 - (I_0/s\rho).$$





Para una empresa puede ser muy importante saber cuánto tiempo le puede llevar a un trabajador dominar una herramienta de trabajo. Un modelo que permite entender el proceso de aprendizaje se da en el siguiente ejemplo.

### Ejemplo

**Ej. 9. (Curva de aprendizaje).** La variable de estado de este modelo es la cantidad aprendida por un trabajador al manejar una herramienta de trabajo. Denotemos esta variable por  $A(t)$ , que indica la cantidad aprendida desde un instante inicial  $t_0$  hasta el instante  $t$ . Esta cantidad tiene un tope y ya que a medida que transcurre el tiempo la experiencia del individuo es mayor, entonces cada vez es menos lo que tiene que aprender. Por lo tanto, la tasa de cambio de la variable  $A(t)$  va disminuyendo con el tiempo. La dinámica de esta variable puede describirse, entonces, de la siguiente manera:

$$A'(t) = a(K - A(t)), \quad A(t_0) = A_0 < K. \quad (1.22)$$

La ecuación (1.22) indica que la tasa de cambio de la variable de estado es proporcional a la diferencia entre todo lo que un individuo puede aprender,  $K$ , y lo que efectivamente ha aprendido hasta el instante  $t$ . Aquí  $A(t_0)$  representa la experiencia previa que un individuo tiene al momento de comenzar su proceso de aprendizaje. Las constantes  $K$  y  $a > 0$  junto con la condición inicial,  $A_0$ , dependen de cada individuo y en general son diferentes de uno a otro. Así pues, constituyen los parámetros del modelo.<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup>Estos parámetros son exógenos en la medida que sus valores son dados y no dependen de la dinámica del sistema.

Reordenando la ecuación (1.22), vemos que el modelo corresponde a una ecuación del tipo (1.14) y que su solución es

$$A(t) = (A_0 - K)e^{-a(t-t_0)} + K; \quad t \geq t_0.$$

La Figura 1.5 muestra la curva de aprendizaje  $A(t)$ .

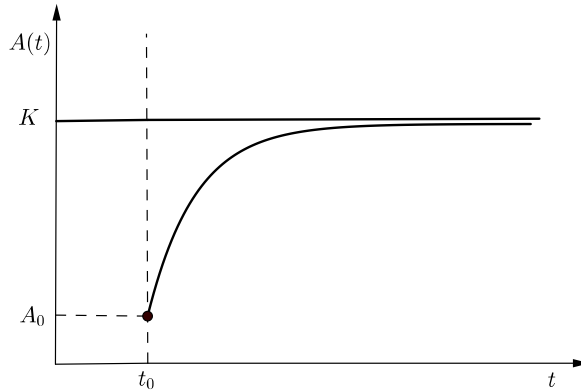


Figura 1.5 Curva de aprendizaje

Observe que  $A(t)$  es sostenidamente creciente, pero no sobrepasa la cantidad  $K$ . Como  $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = K$ , la recta horizontal a la altura  $K$  es una asíntota de la curva de aprendizaje. Al principio, el individuo aprende mucho, porque es mucho lo que todavía lo separa de su nivel  $K$ , que es lo máximo que el individuo puede aprender. Esta acumulación inicial de conocimientos se refleja en la alta inclinación de la curva al comenzar el proceso. Su tasa de cambio, sin embargo, va disminuyendo a medida que transcurre el tiempo, porque con el tiempo el individuo va acumulando más conocimientos y es menos lo que lo separa de su nivel máximo. La curva de aprendizaje es monótona creciente con tasas de crecimiento decrecientes; es decir, la primera derivada de  $A(t)$  es positiva,

y la segunda derivada es negativa.<sup>6</sup>



### Ejemplo

**Ej. 10. (Crecimiento poblacional. Modelo de Malthus).** En 1798 aparece el ensayo «An Essay on the Principle of Population» de Robert Malthus (1766-1834). En este ensayo, que causó mucha controversia cuando fue publicado, Malthus propone un modelo de crecimiento poblacional y de los recursos que pretende explicar la causa de la pobreza y hambruna en aquel tiempo. Malthus sostenía que mientras los recursos crecen de manera aritmética, la población crece exponencialmente. Veamos.

Sea  $P(t)$  la variable de estado que denota la cantidad de población en el instante  $t$ . Según Malthus, la dinámica poblacional está dada por la ecuación diferencial

$$P' = rP, P(t_0) = P_0. \quad (1.23)$$

De acuerdo con (1.19), la solución de (1.23) es una trayectoria exponencial.

$$P(t) = P_0 e^{r(t-t_0)}, t \geq t_0.$$

Ahora sea  $R(t)$  la variable de estado que denota la cantidad de recursos en el instante  $t$ . Según Malthus, estos tienen la siguiente dinámica:

$$R' = a, R(t_0) = R_0. \quad (1.24)$$

La solución de (1.24) es

$$R(t) = at + (R_0 - at_0), t \geq t_0.$$

---

<sup>6</sup>Cuando la segunda derivada de una función es negativa, es decir, es cóncava, en economía se suele decir que la función tiene «tasas marginales decrecientes».

Bajo el modelo descrito por las ecuaciones (1.23) y (1.24), Malthus anticipó una explosión demográfica sin recursos suficientes para cubrir la necesidad de alimentación de la población.

La Figura 1.6 muestra el comportamiento relativo del crecimiento poblacional y de los recursos. La curva de los recursos es una línea recta con pendiente  $a$ , y la curva de la población es exponencial con tasa de crecimiento porcentual  $r$ .<sup>7</sup>

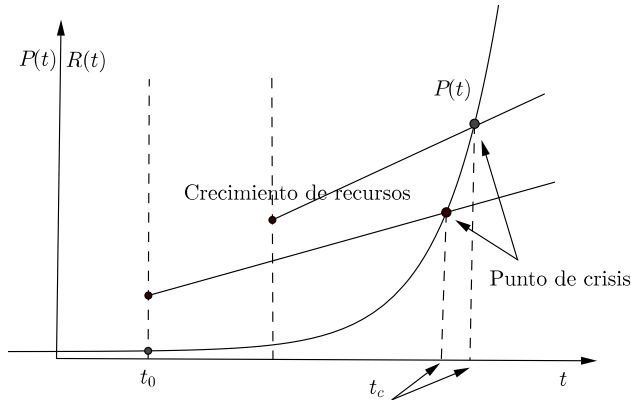


Figura 1.6 Catástrofe malthusiana

El punto donde las curvas  $P(t)$  y  $R(t)$  se intersecan se conoce en la literatura como punto de crisis, y el instante  $t_c$  cuando ocurre esta intersección se conoce, con un poco de dramatismo, como el momento de la catástrofe malthusiana; esto es, el momento a partir del cual los recursos comienzan a ser insuficientes para sostener a la población. La Figura 1.6 muestra también que si por alguna razón, como una mejora

<sup>7</sup>En este caso, como la variable  $P$  denota población, a la tasa porcentual  $\gamma_P = P'/P$  se le llama «tasa per cápita». Por lo tanto, según el modelo de Malthus, la tasa per cápita del crecimiento poblacional es constante e igual a  $r$ .

tecnológica, por ejemplo, los recursos crecieran a una tasa mayor (mayor pendiente de la curva de recursos) y la población siguiera creciendo geométricamente, entonces solo se aplazaría el momento de la catástrofe malthusiana.



Más adelante se presenta el modelo logístico, que es un modelo de crecimiento poblacional que supera algunas limitaciones explicativas del modelo de Malthus. A continuación presentamos un modelo económico simple, donde también aparece naturalmente una ecuación diferencial.

### **Ejemplo**

**Ej. 11. (Formación de precios. Modelo de Walras).** El modelo de León Walras (1834-1910) para la formación del precio de un determinado bien, establecido en 1874, propone que después del lanzamiento de un precio arbitrario por parte de un «martillero», que funge de intermediario entre demandantes y oferentes, el precio se va ajustando según el exceso de la demanda sobre la oferta. A este modelo se le conoce como el tanteo (o *tâtonnement*, en francés). El procedimiento es más o menos como sigue. Si la demanda iguala a la oferta, se cierra el contrato de compra y venta; en caso contrario, el martillero lanza un nuevo precio, y nuevamente el precio se ajusta a este lanzamiento de acuerdo con la oferta y la demanda. Walras presupone que de esta forma el precio alcanzará un nivel de «equilibrio». Puesto matemáticamente, traduciríamos esta evolución del precio de la siguiente manera. Sea  $p = p(t)$  la variable de estado que expresa el precio del bien en el instante  $t$ . La tasa de cambio instantánea de  $p$  es proporcional al exceso de la demanda sobre la oferta, de manera que, si la demanda es mayor que la oferta, el precio del bien sube, y

refleja una tasa de cambio positiva; por el contrario, si la demanda está por debajo de la oferta, el precio, más bien, baja, y refleja una tasa de cambio negativa. Para ser más específicos, por ejemplo, sea  $D(p) = a - bp$  la función de demanda; y  $S(p) = c + dp$ , la función de oferta, con  $a > c$ . Las constantes  $a, b, c$  y  $d$  son parámetros del modelo y se toman como constantes positivas. Bajo las consideraciones anotadas anteriormente, queremos saber qué sucede con el precio en el largo plazo.

De acuerdo con las hipótesis planteadas, la dinámica del precio está dada por la ecuación diferencial

$$p' = k[D(p) - S(p)], \quad k > 0.$$

Reemplazando las funciones de demanda y oferta, se obtiene la ecuación

$$p' = k(-b - d)p + k(a - c),$$

que es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes y que constituye el modelo de Walras para la evolución dinámica del precio. Aplicando (1.15), la solución general de la ecuación es

$$p(t) = Ce^{k(-b-d)t} + \frac{a - c}{b + d}.$$

Para la condición inicial  $p(t_0) = p_0$ , la trayectoria del precio es la siguiente:

$$p(t) = \left( p_0 - \frac{a - c}{b + d} \right) e^{-k(b+d)(t-t_0)} + \frac{a - c}{b + d}.$$

En particular, cuando  $p_0 = (a - c)/(b + d)$ , se obtiene la solución constante

$$p(t) = p^* = (a - c)/(b + d).$$

Esta solución se llama «solución de equilibrio», y es la misma que se obtiene igualando la demanda con la oferta,  $D(p) = S(p)$ . Como

$k(-b-d) < 0$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = (a-c)/(b+d)$ . Esta convergencia es independiente del precio inicial, lo que quiere decir que cualquier trayectoria solución siempre se aproximará a la solución de equilibrio  $p^*$ . Por lo tanto, como anticipaba Walras,  $p(t)$  en el largo plazo se acerca al nivel de equilibrio. Se dirá luego que el modelo o que el equilibrio es asintóticamente estable.

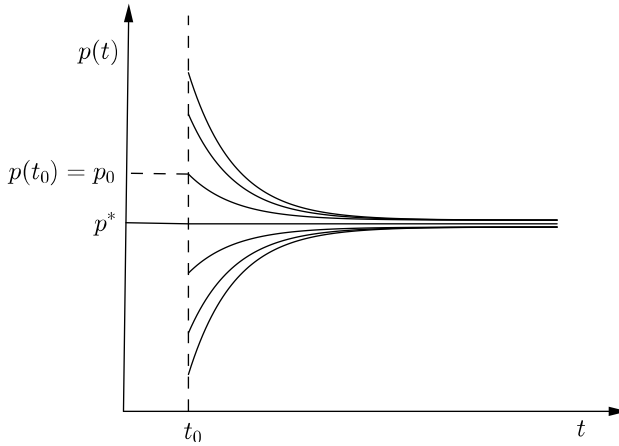


Figura 1.7  $p^*$ : precio de equilibrio estable



### LISTA DE EJERCICIOS

**1.3.1.** Encuentre la solución de cada uno de los siguientes PVI:

- a)  $x' = -2x, \quad x(0) = 2$
- b)  $x' = x + 10, \quad x(0) = 1$
- c)  $x' = x + t, \quad x(0) = -2$
- d)  $x' = -2x + t^2, \quad x(0) = 1$
- e)  $x' = 3tx + 4t, \quad x(0) = 2$

f)  $x' + 4x = f(t)$ ;  $x(0) = x_0$ , donde

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 3 \\ t - 3, & t \geq 3. \end{cases}$$

**1.3.2.** Con respecto al modelo de Domar, sean

a)  $r$ , la tasa real del crecimiento de la inversión

b)  $\rho_s$ , la tasa de crecimiento estipulada de la inversión.

Se define el coeficiente de uso de la capacidad productiva como  $u = \lim_{t \rightarrow \infty} Y(t)/\kappa(t)$ , donde  $Y(t)$  y  $\kappa(t)$  se calculan con la tasa real de crecimiento de la inversión,  $r$ .

Se dice que en la economía hay pleno uso de su capacidad productiva si  $u = 1$ . Obtenga la relación que debe existir entre  $r$  y  $\rho_s$  para que la capacidad productiva se utilice plenamente.

**1.3.3.** Con respecto al modelo de la dinámica del proceso de aprendizaje, se le pide que grafique sobre el mismo plano las curvas de aprendizaje para distintos valores de los parámetros  $a$  y  $K$  y distintas condiciones iniciales. Comente los resultados obtenidos.

**1.3.4.** La economía de un país está en un proceso de decrecimiento comenzando con un producto igual a  $Y_0$  en el instante  $t_0$ . Se ha determinado que la tasa de crecimiento es una proporción de la diferencia entre su crecimiento actual y lo mínimo que este país puede decrecer para cubrir sus necesidades. Plantee y analice el modelo correspondiente. En particular, explique qué sucede con la economía en el largo plazo.

**1.3.5.** En cierto año  $t_0$ , la población mundial alcanzó los 5,200,000,000 de personas con una tasa de crecimiento de 200,000 personas por día. Utilice el modelo de Malthus con tasas de natalidad y mortalidad constantes para determinar para cuándo se esperaría que la población mundial se



duplica.

**1.3.6.** En relación con el modelo de Malthus, responda a las siguientes preguntas.

- a) ¿Después de cuántos años se triplica la población inicial?
- b) Las tasas de crecimiento per cápita de dos poblaciones diferentes son  $r_1$  y  $r_2$ , siendo  $r_1 < r_2$ . ¿Qué condición debe cumplirse para que la población con menor tasa de crecimiento alcance a la segunda? Bajo esta condición, determine después de cuántos años las poblaciones se igualan.

**1.3.7.** Considere que la oferta,  $S$ , y la demanda,  $D$ , de un cierto bien se comportan de acuerdo con las siguientes ecuaciones:  $S(t, p, p') = 48 - 24e^{-2t} + 16p + 10p'$  y  $D(t, p, p') = 240 - 8p - 2p'$ , donde  $p(t)$  es el precio por unidad del bien en el instante  $t$ . Si  $p(0) = 12$ , encuentre la trayectoria del precio asumiendo que en todo instante la demanda iguala a la oferta. Además, determine qué sucede con el precio en el largo plazo. ¿Existe precio de equilibrio?

**1.3.8.** Dadas la oferta  $S(p, p') = 70 - 2p - 3p'$ , y la demanda  $D(p, p') = 130 + p - 5p'$  de un cierto bien, pruebe que el precio de equilibrio,  $p^*$ , es inestable, en el sentido de que, para cualquier precio inicial  $p(0) \neq p^*$ , la trayectoria correspondiente se aleja de  $p^*$ . Asuma que, en todo instante, la oferta iguala a la demanda.

## 1.4. Ecuaciones diferenciales no lineales

### ECUACIÓN DE VARIABLES SEPARABLES

Hemos visto que una ecuación diferencial lineal puede resolverse explícitamente aplicando la fórmula (1.11). También hemos visto a través de los ejemplos pasados que algunas situaciones de interés práctico y

teórico pueden plantearse en términos de un modelo lineal. Sin embargo, la mayoría de modelos que aparecen en la literatura son no lineales debido a la complejidad de los fenómenos bajo estudio. Lamentablemente, para las ecuaciones diferenciales no lineales no existe un procedimiento algebraico que permita obtener la solución en el caso general. Existen, sin embargo, algunas excepciones importantes. Una de ellas es el caso de las llamadas «ecuaciones de variables separables» que analizamos a continuación.<sup>8</sup>

Supongamos que la función  $F(t, x)$  de la ecuación (1.2) puede escribirse en la forma  $F(t, x) = f(x)g(t)$ . En este caso se dice que la ecuación es de variables separables; y, después de separar variables, la ecuación diferencial queda como sigue:

$$\boxed{x' = f(x)g(t)} \quad (1.25)$$

Note que si la ecuación ya está en la forma (1.25), entonces se trata de una ecuación de variables separadas. Las ecuaciones

$$x' = xt + t$$

$$x' = e^{x+t}2t$$

$$x' = x^2$$

son ecuaciones de variables separables, pues se pueden escribir bajo la forma (1.25). En efecto,

$$x' = xt + x = x(t + 1); \quad f(x) = x, \quad g(t) = t + 1$$

$$x' = e^{x+t}2t = e^x e^t 2t; \quad f(x) = e^x, \quad g(t) = 2te^t$$

$$x' = x^2; \quad f(x) = x^2, \quad g(t) = 1.$$

---

<sup>8</sup>Otra ecuación importante no lineal para la que existe un procedimiento algebraico es la ecuación de Bernoulli, que estudiaremos más adelante.

Suponiendo que la función  $F(t, x)$  satisface las hipótesis del teorema de existencia y unicidad, entonces en este caso la ecuación posee solución única para cada condición inicial. El procedimiento general para resolver una ecuación de variables separables es como sigue:

$$\begin{aligned}
 x' &= f(x)g(t) \\
 \frac{dx}{dt} &= f(x)g(t) \\
 \frac{dx}{f(x)} &= g(t)dt \\
 \int \frac{1}{f(x)}dx &= \int g(t)dt \\
 \mathcal{F}(x) &= \mathcal{G}(t) + C.
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

Aquí, las funciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  son las antiderivadas de las funciones  $1/f$  y  $g$ , respectivamente. La constante  $C$  es una constante arbitraria de integración. La ecuación (1.26) puede escribirse de manera general como una ecuación algebraica de la forma

$$H(t, x) = 0. \tag{1.27}$$

Una vez que se ha llegado a (1.26), se considera que la ecuación diferencial ha sido resuelta y la solución está dada; en el peor de los casos, de manera implícita por medio de la expresión (1.27), que es una ecuación algebraica.

### OBSERVACIÓN

En el proceso para obtener la expresión (1.27) se excluyó el caso en que  $f(x) = 0$ .<sup>9</sup> La situación en la que  $f(x_0) = 0$  para algún  $x = x_0$ ; esto es, cuando  $x_0$  es un cero de la función  $f(x)$ , produce la solución constante  $\varphi(t) = x_0 \forall t \in \mathbb{R}$ . En efecto, reemplazando en la ecuación, se verifica que  $\varphi$  es una solución. Ahora, si  $\psi : I_\psi \rightarrow \mathbb{R}$  es otra solución, tal que

<sup>9</sup>Esta exclusión se hizo al pasar del segundo al tercer paso del procedimiento.

$\psi(t_0) = x_0$  para algún  $t_0 \in I_\psi$ ; entonces, por la unicidad de soluciones,  $\psi(t) = x_0$  para todo  $t \in I_\psi$ , de donde  $\psi = \varphi$  en  $I_\psi$ .

### Ejemplo

**Ej. 12.** Consideremos la ecuación  $x' = x(t + 1)$ . Esta ecuación ya se encuentra con las variables separadas. Luego,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(t + 1) \\ \frac{dx}{x} &= (t + 1)dt \\ \int \frac{dx}{x} &= \int (t + 1)dt \\ \ln |x| &= \frac{1}{2}t^2 + t + C_1 \\ |x| &= e^{\frac{1}{2}t^2 + t + C_1}.\end{aligned}$$

Ahora, haciendo  $C_2 = e^{C_1}$ , tenemos  $|x(t)| = C_2 e^{\frac{1}{2}t^2 + t}$  y, finalmente, absorbiendo el valor absoluto por una constante  $C_3$ , tenemos  $x(t) = C_3 e^{\frac{1}{2}t^2 + t}$ ,  $C_3 \neq 0$ . Observe que la solución nula  $x(t) = 0$  para todo  $t$  también es una solución de la ecuación. Esta solución fue descartada como alternativa de solución en el proceso presentado. Podemos incorporarla en la solución general tomando una constante  $C$  e incluyendo  $C = 0$ . Por otro lado, la función constante  $x(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$  también es una solución de la ecuación. Debido a esto, podemos decir que la solución general de la ecuación está dada por

$$x(t) = C e^{\frac{1}{2}t^2 + t}, C \in \mathbb{R}.$$



El siguiente modelo, conocido como modelo logístico, está basado en la observación de que la tasa de crecimiento poblacional per cápita es

decreciente y no constante, como en el modelo de Malthus. Esta hipótesis conduce a una ecuación diferencial que se puede resolver separando variables.

### Ejemplo

**Ej. 13. (Crecimiento poblacional. Modelo de Verhulst).** En el modelo de Malthus, la tasa per cápita del crecimiento poblacional es constante,  $P'(t)/P(t) = r$ . Si esta tasa solo dependiera de la cantidad de población, entonces sería razonable esperar que sea decreciente a medida que aumenta la cantidad de población. El matemático belga Pierre Francois Verhulst (1804-1849) propuso un modelo lineal decreciente para esta tasa. Así;  $P'/P$  se mantendrá positiva hasta cierto momento, pero cuando la población llegue a su nivel máximo de capacidad (*carrying capacity*, en inglés). El modelo también se conoce como «modelo logístico» y viene dado por

$$\frac{P'}{P} = r - \frac{r}{K}P, \quad P(t_0) = P_0. \quad (1.28)$$

El parámetro  $K$  denota la máxima capacidad poblacional.

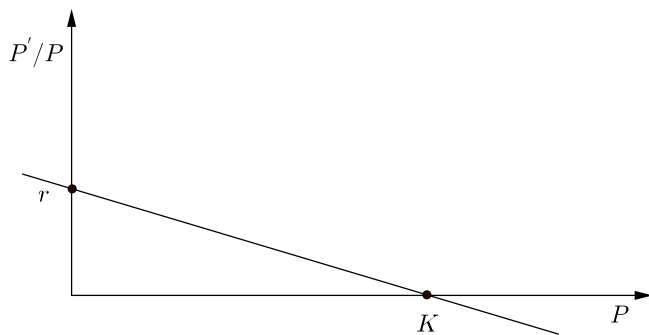


Figura 1.8 Modelo logístico

Cuando la población  $P$  es muy pequeña en comparación con su nivel de capacidad, entonces  $P' \simeq rP$ , y el modelo se torna exponencial.

Para resolver el modelo, notemos que la ecuación (1.28) se puede escribir como  $P' = f(P)g(t)$ , donde  $f(P) = P(1 - P/K)$  y  $g(t) = r$ . Luego, aplicando el método de separación de variables tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dP}{P(1 - P/K)} &= r dt \\ \int \left( \frac{1}{P} + \frac{1/K}{1 - P/K} \right) dP &= \int r dt \\ \ln P - \ln(1 - P/K) &= rt + C_1 \\ \ln \left( \frac{P}{1 - P/K} \right) &= rt + C_1 \\ \frac{P}{1 - P/K} &= C_2 e^{rt}, \quad C_2 = e^{C_1}. \end{aligned}$$

De aquí, despejando  $P$ , se obtiene  $P(t) = KC_2 e^{rt} / (K + C_2 e^{rt})$ . Puesto que  $C_2 > 0$ , entonces, a  $P \equiv 0$  no se le considera solución en esta expresión. Sin embargo, puede verificarse que la función nula es, en efecto, una solución. Para incorporar esta solución, podemos escribir  $P(t) = KCe^{rt} / (K + Ce^{rt})$ ,  $C \geq 0$ . Note que otra solución que no se ha considerado en el proceso de solución es la función constante  $P \equiv K$ , que es el nivel de capacidad máxima de la población.

Puesto que tenemos una condición inicial,  $P(t_0) = P_0$ , debemos determinar el valor específico de la contante  $C$ . De la ecuación

$$P_0 = P(t_0) = \frac{KCe^{rt_0}}{K + Ce^{rt_0}}$$

se obtiene  $C = \frac{kP_0}{k - P_0} e^{-rt_0}$ . Luego,

$$P(t) = \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0)e^{-r(t-t_0)}}, \quad t \geq t_0. \quad (1.29)$$

Puesto que  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = K$ , la población tiende a su nivel de máxima capacidad en el largo plazo, para cualquier condición inicial  $P_0$ . Como

en el caso del modelo de Walras, se dirá que el modelo de Verlhust es asintóticamente estable.

El modelo logístico es tan importante por sus aplicaciones que vale la pena hacer algunos comentarios adicionales. La función presentada en (1.29) se conoce como función logística. Esta función en realidad está definida sobre todo los reales; es decir, podemos extender el dominio al intervalo  $I = \mathbb{R}$  (a esto se llamará posteriormente «solución maximal»). Ahora bien, tomando límite cuando  $t \rightarrow -\infty$ , se obtiene  $\lim_{t \rightarrow -\infty} P(t) = 0$ ; de manera que las rectas  $P = 0$  y  $P = K$  son asíntotas de la función logística. Esto quiere decir que cualquier trayectoria del modelo que comience entre 0 y  $K$  se acerca en el pasado a la solución constante  $P = 0$  y se acerca en el futuro a la solución constante  $P = K$ . El comportamiento general de una función logística es como se muestra en la Figura 1.9:

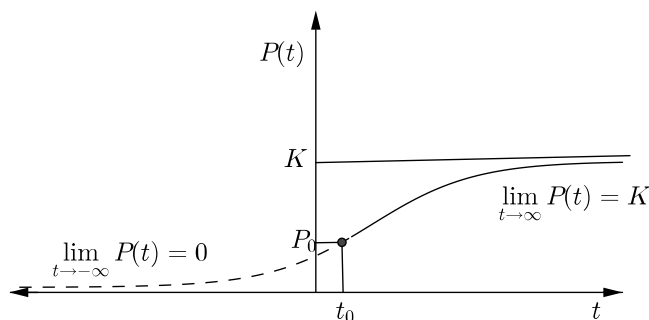


Figura 1.9 Función logística

Por obvias razones, a la curva  $P(t)$  también se le conoce como Curva  $S$ . Una característica importante de esta curva es que al principio, para  $t \geq 0$ ,  $P(t)$ , crece rápidamente (como la función exponencial). Este crecimiento se va extinguiendo a medida que transcurre el tiempo.



CONDICIÓN DE LIPSCHITZ

Antes de terminar esta sección, mostremos con el siguiente ejemplo que la condición de Lipschitz no puede faltar en el teorema 1 para garantizar la unicidad de las soluciones.

**Ejemplo**

**Ej. 14.** Sea  $x' = x^{2/3}$ ,  $x(0) = 0$ . Aquí; la función  $F(x) = x^{2/3}$  no es lipschitziana en  $x = 0$  (véase el ejercicio 1.4.7). Resolviendo esta ecuación por separación de variables, se obtiene  $\varphi(t) = (t/3 + C)^3$ . Puesto que la función  $\varphi$  debe satisfacer la condición inicial  $\varphi(0) = 0$ , la solución es  $\varphi(t) = t^3$ . Sin embargo, no es la única solución, pues la función nula  $\psi \equiv 0$  también es una solución de la ecuación y satisface la misma condición inicial. En este caso no se cumple la unicidad y, ciertamente, ya habíamos anotado que la función  $F$  no es lipschitziana en el origen, lo que muestra que esta condición no puede faltar.

ECUACIÓN DE BERNOULLI

Otra ecuación diferencial no lineal que aparece con cierta frecuencia en las aplicaciones es la ecuación de Bernoulli (EB). Esta ecuación puede resolverse mediante un cambio de variable. La EB está dada por

$$x' = a(t)x + b(t)x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Note que para  $\alpha = 0, 1$ , la EB se reduce a una ecuación lineal. Sea, pues,  $0 \neq \alpha \neq 1$ . Haciendo el cambio de variable

$$y = x^{1-\alpha},$$



se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned}
 y' &= (1 - \alpha)x^{-\alpha}x' \\
 &= (1 - \alpha)x^{-\alpha}[a(t)x + b(t)x^\alpha] \\
 &= (1 - \alpha)[a(t)x^{1-\alpha} + b(t)] \\
 &= (1 - \alpha)[a(t)y + b(t)].
 \end{aligned}$$

Así, en términos de la nueva variable  $y$ , EB resulta en la ecuación lineal

$$y' = (1 - \alpha)a(t)y + (1 - \alpha)b(t).$$

Luego de resolver la ecuación en la variable  $y$ , según los procedimientos estudiados, se usa el cambio de variable para obtener la solución en la variable original,  $x$ .

### Ejemplo

**Ej. 15.** Observe que la ecuación logística

$$P' = P - P^2, \quad P(0) = P_0$$

es una EB con  $\alpha = 2$  y, por lo tanto, puede resolverse usando el método descrito anteriormente. En efecto, haciendo  $y = P^{-1}$ , se obtiene la ecuación

$$y' = -y + 1,$$

cuya solución es  $y(t) = e^{-t}(y(0) - 1) + 1$ . Volviendo a la variable original, se obtiene

$$P(t) = \frac{P_0}{P_0 + (1 - P_0)e^{-t}}.$$

◇◇◇

### Ejemplo

**Ej. 16. (Modelo logístico generalizado).** T. Haavelmo en su libro *A Study in the Theory of Economic Evolution* (1954), propuso un modelo logístico generalizado para la tasa de crecimiento poblacional que resulta en una ecuación del tipo EB. Veamos. Sea  $N = N(t)$  el tamaño de la población en el instante  $t$  y sea  $X = X(t)$  el nivel de producción total disponible para la población. La dinámica de crecimiento poblacional propuesta por Haavelmo es

$$\frac{N'}{N} = n - m \frac{N}{X},$$

donde  $n$  y  $m$  son constantes positivas. Haavelmo interpreta la constante  $n$  como una tasa de nacimientos y  $m \frac{N}{X}$  como una tasa de mortalidad, y estudia un modelo lineal y otro no lineal para su modelo logístico generalizado. Para la variante no lineal considera la siguiente función de producción:

$$X = AN^a,$$

donde  $A$  y  $a \neq 1$  son constantes positivas. Al incorporar esta función en el modelo, resulta la ecuación diferencial

$$N' = nN - \frac{m}{A} N^{2-a},$$

que es una ecuación de Bernoulli. Luego, para resolver esta ecuación, podemos hacer el cambio de variable sugerido de manera que se torne en una ecuación lineal. Sea, pues,

$$x = N^{1-(2-a)} = N^{a-1} = \frac{1}{A} \left( \frac{X}{N} \right).$$

Observe que si  $A = 1$ , la variable  $x$  denota el producto per cápita. Para que esta nueva variable denote exactamente el producto per cápita,

podemos tomar, más bien,  $x = AN^{1-(2-a)} = \frac{X}{N}$ . Reemplazando en la ecuación se obtiene, entonces,

$$x' = n(a-1)x - m(a-1).$$

De acuerdo con (1.15), la solución de este modelo es

$$x(t) = Ce^{n(a-1)t} + \frac{m}{n}.$$

Más específicamente, si  $x(0) = x_0$ , la solución es

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{m}{n}\right) e^{n(a-1)t} + \frac{m}{n}.$$

◇◇◇

### LISTA DE EJERCICIOS

**1.4.1.** Aplicando el método de separación de variables, resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

- a)  $x' = ax$ ,  $a \neq 0$
- b)  $x' = (x-a)(x-b)$ ,  $a \neq b$
- c)  $x' = (2x-a)(b-3x)$

**1.4.2.** Resuelva las siguientes ecuaciones de Bernoulli:

- a)  $x' = 2x - x^2$
- b)  $x' = tx - 3tx^2$
- c)  $x' = tx^2 - 4tx$

**1.4.3.** En general, una ecuación logística es una ecuación de la forma

$$x' = ax - bx^2.$$

Obtenga la solución y compare con (1.29) del ejemplo 13.

**1.4.4. (Modelo de Solow).** La ecuación fundamental del modelo de Solow, que estudiaremos más adelante, está dada por

$$k' = sf(k) - (n + \delta)k,$$

donde  $k$  denota capital,  $s$  es una tasa de ahorro,  $f$  es una función de producción,  $n$  es una tasa de crecimiento poblacional y  $\delta$  es una tasa de depreciación del capital. En general, esta ecuación no puede resolverse explícitamente, salvo en algunos casos particulares. Por ejemplo, asuma que  $f(k) = k^{1/2}$  y que los parámetros son los siguientes:  $s = 0.2$ ,  $n = \delta = 0.1$ . Resuelva el modelo, esto es, obtenga la trayectoria del capital y diga qué pasa con este en el largo plazo, es decir, determine  $\lim_{t \rightarrow +\infty} k(t)$ .

**1.4.5.** Con respecto al modelo de crecimiento poblacional de Verhulst, resuelva las siguientes cuestiones:

- a) Encuentre el instante en el que la población tiene su mayor tasa de cambio.
- b) Haga el «diagrama de fases», esto es, trace las distintas trayectorias para diferentes condiciones iniciales.
- c) Basándose en el diagrama de fases, describa el comportamiento de la población cuando esta comienza en  $P_0 > K$ .

**1.4.6. (Modelo de Verhulst con emigración).** Supongamos que en el modelo de Verhulst se considera la emigración de individuos a una tasa constante  $h > 0$ :

$$P' = rP \left( 1 - \frac{P}{K} \right) - h, \quad P(t_0) = P_0.$$

Resuelva el modelo explícitamente, esto es, obtenga la trayectoria de la población,  $P(t)$ . Note que la ecuación es una variante del modelo logístico del ejercicio 1.4.3:  $x' = ax - bx^2 - h$ .

**1.4.7.** Pruebe que la función  $F(x) = x^{2/3}$  no es lipschitziana. Sugerencia. Utilice el mismo argumento del ejemplo 3.

**1.4.8.** Resuelva el PVI:  $x' = x^{2/3}$ ,  $x(0) = 0$ . ¿Cuántas soluciones tiene este problema?, ¿se cumple el teorema de existencia y unicidad?

## 1.5. Solución maximal y dependencia continua

El dominio de la solución  $\varphi$  de una ecuación diferencial es un intervalo  $I$ , típicamente un intervalo abierto. Podemos tomar un subintervalo  $J$  de  $I$  y definir una nueva solución  $\phi$  simplemente restringiendo  $\varphi$  al intervalo  $J$ . Es claro que podemos proceder de esta manera tantas veces como queramos para obtener diferentes soluciones (¡infinitas soluciones!). ¿Es posible proceder de manera similar, pero en el sentido contrario, esto es, tomando superintervalos que contengan al intervalo  $I$  y seguir teniendo soluciones? ¿Hasta qué punto es esto posible? Este problema nos conduce al concepto de solución maximal que se aborda en la primera parte de esta sección.

Por otro lado, sabemos que si se cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad, entonces para cada condición inicial existe una única solución. La condición inicial es muy importante por razones prácticas y teóricas, pues de alguna manera determina el futuro de una trayectoria. Por ejemplo, si la alimentación de un niño es pobre en nutrientes, su condición inicial es desfavorable y puede determinar un bajo rendimiento escolar y, en general, un bajo desempeño en muchas actividades humanas. La condición inicial negativa de este niño representa una adversidad para su futuro desempeño. El

segundo problema que estudiamos en esta sección está relacionado con la condición inicial. Básicamente, queremos saber cómo varía la trayectoria solución de un modelo si la condición inicial se altera ligeramente.

Para analizar el problema de cuán grande puede ser el intervalo  $J$  sobre el cual se puede definir una solución, comenzamos explicando lo que es una solución maximal.

Una «solución maximal» de la ecuación (1.2) es aquella que está definida en el mayor intervalo posible. Para definir formalmente este concepto, consideremos el conjunto de todas las soluciones de (1.2):

$$\mathcal{S} = \{\varphi : I_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^n; (t, \varphi(t)) \in \mathcal{U}, \varphi'(t) = F(t, \varphi(t)), \varphi(t_0) = x_0\}.$$

Tomemos  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  en  $\mathcal{S}$ . Se dice que  $\varphi_1$  es menor o igual que  $\varphi_2$ , lo que denotamos por  $\varphi_1 \preceq \varphi_2$ , si  $I_{\varphi_1} \subseteq I_{\varphi_2}$  y  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$  para todo  $t \in I_{\varphi_1}$ . Puesto que podrían existir dos funciones en  $\mathcal{S}$  cuyos intervalos de definición no estén contenidos uno dentro del otro, la relación  $\preceq$  es una relación de orden parcial, que no total, en  $\mathcal{S}$ . Se dice que  $\bar{\varphi} \in \mathcal{S}$  es una solución maximal de  $\mathcal{S}$  si ella no es menor que cualquier otra solución de (1.2), es decir, no se puede ampliar su dominio.

### Ejemplo

**Ej. 17.** Considere el siguiente PVI:

$$\begin{cases} x' &= x^2 \\ x(t_0) &= x_0 > 0. \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación, por ejemplo, por el método de separación de variables, se obtiene

$$\varphi(t) = \frac{x_0}{1 - (t - t_0)x_0}.$$

En el proceso de obtención de  $\varphi$  se dejó de lado la (posible) solución nula  $x \equiv 0$ . Sin embargo, como  $x_0 > 0$ , entonces  $x = 0$  no es una solución del PVI.

Para encontrar la solución maximal, tomemos en cuenta que  $1 - (t - t_0)x_0 \neq 0$ , o, equivalentemente,  $t \neq (t_0 + 1/x_0)$ . Ahora bien, recordando que el dominio de definición de una solución es un intervalo, entonces, o bien tomamos como dominio intervalo  $] - \infty, t_0 + 1/x_0[$ , o bien el intervalo  $]t_0 + 1/x_0, +\infty[$ . Puesto que  $t_0$  debe pertenecer a tal dominio, nos quedamos con el primer intervalo. La solución maximal del PVI es

$$\varphi(t) = \frac{x_0}{1 - (t - t_0)x_0}, \quad t \in ] - \infty, t_0 + 1/x_0[.$$

◇◇◇

**Teorema 2.** Consideremos que la ecuación (1.2) satisface las hipótesis del teorema de existencia y unicidad. Entonces, cualquier solución de la ecuación puede ser extendida a una solución maximal (única). La solución maximal está dada por

$$\bar{\varphi} : \bigcup_{\varphi \in \mathcal{S}} I_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

tal que si  $t \in I_\varphi$ ,  $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t)$ .

Note que la función  $\bar{\varphi}$  está bien definida en el sentido de que no viola la unicidad de las soluciones, pues coincide con todas las demás en la intersección de sus dominios. Note también que, por construcción, la solución maximal es única.

En relación con el ejemplo 17, observe que aun cuando el conjunto  $\mathcal{U}$  es todo el espacio  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , la solución maximal no está definida sobre todo  $\mathbb{R}$ .

Las soluciones maximales tienen un comportamiento típico reflejado en la gráfica de  $\varphi$ . Suponiendo  $t_0 < 0$ , la gráfica de  $\varphi$  es la que se muestra en la Figura 1.10.

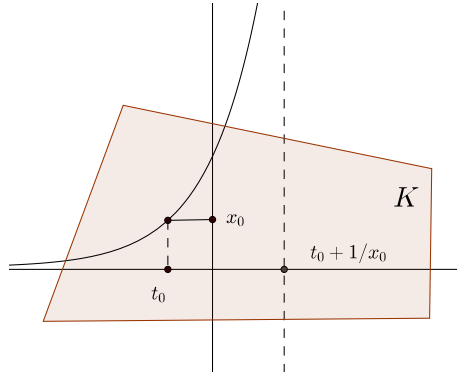


Figura 1.10 Comportamiento típico de las soluciones maximales

Se aprecia que cuando  $t \rightarrow t_0 + 1/x_0$ ,  $\varphi(t) \rightarrow \infty$ . Más exactamente, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 3.** Consideremos que la ecuación (1.2) satisface las hipótesis del teorema de existencia y unicidad y sea  $\bar{\varphi}$  la solución maximal definida sobre  $I_{\bar{\varphi}} = ]a, b[$ . Si  $b < +\infty$ , entonces para todo compacto  $K \subset \mathcal{U}$  se tiene

$$\lim_{t \rightarrow b^-} (t, \bar{\varphi}(t)) = \partial\mathcal{U}.$$

Este límite significa que para todo compacto  $K \subset \mathcal{U}$  existe  $\epsilon > 0$ , tal que para todo  $t \in ]a, b - \epsilon[$ ,  $(t, \bar{\varphi}(t)) \notin K$ ; es decir, la trayectoria maximal sale del conjunto compacto sin volver a él.

Observe que se tiene un resultado análogo considerando la hipótesis dual  $a > -\infty$ . El teorema 3 implica que si una solución maximal fuera a quedar presa dentro de un conjunto compacto, entonces ella debería estar definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Volviendo al ejemplo 17, observe que  $b = t_0 + 1/x_0 < +\infty$  y  $\lim_{t \rightarrow b} (t, \bar{\varphi}(t)) = \partial\mathcal{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .



**Ejemplo**

**Ej. 18.** Consideremos la ecuación

$$x' = x(x - 1), \quad \mathcal{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Podríamos resolver esta ecuación por el método de separación de variables. Vamos a proceder, sin embargo, de un modo diferente. En principio, notemos que las funciones  $\varphi \equiv 0$  y  $\phi \equiv 1$  son soluciones de la ecuación. Ahora, tomemos cualquier condición inicial  $(t_0, x_0)$  con  $0 < x_0 < 1$ . ¿Cómo es la trayectoria que pasa por dicho punto y vive entre 0 y 1? En este caso,  $x' < 0$  y, por lo tanto,  $x(t)$  es decreciente, como muestra la Figura 1.11.

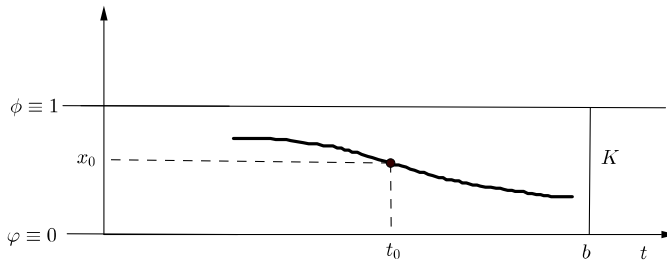


Figura 1.11 Solución maximal

Veamos que la solución maximal está definida en el intervalo  $I = ] - \infty, + \infty[$ . Si la solución estuviese definida en un intervalo del tipo  $]0, b[$ ,  $0 < b < +\infty$ , podríamos tomar el compacto  $K = [0, b] \times [0, 1] \subset \mathcal{U}$  y la solución no saldría de este compacto, pero esto contradice el teorema anterior, pues la solución debería salir de dicho compacto. Por consiguiente, el dominio de definición de la solución maximal debe ser en efecto  $I = ] - \infty, + \infty[$ .



Enseguida presentamos el teorema de la dependencia continua de las condiciones iniciales. Básicamente, este teorema asegura que si dos condiciones iniciales están próximas una de otra, entonces las trayectorias correspondientes también resultan próximas una de otra.

El teorema se establece bajo las mismas hipótesis del teorema de existencia y unicidad. Recordemos cuáles son estas condiciones. La función  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de la ecuación  $x'(t) = F(t, x)$  está definida sobre un conjunto abierto  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y es continua en dicho conjunto. Además, es localmente lipschitziana con respecto a la variable de estado. Bajo estas hipótesis, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 4. (dependencia continua de las condiciones iniciales)**

Para todo  $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$  existen  $\theta > 0$  y  $\rho > 0$ , tales que

a) Para todo  $(\bar{t}, \bar{x}) \in \mathcal{B}(t_0, \theta) \times \mathcal{B}(x_0, \rho)$ , el dominio de la solución maximal del PVI

$$PVI : \begin{cases} x'(t) &= F(t, x(t)) \\ x(\bar{t}) &= \bar{x} \end{cases}$$

contiene al intervalo  $[\bar{t} - \theta, \bar{t} + \theta]$ .<sup>10</sup>

b) La aplicación

$$\mathfrak{F} : (t, \bar{t}, \bar{x}) \rightarrow \varphi(t, \bar{t}, \bar{x})$$

es continua en la vecindad  $\mathcal{B}(\bar{t}, \theta) \times \mathcal{B}(t_0, \theta) \times \mathcal{B}(x_0, \rho)$ .<sup>11</sup>

La parte b) es la que establece la continuidad de las soluciones respecto a las condiciones iniciales, más aún, en realidad respecto de todas las variables involucradas, esto es,  $t, \bar{t}$  y  $\bar{x}$ .

OBSERVACIÓN

<sup>10</sup>Observe que este intervalo es el mismo para cualquier par  $(\bar{t}, \bar{x})$ .

<sup>11</sup>Como se vio antes, para la solución maximal se tiene  $(t, \varphi(t, \bar{t}, \bar{x})) \in \mathcal{U}$ .

Este teorema puede extenderse a situaciones en las que la ecuación diferencial posee parámetros, esto es, ecuaciones de la forma

$$x'(t) = F(t, x, \alpha),$$

donde  $F$  está definida en un abierto  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  y  $\alpha$  es un vector de parámetros. Entonces, en este contexto, con  $F$  satisfaciendo las condiciones del teorema de existencia y unicidad y siendo continua en  $\mathcal{U}$ , la correspondiente función  $\mathfrak{F}$  es continua también respecto del parámetro  $\alpha$ . Este resultado es muy importante en las aplicaciones, pues los modelos económicos normalmente poseen parámetros.

### Ejemplo

**Ej. 19.** Consideremos el par de PVI:

$$PVI_1 : \begin{cases} x' &= ax \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}, \quad PVI_2 : \begin{cases} x' &= ax \\ x(t_0) &= x_0 + \epsilon \end{cases}$$

El número  $\epsilon$  representa una perturbación de la condición inicial  $x_0$ . Las soluciones correspondientes de este par de PVI son

$$\begin{aligned} PVI_1 : \quad x(t; t_0, x_0) &= e^{a(t-t_0)}x_0 \\ PVI_2 : \quad x(t; t_0, x_0 + \epsilon) &= e^{a(t-t_0)t}(x_0 + \epsilon). \end{aligned}$$

Para  $\epsilon$  suficientemente pequeño, las condiciones iniciales están muy cerca una de otra. El teorema 4 adelanta, entonces, que las trayectorias correspondientes están muy cerca una de otra en una vecindad del punto  $(t_0, x_0)$ . En efecto, esto se puede apreciar directamente de la forma de la soluciones, donde las funciones exponenciales están muy cerca una de otra cerca de la condición inicial.

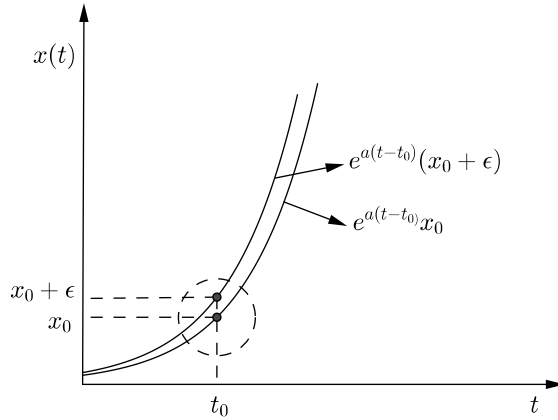


Figura 1.12 Dependencia continua sobre  $x_0$

Ahora consideremos el par de ecuaciones

$$PVI_1 : \begin{cases} x' &= ax \\ x(0) &= x_0 \end{cases}, \quad PVI_2 : \begin{cases} x' &= (a + \epsilon)x \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

En este caso,  $\epsilon$  denota una perturbación del parámetro  $a$ . Las soluciones correspondientes son

$$PVI_1 : x(t; t_0, x_0, a) = e^{at}x_0$$

$$PVI_2 : x(t; t_0, x_0, a + \epsilon) = e^{(a+\epsilon)t}x_0.$$

Para  $\epsilon$  suficientemente pequeño, los parámetros de ambas ecuaciones están muy cerca uno de otro. De nuevo, el teorema 4 adelanta que las trayectorias correspondientes están muy cerca una de otra, cerca del punto  $(t_0, x_0, a)$ , como se muestra en la Figura 1.13.

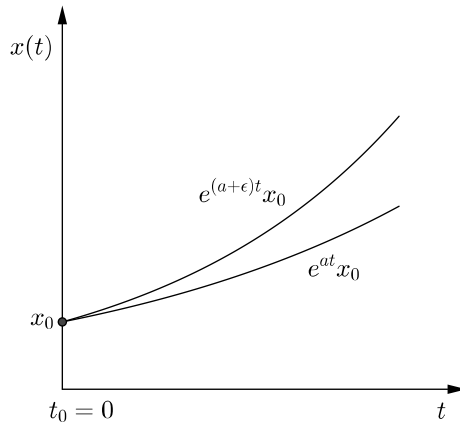


Figura 1.13 Dependencia continua sobre  $a$

### LISTA DE EJERCICIOS

**1.5.1.** Encuentre las soluciones maximales de los siguientes PVI.

a)  $x' = 1/2x$ ,  $x(t_0) = x_0 > 0$

b)  $x' = x^2 - 9$ ,  $x(0) = x_0$

c)  $x' = x^3$ ,  $x(0) = x_0 > 0$

**1.5.2.** En cuanto al problema anterior, si el intervalo de definición de la solución es  $I = ]a, b[$  y si  $a > -\infty$  o  $b < \infty$ , analice qué pasa con la solución maximal cuando  $t \rightarrow a^+$  o  $t \rightarrow b^-$ .

**1.5.3.** Para el modelo de la curva de aprendizaje, sea  $A(t_0)$  las horas de preparación previa al proceso de aprendizaje ya dentro de la empresa. Resuelva las ecuaciones correspondientes para  $A(t_0) = 2$  y  $A(t_0) = 2.1$ . Trace las curvas correspondientes y comente el resultado.

## 1.6. Análisis cualitativo

Dado el carácter geométrico del análisis cualitativo, aquí nos referiremos a las soluciones de un sistema dinámico como trayectorias. El análisis cualitativo consiste en describir el comportamiento de las diversas trayectorias del sistema sin necesidad de obtenerlas explícitamente. En este sentido, hay que indicar que existen trayectorias muy particulares que nunca se mueven y a las que se le llaman «equilibrios». Los equilibrios influyen de manera decisiva en la determinación del mapa de trayectorias del sistema. Las diversas trayectorias se alejan, se acercan o viven en torno a los equilibrios, y este comportamiento configura lo que se conoce como Diagrama de fases.<sup>12</sup> La estabilidad es un concepto asociado a los equilibrios y caracteriza el comportamiento de las trayectorias en relación con este. En esta sección se introducen formalmente estos conceptos y se aplican al modelo logístico de crecimiento poblacional y al famoso modelo de crecimiento económico de Solow.

Consideremos la siguiente ecuación autónoma:

$$x' = F(x). \tag{1.30}$$

En teoría, una ecuación de este tipo siempre se puede resolver por el método de separación de variables. Sin embargo, aun en el caso que sea posible obtener una solución explícita o implícita del tipo dada en (1.27),  $H(t, x) = 0$ , esta puede ser poco informativa respecto del comportamiento de la variable de estado y, finalmente, no decir nada del fenómeno que se está modelando. Además, como el análisis cualitativo

---

<sup>12</sup>Tendría más sentido hablar de un mapa de trayectorias cuando el sistema dinámico es bidimensional, caso en el que las trayectorias viven en el plano. Sin embargo, aquí ya queremos ir introduciendo esta idea como parte fundamental del análisis cualitativo.

es básicamente geométrico, este tipo de análisis muestra de manera más evidente las propiedades de las trayectorias.

### Ejemplo

**Ej. 20.** Consideremos la ecuación (no autónoma)

$$x' = \frac{x}{t - x}. \quad (1.31)$$

Después de cierto trabajo algebraico se obtiene la solución<sup>13</sup>

$$\underbrace{x \ln |x| + t + Cx}_{H(t,x)} = 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Puesto que a partir de la relación  $H(t, x) = 0$  no se puede despejar  $x$  como función de  $t$  para tener explícitamente  $x = x(t)$ , poco podemos decir acerca del comportamiento de las soluciones de la ecuación (1.31). Por ejemplo, no podemos determinar si esta es monótona o convexa, o señalar qué características tiene la solución que pasa por un punto específico, si tiende hacia un determinado límite en el largo plazo, etc. En este sentido, ha sido poco útil resolver la ecuación, pues la relación  $H(t, x) = 0$  es poco informativa. Para abordar este tipo de preguntas se requiere hacer un análisis cualitativo. Para esto, comenzamos definiendo lo que es una solución de equilibrio.



**Definición 4. (Equilibrio).** Una solución de equilibrio (o simplemente un equilibrio) de la ecuación (1.30) es una solución constante de dicha ecuación.

<sup>13</sup>En el ejercicio 1.6.1 se propone un cambio de variable que permite resolver explícitamente esta ecuación. El método es útil para ecuaciones no autónomas.

Denotamos un equilibrio por  $x^* \in \mathbb{R}$ ; esto es, si  $\varphi$  es una solución de equilibrio, entonces  $\varphi(t) = x^* \forall t \in I$ .

Si una trayectoria  $\varphi$  es un equilibrio y en el instante  $t_0 \in I$  se encuentra en el punto  $x^*$ , entonces la trayectoria se quedará allí por siempre:  $\varphi(t) = x^* \forall t \geq t_0, t \in I$ . Por esta razón, a las soluciones de equilibrio también se les llama «soluciones estacionarias», pues se estacionan en un punto por el resto del tiempo.<sup>14</sup>

Note que  $x^*$  es un equilibrio de (1.30) si y solo si es un cero de la función  $F$ ; esto es, si se verifica que

$$\boxed{F(x^*) = 0} \tag{1.32}$$

Así, una manera de encontrar los equilibrios de la ecuación diferencial (1.30) consiste en resolver la ecuación algebraica (1.32).

### **Ejemplos**

**Ej. 21.** Consideremos la ecuación  $x' = x(x - 1)$ . En este caso,  $F(x) = x(x - 1)$ , y al hacer  $F(x) = 0$  se obtienen los equilibrios  $x_1^* = 0$  y  $x_2^* = 1$ .

**Ej. 22.** En el modelo de crecimiento poblacional logístico, la ecuación es  $P' = rP(1 - P/K)$ . En este caso,  $F(P) = rP(1 - P/K)$ , y al hacer  $F(P) = 0$  se obtienen los equilibrios  $P_1^* = 0$ , y  $P_2^* = K$ .



Los siguientes teoremas proporcionan ciertas características que son particulares de los sistemas dinámicos escalares. El teorema 5 muestra

---

<sup>14</sup>Aun cuando usamos la expresión «punto de equilibrio» para referirnos a una solución de equilibrio, hay que tener presente que son dos cosas esencialmente distintas. Un punto es un número real y tiene cierta posición en la recta; mientras que un equilibrio es una función que, como es constante, nunca deja la posición en la que se encuentra, por lo que la trayectoria luce como un punto.



que toda traslación horizontal de una solución también es una solución. Por otro lado, el teorema 6 establece que una solución, o bien es una solución de equilibrio, o bien es una función monótona.

**Teorema 5.** Si  $\varphi$  satisface la ecuación diferencial (1.30), entonces para cualquier constante  $c$ , la función  $\psi$  definida por

$$\psi(t) = \varphi(t + c), \quad c \in \mathbb{R}$$

también satisface la misma ecuación.

*Demostración.* Puesto que  $\varphi'(t) = F(\varphi(t))$ , entonces la regla de la cadena implica

$$\psi'(t) = \varphi'(t + c) = F(\varphi(t + c)) = F(\psi(t)).$$

Luego,  $\psi$  también satisface la ecuación (1.30). □

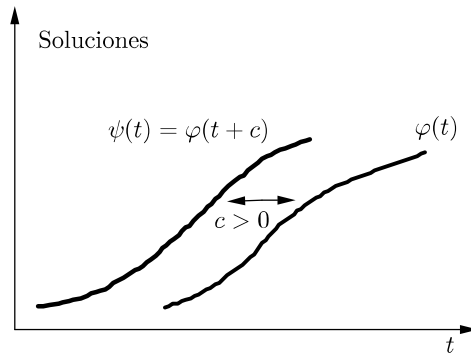


Figura 1.14 Soluciones trasladadas

**Teorema 6.** Si  $F$  es una función de clase  $C^1$ , entonces cualquier solución  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  de la ecuación (1.30), o bien es constante (un equilibrio), o bien es estrictamente monótona.

*Demostración.* Veamos primero que si  $\varphi$  es una solución, tal que  $\varphi'(t_0) = 0$  para algún  $t_0$ , entonces  $\varphi$  es un equilibrio. Sea  $\varphi(t_0) = x^*$ , entonces  $F(x^*) = F(\varphi(t_0)) = \varphi'(t_0) = 0$ . Así pues,  $x(t) = x^*$  es una solución constante de la ecuación (un equilibrio). Como  $\varphi(t)$  y  $x^*$  pasan por el mismo punto  $(t_0, x^*)$ , entonces por la unicidad de las soluciones (teorema 1) se tiene  $\varphi(t) = x^* \forall t \in I$ , donde  $I$  es el intervalo sobre el cual está definida  $\varphi$ .

Supongamos ahora que  $\varphi(t)$  es una solución no constante de la ecuación. Por lo tanto,  $\varphi'(t) \neq 0 \forall t \in I$ . Puesto que  $F$  es de clase  $C^1$ ,  $\varphi$  es continua; pues  $\varphi'(t) = F(\varphi(t))$ . Por consiguiente, o bien  $\varphi'(t)$  es positiva, o bien es negativa para todo  $t \in I$  y, en cualquier caso,  $\varphi(t)$  es estrictamente monótona sobre  $I$ .  $\square$

El siguiente ejemplo muestra la potencia del análisis cualitativo. En particular, los dos teoremas anteriores juegan un rol importante en este tipo de análisis.

### **Ejemplo**

**Ej. 23. (Análisis cualitativo).** Consideremos la ecuación

$$x' = \sin x, \quad F(x) = \sin x.$$

Aplicando el método de separación de variables, se obtiene

$$-\ln |\csc x + \cot x| = t + C.$$

De aquí, después de un trabajo algebraico, se puede obtener explícitamente la solución  $x = x(t)$ . Dejamos esto como ejercicio (véase el ejercicio 1.6.2) y, más bien, mostramos las pautas del análisis cualitativo.

De la ecuación  $F(x) = 0$  se obtiene un conjunto infinito de equilibrios; a saber,  $\mathcal{E} = \{\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots\}$ . Para comenzar el análisis

cualitativo trazamos el «campo vectorial»; este está dado por la función  $F$ . El espacio donde se mueven las trayectorias se conoce como «espacio de fases», en este caso, el eje horizontal, como se aprecia en la Figura 1.15:

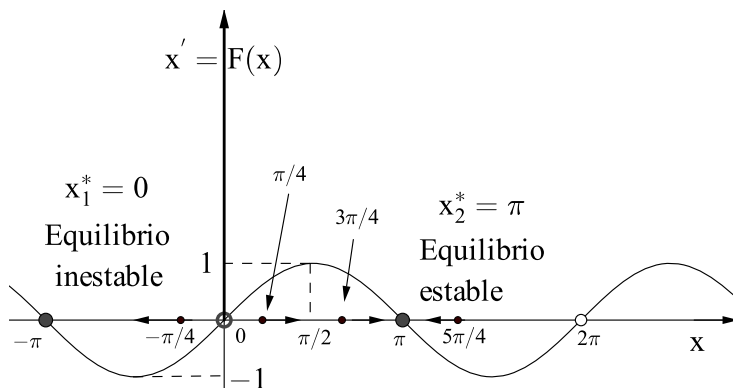


Figura 1.15 Campo vectorial

Concentremos nuestra atención en los equilibrios  $x_1^* = 0$  y  $x_2^* = \pi$ , pues todos los demás tienen comportamientos análogos. Cuando una trayectoria  $\varphi = \varphi(t)$  se encuentra suficientemente cerca y por la izquierda del equilibrio  $x_1^*$ , por ejemplo en  $-\pi/4$ , entonces  $\varphi(t)$  se aleja del equilibrio a medida que  $t$  avanza, pues en este tramo la derivada  $\varphi'(t)$  es negativa y, por lo tanto,  $\varphi$  decrece. De forma análoga, si  $\varphi$  se encuentra suficientemente cerca y por la derecha de  $x_1^*$ , por ejemplo en  $\pi/4$ , entonces  $\varphi$  se aleja, ya que en este caso la derivada  $\varphi'(t)$  es positiva y, por lo tanto,  $\varphi$  crece. Según el teorema 6, este comportamiento de la trayectoria es monótono. Cuando ocurre que las trayectorias que estando cerca de un equilibrio se alejan de este a medida que transcurre el tiempo, se dice que el equilibrio es inestable tipo «repulsor». Así pues,  $x_1^* = 0$  es un repulsor.

Por otro lado, cuando una trayectoria  $\varphi = \varphi(t)$  se encuentra suficientemente cerca y por la izquierda del equilibrio  $x_2^*$ , por ejemplo en  $3\pi/4$ , entonces  $\varphi(t)$  se acerca al equilibrio a medida que  $t$  avanza, pues en este tramo la derivada  $\varphi'(t)$  es positiva y, por lo tanto,  $\varphi$  crece. De forma análoga, si  $\varphi$  se encuentra suficientemente cerca y por la derecha de  $x_2^*$ , por ejemplo en  $5\pi/4$ , entonces  $\varphi$  se acerca al equilibrio, ya que en este caso la derivada  $\varphi'(t)$  es negativa y, por lo tanto,  $\varphi$  decrece. De acuerdo con el teorema 6, este comportamiento es monótono. Cuando ocurre que las trayectorias que estando cerca del equilibrio se acercan a este a medida que transcurre el tiempo, se dice que el equilibrio es estable tipo «atractor». Así pues,  $x_2^* = \pi$  es un atractor.

Dejando un periodo igual a  $\pi$ , el comportamiento descrito para los equilibrios  $x_1^*$  y  $x_2^*$  es el mismo que siguen los demás.

Con la información dada por el campo vectorial no solo se puede describir el comportamiento de las trayectorias que están cerca de los equilibrios, sino que también podemos trazar diversas trayectorias de la ecuación. Por ejemplo, nos preguntamos qué características tiene la trayectoria que pasa por el punto  $(0, \pi/4)$ , es decir, aquella trayectoria que en el momento  $t = 0$  pasa por el punto  $x(0) = \pi/4$ , o qué ocurre con ella cuando  $t$  es muy grande, el largo plazo. Veamos.

Note que entre  $x_1^*$  y  $x_2^*$ ,  $x' > 0$ ; por lo tanto, en este tramo la trayectoria debe ser (sostenidamente) creciente, por lo que las rectas tangentes tienen inclinación hacia la derecha en todo punto de la trayectoria. Según muestra el campo vectorial, la derivada  $x'$  es creciente desde  $x'(t_0) = 0$ , cuando  $x(t_0) = 0$ , hasta  $x'(t_1) = 1$ , cuando  $x(t_1) = \pi/2$ . Por consiguiente, en el tramo  $]t_0, t_1[$  debe ser  $x'' = (x')' > 0$ ; es decir, la trayectoria es convexa. A partir de  $x(t_1) = \pi/2$ , la derivada  $x'$  es decreciente desde  $x'(t_1) = 1$  hasta  $x'(t_2) = 0$ , cuando  $x(t_2) = \pi$ . Por

consiguiente, en el tramo  $]t_1, t_2[$  debe ser  $x'' = (x')' < 0$ ; es decir, la trayectoria es cóncava. Por consiguiente, para  $t = t_1$ , el punto  $(t_1, \pi/2)$  es un punto de inflexión. Además, por el teorema 3, la solución maximal  $x = x(t)$  está definida sobre todo  $\mathbb{R}$ . Cuando  $t$  tiende al infinito,  $x(t)$  tiende a  $\pi$  y la derivada de  $x(t)$  va tendiendo a cero,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = 0$ . Esto quiere decir que, en el infinito, la trayectoria maximal se va volviendo cada vez más horizontal, y la trayectoria de equilibrio  $x_2^* = \pi$  es una asíntota.

La Figura 1.16 muestra el comportamiento descrito.

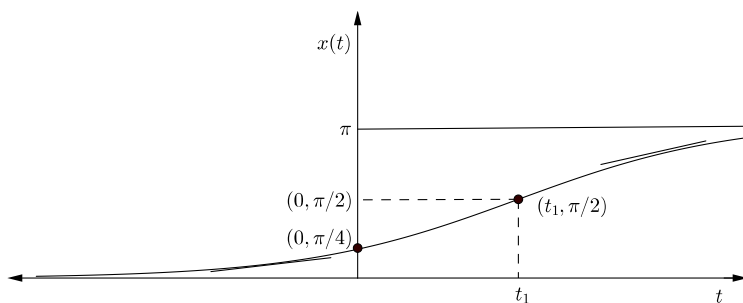


Figura 1.16 Comportamiento de una trayectoria específica



Este ejemplo muestra claramente la potencia descriptiva del análisis cualitativo. No hemos tenido necesidad de resolver la ecuación diferencial para conocer el comportamiento de una trayectoria específica (aquella que pasa por el punto  $(0, \pi/4)$ ). Esta descripción se basó en el análisis geométrico del campo vectorial, lo que se hizo utilizando herramientas elementales de cálculo.<sup>15</sup>

<sup>15</sup>Se invita al lector a averiguar cómo es una trayectoria cuyo punto de paso está fuera del tramo  $0 - \pi$ ; por ejemplo, los puntos  $(0, 3\pi/2)$ ,  $(0, -\pi/2)$ .

Enseguida definiremos formalmente la noción de estabilidad. Hay varias definiciones de estabilidad, la que se presenta a continuación define la estabilidad en el sentido de Lyapunov.

**Definición 5. (Estabilidad asintótica).** Sea  $x^*$  un equilibrio de la ecuación (1.30). Se dice que  $x^*$  es localmente asintóticamente estable (l.a.e.) si existe  $\delta > 0$ , tal que si se cumplen las condiciones

- a)  $|x_0 - x^*| < \delta$
- b)  $x(t; t_0, x_0)$  está definida para todo  $t \geq t_0$ ,

entonces

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; t_0, x_0) = x^*.$$

La estabilidad asintótica de  $x^*$  exige que cualquier trayectoria que en algún instante esté suficientemente cerca de  $x^*$ , converja hacia  $x^*$ . Esta idea está representada en la Figura 1.17.

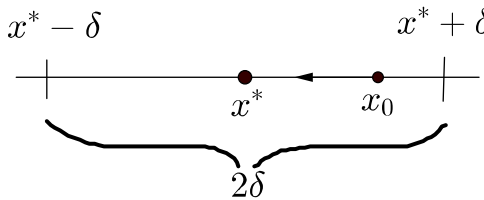


Figura 1.17 Estabilidad asintótica

Si un equilibrio no es asintóticamente estable, se dice que es inestable. Existen dos tipos de inestabilidad; estas son las siguientes:

1. **(Inestabilidad total).** En este caso, todas las trayectorias que en algún momento están cerca del equilibrio resultan alejándose de este. Es el caso del equilibrio repulsor.
2. **(Inestabilidad parcial).** En este caso existen trayectorias que se acercan y otras que se alejan del equilibrio. El equilibrio es inestable, pero no totalmente; es un «equilibrio parcialmente inestable».

Si la convergencia en la estabilidad es para cualquier condición inicial, se dice que el equilibrio es globalmente asintóticamente estable (g.a.e.)

**Definición 6.** Sea  $x^*$  un equilibrio de la ecuación (1.30). Se dice que  $x^*$  es globalmente asintóticamente estable si para cualquier condición inicial  $x(t_0) = x_0$ , la trayectoria correspondiente  $\varphi(t; t_0, x_0)$  converge al equilibrio,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t; t_0, x_0) = x^*$ .

### Ejemplos

**Ej. 24.** Consideremos la ecuación diferencial

$$x' = x(x - 1), \quad F(x) = x(x - 1).$$

Haciendo  $F(x) = 0$ , se obtienen los equilibrios  $x_1^* = 0$  y  $x_2^* = 1$ . Note que el campo vectorial  $F$  es una parábola con vértice el punto  $(1/2, 1/4)$ . En la Figura 1.18 se muestra el campo vectorial y se observa que  $x_1^*$  es localmente asintóticamente estable (un atractor), en tanto que  $x_2^*$  es totalmente inestable (un repulsor).

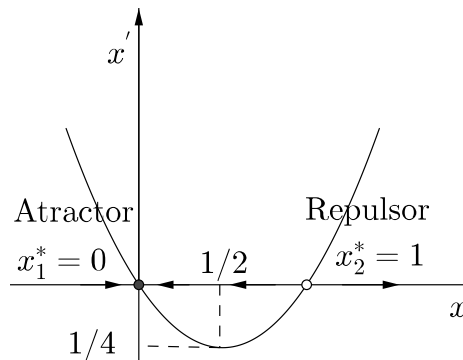


Figura 1.18 Equilibrios de  $F(x) = x(x - 1)$

**Ej. 25. (De vuelta al modelo de Verhulst)**

En el ejemplo 13, la ecuación del modelo de Verhulst se resolvió de manera explícita por el método de separación de variables. Ya que esta ecuación es autónoma, podemos aplicar los criterios vistos en el ejemplo anterior para analizar el modelo. El campo vectorial está dado por la expresión  $F(P) = rP(1 - P/K)$ . Haciendo  $F(P) = 0$ , obtenemos los equilibrios  $P_1^* = 0$  y  $P_2^* = K$ . De (1.29) sabemos que  $P_2^*$  es asintóticamente estable. Además, de la Figura 1.13 se aprecia que para cada condición inicial  $P_0$ , la trayectoria correspondiente,  $P(t; t_0, P_0)$ , es una curva que se aproxima en el infinito al equilibrio  $P_2^*$ ; es decir, en realidad, es un equilibrio globalmente asintóticamente estable. La misma conclusión puede obtenerse a partir del análisis geométrico utilizando la información dada por el campo vectorial. Asimismo, se pueden resaltar otras características importantes de la trayectoria solución; por ejemplo, que para una trayectoria que pasa por determinado punto inicial, esta tiene un punto de inflexión, y pasa de ser convexa a cóncava. Este punto de inflexión no aparece si la condición inicial cambia. Veamos.

El campo vectorial está dado por la parábola de vértice  $V = (K/2, rK/2)$ .

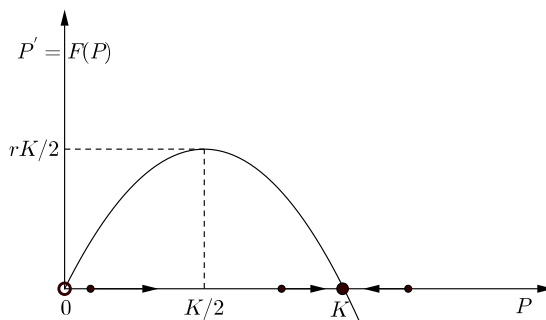


Figura 1.19 Campo vectorial



Para una cantidad de población  $P(t)$  entre  $P(t_0) = 0$  y  $P(t_2) = K$ , la derivada  $P'(t)$  es positiva, por lo que una trayectoria que se encuentre en esta zona será creciente, y tenderá a alejarse del equilibrio nulo,  $P_1^* = 0$  y, más bien, tenderá a acercarse al equilibrio no nulo  $P_2^* = K$ . Siendo positiva, sin embargo,  $P'(t)$  es creciente y decreciente en este tramo. En efecto, de la Figura 1.19 se aprecia que  $P'(t)$  es creciente desde  $P(t_0) = 0$  hasta el punto  $P(t_1) = K/2$ , y decreciente desde este punto hasta  $P(t_2) = K$ . De manera que la trayectoria  $P(t)$  pasa de ser convexa a cóncava, apareciendo un punto de inflexión cuando la cantidad de población es  $P(t_1) = K/2$ . En la literatura, este punto se conoce como «maximal sustainable yield», más o menos algo así como máximo nivel de sostenibilidad. En la Figura 1.20 se muestra el comportamiento de dos trayectorias para sendas condiciones iniciales.

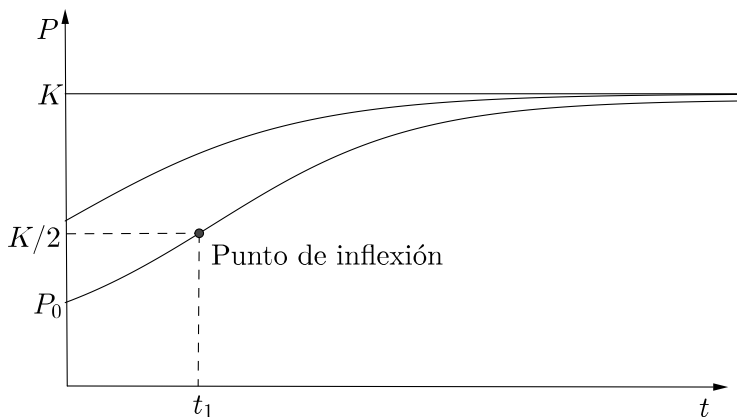


Figura 1.20 Modelo de Verhulst



El siguiente resultado es muy útil y constituye una herramienta complementaria al análisis cuantitativo.

**Teorema 7.** Considere la ecuación (1.30) con  $F$  de clase  $C^1$ . Se cumple lo siguiente:

- a)  $F(x^*) = 0$  y  $F'(x^*) < 0 \Rightarrow x^*$  es localmente asintóticamente estable
- b)  $F(x^*) = 0$  y  $F'(x^*) > 0 \Rightarrow x^*$  es  $x^*$  es inestable

Este resultado se puede mostrar intuitivamente en la Figura 1.21.

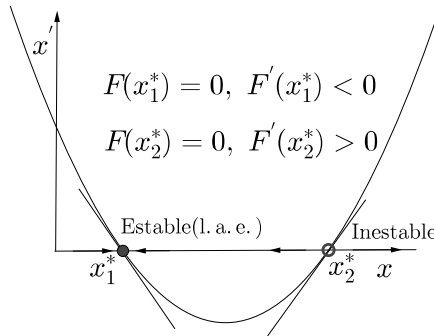


Figura 1.21 Campo vectorial  $F(x)$

El resultado del teorema es intuitivamente obvio; sin embargo, la prueba es un poco técnica, razón por la cual no la hacemos aquí. El teorema es muy práctico, pero no nos dice nada acerca del equilibrio cuando  $F'(x^*) = 0$ . En este caso debemos encontrar argumentos *ad hoc*. Veamos los siguientes ejemplos.

**Ejemplos**

**Ej. 26.** Consideremos el ejemplo 23,  $x' = \sin x$ . Ya que  $F'(x) = \cos x$ , entonces para  $x_1^* = 0$  y  $x_2^* = \pi$  se tiene

- a)  $F'(0) = 1 > 0 \Rightarrow x_1^*$  es inestable
- b)  $F'(\pi) = -1 < 0 \Rightarrow x_2^*$  es asintóticamente estable (atractor)

**Ej. 27.** Consideremos la ecuación  $x' = x^3 + x^2 - x - 1$ . En este caso,  $F(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1)(x + 1)^2$ , de manera que el sistema tiene dos equilibrios:  $x_1^* = -1$  y  $x_2^* = 1$ . Evaluando la derivada de  $F$  en estos equilibrios, tenemos

a)  $F'(-1) = 0$  ?

b)  $F'(1) = 4 \Rightarrow x_2^*$  es inestable.

Para complementar el análisis, tracemos el campo vectorial.

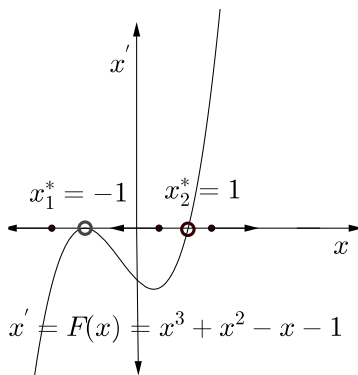


Figura 1.22  $F'(x) \leq 0$

El campo vectorial indica que las trayectorias que se encuentran cerca del equilibrio  $x_2^* = 1$  se alejan de este, por lo que el equilibrio es inestable. Esto es consistente con lo que preveía el teorema 7. En cuanto al equilibrio  $x_1^* = -1$ , sucede algo cualitativamente diferente. Observamos que algunas trayectorias que estando cerca del equilibrio se alejan de él (si está por la izquierda), en tanto que otras, más bien, se acerca a él (si está por la derecha). Por consiguiente,  $x_1^* = -1$  también es inestable. Es un equilibrio parcialmente inestable.



A continuación presentamos el modelo de Solow, ampliamente conocido en la literatura económica y que constituye uno de los principales modelos de la teoría del crecimiento. Veremos que el modelo es bastante apropiado para poner en ejercicio el análisis cualitativo que hemos venido describiendo.

### **Ejemplo**

#### **Ej. 28. (Modelo de crecimiento de Solow)**

En 1956, Robert Solow publicó un artículo en *Quartely Journal of Economics* en el que presenta un modelo de crecimiento económico cuya ecuación fundamental es una ecuación diferencial no lineal, autónoma y que por su naturaleza requiere un análisis cualitativo. Básicamente, el modelo analiza la relación entre el crecimiento económico y la inversión en capital. Para esto, a partir de ciertas hipótesis y simplificaciones sobre la economía, se establecen algunas relaciones sobre las variables de interés que concluyen en una ecuación diferencial conocida como la ecuación fundamental del modelo de Solow.<sup>16</sup>

Enseguida describimos los fundamentos del modelo. Se considera que la economía es cerrada; es decir, no existen exportaciones ni importaciones, ni flujo de capitales con el exterior. También se asume que el gasto del Gobierno es nulo.

#### *Fundamentos*

Sea  $Y(t)$  la producción de un país en el año  $t$  (el producto interno bruto, PIB). Esta producción constituye la renta nacional y se obtiene a partir de la combinación de dos factores: capital y trabajo, denotados por

---

<sup>16</sup>El modelo de Solow es ampliamente conocido en la literatura. Por ejemplo, el lector puede revisar el libro *Economic Growth* de R. Barro y Sala-i-Martin (1995).

$K$  y  $L$ , respectivamente. La manera cómo estos factores se combinan para obtener  $Y(t)$  está dada por una función de producción  $F$ , que representa la tecnología de producción

$$Y(t) = F(K(t), L(t)).$$

El modelo de Solow considera una función de producción de tipo neoclásica; esto es, una función  $F$  de clase  $C^2$  y que tiene las siguientes características:

a)  $F$  posee «rendimientos constantes de escala» o, puesto en términos matemáticos,  $F$  es homogénea de grado uno con respecto al capital y al trabajo:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L), \quad \lambda \in \mathbb{R}_{++}.$$

Esta propiedad significa que si los factores de producción se multiplican por un cierto factor, entonces la producción queda multiplicada por dicho factor. Por ejemplo, si tanto el capital como la mano de obra se duplican, entonces la producción también se duplicará.

b)  $F$  posee «productividades marginales positivas y decrecientes» con respecto al capital y al trabajo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \\ \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0. \end{aligned}$$

Esta propiedad significa que mayores niveles de capital y de trabajo producen, por su lado y de manera independiente, mayores niveles de producción; es decir,  $F$  es una función creciente respecto del capital y del trabajo. Sin embargo, las tasas de crecimiento de cada factor de producción son decrecientes, lo que significa que cada vez la producción crece menos a medida que se incrementan los factores de producción.

c)  $F$  satisface las «condiciones de Inada»:

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial K} &= 0, & \lim_{K \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial K} &= \infty \\ \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial L} &= 0, & \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial L} &= \infty. \end{aligned}$$

Esta propiedad significa que cuando los niveles de capital y de trabajo son muy pequeñas, sus contribuciones marginales a la producción son muy grandes. Por el contrario, cuando los niveles de capital y de trabajo son muy grandes, sus contribuciones marginales a la producción son prácticamente nulas.

Por ejemplo, una función de producción neoclásica muy conocida en la literatura es la función Cobb-Douglas:

$$Y = F(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1.33)$$

En efecto, esta función tiene rendimientos constantes a escala:

$$F(\lambda K, \lambda L) = (\lambda K)^\alpha (\lambda L)^{1-\alpha} = \lambda K^\alpha L^{1-\alpha} = \lambda F(K, L).$$

Por otro lado, las productividades marginales son positivas y decrecientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial K} &= \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} > 0, & \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} &= \alpha(\alpha-1) K^{\alpha-2} L^{1-\alpha} < 0 \\ \frac{\partial F}{\partial L} &= (1-\alpha) K^\alpha L^{-\alpha} > 0, & \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} &= (1-\alpha)(-\alpha) K^\alpha L^{-\alpha-1} < 0. \end{aligned}$$

Finalmente, también se satisfacen las condiciones de Inada:

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow \infty} \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} &= 0, & \lim_{K \rightarrow 0} \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} &= \infty \\ \lim_{L \rightarrow \infty} (1-\alpha) K^\alpha L^{-\alpha} &= 0, & \lim_{L \rightarrow 0} (1-\alpha) K^\alpha L^{-\alpha} &= \infty. \end{aligned}$$

Como la economía es cerrada y no hay gastos del Gobierno, entonces la renta se distribuye entre el consumo de las familias y la inversión de las

empresas: <sup>17</sup>

$$Y(t) = C(t) + I(t) \quad (1.34)$$

Por definición, el ahorro es igual a la renta no consumida; esto es,  $S(t) = Y(t) - C(t)$ . Asumiendo que el ahorro es una proporción de la renta, con tasa de proporcionalidad constante e igual a  $s$ ,  $0 < s < 1$ , entonces se tiene

$$S(t) = sY(t). \quad (1.35)$$

Luego, por (1.34) se tiene

$$I(t) = sY(t). \quad (1.36)$$

Las ecuaciones (1.35) y (1.36) indican que en una economía cerrada y sin gasto público todo el ahorro se destina a la inversión.

Las empresas distribuyen la inversión entre inversión neta, que es la variación del *stock* de capital,  $K'(t)$ , y la inversión necesaria para reponer el capital depreciado. Denotando por  $\delta$  la tasa de depreciación, la ecuación correspondiente es

$$I(t) = K'(t) + \delta K(t). \quad (1.37)$$

El crecimiento de una economía no se mide por su producción agregada, sino por la producción per cápita, es decir, por la cantidad que cada individuo de la sociedad produce.<sup>18</sup> Suponiendo que toda la población constituye la fuerza laboral, entonces  $y(t) \triangleq Y(t)/L(t)$  representa la producción per cápita; y  $k(t) \triangleq K(t)/L(t)$ , el capital

---

<sup>17</sup>Recordemos que, según las cuentas nacionales, la distribución de la renta es  $Y = C + I + X + G$ , donde  $X$  denota exportaciones; y  $G$ , gastos del Gobierno.

<sup>18</sup>El lector puede comparar, por ejemplo, la producción global de la India con la producción global de Suiza. Ciertamente, la primera es mayor que la segunda; sin embargo, en promedio, cada ciudadano suizo es más rico que cada ciudadano indio.

per cápita. Por la propiedad **a)** de  $F$ , la producción per cápita puede expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{F(K(t), L(t))}{L(t)} \\ &= F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right) \\ &= F(k(t), 1). \end{aligned} \tag{1.38}$$

Definiendo  $f(k(t)) \triangleq F(k(t), 1)$ , la igualdad (1.38) se puede escribir como

$$y(t) = f(k(t)). \tag{1.39}$$

Reemplazando (1.36) en (1.37), dividiendo por  $L(t)$  y tomando en cuenta (1.39), se obtiene

$$sf(k(t)) = \frac{K'(t)}{L(t)} + \delta k(t). \tag{1.40}$$

Por otro lado, suponiendo que la población crece a una tasa exógena y constante  $n$ , esto es,  $n = L'(t)/L(t)$  para todo  $t$  tenemos

$$\begin{aligned} k'(t) &= \frac{L(t)K'(t) - K(t)L'(t)}{L^2(t)} \\ &= \frac{K'(t)}{L(t)} - nk(t). \end{aligned} \tag{1.41}$$

Despejando  $K'(t)/L(t)$  de (1.41) y reemplazando en (1.40), se obtiene la ecuación fundamental del modelo de Solow:

$$\boxed{k'(t) = sf(k(t)) - (n + \delta)k(t)} \tag{1.42}$$

Debido a que la función de producción per cápita  $f$  en general es no lineal, para analizar el modelo (1.42) es necesario un análisis cualitativo.<sup>19</sup>

<sup>19</sup>Se requiere un análisis cualitativo no solo porque la función  $f$  en general es no lineal, sino también porque esta función no está dada explícitamente, solo se conoce de ella algunas características de comportamiento; es decir, es neoclásica.



*Análisis cualitativo*

La función de producción per cápita  $f$  hereda las características de la función  $F$ . Por otro lado, ante la ausencia de algún factor de producción, esta es nula; y cuando los factores son abundantes, la producción es muy grande; esto es,

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} F(K, L) = \lim_{L \rightarrow \infty} F(K, L) = \infty.$$

La ecuación diferencial (1.42) es autónoma, en general, no lineal. Definiendo  $G(k) = sf(k(t)) - (n + \delta)k$ , (1.42), puede escribirse como

$$k' = G(k). \quad (1.43)$$

La función  $G(k)$  es la diferencia entre la función  $sf(k)$ , que llamaremos «curva de ahorro» y la curva  $(\delta + n)k$ , que llamaremos «curva de depreciación». Por las hipótesis del modelo,  $f(k)$  es cóncava con respecto al capital  $k$ . Puesto que  $0 < s < 1$ , la curva de ahorro está por debajo de la curva de producción per cápita conservando las mismas características que esta. Por otro lado, la curva de depreciación es una recta que pasa por el origen y que tiene una pendiente constante positiva igual a  $n + \delta$ . La Figura 1.23 describe el modelo de Solow.

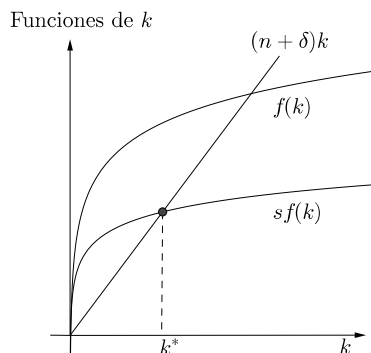


Figura 1.23 Modelo de Solow

Como hemos visto, las hipótesis del modelo implican que  $f(0) = 0$ ; es decir, cuando el capital es  $k = 0$ , no hay producción. La intersección de estas dos curvas genera un punto de equilibrio. Este punto no es de interés económico. Sin embargo, notemos que en este punto la curva de ahorro es casi vertical; y, dado que la curva de depreciación tiene una pendiente finita, entonces, para valores de  $k$  cercanos a cero, la curva de ahorro está por encima de la curva de depreciación. Como la pendiente de la curva de ahorro es casi cero para valores de  $k$  suficientemente grandes, se deduce de la continuidad de  $G$  que, para algún valor  $k^* > 0$ ,  $G(k^*) = sf(k^*) - (n + \delta)k^* = 0$ . Luego,  $k^*$  es un equilibrio de la ecuación (1.43). Como la curva de ahorro tiene una pendiente cada vez más pequeña a medida que  $k$  crece, entonces esta curva no se vuelve a cruzar con la curva de depreciación y, por lo tanto,  $k^*$  es el único equilibrio no nulo de (1.43).

Ahora bien, la Figura 1.23 muestra que para  $k < k^*$ ,  $G'(k) > 0$ , de donde para cualquier trayectoria del capital  $k(t)$  que esté por la izquierda y suficientemente cerca de la solución de equilibrio, ella va a tender hacia el equilibrio. Similarmente, para  $k > k^*$ ,  $G'(k) < 0$ , de donde para cualquier trayectoria del capital  $k(t)$  que esté por la derecha y suficientemente cerca de la solución de equilibrio, ella va a tender hacia el equilibrio. Así,  $k^*$  es un equilibrio atractor.

Una de las conclusiones más importantes del modelo de Solow es que la inversión en capital no es la fuente del crecimiento en el largo plazo. Veamos. Si la cantidad de capital inicial,  $k_0$ , se sitúa por la izquierda de  $k^*$ , la trayectoria del capital,  $k(t)$ , va a crecer sostenidamente dirigiéndose de manera inexorable hacia  $k^*$ , pues este es un equilibrio atractor. El crecimiento del capital induce un crecimiento de la producción, pues  $y$  es función creciente de  $k$ . Sin embargo, este crecimiento es cada vez menor,

pues, como se aprecia en la Figura 1.24, la diferencia entre la curva de ahorro y la curva de depreciación se va haciendo cada vez más pequeña a medida que  $k(t)$  crece implicando, a su vez, que la derivada  $k'$  se hace cada vez más pequeña. Si la derivada es cada vez más pequeña, la tasa de crecimiento del capital es decreciente y, por ende, la producción es menor y termina por extinguirse cuando se «alcanza» el equilibrio.

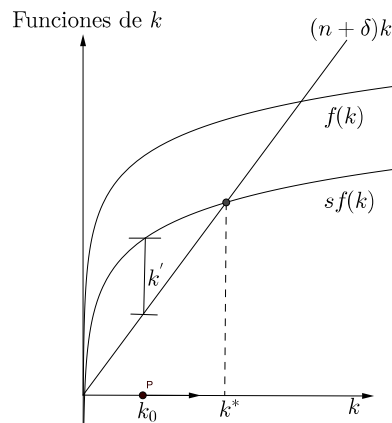


Figura 1.24 Comportamiento del modelo en el largo plazo

El modelo de Solow se analiza ampliamente en cursos de teoría del crecimiento económico. Aquí solo hemos querido tomar el modelo como un ejemplo importante del análisis cualitativo.



## LISTA DE EJERCICIOS

**1.6.1.** La ecuación del ejemplo (20) puede resolverse explícitamente. En efecto, la función nula  $\varphi \equiv 0$  es una solución inmediata. Aparte de esta solución trivial, existen otras soluciones. Por ejemplo, haciendo el cambio

de variable  $u = x/t$ , la ecuación diferencial en términos de la variable  $u$  se convierte en una ecuación de variables separables.

$$u' = \frac{1}{t} \left( \frac{u^2}{1-u} \right)$$

A partir de aquí se generan otras soluciones.

**1.6.2.** Antes, en el ejemplo 23, hemos aplicado un análisis cualitativo para ver cómo se comportan las trayectorias de la ecuación  $x' = \sin x$ . Esta ecuación puede resolverse explícitamente. En efecto, la expresión  $-\ln |\csc x + \cot x| = t + C$  es equivalente a  $\tan(x/2) = Ce^t$ , de aquí se puede despejar fácilmente la variable  $x$  en términos de  $t$ ,  $x = x(t)$ . Una vez que haga esto, obtenga las mismas conclusiones del análisis cualitativo.

**1.6.3.** Con relación al ejemplo 23 explique por qué ninguna trayectoria que comience en un punto distinto al equilibrio podrá alcanzar dicho equilibrio.

**1.6.4.** Con respecto al modelo de Verhulst, resuelva los siguientes ejercicios a partir de la información que provee el campo vectorial.

a) Encuentre el instante  $t$ , donde ocurre el punto de inflexión de la trayectoria  $P(t)$ . Para esto, será necesario que utilice la solución explícita de  $P(t)$  dada en (1.29).

b) Haga el diagrama de fases, esto es, trace las distintas trayectorias para diferentes condiciones iniciales.

c) Basándose en el diagrama de fases, describa el comportamiento de la población cuando esta comienza en  $P_0 > K$ .

**1.6.5.** Con respecto a la ecuación

$$x' = F(x) = (x-2)(x-3)(x-4),$$

a) Determine los equilibrios.

b) Determine la estabilidad de los equilibrios.

**1.6.6.** Con respecto a la ecuación diferencial de la pregunta anterior, describa cómo es la trayectoria que pasa por el punto  $(0, 2.1)$ .

**1.6.7.** Se sabe que la ecuación diferencial

$$x' = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

tiene tres puntos de equilibrio y que uno de ellos es  $x^* = 1$ . Encuentre los demás y determine la estabilidad de todos los equilibrios.

**1.6.8.** Se sabe que la ecuación diferencial  $x' = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$  tiene cuatro puntos de equilibrio y que dos de ellos son  $x^* = -1$  y  $x^* = 1$ . Encuentre los demás y determine la estabilidad de todos los puntos de equilibrio.

**1.6.9.** Analice la estabilidad de los equilibrios de la siguiente ecuación:

$$x' = x^5 - \alpha x^3, \quad \alpha > 0.$$

**1.6.10.** Como se ha dicho, una de las conclusiones del modelo de Solow es que no hay crecimiento en el largo plazo. Analice si cambia esta conclusión alterando la tasa de ahorro.

**1.6.11.** Respecto del modelo de Solow, pruebe que la función de producción per cápita hereda las propiedades de la función de producción agregada.

**1.6.12.** Respecto del modelo de Solow, pruebe que si  $F = F(K(t), L(t))$  es una función de producción neoclásica, entonces  $F(0, L(t)) = F(K(t), 0) = 0$ .

## 1.7. Bifurcaciones

La teoría de bifurcaciones estudia el efecto cualitativo sobre un sistema dinámico que produce una alteración de los parámetros del sistema. La alteración de los parámetros puede producir cambios dramáticos en el sistema, pues pueden aparecer soluciones de equilibrio que antes no existían o, al contrario, pueden desaparecer los que ya existían. También puede ocurrir que la estabilidad de un equilibrio cambie su naturaleza y pase de ser estable a inestable o viceversa. Muchos cambios pueden ocurrir y afectar las características cualitativas del fenómeno bajo estudio, razón por la que la teoría de bifurcaciones es tan importante para un mejor entendimiento de dicho fenómeno. La teoría de bifurcaciones es un área de investigación muy activa en particular en economía dinámica. En esta sección se hace una breve introducción al tema y se presentan tres ejemplos típicos o canónicos de bifurcaciones que aparecen en las ecuaciones escalares. Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  un escalar cualquiera. Para enfatizar la presencia del parámetro  $\alpha$ , escribimos la ecuación diferencial en la siguiente forma:

$$x' = F(x, \alpha), \quad (1.44)$$

donde  $F$  es de clase  $C^1$ .

### *Preliminares*

Los fundamentos teóricos sobre los cuales se basa el análisis local de la teoría de bifurcaciones son el teorema de la función implícita y el teorema de Taylor. Recordemos brevemente estos dos teoremas.

**Teorema 8. (Teorema de la Función Implícita).** Sea  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$ . Si en el punto  $(x^*, \bar{\alpha}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  se cumple que

$$\mathbf{a)} \quad F(x^*, \bar{\alpha}) = 0, \quad \mathbf{b)} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, \bar{\alpha}) \neq 0,$$

entonces existe una única función  $x = x(\alpha)$  de clase  $C^1$  en una vecindad  $\mathcal{N}$  de  $(x^*, \bar{\alpha})$ , tal que  $F(x(\alpha), \alpha) = 0$  para todo  $(x, \alpha) \in \mathcal{N}$ .

La curva  $x = x(\alpha)$  se llama «brazo de equilibrios». Observe que si no se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita puede ocurrir que en el punto  $(x^*, \bar{\alpha})$  aparezca más de un brazo de equilibrios, en cuyo caso a este punto se le llama «punto de bifurcación» y a cada brazo  $x = x(\alpha)$ , «brazo de bifurcación». El gráfico de todos estos brazos en el plano  $\alpha - x^*$  se llama «diagrama de bifurcación». El valor del parámetro en el cual se produce el punto de bifurcación se llama «parámetro de bifurcación».

Muchas ecuaciones presentan bifurcaciones que son del mismo tipo de las tres que se presentan aquí. El teorema de Taylor nos permitirá ver esto con bastante claridad.

**(Aproximación de Taylor).** Sea  $F$  una función de clase  $C^\infty$  en una vecindad del punto  $(x^*, \bar{\alpha})$ . Entonces, para todo  $(x, \alpha)$  en dicha vecindad se tiene

$$\begin{aligned} F(x, \alpha) &= F(x^*, \bar{\alpha}) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{(x^*, \bar{\alpha})} (x - x^*) + \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{(x^*, \bar{\alpha})} (\alpha - \bar{\alpha}) \\ &+ \frac{1}{2!} \left[ \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{(x^*, \bar{\alpha})} (x - x^*)^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \alpha} \right|_{(x^*, \bar{\alpha})} (x - x^*)(\alpha - \bar{\alpha}) \right. \\ &+ \left. \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} \right|_{(x^*, \bar{\alpha})} (\alpha - \bar{\alpha})^2 \right] \\ &+ \dots \end{aligned}$$

**Definición 7.** Se dice que  $x^*$  es un equilibrio hiperbólico de la ecuación (1.44), con  $\alpha = \bar{\alpha}$ , si se cumple que

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{(x^*, \bar{\alpha})} \neq 0. \quad (1.45)$$

De acuerdo con el teorema 7, si un equilibrio es hiperbólico, siempre puede determinarse su estabilidad, que depende del signo de la derivada (1.45). El siguiente teorema indica que la estabilidad de un equilibrio hiperbólico no cambia frente a cambios pequeños en el valor del parámetro. Si el equilibrio es hiperbólico, entonces no hay espacio para que se presente una bifurcación.

**Teorema 9.** Considere que para  $\alpha = \bar{\alpha}$ ,  $x = x^*$  es un equilibrio hiperbólico del sistema (1.44). Entonces, existen  $\epsilon > 0$  y  $\delta > 0$ , tales que para cada  $\alpha$  en la vecindad  $\mathcal{B}(\bar{\alpha}, \epsilon)$  existe un único  $x$  en la vecindad  $\mathcal{B}(x^*, \delta)$ , siendo  $x$  un equilibrio hiperbólico con el mismo tipo de estabilidad que  $x^*$ .

*Demostración.* Por hipótesis, tenemos  $F(x^*, \bar{\alpha}) = 0$ . Además, puesto que  $x^*$  es un equilibrio hiperbólico, entonces  $[\partial F / \partial x](x^*, \bar{\alpha}) \neq 0$ . Por lo tanto, por el teorema de la función implícita existe una vecindad  $\mathcal{B}(\bar{\alpha}, \epsilon) \times \mathcal{B}(x^*, \delta)$  del punto  $(x^*, \bar{\alpha})$ , donde  $x$  es función única de  $\alpha$ ,  $x = x(\alpha)$ . Además,  $F(x(\alpha), \alpha) = 0$  y  $x^* = x(\bar{\alpha})$  en dicha vecindad. Puesto que  $F(x(\alpha), \alpha) = 0$ , entonces para cada  $\alpha$  en la vecindad  $\mathcal{B}(\bar{\alpha}, \epsilon)$ ,  $x(\alpha)$  es un equilibrio de la ecuación (1.44). Finalmente, como  $F$  es de clase  $C^1$ , entonces  $[\partial F / \partial x](x(\alpha), \alpha) \cong [\partial F / \partial x](x^*, \bar{\alpha})$ , de donde  $x(\alpha)$  también es hiperbólico con el mismo tipo de estabilidad de  $x^*$ .  $\square$

El teorema 9 implica que es necesario que el punto  $(x^*, \bar{\alpha})$  no sea hiperbólico para que se presente una bifurcación en dicho punto. Sin embargo, esta condición no es suficiente. Efectivamente, veamos el siguiente ejemplo.

### Ejemplos

**Ej. 29.** Consideremos la ecuación  $x' = \alpha - x^3 = F(x, \alpha)$ .



Puesto que el único brazo de equilibrios es  $x(\alpha) = \sqrt[3]{\alpha}$ , esta ecuación no presenta bifurcaciones. En particular, en el punto  $(x^*, \bar{\alpha}) = (0, 0)$  hay un solo brazo de equilibrios aun cuando  $[\partial F/\partial x](x^*, \bar{\alpha}) = 0$ .

### Ej. 30. (De vuelta al modelo de Solow)

Recordemos del modelo de Solow, ecuación (1.42), que en el punto de equilibrio  $k^*$  se tiene

$$F'(k^*) = sf'(k^*) - (n + \delta) < 0.$$

Por lo tanto, el equilibrio  $k^*$  es hiperbólico y, según el teorema 9, no hay espacio para que en este punto ocurra una bifurcación, para cualquier valor de los parámetros involucrados  $s, n$  o  $\delta$ . En particular, esto quiere decir que no se puede cambiar la estabilidad del equilibrio  $k^*$  cambiando el valor de los parámetros. Tampoco se crean o desaparecen equilibrios, no ocurre ningún cambio dramático en la naturaleza del modelo.



En seguida presentamos tres casos típicos de bifurcaciones para sistemas dinámicos escalares que poseen un solo parámetro. Estas bifurcaciones son, por sus nombres en inglés, la bifurcación tipo *Fold*, la bifurcación tipo *Transcrítica* y la bifurcación tipo *Pitchfork*. Se muestran estos casos a través de ejemplos concretos llamados «Formas normales» o «canónicas», debido a que muchos modelos presentan este tipo de bifurcación.

#### Bifurcación tipo «Fold»

Esta bifurcación, también llamada bifurcación *Saddle-node*, tiene la siguiente forma normal:

$$\boxed{x' = x^2 + \alpha = F(x, \alpha)} \tag{1.46}$$

El parámetro  $\alpha$  de (1.46) puede interpretarse como una perturbación de la ecuación  $x' = x^2$ . Por consiguiente, nuestro objetivo es investigar cómo este parámetro afecta cualitativamente a la ecuación no perturbada.

La Figura 1.25 muestra el campo vectorial para todos los valores posibles de  $\alpha$ . Observamos que si  $\alpha > 0$ , la ecuación no posee equilibrios, y en este caso no hay nada que discutir. Sin embargo, cuando  $\alpha = 0$ , aparece un equilibrio, el equilibrio nulo,  $x^* = 0$ . Como se aprecia en la Figura 1.25, es un equilibrio parcialmente inestable. Ciertamente, ha ocurrido un cambio cualitativo en la estructura de la ecuación, pues ahora hay un equilibrio que antes no existía. Hasta aquí, sin embargo, no hay todavía ninguna bifurcación. Avancemos un poco más. Si  $\alpha < 0$ , aparecen en la ecuación dos equilibrios: uno repulsor y otro atractor. Se produce, pues, un cambio significativo en el sistema. Variando  $\alpha$ , pero manteniéndolo negativo, siempre van a aparecer de cada lado del eje vertical  $x'$  dos equilibrios de naturaleza completamente opuesta. Se forman, pues, dos brazos de equilibrios y aparece una bifurcación.

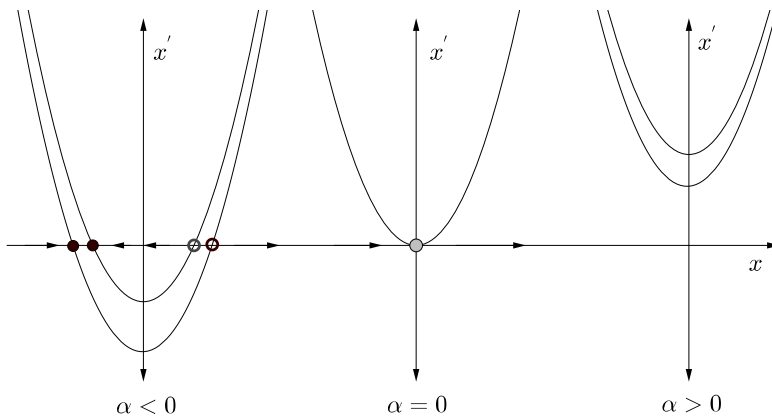


Figura 1.25 Campo vectorial:  $F(x, \alpha) = x^2 + \alpha$

Es claro que la bifurcación aparece cuando  $\bar{\alpha} = 0$ . En este caso,  $x^* = 0$ ; de manera que  $(\bar{\alpha}, x^*) = (0, 0)$  es un punto de bifurcación. A continuación calculamos analíticamente los brazos de bifurcación.

Para encontrar los brazos de equilibrios hacemos  $F(x, \alpha) = 0$ . De aquí se obtiene

$$x^*(\alpha) = \pm\sqrt{-\alpha}, \quad \alpha < 0.$$

Para  $\alpha < 0$  aparecen dos brazos de equilibrios,  $x^*(\alpha) = -\sqrt{-\alpha}$  y  $x^*(\alpha) = \sqrt{-\alpha}$ . La unión de ambos brazos forman una parábola con vértice en el origen y eje focal coincidente con el eje  $\alpha$ .

El «diagrama de bifurcación» muestra la relación entre los distintos valores que va tomando el parámetro  $\alpha$  y los equilibrios que se van generando. En particular, el diagrama muestra el punto de bifurcación y los brazos de equilibrios que surgen a partir de dicho punto. A continuación, en la Figura 1.26 se muestra el diagrama correspondiente a la bifurcación tipo Fold.

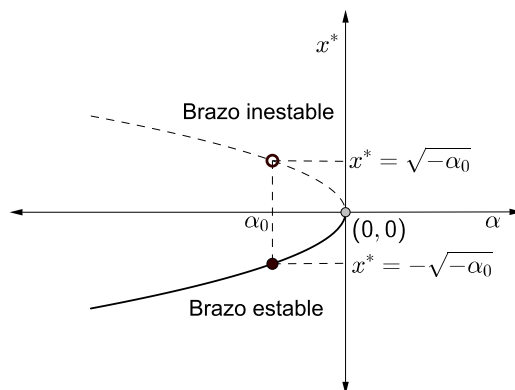


Figura 1.26 Diagrama de bifurcación tipo Fold

Observe que si los signos de la forma normal cambian, esto es, si se tuviese  $x' = \pm x^2 \pm \alpha$ , entonces el diagrama de bifurcación sería esencialmente de la misma forma; esto es, dos brazos de equilibrios: uno estable y el otro inestable y los equilibrios solo se presentan a partir de un valor específico del parámetro; del otro lado de este, los equilibrios desaparecen.

Bifurcación tipo «Transcritical»

Esta bifurcación tiene la siguiente forma normal:

$$\boxed{x' = \alpha x - x^2 = F(x, \alpha)} \tag{1.47}$$

La Figura 1.27 muestra el campo vectorial de la ecuación para todos los posibles valores de  $\alpha$ . Se aprecia que, para  $\alpha = 0$ , la ecuación tiene como único equilibrio el equilibrio nulo, que es parcialmente inestable. Cuando  $\alpha < 0$ , se genera, además del equilibrio nulo, un equilibrio no nulo de tipo repulsor. Análogamente, cuando  $\alpha > 0$ , se genera, además del equilibrio nulo, un equilibrio no nulo de tipo atractor. Así, a medida que  $\alpha$  va tomando valores negativos o positivos, se van generando brazos de equilibrios, por lo que  $(\bar{\alpha}, x^*) = (0, 0)$  es un punto de bifurcación.

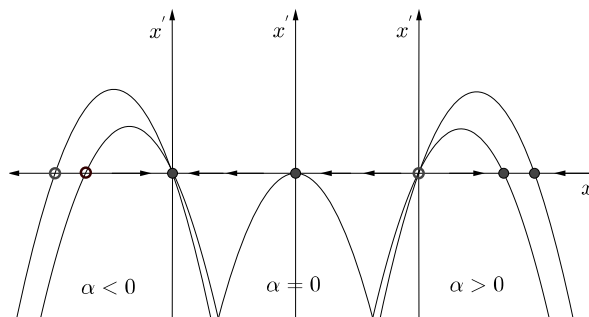


Figura 1.27 Campo vectorial:  $F(x, \alpha) = \alpha x - x^2$

Para encontrar los brazos de equilibrio, hacemos  $F(x, \alpha) = 0$ . De aquí se obtiene

$$x^*(\alpha) = 0, \quad x^*(\alpha) = \alpha.$$

De manera que los brazos de equilibrios son la recta horizontal  $x^*(\alpha) = 0$ , que coincide con el eje  $\alpha$  y la recta  $x^*(\alpha) = \alpha$ , de pendiente uno.

La Figura 1.28 muestra el diagrama de bifurcación.

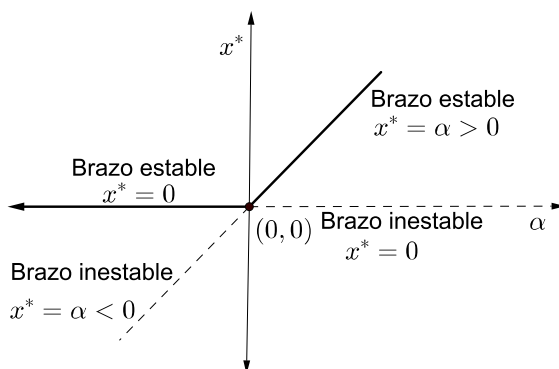


Figura 1.28 Diagrama de bifurcación tipo Transcritical

### Bifurcación tipo «Pitchfork»

Esta bifurcación tiene la siguiente forma normal:

$$\boxed{x' = \alpha x - x^3 = F(x, \alpha)} \quad (1.48)$$

La Figura 1.29 muestra el campo vectorial de la ecuación. Se aprecia que, para  $\alpha = 0$ , el equilibrio nulo es un atractor. Cuando  $\alpha < 0$ , este equilibrio se mantiene y sigue siendo atractor. Cuando  $\alpha > 0$ , el equilibrio nulo aún se mantiene, pero se vuelve inestable tipo repulsor. Aparecen, además, dos equilibrios no nulos atractores. Uno de estos equilibrios es negativo; y el otro, positivo, y se generan distintos brazos de equilibrios. Así pues,  $(\bar{\alpha}, x^*) = (0, 0)$  es un punto de bifurcación.

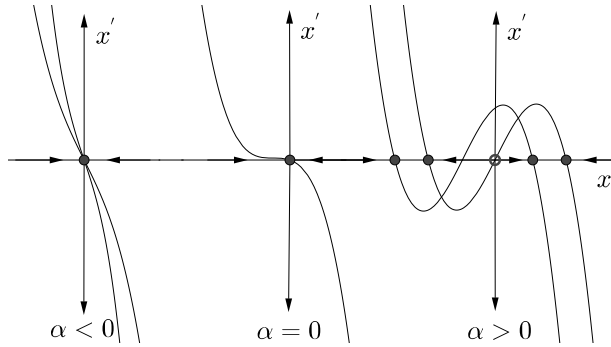


Figura 1.29 Campo vectorial:  $F(x; \alpha) = \alpha x - x^3$

Para encontrar los brazos de equilibrios, hacemos  $F(x, \alpha) = 0$ . De aquí se obtiene

$$x^*(\alpha) = 0 \text{ y } x^*(\alpha) = \pm\sqrt{\alpha}, \alpha > 0.$$

Hay tres brazos de equilibrios:  $x^*(\alpha) = 0$ ,  $x^*(\alpha) = -\sqrt{\alpha}$  y  $x^*(\alpha) = \sqrt{\alpha}$ . El diagrama de bifurcación es el que se muestra en la Figura 1.30.

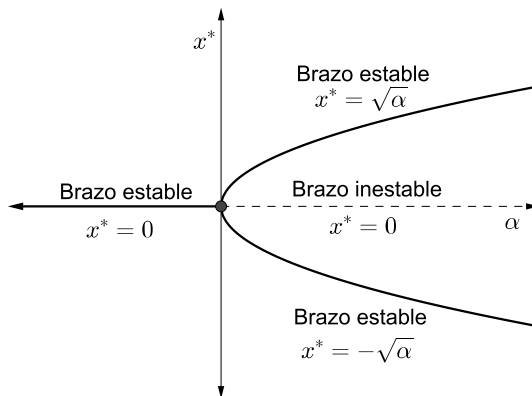


Figura 1.30 Diagrama de bifurcación tipo Pitchfork

OBSERVACIÓN

El siguiente argumento intuitivo permite la lógica del teorema 10, presentado más adelante. Supongamos que en el punto  $(x^*, \bar{\alpha})$  se cumple

$$F(x^*, \bar{\alpha}) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, \bar{\alpha}) = 0.$$

Así  $(x^*, \bar{\alpha})$  es un posible punto de bifurcación. Supongamos, además, que se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(x^*, \bar{\alpha}) = a \neq 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x^*, \bar{\alpha}) = b \neq 0.$$

Entonces, por la aproximación de Taylor en una vecindad muy pequeña del punto  $(x^*, \bar{\alpha})$  se tiene

$$F(x, \alpha) \cong a(\alpha - \bar{\alpha}) + \frac{1}{2}b(x - x^*)^2, \quad (1.49)$$

donde se ha descartado el resto de términos por ser muy pequeños. Haciendo  $x^* = 0$  y  $\bar{\alpha} = 0$ , (1.49) queda

$$F(x, \alpha) \cong a\alpha + \frac{1}{2}bx^2. \quad (1.50)$$

La expresión del lado derecho de (1.50) es básicamente la misma expresión de la forma normal de la bifurcación tipo *Fold*. Es claro que las ecuaciones  $x' = a\alpha + \frac{1}{2}bx^2$  y  $x' = x^2 + \alpha$  tendrán el mismo comportamiento cualitativo cerca de sus puntos de bifurcación. Es decir, el campo  $F(x, \alpha)$  presentará también una bifurcación tipo *Fold*.

En general, el siguiente teorema permite discernir el tipo de bifurcación que presenta una ecuación diferencial.

**Teorema 10.** (Lorenz, 1993) Sea el campo  $F$  de la ecuación (1.44) una función de clase  $C^2$  en una vecindad del punto  $(x^*, \bar{\alpha})$  y supongamos que este punto satisface las condiciones necesarias para un punto de bifurcación:

$$F(x^*, \bar{\alpha}) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, \bar{\alpha}) = 0$$

1. Si

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial \alpha}(x^*, \bar{\alpha}) \neq 0 \text{ y } \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x^*, \bar{\alpha}) \neq 0},$$

entonces  $(x^*, \bar{\alpha})$  es un punto de bifurcación tipo Fold.

2. Si

$$\boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial x}(x^*, \bar{\alpha}) \neq 0 \text{ y } \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x^*, \bar{\alpha}) \neq 0},$$

entonces  $(x^*, \bar{\alpha})$  es un punto de bifurcación tipo Transcritical.

3. Si

$$\boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial x}(x^*, \bar{\alpha}) \neq 0 \text{ y } \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(x^*, \bar{\alpha}) \neq 0},$$

entonces  $(x^*, \bar{\alpha})$  es un punto de bifurcación tipo Pitchfork.

### Ejemplo

**Ej. 31.** Apliquemos este resultado a los tres casos normales de bifurcaciones.

1. Fold:  $x' = x^2 + \alpha = F(x, \alpha)$ ;  $(x^*, \bar{\alpha}) = (0, 0)$ . Entonces,

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(0, 0) = 1 \neq 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) = 2 \neq 0.$$

Por consiguiente, en el punto  $(x^*, \bar{\alpha}) = (0, 0)$  se presenta una bifurcación Fold.

2. Transcritical:  $x' = \alpha x - x^2 = F(x, \alpha)$ ;  $(x^*, \bar{\alpha}) = (0, 0)$ . Entonces,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial x}(0, 0) = -2 \neq 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) = -2 \neq 0.$$

Por consiguiente, en el punto  $(x^*, \bar{\alpha}) = (0, 0)$  se presenta una bifurcación Transcritical.

3. Pitchfork:  $x' = \alpha x - x^3 = F(x, \alpha)$ ;  $(x^*, \bar{\alpha}) = (0, 0)$ . Entonces,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial x}(0, 0) = 1 \neq 0, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(0, 0) = -6 \neq 0.$$



Por consiguiente, en el punto  $(x^*, \bar{\alpha}) = (0, 0)$  se presenta una bifurcación Pitchfork.



### Ejemplo

**Ej. 32. (Mercado de trabajo).** En el mercado de trabajo confluyen empresas, que van en busca de trabajadores e individuos que ofrecen sus servicios. Consideremos un modelo simple para la transacción que se genera entre empresas e individuos. Denotemos por  $w$  el salario real y supongamos que la demanda y la oferta de trabajo dependen de  $w$  según las funciones  $L^d(w)$  y  $L^s(w)$  dadas en (1.51) y (1.52), respectivamente. Supongamos que la función de demanda decrece linealmente con respecto al salario y que está parametrizada por  $\alpha$ , como sigue:

$$L^d(w) = \alpha - bw, \quad b > 0. \tag{1.51}$$

Observe que cuando el salario  $w$  es muy bajo, el parámetro  $\alpha$  representa la máxima cantidad de trabajo demandada por las empresas. Ciertamente, si el salario es muy alto, la demanda de trabajadores decae significativamente. Supongamos también que no se dispone explícitamente de una función para la oferta, pero sí sabemos cómo se comporta. A medida que el salario crece, mayor es la oferta, pues los individuos se ven estimulados a ofrecer sus servicios por un mejor salario. Esta oferta, sin embargo, llega hasta un nivel crítico, correspondiente al salario  $w_c$ , y a partir del cual la oferta comienza a decrecer, pues a medida que aumenta el salario, menor es la cantidad de individuos que pueden ofrecer sus servicios (por ejemplo, porque no disponen de la preparación suficiente). Más formalmente, podemos suponer que la función de oferta

es diferenciable con las siguientes características:

$$\frac{dL^s}{dw}(w) > 0, \quad w < w_c, \quad \wedge \quad \frac{dL^s}{dw}(w) < 0, \quad w > w_c \quad (1.52)$$

$$\frac{d^2L^s}{dw^2}(w) < 0, \quad L^s(0) = 0. \quad (1.53)$$

Asumamos ahora que la tasa de cambio del salario es proporcional al exceso de la demanda sobre la oferta:

$$w' = \beta(L^d(w) - L^s(w)), \quad \beta > 0.$$

Esta ecuación indica que si la demanda es superior a la oferta, el salario tiende a subir. En efecto, si la demanda de trabajo es mayor que la cantidad de individuos que ofrecen sus servicios, las empresas se verán obligadas a subir el salario para estimularlos a que se incorporen al mercado de trabajo. Por el contrario, si la oferta laboral es mayor que la demanda, habrá un exceso de individuos que ofrecen sus servicios, y eso deprimirá los salarios.

El modelo dinámico es

$$w' = F(w, \alpha) = \beta(\alpha - bw - L^s(w)).$$

La Figura 1.31 muestra la curva  $L^s$  de acuerdo con las hipótesis (1.52) y (1.53). También se muestra la curva  $L^d$  para distintos valores del parámetro  $\alpha$ . Observe que  $w_1^*$  es un equilibrio atractor y que  $w_2^*$  es un equilibrio repulsor. La Figura 1.31 también muestra que cuando  $w = w_c$ , la oferta alcanza su mayor nivel. Es claro que en el punto  $(w^*, \bar{\alpha})$  se presenta una bifurcación. Cuando  $\alpha < \bar{\alpha}$ , aparecen dos brazos de equilibrios, siendo repulsores aquellos equilibrios que están del lado izquierdo de  $w^*$  y atractores aquellos que están del lado derecho.

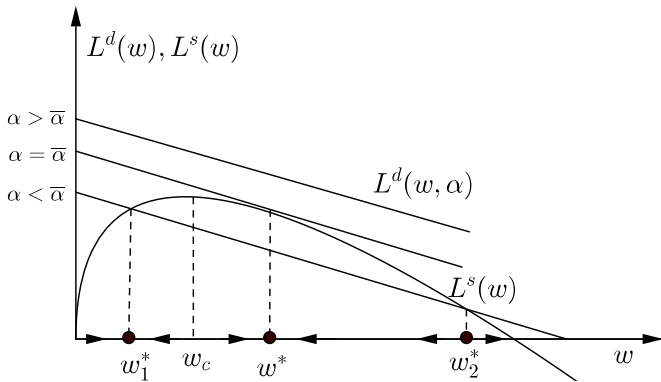


Figura 1.31 Mercado de trabajo

Veamos enseguida que se puede llegar a las mismas conclusiones aplicando las herramientas analíticas que hemos presentado antes.

De acuerdo con el teorema 10, un punto de bifurcación  $(w^*, \bar{\alpha})$  debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$F(w, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial w}(w, \alpha) = 0$$

o, equivalentemente,

$$L^d(w) = \alpha - bw = L^s(w), \quad -b = \frac{dL^s}{dw}(w).$$

La primera ecuación es la condición de equilibrio, y la segunda es una condición de tangencia entre las curvas de demanda y de oferta.

Debido a las hipótesis (1.51)-(1.53), la recta  $L^d$  se interseca a lo más dos veces con la curva  $L^s$  para cierto valor del parámetro  $\alpha$ . Consideremos un valor de  $\alpha$  para el cual existen dos puntos de intersección. Estos puntos corresponden, a su vez, a dos niveles de equilibrio del salario  $w$ . Denotemos estos equilibrios por  $w_1^*$  y  $w_2^*$ . Por el teorema del valor

medio, existe  $w^*$ , con  $0 < w_1^* < w^* < w_2^*$ , que satisface la condición de tangencia y, por ende, la condición de equilibrio. En efecto, existe  $w^*$ , tal que

$$\begin{aligned} \frac{dL^s}{dw}(w^*) &= \frac{L^s(w_2^*) - L^s(w_1^*)}{w_2^* - w_1^*} \\ &= \frac{\alpha - bw_2^* - \alpha + bw_1^*}{w_2^* - w_1^*} \\ &= \frac{b(w_1^* - w_2^*)}{w_2^* - w_1^*} \\ &= -b. \end{aligned}$$

Por las mismas hipótesis (1.51)-(1.53) se deduce que  $w^*$  es único y que  $w^* > w_c$ .

El correspondiente valor del parámetro  $\alpha$  para el nivel de equilibrio  $w^*$  se obtiene de la condición de equilibrio:

$$\bar{\alpha} = L^s(w^*) + bw^*.$$

Ahora bien, del sistema dinámico se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(w^*, \bar{\alpha}) = \beta \neq 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial w^2}(w^*, \bar{\alpha}) = -\beta \frac{d^2 L^s}{dw^2}(w^*) \neq 0.$$

Por lo tanto, se satisfacen las hipótesis del teorema 10-1 y, entonces,  $(w^*, \bar{\alpha})$  es un punto de bifurcación tipo *Fold*. La Figura 1.31 muestra que cuando  $\alpha < \bar{\alpha}$ , hay dos ramas de equilibrios, como sabemos, una estable y otra inestable. Si  $\alpha = \bar{\alpha}$ , el modelo se encuentra en el punto de bifurcación; y si  $\alpha > \bar{\alpha}$ , no hay puntos de equilibrio, lo que significa que, o bien la demanda de trabajo está por encima de la oferta, o bien por debajo.

Para determinar de qué lado están las ramas estable e inestable aplicamos el teorema 7. Sea  $w^{**}$  otro equilibrio del modelo (este equilibrio,

o bien está en la rama estable, o bien en la rama inestable). Veamos.

$$\frac{\partial F}{\partial w}(w^{**}, \bar{\alpha}) = \beta \left( -b - \frac{dL^s}{dw}(w^{**}) \right).$$

Por lo tanto,  $w^{**}$  es estable si

$$\frac{\partial F}{\partial w}(w^{**}, \bar{\alpha}) < 0 \Leftrightarrow \frac{dL^s}{dw}(w^{**}) > -b.$$

Esto significa que los equilibrios estables (atractores) están del lado en el cual la curva de oferta tiene mayor pendiente que la curva de demanda; esto es,  $w^{**} < w^*$ . Al contrario, si  $w^{**} > w^*$ , el equilibrio  $w^{**}$  es inestable (repulsor).



### LISTA DE EJERCICIOS

**1.7.1.** Analice la ecuación  $x' = F(x, \alpha)$  y haga el diagrama de bifurcación para las siguientes funciones:

- a)  $F(x, \alpha) = \alpha - x^2$
- b)  $F(x, \alpha) = \alpha x + x^2$
- c)  $F(x, \alpha) = \alpha x + 4x^2$
- d)  $F(x, \alpha) = \alpha - x - e^{-x}$
- e)  $F(x, \alpha) = 1 + \alpha x - x^2$
- f)  $F(x, \alpha) = x^2 + \alpha x + 1$
- g)  $F(x, \alpha) = \alpha x - \ln(1 + x)$

**1.7.2.** Considere la ecuación

$$x' = -2x^4 - 4x^2 + \alpha x^2,$$

donde  $\alpha \in \mathbb{R}$  es un parámetro.

- a) La solución constante  $x^* = 0$  es un equilibrio. ¿Existe algún valor del parámetro  $\alpha$  que elimine este equilibrio?

- b)** Encuentre los equilibrios y analice la estabilidad de estos de acuerdo con el valor del parámetro  $\alpha$ .
- c)** Identifique el punto de bifurcación.
- d)** Haga el diagrama de bifurcación.



# Capítulo 2

## Sistemas dinámicos lineales

### 2.1. Introducción

En este capítulo se estudian exhaustivamente los sistemas dinámicos lineales. Aun cuando gran parte de los modelos económicos son no lineales, es fundamental entender primero los sistemas lineales, pues la comprensión matemática de estos constituye una buena base teórica para entender las complejidades inherentes de los sistemas no lineales.

Puesto que diversos resultados de la teoría de los sistemas lineales de dimensión superior son una extensión natural de los resultados obtenidos para sistemas de dimensión 2, el énfasis de este capítulo está puesto en estos últimos.<sup>1</sup>

La organización de este capítulo es como sigue. Puesto que la solución de un sistema lineal se presenta desde la perspectiva de la exponencial matricial, en la sección 2.2 se introduce formalmente este concepto y se estudian algunas de sus propiedades fundamentales.

---

<sup>1</sup>Además, por lo general los modelos económicos con los que uno se encuentra en la literatura ocurren o se reducen a sistemas de dimensión 2. A estos sistemas también se les conoce como sistemas planares.



El comportamiento de la solución de un sistema lineal está determinado por los valores característicos de la matriz que determina al sistema y, de acuerdo con esto, aparecen diversos casos por analizar. En la sección 2.3 se estudian con detalle todos los casos posibles que se pueden presentar.

En la sección 2.4 se introducen dos subespacios vectoriales importantes relacionados con el sistema. Estos subespacios, llamados «subespacio estable» y «subespacio inestable», están relacionados con los puntos de equilibrio tipo silla que suelen presentarse en las aplicaciones. La existencia de tales espacios permite diseñar soluciones que tengan un comportamiento deseable o con sentido económico.

Finalmente, los sistemas lineales con variables de entrada externa, también llamados «no homogéneos», se estudian en la sección 2.5.

## EL SISTEMA

Como antes,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  denota la variable de estado en el instante  $t$  y  $x'(t)$ , su tasa de cambio en dicho instante. Puesto que  $x(t)$  es un vector de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $x'(t)$  también es un vector de  $\mathbb{R}^n$  y sus entradas son las correspondientes tasas de cambio de cada entrada del vector  $x(t)$ :

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \Rightarrow x'(t) = \begin{bmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{bmatrix}.$$

Como antes, para simplificar, en adelante suprimiremos el argumento temporal cuando escribamos  $x(t)$  o  $x'(t)$ .

### **Ejemplo**

#### **Ej. 33. (Modelo de competencia)**

Las ciudades  $A$  y  $B$  de un determinado país compiten por la captación de turistas y, por ello, deciden invertir en publicidad. Sean  $x_1$  y  $x_2$  las cantidades invertidas por  $A$  y  $B$ , respectivamente. Estas inversiones cambian en el tiempo en función de cómo se van incrementando las cantidades de turistas en ambas ciudades. Sus tasas de inversión tienen la siguientes dinámicas:

$$\begin{aligned}x_1' &= -ax_1 + bx_2, & a, b > 0, \\x_2' &= cx_1 - dx_2, & c, d > 0.\end{aligned}$$

El signo negativo que precede a los coeficientes  $a$  y  $d$  significa que, cuando el gasto en exceso es muy alto, la tasa de inversión en publicidad tiende a bajar. Por el contrario, esta tasa tiende a subir si la competencia tiene una inversión muy alta, lo que está indicado por el signo positivo que precede a los coeficientes  $b$  y  $c$ . El signo de estos coeficientes representa la reacción de una estrategia frente a la otra.

El par de ecuaciones diferenciales presentado arriba constituye un modelo dinámico sencillo que describe cómo las ciudades  $A$  y  $B$  deciden sus inversiones. Estas decisiones dependen no solo de las decisiones propias, sino también de las decisiones de la contraparte. Reuniendo los coeficientes  $a, b, c$  y  $d$  en una matriz  $A$ , el modelo puede escribirse de manera más compacta como la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & b \\ c & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \equiv x' = Ax.$$



Muchas situaciones reales, donde las variables de interés están sujetas a cambios instantáneos, pueden plantearse bajo la forma de una ecuación

diferencial matricial como en el ejemplo anterior. En general, tenemos la siguiente definición.

**Definición 8.** Sean  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ . Un sistema dinámico lineal, de primer orden y de dimensión  $n$  es una ecuación de la forma

$$x' = Ax. \quad (2.1)$$

La matriz  $A$ , conocida como matriz de coeficientes, determina al sistema en el sentido de que el estudio de la ecuación se basa en el análisis de algunas características importantes de esta matriz.<sup>2</sup>

Observe que la ecuación (2.1) es una generalización de la ecuación escalar lineal  $x' = ax$ , que se estudió en el capítulo 1. No resultará extraño, por tanto, que las propiedades de la ecuación (2.1) sean esencialmente las mismas que las de la ecuación (1.17). En particular, las soluciones tienen la misma forma exponencial y la estabilidad del sistema depende del «signo» de la matriz  $A$ . Sin embargo, al ampliarse la dimensión, el sistema se enriquece en propiedades y características y su solución se vuelve más compleja.

## LA SOLUCIÓN

Para comenzar el análisis del sistema (2.1), veamos dos ejemplos sencillos que muestran cómo aparecen de manera natural expresiones exponenciales en la solución del sistema. Veremos que esto no es una casualidad, sino que obedece a una razón de fondo relacionada con la propiedad según la cual la derivada de una función exponencial (de una matriz) es la exponencial misma, como sucede en el caso escalar.<sup>3</sup>

<sup>2</sup> Generalmente, los modelos económicos contienen diversos parámetros que se comportan como constantes del sistema. Estos parámetros constituyen los coeficientes del sistema reunidos en la matriz  $A$ .

<sup>3</sup> La exponencial de una matriz se define en la siguiente sección.

### Ejemplos

**Ej. 34.** Consideremos el sistema

$$x' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x.$$

Desplegando el sistema, se obtiene un par de ecuaciones desacopladas del tipo  $x' = ax$ :

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 \\ x_2' &= 3x_2. \end{aligned}$$

Si  $x_{10}$  y  $x_{20}$  son las condiciones iniciales de las variables  $x_1$  y  $x_2$ , respectivamente, entonces la solución del sistema está dada por  $x_1(t) = e^{2t}x_{10}$  y  $x_2(t) = e^{3t}x_{20}$ .

Observe que la matriz de coeficientes del sistema es diagonal, y es claro que cualquier sistema lineal con estas características puede resolverse similarmente.

Las soluciones obtenidas pueden juntarse y escribirse como

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t}x_{10} \\ e^{3t}x_{20} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}}_{\Phi(t)} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}.$$

Observe que la matriz  $\Phi(t)$  es diagonal y las entradas de su diagonal principal son las exponenciales de las entradas de la diagonal principal de la matriz de coeficientes del sistema. Podríamos preguntarnos ¿de dónde sale esta matriz, cómo aparece, es una casualidad o su presencia corresponde a una razón de fondo? Para ir averiguándolo, demos un paso más y analicemos el siguiente ejemplo.

**Ej. 35.** Consideremos ahora el sistema

$$x' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x.$$

De nuevo, desplegando el sistema, se obtienen las ecuaciones

$$x_1' = 2x_1 + x_2$$

$$x_2' = 3x_2.$$

Aun cuando la matriz de coeficientes no es diagonal (y, por tanto, las ecuaciones no están desacopladas), en este caso el sistema también se puede resolver sin mayor dificultad. En efecto, si  $x_{20} = x_2(0)$ , entonces de la segunda ecuación se obtiene  $x_2(t) = e^{3t}x_{20}$ . Enseguida podemos reemplazar esta solución en la primera ecuación para obtener una ecuación diferencial únicamente en la variable de estado  $x_1$ :

$$x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) = 2x_1(t) + x_{20}e^{3t}.$$

De acuerdo con (1.13), si  $x_{10} = x_1(0)$ , la solución es

$$x_1(t) = e^{2t} \left[ x_{10} + \int_0^t e^{-2\tau} e^{3\tau} x_{20} d\tau \right] = (x_{10} - x_{20})e^{2t} + x_{20}e^{3t}.$$

Es claro que cualquier sistema lineal, donde la matriz de coeficientes es una matriz triangular, puede resolverse de esta manera.

Ahora bien, la solución conseguida puede escribirse como sigue:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_{10} - x_{20})e^{2t} + x_{20}e^{3t} \\ x_{20}e^{3t} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} - e^{2t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}}_{\Phi(t)} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}.$$

Como en el ejemplo anterior, nos preguntamos ¿de dónde procede la matriz  $\Phi(t)$ ? Veremos que, en general, la solución del sistema (2.1) ciertamente está relacionada con una matriz con entradas exponenciales.



Los dos ejemplos anteriores muestran que si la matriz de coeficientes del sistema es diagonal o triangular, es suficiente aplicar la teoría de los sistemas escalares para obtener la solución del sistema. Sin embargo, si esta matriz no cae dentro de estos casos, el procedimiento ya no es tan directo. Habrá que recurrir, entonces, a un procedimiento más general que contemple este caso y los anteriores de una manera sistemática y general.

Como probaremos más adelante, si  $x(t)$  es la solución del sistema (2.1) y  $x(t_0) = x_0$  es un punto cualquiera de  $\mathbb{R}^n$ , entonces la solución del sistema que pasa por dicho punto está dada por la expresión

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Para cada  $t$ , la expresión (2.2) genera un punto de  $\mathbb{R}^n$ . La unión de todos estos puntos constituye una curva que llamaremos «trayectoria solución» y que pasa por  $x_0$  en el instante  $t = t_0$ . La Figura 2.1 muestra esta trayectoria (en  $\mathbb{R}^3$ ).

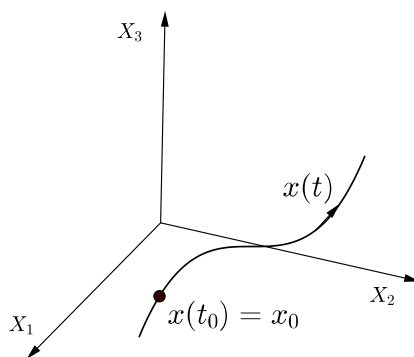


Figura 2.1 Trayectoria o curva solución  $x(t)$

La expresión (2.2) contiene el término  $e^{A(t-t_0)}$ , que es la exponencial

de la matriz  $A(t - t_0)$ . Enseguida definimos y establecemos algunas de las propiedades básicas de esta nueva operación matemática.

## 2.2. La exponencial de una matriz

Sea  $A$  una matriz cuadrada. La exponencial de  $A$  se denota por  $e^A$  y se define similarmente como se define  $e^x$  cuando  $x$  es un número real. Formalmente,

**Definición 9.** Dada la matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  y denotando por  $I$  la matriz identidad de orden  $n$ , se define  $e^A$  como la serie

$$e^A \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + \frac{1}{1!} A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \cdots + \frac{1}{\ell!} A^\ell + \dots \quad (2.3)$$

Cada término de esta serie tiene sentido, pues siendo  $A$  una matriz cuadrada, las potencias de  $A$  están bien definidas. Sin embargo, para que la suma completa tenga sentido, debemos probar que el resultado de la serie (2.3) produce una única matriz en el espacio de matrices  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ ; esto es, que la serie converge en el espacio de matrices  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ .

Puesto que  $(\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$  es un espacio métrico completo, para probar la convergencia de la serie (2.3) es suficiente probar que la sucesión de sumas parciales  $S_\ell = \sum_{k=0}^{\ell} A^k/k!$  es de Cauchy. Sea  $\ell > r$ , entonces por la desigualdad triangular y propiedades de la norma tenemos:

$$\|S_\ell - S_r\| = \left\| \sum_{k=r+1}^{\ell} \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=r+1}^{\ell} \frac{1}{k!} \|A\|^k.$$

Como la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k$  es convergente en  $\mathbb{R}$ , y este es un espacio métrico completo, entonces la sucesión correspondiente de sumas parciales es una sucesión de Cauchy, lo que implica, por la

desigualdad presentada, que la sucesión  $\{S_\ell\}_{\ell=1}^\infty$  es de Cauchy. Puesto que  $(\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$  es un espacio métrico completo, la serie (2.3) es convergente. La matriz a la que converge esta serie se define como la exponencial de la matriz  $A$ .

La introducción de esta nueva operación matricial nos permite definir la función exponencial:

$$\begin{array}{l} \exp: \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ A \qquad \longmapsto \exp(A) = e^A \end{array}$$

### PROPIEDADES

Las propiedades que se dan a continuación se obtienen directamente a partir de la definición (2.3). Estas propiedades constituyen un bloque básico de propiedades que permiten operar con la exponencial de una matriz.

**Ex0)**  $e^0 = I, \quad e^I = eI$

**Ex1)** Si  $P$  es una matriz no singular, entonces  $e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1}$

**Ex2)** Si  $AB = BA$ , entonces  $e^{(A+B)} = e^Ae^B = e^Be^A = e^{(B+A)}$

**Ex3)**  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

**Ex4)**  $(e^A)^T = e^{A^T}$

**Ex5)**  $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$

Observe que en la propiedad Ex3 está implícito que la exponencial de una matriz siempre produce una matriz no singular.

Definamos la función  $f$  por

$$\left. \begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ t \longmapsto f(t) = e^{At} \end{array} \right\}$$

donde, naturalmente,



$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = I + \frac{t}{1!} A + \frac{t^2}{2!} A^2 + \frac{t^3}{3!} A^3 + \cdots + \frac{t^\ell}{\ell!} A^\ell + \dots \quad (2.4)$$

Puede probarse que la serie se intercambia con la derivada de  $f$  y que esta se obtiene derivando término a término la expresión (2.4):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{At}) &= \frac{1}{1!} A + \frac{t}{1!} A^2 + \frac{t^2}{2!} A^3 + \frac{t^3}{3!} A^4 + \cdots + \frac{t^\ell}{\ell!} A^{\ell+1} + \dots \\ &= A \left( I + \frac{t}{1!} A + \frac{t^2}{2!} A^2 + \frac{t^3}{3!} A^3 + \cdots + \frac{t^\ell}{\ell!} A^\ell + \dots \right) \\ &= A e^{At}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

El proceso presentado prueba la siguiente importante propiedad:

**Ex6)**

$$\frac{d}{dt} (e^{At}) = A e^{At} = e^{At} A$$

Esta propiedad implica que  $e^{At}$  es una solución de la ecuación diferencial  $X' = AX$ , donde  $X \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Esto, a su vez, implica que  $e^{At} x_0$  es una solución de la ecuación  $x' = Ax$  con  $x(0) = x_0$ .<sup>4</sup> Así pues, el PVI

$$PVI : \begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.6)$$

tiene por solución

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0$$

En algunos casos sencillos, la exponencial  $e^A$  puede calcularse directamente a partir de la definición (2.3). En el caso general, este cálculo se basa en la transformación de Jordan de la matriz  $A$  en la matriz  $J$ .

<sup>4</sup> En realidad, es la única solución, lo que se prueba siguiendo argumentos similares a como se hizo en el caso escalar.

A continuación se presenta el cálculo de la exponencial de la matriz  $A$ , en los casos en que esta matriz es diagonal, diagonalizable o nilpotente. Veremos que, en todos estos casos, el cálculo de la serie (2.3) se simplifica notablemente.

### CÁLCULO DE $e^A$ PARA CASOS SIMPLES

#### 1. Caso en que $A$ es una matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Aplicando (2.3) se obtiene:

$$\begin{aligned} e^A &= \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} \lambda_1^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^3 \end{bmatrix} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 + \frac{1}{2!}\lambda_1^2 + \frac{1}{3!}\lambda_1^3 + \dots & & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 + \lambda_n + \frac{1}{2!}\lambda_n^2 + \frac{1}{3!}\lambda_n^3 + \dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por inducción y tomando límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , se obtiene finalmente:

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

## 2. Caso en que $A$ es una matriz diagonalizable

En este caso existe una matriz no singular  $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ , tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = D.$$

De aquí se sigue que  $A = PDP^{-1}$  y, por la propiedad Ex1,  $e^A = e^{PDP^{-1}} = Pe^DP^{-1}$ . Como  $e^D$  ya se calculó en el caso anterior, se obtiene:

$$e^A = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

## 3. Caso en que $A$ es una matriz nilpotente

Recordemos que  $A$  es una matriz nilpotente si existe  $k_0 \in \mathbb{N}$ , tal que  $A^{k_0} = 0$ . El menor  $k_0 \in \mathbb{N}$  que satisface esta propiedad se llama «índice de nilpotencia». Evidentemente, en este caso, todas las potencias superiores de  $A^{k_0}$  son también nulas; esto es, para todo  $m \in \mathbb{N}$  se tiene  $A^{k_0+m} = 0$ . Para una matriz nilpotente de índice  $k_0$ , la serie (2.3) se trunca en la  $(k_0 - 1)$ -ésima potencia. Así tenemos:

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots + \frac{1}{(k_0 - 1)!}A^{k_0-1}.$$

Así pues, en el caso de matrices nilpotentes, la serie (2.3) se transforma en una suma finita.

### **Ejemplo**

**Ej. 36.** Veamos, por ejemplo, el caso particular en el que la matriz  $A$  es de orden  $4 \times 4$ . En este caso existe una matriz no singular  $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ , tal que

$$P^{-1}AP = N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente,  $e^A = Pe^N P^{-1}$ , donde  $N$  es una matriz nilpotente de índice 4. La exponencial  $e^N$  está dada por

$$\begin{aligned} e^N &= I + N + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/0! & 1/1! & 1/2! & 1/3! \\ 0 & 1/0! & 1/1! & 1/2! \\ 0 & 0 & 1/0! & 1/1! \\ 0 & 0 & 0 & 1/0! \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



En general, para calcular la exponencial de una matriz cuadrada cualquiera se necesita el teorema de Jordan. Este teorema asegura que cualquier matriz cuadrada es equivalente a una matriz diagonal por bloques  $J$ . Recordemos a continuación este importante teorema.

**Teorema de Jordan**

Para toda matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  existe una matriz no singular  $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ , tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_\ell \end{bmatrix} = J,$$

donde los bloques  $J_k$ , llamados «bloques de Jordan», son matrices cuadradas asociadas a los valores característicos de la matriz  $A$ . Estos bloques tienen la forma

$$J_k = D_k + N_k, \quad k = 1, \dots, \ell,$$

siendo  $D_k$  una matriz diagonal y  $N_k$ , una matriz nilpotente. Existen dos posibilidades para la matrices  $D_k$  y  $N_k$ :

**Caso 1 (Valores característicos reales)**

$$D_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix} = \lambda_k I, \quad N_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

**Caso 2 (Valores característicos complejos)**

$$D_k = \begin{bmatrix} R_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & R_k \end{bmatrix}, \quad R_k = \begin{bmatrix} \alpha_k & -\beta_k \\ \beta_k & \alpha_k \end{bmatrix}, \quad \lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$$

$$N_k = \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que si  $J_k$  es de orden  $1 \times 1$ , entonces  $N_k = 0$ . El número de bloques  $J_k$  es igual a la multiplicidad geométrica de  $\lambda_k$  y la suma de los órdenes

de dichos bloques es igual a su multiplicidad algebraica si  $\lambda_k \in \mathbb{R}$ , e igual al doble de esta multiplicidad si  $\lambda_k \in \mathbb{C}$ .

**Ejemplo**

**Ej. 37.** Encontramos las matrices de Jordan de las matrices  $A$  y  $B$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- En cuanto a la matriz  $A$ , su polinomio característico es

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2) \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \sqrt{2}i, \lambda_3 = -\sqrt{2}i.$$

Puesto que el núcleo de  $A - \lambda_1 I$  es

$$Nu(A - \lambda_1 I) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

entonces la multiplicidad geométrica de  $\lambda_1$  es 1, por lo que solo existe un bloque de Jordan asociado a  $\lambda_1$ . Además, puesto que la multiplicidad algebraica de  $\lambda_1$  es 1, tal bloque de Jordan es de orden  $1 \times 1$ . De acuerdo con el Teorema de Jordan, la matriz  $J$  correspondiente (salvo el orden de los bloques) es

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad J_{\lambda_1} = [1], \quad J_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

- En cuanto a la matriz  $B$ , tenemos

$$p_B(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda^2 - 2)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$$

Puesto que

$$Nu(A - \lambda_1 I) = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$Nu(A - \lambda_2 I) = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

las multiplicidades geométricas de  $\lambda_1$  y de  $\lambda_2$  son 2 y 1, respectivamente. Luego, existen dos bloques de Jordan asociados a  $\lambda_1$  y un solo bloque de Jordan asociado a  $\lambda_2$ . De acuerdo con el teorema de Jordan, la matriz  $J$  correspondiente (salvo el orden de los bloques) es

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad J_{\lambda_1}^1 = [1], \quad J_{\lambda_1}^2 = [1], \quad J_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

◇◇◇

#### 4. Cálculo de $e^A$ para el caso general

Para el cálculo de  $e^A$ , cuando  $A$  es cualquier matriz cuadrada, partimos de la propiedad Ex1:

$$\boxed{A = PJP^{-1} \Rightarrow e^A = Pe^J P^{-1}},$$

donde la matriz  $P$  se calculará oportunamente más adelante. Se observa, pues, que el cálculo de  $e^A$  se reduce al cálculo de  $e^J$ .

Para calcular  $e^J$  debemos obtener las exponenciales  $e^{J_k}$ . Para esto, tengamos presente que<sup>5</sup>

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_\ell \end{bmatrix} \Rightarrow e^J = \begin{bmatrix} e^{J_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{J_\ell} \end{bmatrix};$$

y puesto que  $D_k$  y  $N_k$  conmutan,  $e^{J_k} = e^{D_k+N_k} = e^{D_k}e^{N_k}$ .

**Ejemplo**

**Ej. 38.** Consideremos las matrices del ejemplo anterior.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e^A = Pe^JP^{-1} = P \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{J_{\lambda_2}} \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e^B = Pe^JP^{-1} = P \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^{J_{\lambda_2}} \end{bmatrix} P^{-1}$$

En la sección 2.3 se muestra cómo calcular  $e^{J_{\lambda_2}}$  para el caso de la matriz

$A$ . Obtengamos  $e^{J_{\lambda_2}}$  para el caso de la matriz  $B$ :

$$J_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_D + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_N.$$

Como  $D$  y  $N$  conmutan, entonces

$$e^{J_{\lambda_2}} = e^{D+N} = e^D e^N = \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix}.$$

<sup>5</sup> Véase el ejercicio 2.2.11.



Por consiguiente,

$$e^B = Pe^J P^{-1} = P \begin{bmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

◇◇◇

Para terminar esta sección concluyamos que la solución del problema (2.6)

$$PVI : \begin{cases} x' &= Ax \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

está dada por

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 = Pe^{J(t-t_0)} P^{-1} x_0 \quad (2.7)$$

## LISTA DE EJERCICIOS

**2.2.1.** Pruebe las propiedades Ex0-Ex6.

**2.2.2.** Pruebe que las matrices  $N_1$  y  $N_2$  que se dan a continuación son matrices nilpotentes de índice 2 y 3, respectivamente. Luego calcule  $e^{N_1}$  y  $e^{N_2}$ .

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**2.2.3.** Si  $A$  es una matriz diagonalizable, ¿quién es la matriz  $P$  en este caso? Calcule la matriz de Jordan asociada a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

**2.2.4.** Calcule  $e^A$ ,  $e^B$  y  $e^C$  para las matrices  $A, B$  y  $C$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

**2.2.5.** Sea  $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . Pruebe que<sup>6</sup>

$$\det(e^A) = e^{\text{tra}(A)}.$$

Sugerencia. Recuerde que el determinante y la traza de una matriz son iguales a la suma y al producto de sus valores característicos, respectivamente.

**2.2.6.** Pruebe que no existe  $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , tal que

$$e^A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

**2.2.7.** Proporcione algunos casos simples en los cuales se cumple que  $e^{A+B} = e^A e^B$ . Encuentre dos matrices  $A$  y  $B$  tales que no se cumple esta igualdad.

**2.2.8.** Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x_1' &= 4x_1 - 3x_2 \\ x_2' &= 2x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Observe que la matriz de coeficientes es la matriz  $A$  del ejercicio 2.2.3.

**2.2.9.** El siguiente es un sistema dinámico triangular. Obtenga la solución por el método de la matriz exponencial y luego, puesto que el sistema es triangular, obtenga la solución sin recurrir a esta técnica.

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_2' &= 4x_2 + x_3 \\ x_3' &= 2x_3, \quad x_{10} = 2, \quad x_{20} = 0, \quad x_{30} = 1. \end{aligned}$$

<sup>6</sup> Observe que esta propiedad es una forma de probar que  $e^A$  es inversible.

**2.2.10.** Con respecto al modelo de competencia entre ciudades por la captación de turistas, ejemplo 33, considere los valores  $a = 2$ ,  $b = 5$ ,  $c = 4$  y  $d = 1$ .

a) Obtenga los valores característicos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de la matriz de coeficientes y luego los vectores característicos asociados para, finalmente, formar las matrices  $P$  y  $P^{-1}$ .

b) Plantee la solución del modelo.

c) Deduzca que las trayectorias solución son de la forma  $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2$ , donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes arbitrarias y  $v_1$  y  $v_2$  son los vectores característicos correspondientes.

d) ¿Qué se puede concluir a partir de la trayectorias encontradas?

**2.2.11.** Sea  $M$  una matriz diagonal por bloques

$$M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

donde  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  y  $B \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$ . Pruebe que se cumple

$$e^M = \begin{bmatrix} e^A & 0 \\ 0 & e^B \end{bmatrix}.$$

Note en particular que esta propiedad implica que si  $A = B = 1$ , entonces  $e^J = eI$ .

## 2.3. Sistemas lineales en el plano

En esta sección analizamos el sistema (2.1) cuando  $A$  es una matriz de orden  $2 \times 2$ . Muchas de las características fundamentales de los sistemas dinámicos lineales. Si  $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$  entonces el sistema (2.1) tiene la forma

general

$$\begin{aligned}x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2;\end{aligned}\tag{2.8}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

## ENFOQUE GEOMÉTRICO

En este apartado se introduce un enfoque de análisis basado en las propiedades geométricas del sistema. Esto nos permite extender el concepto de diagrama de fases y campo vectorial de los sistemas escalares a los sistemas bidimensionales. Este enfoque geométrico es muy útil sobre todo para analizar los sistemas no lineales, que no tienen solución explícita.

El campo vectorial del sistema

$$\begin{aligned}x_1' &= ax_1 + bx_2 \\x_2' &= cx_1 + dx_2\end{aligned}$$

es la función  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$F(x_1, x_2) = (x_1', x_2') = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2).$$

En cada punto  $P = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , el campo vectorial tiene una dirección dada por el vector  $(x_1'(P), x_2'(P))$ , que es tangente a la trayectoria solución del sistema en dicho punto. Así pues, el trazado del campo vectorial da una descripción acerca de cómo se va describiendo la trayectoria a medida que transcurre el tiempo. Esta idea se muestra en la Figura 2.2.

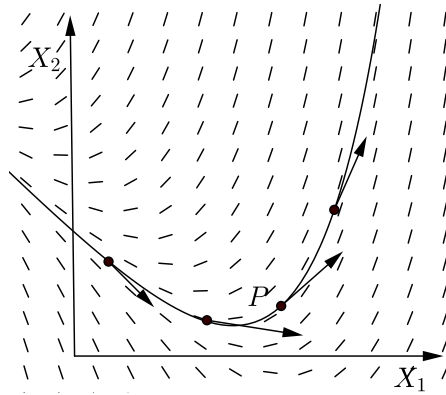


Figura 2.2 Campo vectorial

**Definición 10.** Una isoclina es una curva  $\mathcal{C}$  a lo largo de la cual el campo vectorial tiene la misma dirección.

Las isoclinas de mayor importancia son las curvas definidas por las ecuaciones

$$\mathcal{C}_1 : x_1' = 0$$

$$\mathcal{C}_2 : x_2' = 0.$$

En un sistema lineal, estas isoclinas son necesariamente líneas rectas, lo que podría no ser cierto en un sistema no lineal, como veremos luego. Cada isoclina separa el espacio  $\mathbb{R}^2$  en dos semiespacios o regiones. En cada semiespacio, el campo vectorial tiene una cierta dirección que determina si las componentes horizontales y verticales de la trayectoria son crecientes o decrecientes.

$$\mathcal{R}_1^1 : x_1' > 0 \Leftrightarrow x_1 \text{ es estrictamente creciente}$$

$$\mathcal{R}_2^1 : x_1' < 0 \Leftrightarrow x_1 \text{ es estrictamente decreciente}$$

$$\mathcal{R}_1^2 : x_2' > 0 \Leftrightarrow x_2 \text{ es estrictamente creciente}$$

$$\mathcal{R}_2^2 : x_2' < 0 \Leftrightarrow x_2 \text{ es estrictamente decreciente}$$

**Ejemplo**

**Ej. 39.** Consideremos el sistema

$$x_1' = x_1 + 12x_2$$

$$x_2' = 3x_1 + x_2.$$

Las isoclinas son las rectas  $\mathcal{C}_1 : x_2 = -\frac{1}{12}x_1$  y  $\mathcal{C}_2 : x_2 = -3x_1$ . Como se aprecia en la Figura 2.3, estas rectas dividen el plano en cuatro zonas en cada una de las cuales el campo tiene la misma dirección, por lo que las llamaremos «isozonas»: I, II, III y IV.

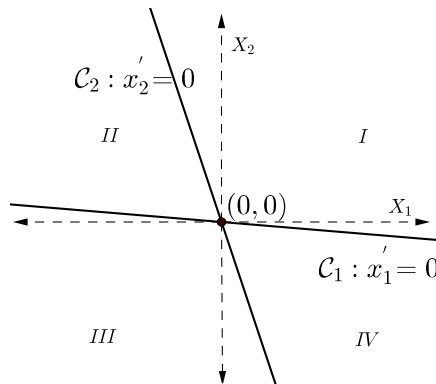


Figura 2.3 Isozonas

Veamos la dirección del campo vectorial en cada isozona.

$$x_1' < 0 \equiv x_1 + 12x_2 < 0 \Rightarrow x_2 < -\frac{1}{12}x_1 \quad \text{Isozonas III y IV}$$

$$x_1' > 0 \equiv x_1 + 12x_2 > 0 \Rightarrow x_2 > -\frac{1}{12}x_1 \quad \text{Isozonas I y II}$$

$$x_2' < 0 \equiv 3x_1 + x_2 < 0 \Rightarrow x_2 < -3x_1 \quad \text{Isozonas II y III}$$

$$x_2' > 0 \equiv 3x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow x_2 > -3x_1 \quad \text{Isozonas I y IV}$$

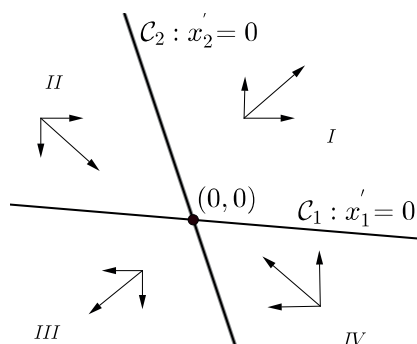


Figura 2.4 Campo vectorial por isozonas

El diagrama de diversas trayectorias se muestra en la Figura 2.5.

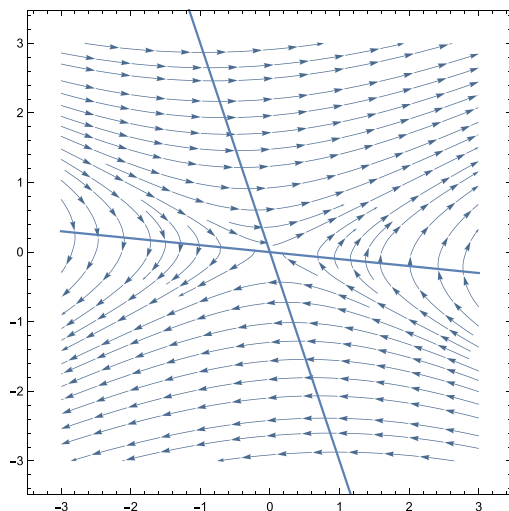


Figura 2.5 Diagrama de fases

Observe que las trayectorias siguen la orientación del campo vectorial en cada isozona. Observe también que en cada punto de intersección de las trayectorias con las isoclinas, los vectores tangentes son paralelos; esto es, tienen la misma inclinación en dicho punto de intersección.<sup>7</sup> Al mapa de trayectorias que se muestra en la Figura 2.5 se le llama «diagrama de fases» (y al plano  $\mathbb{R}^2$ , «espacio de fases»). Observe que este diagrama muestra que hay ciertas trayectorias que se acercan y otras que se alejan del origen de coordenadas. Al origen de coordenadas se le llamará «punto de equilibrio» y se dirá que tiene una inestabilidad tipo silla. Volveremos a este punto más adelante.



Una pregunta pertinente respecto del diagrama de fases es ¿por qué las trayectorias que se encuentran cerca una de otra permanecen cerca y siguen el mismo patrón? La respuesta la da el teorema de la dependencia continua de las condiciones iniciales, teorema 4. Si dos trayectorias diferentes parten de condiciones iniciales similares, debido a la continuidad aludida, no se puede esperar que ellas sean muy distintas a medida que transcurre el tiempo. Esto también garantiza que en cada una de las zonas delimitadas por las isoclinas las trayectorias correspondientes siempre tengan la misma orientación, como se aprecia en la Figura 2.5.

## SOLUCIÓN DE EQUILIBRIO Y DIAGRAMA DE FASES

Como hemos visto en la sección anterior, para la condición inicial  $x(0)$ , la solución de la ecuación (2.1) es  $x(t) = Pe^{J(t)}P^{-1}x(0)$ . La matriz  $J$  adquiere diversas formas de acuerdo con los valores característicos de la matriz  $A$ . Cuando  $A$  es de orden  $2 \times 2$ , existen básicamente tres casos

---

<sup>7</sup> Esto es precisamente lo que define una isoclina.



posibles para  $J$  y, por ende, tres casos posibles para la solución  $x(t)$ .

La trayectoria solución puede expresarse en términos más simples haciendo el cambio de variable  $y = P^{-1}x$ . En efecto, derivando con respecto a  $t$ , se tiene  $x' = Py'$ , de donde

$$\begin{aligned}x' &= Ax \\Py' &= APy \\y' &= P^{-1}APy \\y' &= Jy \Rightarrow y(t) = e^{Jt}y(0).\end{aligned}$$

Así pues, las soluciones de (2.1) en las coordenadas  $X_1 - X_2$  e  $Y_1 - Y_2$  son, respectivamente, las siguientes:

$$\begin{aligned}X_1 - X_2 : x(t) &= Pe^{Jt}P^{-1}x(0) \\Y_1 - Y_2 : y(t) &= e^{Jt}y(0).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Como en el caso escalar, decimos que una solución constante del sistema (2.1) es una solución estacionaria o simplemente un equilibrio.<sup>8</sup> La función nula  $x(t) \equiv 0$  siempre es un equilibrio, pues satisface (2.1) trivialmente. Es claro que  $x^*$  es un equilibrio si y solamente si satisface la ecuación algebraica

$$Ax = 0.$$

Si  $A$  es no singular, entonces el único equilibrio es la solución nula, pues  $Ax = 0$  si y solo si  $x = A^{-1}0 = 0$ . Por el contrario, si  $A$  es singular, existen infinitos equilibrios; a saber, todos los puntos del núcleo de la matriz  $A$ . Puesto que el determinante de  $A$  es el producto de sus valores característicos,  $A$  será no singular si y solamente si no tiene valores

---

<sup>8</sup>Aunque son esencialmente diferentes, se suele identificar un equilibrio con un punto del espacio de fases.

característicos nulos. Por la relación  $y = P^{-1}x$  es claro que  $x^* = 0$  si y solo si  $y^* = 0$ .

A continuación analizamos el diagrama de fases en el plano  $Y_1 - Y_2$  del sistema (2.8). El diagrama de fases muestra las diversas trayectorias del sistema y cómo estas se comportan en relación con los equilibrios. Se dirá que el equilibrio es estable o inestable dependiendo de si las trayectorias se acercan o se alejan de este. El comportamiento de las trayectorias depende enteramente de los valores característicos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de la matriz de coeficientes. Enseguida se analizan todos los casos posibles.

**Caso 1:**  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$

Sean  $v_1$  y  $v_2$  los vectores característicos asociados a  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , respectivamente. Puesto que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $v_1$  y  $v_2$  son linealmente independientes y; por lo tanto, la matriz  $P$  definida por

$$P = [v_1 | v_2]$$

es no singular. En este caso, el producto  $P^{-1}AP$  produce la matriz

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \tag{2.10}$$

y se obtiene de las siguientes igualdades:

$$AP = [\lambda_1 v_1 | \lambda_2 v_2] = [v_1 | v_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Observe que si los vectores  $v_1$  y  $v_2$  cambian su posición en la matriz  $P$ , entonces los valores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  también cambian de posición en la matriz  $J$ :

$$P = [v_2 | v_1] \Rightarrow J = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

De (2.10) obtenemos

$$Jt = \begin{bmatrix} \lambda_1 t & 0 \\ 0 & \lambda_2 t \end{bmatrix} \Rightarrow e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la solución del sistema es

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} y(0) \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = e^{\lambda_1 t} y_{10} \\ y_2(t) = e^{\lambda_2 t} y_{20} \end{cases}. \quad (2.11)$$

### Ejemplo

**Ej. 40.** Consideremos el siguiente sistema triangular:

$$x' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x.$$

Este sistema se resolvió en el ejemplo 35. Ahora lo resolveremos de manera más sistemática, de acuerdo con el enfoque de la matriz exponencial. Los valores característicos de la matriz de coeficientes son  $\lambda_1 = 2$  y  $\lambda_2 = 3$ , de manera que de acuerdo con (2.11) la solución es

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} y(0).$$

Para expresar la solución en las coordenadas  $X_1 - X_2$  necesitamos obtener la matriz  $P$ . Veamos:

$$\lambda_1 = 2 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 3 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego, la solución en las coordenadas  $X_1 - X_2$  es

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_{10} - x_{20})e^{2t} + x_{20}e^{3t} \\ x_{20}e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, las componentes de la trayectoria son

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (x_{10} - x_{20})e^{2t} + x_{20}e^{3t} \\ x_2(t) &= x_{20}e^{3t}. \end{aligned}$$

Este es el mismo resultado que habíamos obtenido antes. Podemos responder aquí la cuestión acerca de la procedencia de la matriz  $\Phi(t)$ .

Esta matriz resulta del producto  $Pe^{Jt}P^{-1}$ :

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} - e^{2t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Dependiendo de los signos de los valores característicos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , se presentan varios casos particulares como pasamos a ver a continuación.

### Caso 1.1: $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

Como  $|A| \neq 0$ , el único equilibrio es  $y^* = (0, 0)$ . De (2.11) se deduce que, independientemente de la condición inicial, para  $t > 0$ , las trayectorias se alejan de  $y^*$  de manera exponencial. Observe que las trayectorias que se alejan en las direcciones de los ejes coordenados corresponden a aquellas trayectorias cuyas condiciones iniciales están precisamente ubicadas sobre dichos ejes. Se dice que  $y^*$  es un equilibrio inestable y se llama «nodo repulsor». El diagrama de fases se muestra a continuación en la Figura 2.6.

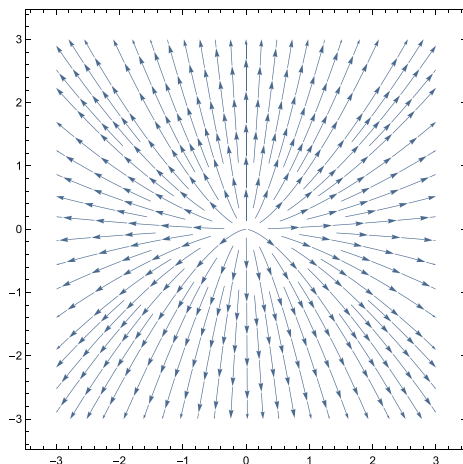


Figura 2.6 Equilibrio inestable tipo nodo repulsor

Caso 1.2:  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

Como  $|A| \neq 0$ , el único equilibrio es  $y^* = (0,0)$ . Como los valores característicos son negativos, cuando  $t > 0$ , las trayectorias se acercan a  $y^*$ . El equilibrio es estable y se llama «nodo atractor».

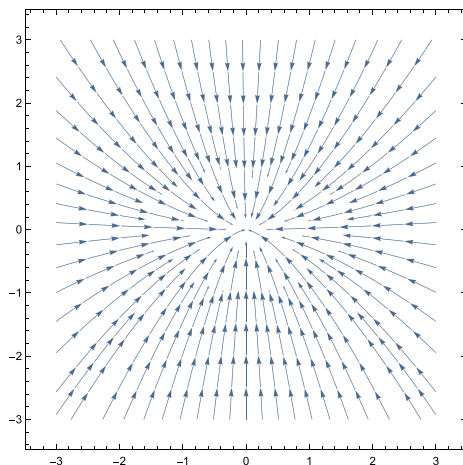


Figura 2.7 Equilibrio estable tipo nodo atractor

Caso 1.3:  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

Como  $|A| \neq 0$ , el único equilibrio es  $y^* = (0, 0)$ . Puesto que los valores característicos son de signos diferentes, de (2.11) se observa que  $y_1$  decrece exponencialmente y  $y_2$  crece exponencialmente. Cuando  $t \rightarrow +\infty$ , algunas trayectorias se acercan y otras se alejan de  $y^*$ . Las trayectorias que se acercan son aquellas que viven en el eje  $Y_1$ , pues en este caso  $y_2 = 0$ . Si  $y(0) \notin Y_1$ , la trayectoria correspondiente se alejará del equilibrio. En particular, si  $y_{10} = 0$ , la trayectoria correspondiente se aleja del equilibrio, pero nunca sale del eje  $Y_2$ . Este comportamiento en el que hay trayectorias que se acercan y otras que se alejan cuando  $t \rightarrow +\infty$  caracteriza al equilibrio como inestable y se llama punto «silla».

Sean  $y_{10} \neq 0$  e  $y_{20} \neq 0$ , entonces

$$(y_1(t))^{-\lambda_2} (y_2(t))^{\lambda_1} = e^{-\lambda_1 \lambda_2 t} y_{10}^{-\lambda_2} e^{\lambda_1 \lambda_2 t} y_{20}^{\lambda_1} = y_{10}^{-\lambda_2} y_{20}^{\lambda_1} = c.$$

Esta relación indica que los puntos de una trayectoria cualquiera que no vive ni en el eje  $Y_1$  ni en el eje  $Y_2$  están sobre una curva hiperbólica. Es decir, las trayectorias tienen la forma de una hipérbola, como se muestra en la Figura 2.8.

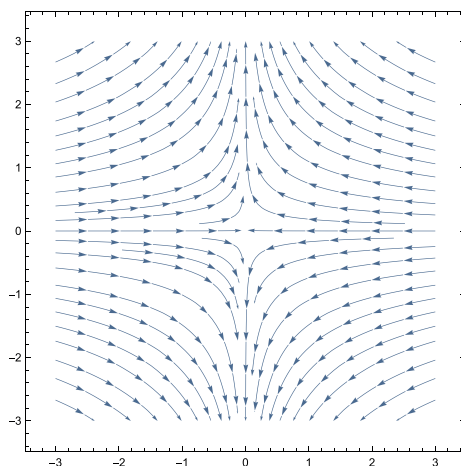


Figura 2.8 Equilibrio inestable tipo silla

**Ejemplo**

**Ej. 41.** Consideremos el sistema

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x, \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}.$$

Los valores característicos de la matriz de coeficientes son  $\lambda_1 = 7$  y  $\lambda_2 = -5$ , de manera que la solución en las coordenadas  $Y_1 - Y_2$  es

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^{7t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} y(0).$$

Para expresar la solución en las coordenadas  $X_1 - X_2$  necesitamos la matriz  $P$ . Veamos.

$$\lambda_1 = 7 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = -5 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente,

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Luego, la solución es

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{7t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ -1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\frac{1}{2}x_{10} + x_{20}) e^{7t} + (\frac{1}{2}x_{10} - x_{20}) e^{-5t} \\ (\frac{1}{4}x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}) e^{7t} + (-\frac{1}{4}x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}) e^{-5t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente, identificando las componentes de las trayectoria tenemos

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \left(\frac{1}{2}x_{10} + x_{20}\right) e^{7t} + \left(\frac{1}{2}x_{10} - x_{20}\right) e^{-5t} \\ x_2(t) &= \left(\frac{1}{4}x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}\right) e^{7t} + \left(-\frac{1}{4}x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}\right) e^{-5t}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

*Una pregunta de interés*

El equilibrio  $x^* = (0, 0)$  es inestable tipo silla. Esto significa que hay trayectorias que se acercan y otras que se alejan de  $x^*$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Como para cada condición inicial hay una trayectoria específica asociada, una pregunta pertinente en este sentido es ¿cuál debería ser la condición inicial para que la trayectoria correspondiente se acerque a  $x^*$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ ? La respuesta se deduce de la solución (2.12). En efecto, para que esto se cumpla, vemos que el coeficiente del término exponencial  $e^{7t}$  debería desaparecer, y esto sucede si y solamente si  $x_{20} = -\frac{1}{2}x_{10}$ . Es decir, si la condición inicial está localizada en el subespacio

$$S = \left\{ x(0) \in \mathbb{R}^2 : x(0) = \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

entonces la trayectoria correspondiente convergerá a  $x^*$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Más aún, la trayectoria nunca saldrá de dicho espacio. Más adelante veremos que al subespacio  $S$  se le conoce como «subespacio estable».

Caso 1.4:  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$ 

Como  $|A| = 0$ , hay infinitos equilibrios. Note que en este caso  $y_1(t)$  es constante, pues, de acuerdo con (2.11), se tiene  $y_1(t) = y_{10}$  para todo  $t$ . Por consiguiente, una vez fijado este valor, la trayectoria se mueve verticalmente sobre la recta  $y_1 = y_{10}$ , de acuerdo con las ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_{10} \\ y_2(t) &= e^{\lambda_2 t} y_{20}. \end{aligned}$$

Cuando  $y_{20} = 0$ , el punto  $(y_{10}, 0)$  es un equilibrio para cada  $y_{10}$ . Todo el eje  $Y_1$  constituye el conjunto de equilibrios. Si  $y_{10} > 0$  e  $y_{20} > 0$ ,



la condición inicial está en el primer cuadrante y, como  $\lambda_2 < 0$ , la trayectoria se acerca al equilibrio  $y^* = (y_{10}, 0)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Las demás trayectorias siguen un comportamiento análogo.

Dos trayectorias representativas y el diagrama de fases se muestran en la Figura 2.9 y en la Figura 2.10, respectivamente.

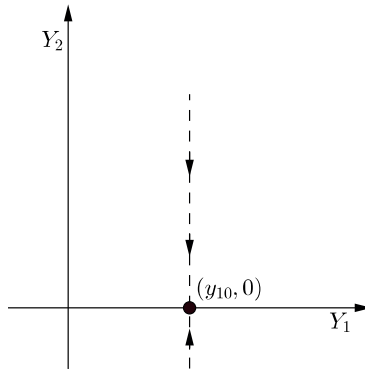


Figura 2.9 Trayectorias representativas

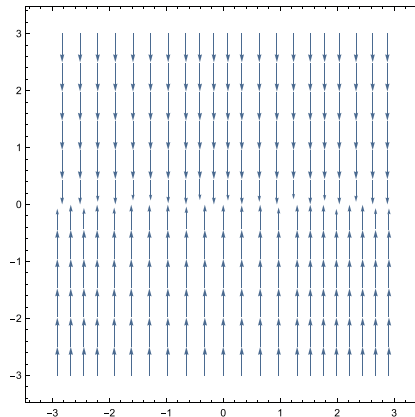


Figura 2.10 Diagrama de fases

Caso 1.5:  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$

Como  $|A| = 0$ , hay infinitos equilibrios. Este caso es análogo al anterior, y cada punto de la forma  $(0, y_{20})$  es un equilibrio. Todo el eje  $Y_2$  constituye el conjunto de equilibrios. Puesto que  $\lambda_1 > 0$ , todas las trayectorias se alejan de los equilibrios cuando  $t > 0$ .

Dos trayectorias representativas y el diagrama de fases se muestran en la Figura 2.11 y en la Figura 2.12, respectivamente.

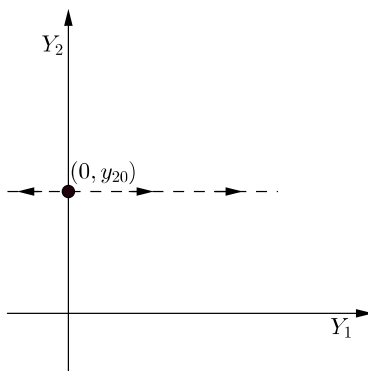


Figura 2.11 Trayectorias representativas

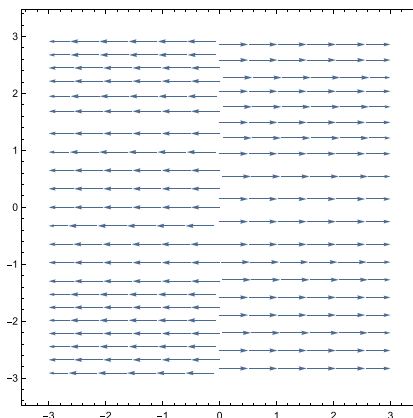


Figura 2.12 Diagrama de fases

**Caso 2:**  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$

En este caso, por ser iguales los valores característicos, podrían ocurrir dos situaciones diferentes: que la multiplicidad geométrica de  $\lambda$  sea 1, en cuyo caso la matriz  $A$  no es diagonalizable, sino, más bien, similar a una matriz de Jordan  $J$ , que es casi diagonal, o que la multiplicidad geométrica de  $\lambda$  sea 2, en cuyo caso la matriz  $A$  es diagonalizable. Específicamente, la transformación  $P^{-1}AP$  puede resultar en los siguientes dos casos particulares para la matriz  $J$ :

$$\text{multiplicidad geométrica 1 : } J_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\text{multiplicidad geométrica 2 : } J_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Para mostrar la forma dada en (2.14) se sigue el mismo procedimiento que se siguió para valores característicos reales diferentes. Esto se basa en el hecho de que al tener  $\lambda$  multiplicidad geométrica 2, entonces se puede formar la matriz  $P$  tomando dos vectores diferentes del espacio característico asociado. Para mostrar la forma (2.13) procedemos como sigue.

Como la multiplicidad geométrica de  $\lambda$  es 1, no disponemos de dos vectores característicos linealmente independientes que puedan formar la matriz  $P$ . La base del espacio característico asociado a  $\lambda$  solo contiene un único vector característico, digamos  $v$ . Necesitamos otro vector que sea linealmente independiente de  $v$  para formar la matriz  $P$ . Este vector, que denotamos por  $w$ , se obtiene de la ecuación

$$(A - \lambda I)w = v. \quad (2.15)$$

El vector  $w$  se llama «vector característico generalizado». Si tal vector existe, entonces de la definición puede probarse que es linealmente

independiente de  $v$ . Probemos esto de inmediato y luego veamos que tal vector realmente existe. De la ecuación

$$\alpha w + \beta v = 0, \quad (2.16)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha(A - \lambda I)w + \beta(A - \lambda I)v &= 0 \\ \alpha v + \beta(A - \lambda I)v &= 0 \\ \alpha v + \beta\lambda v - \beta\lambda v &= 0 \\ \alpha v &= 0. \end{aligned}$$

Puesto que  $v \neq 0$ , la última igualdad implica que  $\alpha = 0$  y, por lo tanto, de (2.16) se deduce que  $\beta = 0$ . Así pues,  $v$  y  $w$  son linealmente independientes.

Ahora probemos que  $w$  existe o, lo que es lo mismo, que el vector  $v$  está en el rango de  $A - \lambda I$ . Primero notemos que si  $A - \lambda I = 0$ , entonces, ciertamente, tal vector no existe, pues  $v \neq 0$ . Sin embargo, puesto que el espacio característico asociado a  $\lambda$  es de dimensión 1,  $A$  no puede ser igual a  $\lambda I$ , pues en este caso se tendría  $Av = \lambda v$  para cualquier  $v \in \mathbb{R}^2$ , lo que implicaría que  $\lambda$  tendría multiplicidad geométrica 2. Por consiguiente,  $A - \lambda I \neq 0$ .

Ahora bien, si  $v$  no está en el rango de  $A - \lambda I$ , entonces  $v$  es linealmente independiente con cualquier vector no nulo del rango de  $A - \lambda I$ . Sea, por ejemplo,  $u \neq 0$  un vector en el rango de  $A - \lambda I$  y  $x \in \mathbb{R}^2$ , tal que  $(A - \lambda I)x = u$ . Como  $u$  y  $v$  son linealmente independientes, entonces ellos constituyen una base de  $\mathbb{R}^2$ . Por lo tanto, existen constantes  $\gamma$  y  $\delta$ , tales que

$$x = \gamma u + \delta v.$$

Observe que  $\gamma \neq 0$ , pues en caso contrario se tendría  $u = (A - \lambda I)\delta v = \lambda\delta v - \lambda\delta v = 0$ , lo que es una contradicción. Así pues, de la ecuación  $(A - \lambda I)(\gamma u + \delta v) = u$  y del hecho de que  $\gamma \neq 0$  se obtiene

$$Au = \left(\lambda + \frac{1}{\gamma}\right)u,$$

lo que implica que  $\lambda + 1/\gamma$  es otro valor característico de  $A$ , diferente de  $\lambda$ . Esto contradice la hipótesis de que  $\lambda$  es el único valor característico de la matriz  $A$ . Por consiguiente,  $v$  tiene que estar en el rango de  $A - \lambda I$ .

Para obtener la matriz  $J_1$ , procedemos como en el caso anterior. Puesto que  $v$  y  $w$  son linealmente independientes, la matriz  $P$  definida por

$$P = [v|w] \quad (2.17)$$

es una matriz no singular. La matriz  $J_1$  se deduce de la siguientes igualdades:

$$AP = [Av|Aw] = [\lambda v|\lambda w + v] = [v|w] \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

De (2.13) y (2.14) se obtiene

$$J_1 t = \begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix} \Rightarrow e^{J_1 t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

$$J_2 t = \begin{bmatrix} \lambda t & 0 \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix} \Rightarrow e^{J_2 t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}.$$

Entonces, las soluciones correspondientes del sistema son

$$J_1 : y(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} y(0) \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = (y_{10} + ty_{20})e^{\lambda t} \\ y_2(t) = e^{\lambda t}y_{20} \end{cases} \quad (2.18)$$

$$J_2 : y(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} y(0) \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = e^{\lambda t}y_{10} \\ y_2(t) = e^{\lambda t}y_{20} \end{cases} \quad (2.19)$$

**Ejemplo**

**Ej. 42.** Consideremos el sistema

$$x' = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x; \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}.$$

El valor característico de la matriz de coeficientes es  $\lambda = 1$ , que tiene multiplicidad geométrica 1. De acuerdo con (2.18), la solución del sistema en la coordenadas  $Y_1 - Y_2$  es

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} y(0).$$

Para expresar la solución en las coordenadas  $X_1 - X_2$  necesitamos la matriz  $P$ .

$$\lambda = 1 \Rightarrow v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

De la ecuación (2.15) tenemos

$$(A - \lambda I)w = v \equiv \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

De aquí se obtiene  $w$ , por ejemplo,

$$w = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Entonces, la solución en la coordenadas  $X_1 - X_2$  es

$$x(t) = P \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10}e^t - 2(x_{10} + x_{20})te^t \\ x_{20}e^t + 2(x_{10} + x_{20})te^t \end{bmatrix}.$$

Finalmente, identificando las componentes de las trayectorias, tenemos

$$x_1(t) = x_{10}e^t - 2(x_{10} + x_{20})te^t$$

$$x_2(t) = x_{20}e^t + 2(x_{10} + x_{20})te^t.$$

El equilibrio  $x^* = (0, 0)$  es inestable tipo repulsor. Todas las trayectorias no nulas se alejan de  $x^*$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . No es posible colocar la condición inicial en algún punto de  $\mathbb{R}^2$ , salvo el propio punto  $(0, 0)$ , para que la trayectoria correspondiente converja a  $x^*$ .



Caso 2.1.1:  $\lambda > 0$ ,  $J = J_1$

Como  $|A| \neq 0$ , el único equilibrio es  $y^* = (0, 0)$ . De (2.18) se deduce que todas las trayectorias se alejan de  $y^*$ , salvo el propio  $y^*$ . Además, la única trayectoria que está enteramente sobre el eje  $Y_2$  es  $y^*$ . Además, existen trayectorias que viven enteramente sobre el eje  $Y_1$ , pues si  $y_{20} = 0$  e  $y_{10} \neq 0$ , entonces la trayectoria correspondiente se aleja exponencialmente del equilibrio y siempre permanece sobre el eje  $Y_1$ . Este equilibrio es inestable tipo nodo repulsor.

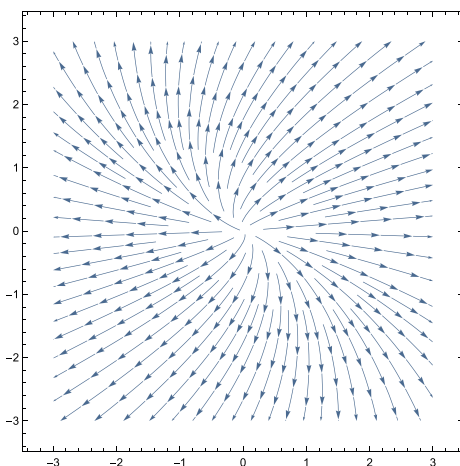


Figura 2.13 Inestable tipo nodo repulsor

Caso 2.1.2:  $\lambda < 0$ ,  $J = J_1$ 

Como  $|A| \neq 0$ , el único equilibrio es  $y^* = (0, 0)$ . Este caso es análogo al anterior, pero ahora, puesto que  $\lambda < 0$ ,  $y^*$  es estable tipo nodo atractor.

Caso 2.2.1:  $\lambda < 0$ ,  $J = J_2$ 

Como  $|A| \neq 0$ , el único equilibrio es  $y^* = (0, 0)$ . De (2.19) se infiere que las trayectorias están sobre rectas de pendientes  $y_{20}/y_{10}$ , pues tanto  $y_1(t)$  como  $y_2(t)$  decrecen a la misma tasa dada por el valor  $\lambda$ . Independientemente de la condición inicial, las trayectorias convergen al equilibrio cuando  $t \rightarrow +\infty$ . El equilibrio  $y^*$  es estable tipo nodo atractor.

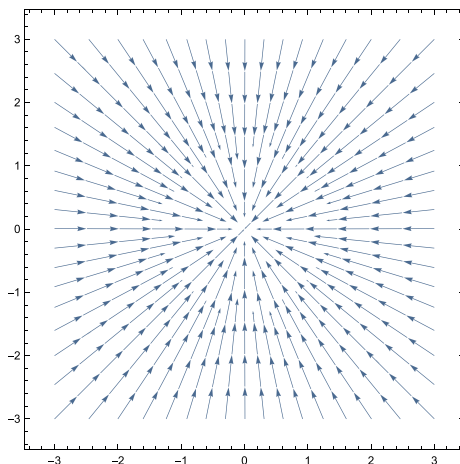


Figura 2.14 Estable tipo nodo atractor

Caso 2.2.2:  $\lambda > 0$ ,  $J = J_2$ 

Como  $|A| \neq 0$ , el único equilibrio es  $y^* = (0, 0)$ . Este caso es análogo al anterior, pero ahora, puesto que  $\lambda > 0$ , las trayectorias divergen del equilibrio, siendo este inestable tipo nodo repulsor.

Caso 2.3:  $\lambda = 0$ ,  $J = J_1$ 

Como  $|A| = 0$ , se tienen infinitos equilibrios. Note que en este caso



la segunda coordenada de la trayectoria  $y(t)$  es constante. En efecto, de acuerdo con (2.18) se tiene  $y_2(t) = y_{20}$  para todo  $t$ . Por consiguiente, una vez fijado este valor, la trayectoria se mueve horizontalmente sobre la recta  $y = y_{20}$ , de acuerdo con las ecuaciones

$$y_1(t) = y_{10} + ty_{20}$$

$$y_2(t) = y_{20}.$$

Cuando  $y_{20} = 0$ , el punto  $(y_{10}, 0)$  constituye un equilibrio para cada  $y_{10}$ . Esto significa que cualquier punto sobre el eje  $Y_1$  es un punto de equilibrio. Así, el sistema tiene infinitos equilibrios; todo el eje  $Y_1$  constituye el conjunto de equilibrios.

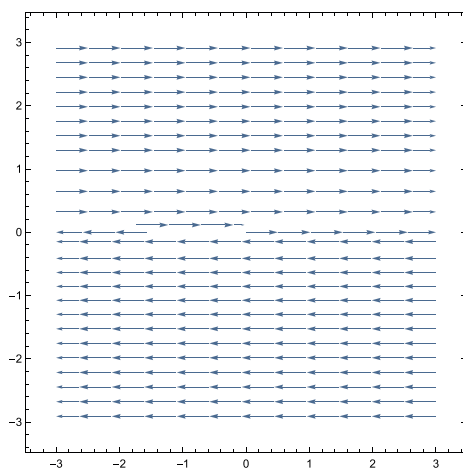


Figura 2.15 Infinitos equilibrios

Para terminar, digamos que el caso de infinitos equilibrios no es frecuente y, desde el punto de vista de los modelos económicos, no es significativo.

**Caso 3:**  $\lambda = \alpha + i\beta$ ,  $\beta \neq 0$

En este caso, por ser diferentes los valores característicos, sus vectores característicos asociados son linealmente independientes, de donde la matriz  $A$  es diagonalizable. Sin embargo, en este caso, la matriz diagonal asociada tendría entradas complejas. Aquí queremos que tanto  $P$  como  $J$  sean matrices con entradas reales. Veamos que tal matriz  $P$  existe y que la transformación  $P^{-1}AP$  produce la matriz  $J$  (real) dada por

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Sean  $u, v \in \mathbb{R}^2$  dos vectores tales que  $w = u + iv$  es el vector característico asociado al valor característico  $\alpha + i\beta$ ; esto es,

$$A(u + iv) = (\alpha + i\beta)(u + iv). \quad (2.21)$$

Note que para cualquier  $\alpha$ ,  $u \neq 0$ . Para probar esto, supongamos lo contrario; es decir, que existe  $\alpha_0$ , tal que  $u = 0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} Aw &= (\alpha_0 + i\beta)w = \alpha_0 w + i\beta w \\ (A - \alpha_0 I)w &= i\beta w \\ (A - \alpha_0 I)iv &= i\beta iv = -\beta v. \end{aligned}$$

Esta igualdad es contradictoria, pues el miembro del lado izquierdo es un elemento de  $\mathbb{C}^2$ ; mientras que el miembro del lado derecho es un elemento de  $\mathbb{R}^2$ . Esto prueba que necesariamente debe tenerse  $u \neq 0$ .

Veamos enseguida que los vectores  $u$  y  $v$  son linealmente independientes. Supongamos que existen  $\gamma \neq 0$  y  $\delta \neq 0$ , tales que

$$\gamma u + \delta v = 0.$$

Entonces,  $u = -(\delta/\gamma)v$ . Reemplazando este vector en (2.21) se obtiene

$$A \left[ \begin{pmatrix} -\delta \\ \gamma \end{pmatrix} v + iv \right] = (\alpha + i\beta) \left[ \begin{pmatrix} -\delta \\ \gamma \end{pmatrix} v + iv \right].$$

De aquí se sigue

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) Av + iAv &= (\alpha + i\beta) \left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) v + (\alpha + i\beta)iv \\ Av - i\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) Av &= (\alpha + i\beta)v + (\alpha + i\beta)i\left(-\frac{\gamma}{\delta}\right) v \\ \left[1 - i\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)\right] Av &= (\alpha + i\beta) \left[1 - i\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)\right] v \\ Av &= (\alpha + i\beta)v. \end{aligned}$$

Como  $\beta \neq 0$ , esta igualdad es una contradicción, ya que  $Av \in \mathbb{R}^2$  y  $(\alpha + i\beta)v \in \mathbb{C}^2$ .

Puesto que  $u$  y  $v$  son linealmente independientes, ellos forman una base de  $\mathbb{R}^2$ , y la matriz  $P$  dada por

$$P = [v|u] \tag{2.22}$$

es no singular. La matriz  $J$  de (2.20) se deduce de la siguientes igualdades:

$$AP = [Av|Au] = [\alpha v + \beta u | \alpha u - \beta v] = [v|u] \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix},$$

donde la segunda igualdad se sigue de (2.21).

De (2.20) se obtiene

$$Jt = \begin{bmatrix} \alpha t & -\beta t \\ \beta t & \alpha t \end{bmatrix} \Rightarrow Jt = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha t & 0 \\ 0 & \alpha t \end{bmatrix}}_A + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\beta t \\ \beta t & 0 \end{bmatrix}}_B.$$

Como  $A$  y  $B$  conmutan, entonces, por la propiedad Ex2 y ya que  $A$  es diagonal, se tiene

$$e^{Jt} = e^{A+B} = e^A e^B = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{bmatrix} e^B = e^{\alpha t} e^B.$$

A continuación calculamos  $e^B$ . Para esto primero notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 B^2 &= \begin{bmatrix} -\beta^2 t^2 & 0 \\ 0 & -\beta^2 t^2 \end{bmatrix} \\
 B^3 &= \begin{bmatrix} 0 & \beta^3 t^3 \\ -\beta^3 t^3 & 0 \end{bmatrix} \\
 B^4 &= \begin{bmatrix} \beta^4 t^4 & 0 \\ 0 & \beta^4 t^4 \end{bmatrix} \\
 B^5 &= \begin{bmatrix} 0 & -\beta^5 t^5 \\ \beta^5 t^5 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Entonces, por inducción podemos escribir

$$\begin{aligned}
 e^B &= \frac{1}{0!}I + \frac{1}{1!}B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \frac{1}{4!}B^4 + \frac{1}{5!}B^5 + \dots \\
 &= \frac{1}{0!} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{1!} \begin{bmatrix} 0 & -\beta t \\ \beta t & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} -\beta^2 t^2 & 0 \\ 0 & -\beta^2 t^2 \end{bmatrix} \\
 &+ \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} 0 & \beta^3 t^3 \\ -\beta^3 t^3 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4!} \begin{bmatrix} \beta^4 t^4 & 0 \\ 0 & \beta^4 t^4 \end{bmatrix} + \frac{1}{5!} \begin{bmatrix} 0 & -\beta^5 t^5 \\ \beta^5 t^5 & 0 \end{bmatrix} + \dots \\
 &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2!}\beta^2 t^2 + \frac{1}{4!}\beta^4 t^4 - \dots & -\beta t + \frac{1}{3!}\beta^3 t^3 - \frac{1}{5!}\beta^5 t^5 + \dots \\ \beta t - \frac{1}{3!}\beta^3 t^3 + \frac{1}{5!}\beta^5 t^5 - \dots & 1 - \frac{1}{2!}\beta^2 t^2 + \frac{1}{4!}\beta^4 t^4 + \dots \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} (\beta t)^{2k} & -\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\beta t)^{2k+1} \\ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\beta t)^{2k+1} & \sum_{k=0}^n -\frac{(-1)^k}{(2k)!} (\beta t)^{2k} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

De aquí, tomando límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , obtenemos

$$e^B = \begin{bmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente, la solución del sistema es

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} y(0) \\
 &= e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} y(0).
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Observemos que, por la periodicidad del seno y del coseno, todas las trayectorias giran en torno del equilibrio  $y^* = (0, 0)$ . El signo de  $\alpha$  hace que estas trayectorias, o bien se acerquen, o bien se alejen del equilibrio cuando  $t \rightarrow \infty$ . Si  $\alpha < 0$ , todas las trayectorias se acercan al equilibrio y se dice que  $y^*$  es estable y se le conoce como «sumidero». Por el contrario, si  $\alpha > 0$ , todas las trayectorias, salvo  $y^*$ , se alejan de  $y^*$ . Se dice, entonces, que  $y^*$  es un equilibrio inestable y se le conoce como «fuente». Si  $\alpha = 0$ , todas las trayectorias giran en torno del equilibrio en forma circular, y el equilibrio  $y^*$  se conoce como «centro».<sup>9</sup> El efecto de ambos parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  hace que las trayectorias sean curvas espirales. Para determinar en qué sentido giran estas espirales, habrá que trazar el campo vectorial y determinar a partir de ello si el giro es en el sentido horario o antihorario.

### Ejemplo

**Ej. 43.** Consideremos el sistema

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x; \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}.$$

Calculando los valores característicos se obtiene  $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ . El campo vectorial indica que el giro de las trayectoria es en el sentido antihorario,

<sup>9</sup> Veremos más adelante que, en las coordenadas  $X_1 - X_2$ , estas trayectorias son elípticas.

por lo que hay que tomar  $\beta = -1$ .<sup>10</sup> La solución en las coordenadas  $Y_1 - Y_2$  es

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow y(t) = e^t \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} y(0).$$

Para expresar la solución en las coordenadas  $X_1 - X_2$  necesitamos la matriz  $P$ . Veamos.

$$\lambda = 1 - i \Rightarrow w = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, la solución es

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} e^t \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \\ &= e^t \begin{bmatrix} x_{20} \sin t + x_{10} \cos t \\ x_{20} \cos t + x_{10} \sin t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente, identificando las componentes de las trayectoria, tenemos

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^t(x_{20} \sin t + x_{10} \cos t) \\ x_2(t) &= e^t(x_{20} \cos t + x_{10} \sin t). \end{aligned}$$

Puesto que  $\alpha = 1 > 0$ , el equilibrio  $x^* = (0, 0)$  es inestable tipo fuente, y las trayectorias se alejan del equilibrio formando espirales.




---

<sup>10</sup> Una vez que analicemos el sistema en coordenadas polares, verificaremos que el signo de  $\beta$  está bien tomado, pues depende del giro de la trayectoria.

EL PASO A COORDENADAS POLARES

Sea  $Q(t) = (y_1(t), y_2(t))$  un punto cualquiera del plano  $Y_1 - Y_2$ . Sea  $OQ(t)$  el vector dirigido que va desde el origen de coordenadas hasta el punto  $Q(t)$  y sea  $r(t)$  la longitud de este vector. Finalmente, sea  $\phi(t)$  el ángulo de giro medido en el sentido antihorario desde el eje  $Y_1$  hasta el vector  $OQ(t)$ , como se muestra en la Figura 2.16.

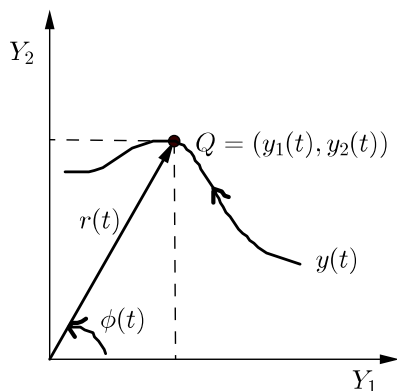


Figura 2.16 Coordenadas polares

Para cada punto  $Q(t) = (y_1(t), y_2(t))$  existe un par de coordenadas llamadas «coordenadas polares» y denotadas por  $(r(t), \phi(t))$ . Recíprocamente, cada par de coordenadas polares corresponde a un único punto  $Q(t)$ . Las relaciones entre estos dos sistemas de coordenadas están dadas por las ecuaciones (2.24) y (2.25).

- De coordenadas cartesianas a polares:<sup>11</sup>

$$\begin{aligned} r(t) &= \sqrt{y_1^2(t) + y_2^2(t)} \\ \phi(t) &= \arctan \frac{y_2(t)}{y_1(t)}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

<sup>11</sup> Note que si  $y_1(t) = 0$ , entonces  $\phi(t)$  es de la forma  $(2k - 1)\pi/2, k \in \mathbb{Z}$ .

- De coordenadas polares a cartesianas:

$$\begin{aligned}y_1(t) &= r(t) \cos \phi(t) \\y_2(t) &= r(t) \sin \phi(t)\end{aligned}\tag{2.25}$$

De las ecuaciones (2.23) y (2.24) podemos obtener las ecuaciones que  $r$  y  $\theta$  deben satisfacer.

$$\begin{aligned}r(t)r'(t) &= y_1(t)y_1'(t) + y_2(t)y_2'(t) \\&= \alpha([y_1(t)]^2 + [y_2(t)]^2) + e^{2\alpha t}[(y_{10} \cos \beta t - y_{20} \sin \beta t)\beta \\&\quad (-y_{10} \sin \beta t - y_{20} \cos \beta t) + \\&\quad + (y_{10} \sin \beta t + y_{20} \cos \beta t)\beta(y_{10} \cos \beta t - y_{20} \sin \beta t)] \\&= \alpha([y_1(t)]^2 + [y_2(t)]^2) \\&= \alpha r^2(t).\end{aligned}$$

Ahora bien, para el ángulo de giro  $\phi(t)$  tenemos

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \frac{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)}{[y_1(t)]^2} \frac{[y_1(t)]^2}{[y_1(t)]^2 + [y_2(t)]^2} \\&= \frac{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)}{[y_1(t)]^2 + [y_2(t)]^2} \\&= \frac{\beta([y_1(t)]^2 + [y_2(t)]^2)}{[y_1(t)]^2 + [y_2(t)]^2} \\&= \beta.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$r'(t) = \alpha r(t)\tag{2.26}$$

$$\phi'(t) = \beta.\tag{2.27}$$

La ecuación (2.26) indica que si  $\alpha < 0$ , entonces  $r(t)$  es decreciente, por lo que la trayectoria se acerca al origen de coordenadas con el transcurrir del



tiempo. Como esto sucede para cualquier condición inicial, decimos que el equilibrio es globalmente estable. Por el contrario, si  $\alpha > 0$ , entonces  $r(t)$  es creciente y la trayectoria, más bien, se aleja del origen de coordenadas, por lo que el equilibrio es inestable. En el caso de que  $\alpha = 0$ , la trayectoria ni se acerca ni se aleja del origen de coordenadas, sino que permanece siempre a la misma distancia con el transcurrir del tiempo. En este caso, el equilibrio es un centro y las trayectorias forman círculos para cada condición inicial.

Por otro lado, la ecuación (2.27) indica que el signo de  $\beta$  debe ser consistente con la forma en la que crece el ángulo de giro al irse describiendo la trayectoria espiral. Si el giro es en el sentido antihorario, el ángulo  $\phi(t)$  es creciente, por lo que  $\phi'(t)$  debe ser positivo y, por lo tanto,  $\beta$  también. Por el contrario, si el giro es en el sentido horario, el ángulo  $\phi(t)$  es decreciente, por lo que  $\phi'(t)$  debe ser negativo y, por lo tanto,  $\beta$  también. Recordemos que en la posición  $J_{21}$  de la matriz  $J$  dada en (2.20) se encuentra precisamente  $\beta$ , de manera que el signo de  $\beta$  en esta posición no es arbitrario, sino que debe coincidir con el giro de la trayectoria, que es determinado por la dirección del campo vectorial.<sup>12</sup>

### Ejemplo

**Ej. 44.** Consideremos el sistema

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x; \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}.$$

Calculando los valores característicos, se obtienen  $\lambda_{1,2} = \pm 4i$ . Evaluando el campo vectorial, por ejemplo, en el punto  $Q = (1,1)$  se

<sup>12</sup> Observe que puesto que  $\phi'(t) = \beta$  para todo  $t$ , el sentido del giro de la trayectoria nunca cambia, y la velocidad de giro es constante e igual a  $\beta$ .

obtiene  $(x'_1, x'_2) = (8, -2)$ , lo que indica que en el punto  $Q$  la trayectoria gira en el sentido horario. Luego, en la matriz  $J$  debe tomarse  $\beta = -4$ :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

En efecto, siguiendo el procedimiento indicado, tenemos

$$\lambda = (-4)i \Rightarrow w = \begin{bmatrix} 2 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = J.$$

Luego, la solución en las coordenadas  $X_1 - X_2$  es

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-4)t & -\sin(-4)t \\ \sin(-4)t & \cos(-4)t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 4t & \sin 4t \\ -\sin 4t & \cos 4t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$x_1(t) = 2x_{20} \sin 4t + x_{10} \cos 4t$$

$$x_2(t) = x_{20} \cos 4t - \frac{1}{2}x_{10} \sin 4t.$$

De estas dos ecuaciones se obtiene la elipse  $x_1^2(t) + 4x_2^2(t) = 4x_{20}^2 + x_{10}^2$ .

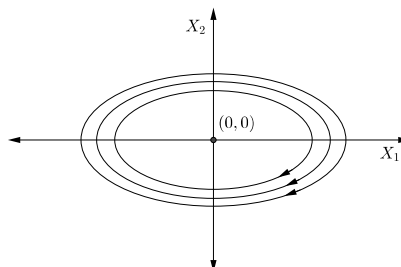


Figura 2.17 Trayectorias elípticas



Caso 3.1  $\alpha > 0$ . Giro antihorario

Puesto que  $\alpha > 0$ , el equilibrio es inestable tipo fuente y, como el giro es antihorario, entonces  $\beta > 0$ .

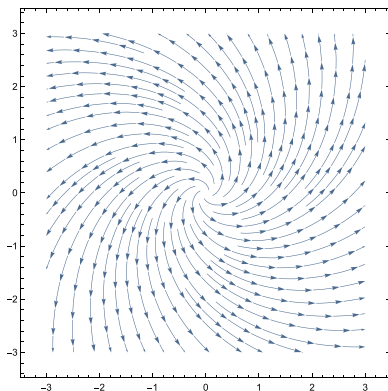


Figura 2.18 Inestable tipo fuente

Caso 3.2  $\alpha > 0$ . Giro horario

Análogo al caso anterior. Como el giro es horario, entonces  $\beta < 0$ .

Caso 3.3  $\alpha < 0$ . Giro antihorario

Puesto que  $\alpha < 0$ , el equilibrio es estable tipo sumidero y, como el giro es antihorario, entonces  $\beta > 0$ .

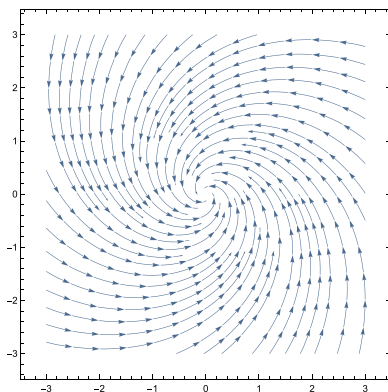


Figura 2.19 Estable tipo sumidero

Caso 3.4  $\alpha < 0$ . Giro horario

Análogo al caso anterior. Como el giro es horario, entonces  $\beta < 0$ .

Caso 3.6  $\alpha = 0$ . Giro antihorario

El equilibrio es estable tipo centro. Como el giro es antihorario, entonces  $\beta > 0$ .

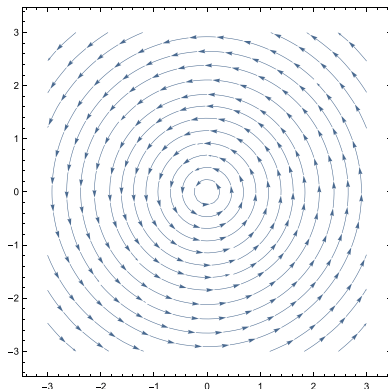


Figura 2.20 Estable tipo centro

Caso 3.6  $\alpha = 0$ . Giro horario

Análogo al caso anterior. Como el giro es en el sentido horario, entonces  $\beta < 0$ .

UNA NOTA SOBRE SISTEMASMULTIDIMENSIONALES

Los sistemas de dimensión  $n \geq 3$  se resuelven de manera similar a los sistemas de dimensión 2; esto es, aplicando el teorema de Jordan. Los bloques básicos de construcción de la matriz exponencial son los sistemas bidimensionales. Para los dos siguientes ejemplos utilizamos la notación  $x_{i0} = x_i(0)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

**Ejemplos**

**Ej. 45.** El siguiente sistema, que es de dimensión 3, puede resolverse, sin embargo, como si el sistema fuese de dimensión 2. Veamos.

$$\begin{aligned}x_1' &= 3x_1 \\x_2' &= x_2 + 2x_3 \\x_3' &= x_2 + x_3\end{aligned}$$

Puesto que la primera ecuación está desacoplada de la segunda y la tercera, ella puede resolverse directamente. Por otro lado, la segunda y la tercera ecuación pueden resolverse como un sistema de dimensión 2.

En efecto, para las dos últimas ecuaciones tenemos

$$\begin{bmatrix} x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1 - \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{2}.$$

Por lo tanto, la solución es

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^{3t}x_{10} \\ \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(1-\sqrt{2})t} & 0 \\ 0 & e^{(1+\sqrt{2})t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}x_{20} - \frac{\sqrt{2}}{2}x_{30}\right)e^{(1-\sqrt{2})t} + \left(\frac{1}{2}x_{20} + \frac{\sqrt{2}}{2}x_{30}\right)e^{(1+\sqrt{2})t} \\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}x_{20} - \frac{1}{2}x_{30}\right)e^{(1-\sqrt{2})t} + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}x_{20} + \frac{1}{2}x_{30}\right)e^{(1+\sqrt{2})t} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

**Ej. 46.** En este ejemplo también hay una ecuación que está desacoplada de las otras dos. Sin embargo, resolveremos el sistema en conjunto, como un sistema de dimensión 3.

$$\begin{aligned}x_1' &= 2x_1 - x_3 \\x_2' &= 3x_2 \\x_3' &= x_1 + 2x_3\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda = 2 \pm i.$$

Como veremos después, el signo que debe tomarse para  $\beta$  es positivo.

$$\lambda_1 = 3 \Rightarrow v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 2 + i \Rightarrow w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En este caso, la transformación  $P^{-1}AP$  produce la matriz  $J$  dada por

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos 2t \end{bmatrix},$$

de donde la solución en la variable  $y = P^{-1}x$  es

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} \cos 2t & -e^{2t} \sin t \\ 0 & e^{2t} \sin t & e^{2t} \cos 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ y_{30} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{3t}y_{10} \\ e^{2t}(y_{20} \cos 2t - y_{30} \sin t) \\ e^{2t}(y_{20} \sin 2t + y_{30} \cos t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En términos de la variable original se tiene

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} \cos 2t & -e^{2t} \sin t \\ 0 & e^{2t} \sin t & e^{2t} \cos 2t \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix}.$$

Reemplazando  $P$  y  $P^{-1}$ , resulta

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t}(x_{10} \cos 2t - x_{30} \sin t) \\ e^{3t}x_{20} \\ e^{2t}(x_{30} \cos 2t + x_{10} \sin t) \end{bmatrix}.$$

Para determinar el signo de  $\beta$ , nos concentramos en las coordenadas  $X_1 - X_3$ . En este caso, el diagrama de fases es el siguiente:

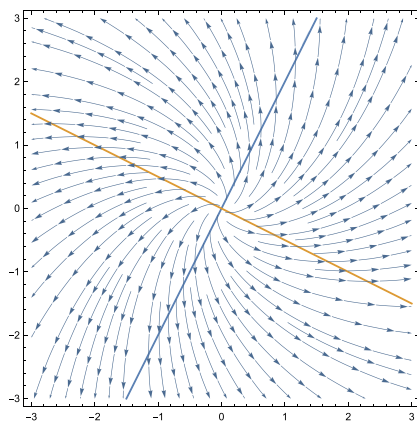


Figura 2.21 Diagrama de fases

Se aprecia que el giro de las trayectorias es en el sentido antihorario, por lo que  $\beta$  debe ser positivo. Como  $\alpha > 0$ , las trayectorias se alejan del origen. Además, puesto que para la coordenada  $X_2$  la solución es exponencial con tasa de crecimiento positiva, estas trayectorias se van levantando del plano  $X_1 - X_3$  en la dirección positiva del eje  $X_2$ .



### LISTA DE EJERCICIOS

**2.3.1.** Sea  $A$  una matriz cuadrada en  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . Denotemos por  $\tau$  y  $\delta$  la traza y el determinante de  $A$ , respectivamente. Pruebe que el polinomio

característico de  $A$  viene dado por la expresión

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \tau\lambda + \delta,$$

**2.3.2.** De acuerdo con el ejercicio 1, los valores característicos de la matriz  $A$  están dados por la fórmula

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \tau \\ \lambda_1 \lambda_2 = \delta, \end{cases}$$

de manera que la relación entre  $\tau$  y  $\delta$  determina los valores característicos. Como se muestra en la Figura 2.22, el par  $(\tau_0, \delta_0)$  se encuentra ubicado en una de las cinco regiones  $I - V$ , o bien sobre la curva  $\delta = (1/4)\tau^2$ , o bien sobre las rectas  $\tau = 0$  o  $\delta = 0$ .

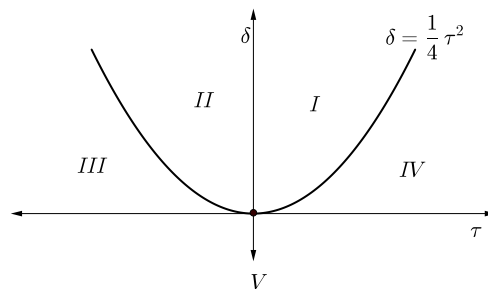


Figura 2.22 Determinante versus traza

Considerando el sistema  $x' = Ax$ , caracterice cada una de las regiones  $I - V$ , de acuerdo con la estabilidad del equilibrio correspondiente. En general, analice qué sucede con el sistema, de acuerdo con la posición del par  $(\tau, \delta)$ . Por ejemplo, la zona  $I$  corresponde a  $\tau > 0$  y  $\delta > (1/4)\tau^2$ , de manera que un punto ubicado en esta zona corresponde a un equilibrio inestable tipo fuente.



**2.3.3.** Dado el siguiente sistema:

$$x' = \begin{bmatrix} 2\alpha & -1 \\ \alpha^2 - \beta^2 & 0 \end{bmatrix} x,$$

responda a las siguientes preguntas:

- ¿Qué relación debe existir entre  $\alpha$  y  $\beta$  para que el sistema tenga un único equilibrio?
- ¿Qué condiciones se deben imponer sobre  $\alpha$  y  $\beta$  para que el único equilibrio sea inestable tipo silla?
- ¿Qué condiciones se deben imponer sobre  $\alpha$  y  $\beta$  para que el único equilibrio sea un sumidero?

Sugerencia. Use el diagrama de la Figura 2.22.

**2.3.4.** Obtenga la solución  $x(t)$ , determine el equilibrio y analice la estabilidad de cada uno de los sistemas que se dan a continuación. Para cada caso considere una condición inicial  $x(0)$ .

a)  $x' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$

b)  $x' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x$

c)  $x' = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x$

d)  $x' = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{bmatrix} x$

**2.3.5.** Pruebe que si en la matriz  $P$  del caso complejo se toma  $P = [u|v]$  en lugar de  $P = [v|u]$ , entonces la matriz  $J$  que se obtiene es

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

**2.3.6.** Resuelva las ecuaciones (2.26) y (2.27).

**2.3.7.** Con respecto al sistema  $x' = Ax$ , donde  $A$  es una matriz cuadrada de orden  $2 \times 2$ , pruebe lo siguiente:

a) Si  $\varphi = \varphi(t)$  y  $\phi = \phi(t)$  son soluciones; entonces, para cualesquiera valores de las constantes  $C_1$  y  $C_2$ , la función  $\psi(t)$  definida por

$$\psi(t) = C_1\varphi(t) + C_2\phi(t)$$

también es una solución.

b) Si  $\varphi = \varphi(t)$  y  $\phi = \phi(t)$  son soluciones «linealmente independientes»,<sup>13</sup> entonces cualquier solución  $\psi$  puede escribirse como combinación lineal de  $\varphi$  y  $\phi$ ; esto es, existen constantes  $C_1$  y  $C_2$ , tales que  $\psi(t) = C_1\varphi(t) + C_2\phi(t)$ .

c) Si  $v$  es un vector característico de  $A$  asociado al valor característico  $\lambda$ , entonces  $\varphi(t) = e^{\lambda t}v$  es una solución.

d) Si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son valores característicos diferentes de  $A$ , entonces la solución general del sistema está dada por

$$x(t) = C_1e^{\lambda_1 t}v_1 + C_2e^{\lambda_2 t}v_2, \quad (2.28)$$

donde  $v_1$  y  $v_2$  son los vectores característicos asociados a  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , respectivamente, y  $C_1$  y  $C_2$  son constantes arbitrarias.

e) ¿Es posible generalizar los resultados anteriores al caso  $n$ -dimensional?

**2.3.8.** Pruebe que se obtiene la expresión del tipo (2.28) a partir de la solución exponencial  $x(t) = Pe^{Jt}P^{-1}x_0$ .

<sup>13</sup> Las funciones  $\varphi$  y  $\phi$  son linealmente independientes si la relación  $c_1\varphi(t) + c_2\phi(t) = 0$  para todo  $t$  implica  $c_1 = c_2 = 0$ .

**2.3.9.** Sea  $x' = Ax$  un sistema de orden  $2 \times 2$ , tal que la matriz  $A$  tiene valor característico  $\lambda$  de multiplicidad geométrica 1 (valor característico repetido). Sean  $v$  y  $w$  los vectores característicos asociados a  $\lambda$  ( $w$  es el vector generalizado).

a) Pruebe que  $\varphi(t) = we^{\lambda t}$  no es una solución del sistema.

b) Pruebe que  $\varphi(t) = (w + tv)e^{\lambda t}$  y  $\phi(t) = ve^{\lambda t}$  son soluciones linealmente independientes del sistema.

c) ¿Cómo es la solución general del sistema?

**2.3.10.** En el ejercicio 2.3.7 d) se pidió probar que si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son valores característicos diferentes de  $A$ , entonces la solución general de  $x' = Ax$  está dada por  $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2$ . Este resultado es válido tanto para el caso en que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son reales como complejos (conjugados). En el caso complejo, sin embargo, la solución dada en términos de números complejos no tiene sentido económico. Este ejercicio aborda el problema planteado.

Sea  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  y  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ . Si  $z_1 = u + iv$  y  $z_2 = u - iv$  son los vectores característicos de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , respectivamente, pruebe que la solución general (real) de la ecuación está dada por

$$C_1 w_1(t) + C_2 w_2(t),$$

donde

$$w_1(t) = e^{\alpha t}(u \cos \beta t - v \sin \beta t)$$

$$w_2(t) = e^{\alpha t}(v \cos \beta t + u \sin \beta t).$$

Sugerencia. Recuerde la fórmula de Euler:  $e^{i\beta t} = \cos \beta t + i \sin \beta t$ .

## 2.4. Subespacios invariantes

Un subespacio invariante asociado con un sistema dinámico es un subespacio vectorial que tiene la propiedad de atrapar trayectoria; es decir, las trayectorias que viven dentro de él nunca salen del subespacio. Asociados al sistema (2.1), hay tres importantes subespacios invariantes conocidos como «subespacio estable», que denotaremos por  $E^s$ ; «subespacio centro», que denotaremos por  $E^c$  y «subespacio inestable», que denotaremos por  $E^u$ .<sup>14</sup> Enseguida definiremos formalmente estos subespacios.

**Definición 11.** Consideremos el sistema  $x' = Ax$  y sea  $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$  un valor característico de  $A$ . Sea, además,  $w_j = u_j + iv_j$  el vector característico (generalizado) asociado. Los subespacios  $E^s, E^c$  y  $E^u$  son los subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^n$  generados por las partes real e imaginaria de los vectores  $w_j$ :

$$E^s \triangleq \text{Span}\{u_j, v_j; \alpha_j < 0\}$$

$$E^c \triangleq \text{Span}\{u_j, v_j; \alpha_j = 0\}$$

$$E^u \triangleq \text{Span}\{u_j, v_j; \alpha_j > 0\}.$$

Note que si  $\alpha_j \neq 0$  para todo  $j$ , entonces  $E^c = \{0\}$ .

**Definición 12.** Se dice que un subespacio  $E \subset \mathbb{R}^n$  es invariante bajo el operador  $e^A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  si  $e^A(E) \subset E$ .<sup>15</sup>

**Teorema 11.** Los subespacios  $E^s, E^c$  y  $E^u$  son invariantes bajo  $A$ .

<sup>14</sup> Como veremos luego, el subespacio  $E^s$  tiene mucha importancia práctica y teórica en los modelos económicos, pues suele ser muy útil que las trayectorias solución se acerquen a un equilibrio sin perder sus características esenciales, es decir, sin salir del espacio al que pertenecen.

<sup>15</sup>  $e^A(E) \triangleq \{u \in \mathbb{R}^n : u = e^A v; v \in E\}$ .

*Demostración.* Tomemos, por ejemplo, el caso  $E^s$ . Sea  $\mathcal{B} = \{w_j, j = 1, \dots, s\}$  una base de vectores característicos (generalizados) del subespacio  $E^s$ . Entonces, para cualquier  $w \in E^s$  se tiene

$$Aw = A \left( \sum_{j=1}^s \alpha_j w_j \right) = \sum_{j=1}^s \alpha_j Aw_j.$$

Por definición, para algún  $k_j \in \mathbb{N}$  mínimo,  $w_j$  satisface la ecuación

$$(A - \lambda_j)^{k_j} w_j = 0.$$

Esto implica que  $(A - \lambda_j)w_j \in \text{Ker}(A - \lambda_j I)^{k_j-1} \subset E^s$ . Por inducción se sigue que  $Aw_j - \lambda_j w_j \in E^s$ . Como  $E^s$  es un subespacio vectorial, entonces  $Aw_j \in E^s$ ; lo que implica que  $Aw \in E^s$ .  $\square$

La prueba del siguiente teorema se basa en el hecho de que si un subespacio  $E$  es invariante bajo los operadores  $A$  y  $B$ , entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- a)  $E$  es invariante bajo  $\alpha A$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- b)  $E$  es invariante bajo  $A^k$  para todo entero  $k > 1$ .
- c)  $E$  es invariante bajo el operador  $A + B$ .

**Teorema 12.** Consideremos el sistema  $x' = Ax$ . Para todo  $t$ , los subespacios  $E^s$ ,  $E^c$  y  $E^u$  son invariantes bajo el operador  $e^{At}$  y se cumple la siguiente descomposición del espacio  $\mathbb{R}^n$ :

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^c \oplus E^u.$$

*Demostración.* Sea  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_s \cup \mathcal{B}_c \cup \mathcal{B}_u$  una base de  $\mathbb{R}^n$  formada por la unión de los vectores de las bases de  $E^s$ ,  $E^c$  y  $E^u$ . Entonces, por la definición de  $E^s$ ,  $E^c$  y  $E^u$  se sigue de inmediato que  $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ .

Para probar la invariancia, tomemos, por ejemplo,  $x_0 \in E^s$ . Por la definición de la matriz exponencial tenemos

$$e^{At}x_0 = \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (tA)^k \right] x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (tA)^k x_0 \right]. \quad (2.29)$$

Debido al teorema 11, las propiedades **a)**, **b)** y **c)** y la completitud de  $E^s$ , se sigue, de la igualdad 2.29, que  $e^{At}x_0 \in E^s$ .<sup>16</sup>  $\square$

La invariancia de los subespacios  $E^s, E^c$  y  $E^u$  significa que si  $x_0$  es un punto que pertenece a cualquiera de estos subespacios, entonces la trayectoria correspondiente  $x(t; t_0, x_0) = e^{At}x_0$  siempre permanece a dichos subespacios.

### Ejemplos

**Ej. 47.** Consideremos el sistema  $x' = Ax$ , donde  $A$  es la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Los valores y vectores característicos son

$$\lambda_1 = -1 - \sqrt{2}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = -1 + \sqrt{2}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}.$$

Como no existe valor característico con parte real nula, entonces  $E^c = \{0\}$  y  $\mathbb{R}^2 = E^s \oplus E^u$ .

$$E^s = \text{Span}\{v_1\} = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : v = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E^u = \text{Span}\{v_2\} = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : v = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

<sup>16</sup> La completitud se refiere a que toda sucesión de Cauchy es convergente. Se sabe que todo espacio vectorial de dimensión finita es completo. Véase el anexo.

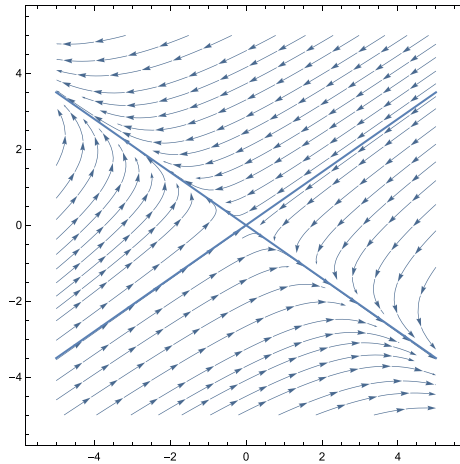


Figura 2.23 Punto silla y subespacios  $E^s$ ,  $E^u$

Puesto que  $|A| \neq 0$ , el único punto de equilibrio del sistema es  $y^* = (y_1^*, y_2^*) = (0, 0)$ . Ahora bien, en la variable  $y$ , definida por  $y = P^{-1}x$ , donde  $P = (v_1|v_2)$ , las trayectorias están dadas por

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t) &= e^{(-1-\sqrt{2})t}y_{10} \\ y_2(t) &= e^{(-1+\sqrt{2})t}y_{20}. \end{cases}$$

De aquí se observa que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y^*$  si y solamente si  $y_{20} = 0$ . Ahora bien,  $y_{20} = 0$  si y solamente si  $x_0 \in E^s$ . En efecto, si  $y_{20} = 0$ , entonces  $x_0 = Py_0 = y_{10}v_1 \in E^s$ . Por otro lado, si  $x_0 \in E^s$ , entonces  $x_0 = \alpha v_1$  para algún  $\alpha \in \mathbb{R}$ , de donde  $y_{20} = [0 \ 1]P^{-1}x_0 = \alpha[0 \ 1]P^{-1}v_1 = 0$ .

Como  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = (0, 0)$  si y solamente si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = (0, 0)$ ; entonces, por el argumento desarrollado, puede interpretarse que  $E^s$  es el subespacio de todas aquellas condiciones iniciales del espacio  $\mathbb{R}^2$  que conducen las trayectorias al equilibrio.

**Ej. 48.** Supongamos que  $A$  es una matriz de orden  $3 \times 3$  con tres valores propios reales y diferentes  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  y  $\lambda_3 > 0$ . Entonces,  $A$  tiene tres

autovectores linealmente independientes,  $v_1, v_2$  y  $v_3$ , y que corresponden a  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_3$ , respectivamente. Sea  $P = (v_1|v_2|v_3)$  la matriz que diagonaliza a  $A$ ; esto es,

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix}.$$

Los subespacios estable e inestable son  $E^s = \text{Span}\{v_1, v_2\}$  y  $E^u = \text{Span}\{v_3\}$ . Si  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^3$ , la solución de (2.1) es la trayectoria

$$x(t) = Pe^{Jt} \underbrace{P^{-1}x_0}_{y_0} = (e^{\lambda_1 t}v_1|e^{\lambda_2 t}v_2|e^{\lambda_3 t}v_3) y_0, \quad (2.30)$$

donde  $y_0 = P^{-1}x_0$  es la condición inicial  $x_0$  expresada en la base formada por los vectores  $v_1, v_2$  y  $v_3$ . Sin embargo, si más específicamente tomamos  $x_0 \in E^s$  ( $x_0 \in E^u$ ), entonces  $y_0$  es combinación lineal solo de  $v_1$  y  $v_2$  (de  $v_3$ ). Por lo tanto,  $y_0$  puede escribirse, sin pérdida de generalidad, como

$$y_0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left( y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_{30} \end{bmatrix} \right).$$

Luego,

$$\begin{aligned} x(t) &= (e^{\lambda_1 t}v_1|e^{\lambda_2 t}v_2|e^{\lambda_3 t}v_3) \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= y_{10}e^{\lambda_1 t}v_1 + y_{20}e^{\lambda_2 t}v_2 \in E^s, \quad x_0 \in E^s \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$x(t) = (e^{\lambda_1 t}v_1|e^{\lambda_2 t}v_2|e^{\lambda_3 t}v_3) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_{30} \end{bmatrix} = y_{30}e^{\lambda_3 t}v_3 \in E^u, \quad x_0 \in E^u.$$



Así pues, si  $x_0 \in E^s$ , entonces  $x(t) \in E^s$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ ; y si  $x_0 \in E^u$ , entonces  $x(t) \in E^u$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Esto quiere decir que una trayectoria que comienza en  $E^s$  o  $E^u$  permanece por siempre en dichos subespacios, no sale nunca de allí.

El único punto de equilibrio del sistema es la solución nula  $x^* = (0, 0, 0)$ . Ahora bien, de (2.31), si  $x_0 \in E^s$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*$ , pues  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ . Por el contrario, si  $x_0 \in E^u$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x^*$ , pues  $\lambda_3 > 0$ . Por otro lado, se observa de (2.30) que para que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*$ , necesariamente debe ser  $y_{30} = 0$ , lo que implica que  $x_0 \in E^s$ .



El siguiente teorema generaliza los resultados obtenidos en estos dos ejemplos.

**Teorema 13. (Caracterización de  $E^s$  y  $E^u$ ).** Consideremos el sistema  $x' = Ax$ , donde  $A$  es una matriz no singular de orden  $n \times n$ . Dado  $x_0 = x(t_0)$ , se cumple que

1. Si  $x_0 \in E^s$ , entonces:

$$\text{a) } x(t; t_0, x_0) = e^{At} x_0 \in E^s \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{b) } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; t_0, x_0) = 0$$

2. Si  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  es tal que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; t_0, x_0) = 0$ , entonces  $x_0 \in E^s$ .

3. Si  $x_0 \in E^u$ , entonces:

$$\text{a) } x(t; t_0, x_0) = e^{At} x_0 \in E^u \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{b) } \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t; t_0, x_0) = +\infty$$

*Demostración.* Las afirmaciones (1) y (3) se siguen del teorema 12, y la afirmación (2) se sigue del teorema de Jordan. □

**Ejemplos**

**Ej. 49.** Consideremos el siguiente sistema:

$$x' = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x .$$

El valor característico es  $\lambda = -1$ , que tiene multiplicidad geométrica 1.

Los vectores característicos ordinario,  $u$ , y generalizado,  $v$ , son

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} .$$

Por lo tanto, el subespacio estable es

$$E^s = \left\{ w \in \mathbb{R}^2 : w = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2 .$$

Este resultado implica que donde sea que se coloque la condición inicial  $x_0$  en el espacio  $\mathbb{R}^2$ , la trayectoria correspondiente va a converger al equilibrio. Además,  $E^u = E^c = \{0\}$ .

**Ej. 50.** Consideremos el sistema  $x' = Ax$ , donde  $A$  es la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} .$$

Los valores y vectores característicos de  $A$  son

$$\lambda_1 = 3, \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \lambda_2 = -2 + i, \quad w = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{w_1} + i \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{w_2} .$$

Entonces:

$$E^s = \text{Span}\{w_1, w_2\} = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 : v = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E^u = \text{Span}\{u\} = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 : v = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$E^s$  es el plano  $X_1 - X_2$  y  $E^u$  es el eje  $X_3$ .



### LISTA DE EJERCICIOS

**2.4.1.** Pruebe que los subespacios propios de una matriz  $A$  son subespacios invariantes de dicha matriz.

**2.4.2.** Encuentre los subespacios  $E^s$  y  $E^u$  del sistema  $x' = Ax$  en los siguientes casos:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

**2.4.3.** Considere el sistema  $x' = Ax$ , donde  $A$  es una matriz de orden  $2 \times 2$ . Dependiendo de los valores característicos de  $A$ , determine las dimensiones de los subespacios  $E^s$  y  $E^u$ .

**2.4.4. (Modelo de competencia).** Volviendo al modelo de competencia presentado en la introducción de este capítulo, digamos que las tasas de inversión de las ciudades  $A$  y  $B$  están dadas por las dinámicas 1 y 2:

1.  $x'_1 = -2x_1 + 5x'_2; \quad x'_2 = 4x_1 - x'_2$

2.  $x'_1 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{7}{2}x_2; \quad x'_2 = \frac{7}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$

a) ¿Cuál es el equilibrio del sistema? Interprete tal equilibrio.

b) Encuentre los subespacios estable e inestable.

c) Haga el diagrama de fases en el plano  $X_1 - X_2$ .

d) Proporcione una condición inicial para que la trayectoria correspondiente converja al equilibrio.

## 2.5. Sistemas lineales no homogéneos

En esta sección analizamos el sistema no homogéneo

$$x' = Ax + Bu, \tag{2.32}$$

donde  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $u \in \mathbb{R}^p$ . La variable  $u$  puede concebirse como una variable que representa, por ejemplo, una perturbación, una alimentación o un control del sistema. En general, la llamaremos variable «input».

Dadas la condición inicial  $x(t_0) = x_0$  y la variable input  $u$ , la solución de (2.32) está dada por<sup>17</sup>

$$x(t; t_0, x_0) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.33}$$

La expresión (2.33) tiene dos partes. La primera, llamada «parte no forzada», corresponde a la condición inicial; y la segunda, llamada «parte forzada», corresponde a la presencia de la variable input.<sup>18</sup> Si no hubiese

<sup>17</sup> Observe la similitud con el caso escalar, ecuación (1.13).

<sup>18</sup> Este lenguaje proviene de la ingeniería, donde aparece el mismo tipo de modelo dinámico, pero dentro del contexto de las ciencias físicas. En este contexto, un input puede ser, por ejemplo, una señal electromagnética que fuerza el funcionamiento del sistema en determinado sentido.

una variable de entrada exógena, el sistema igualmente respondería como consecuencia de la condición inicial. En efecto, observe que cuando  $u \equiv 0$ , la ecuación (2.32) se reduce a la ecuación (2.1),  $x' = Ax$  y, en este caso, la solución (2.33) se reduce a  $x(t; t_0, x_0) = e^{A(t-t_0)}x_0$ . La parte forzada de la solución es una agregación de inputs durante el horizonte de tiempo  $[t_0 - t]$ .

Para derivar la expresión (2.33) se procede de forma similar a como se hizo en el caso escalar.

Supongamos que  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una solución de (2.32). Premultiplicando ambos miembros de (2.32) por  $e^{-At}$ , obtenemos

$$e^{-At}x'(t) - e^{-At}Ax(t) = e^{-At}Bu(t),$$

lo que es equivalente a

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}x(t)) = e^{-At}Bu(t).$$

Integrando ambos lados de esta igualdad, se obtiene

$$\begin{aligned} e^{-A\tau}x(\tau) \Big|_{\tau=t_0}^{\tau=t} &= \int_{t_0}^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau, \\ e^{-At}x(t) - e^{-At_0}x(t_0) &= \int_{t_0}^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

De aquí; multiplicando por  $e^{At}$ , se obtiene la expresión (2.33).

Debido al teorema 1, la ecuación (2.32) tiene una única solución para cada condición inicial. Por lo tanto,  $x(t)$  dada en (2.33) es efectivamente la solución de la ecuación. Se recomienda al lector verificar que, en efecto, (2.32) es una solución de la ecuación (2.32).

### • La variable input es constante

Supongamos que  $A$  es no singular. Además, tomemos  $u(t) = 1$  y  $B = b \in \mathbb{R}^n$ . Así, la ecuación (2.32) se torna en

$$x' = Ax + b. \tag{2.34}$$

Aplicando (2.33) se tiene

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bd\tau \\
 &= e^{At}x(0) + e^{At} \left( \int_0^t e^{-A\tau}d\tau \right) b \\
 &= e^{At}x(0) + e^{At} [-e^{-A\tau}A^{-1}]_0^t b \\
 &= e^{At}x(0) + e^{At} [-e^{-At}A^{-1} + A^{-1}] b \\
 &= e^{At} [x(0) + A^{-1}b] - A^{-1}b.
 \end{aligned}$$

Así pues, la solución de la ecuación está dada por

$$\boxed{x(t) = e^{At} [x(0) + A^{-1}b] - A^{-1}b} \tag{2.35}$$

Incorporando la solución de equilibrio  $x^* = -A^{-1}b$ , la trayectoria obtenida en (2.35) se puede escribir como

$$\boxed{x(t) = e^{At} [x(0) - x^*] + x^*} \tag{2.36}$$

Observe la similitud de (2.36) con el caso escalar, ecuación (1.16).

### **Ejemplos**

**Ej. 51.** Consideremos el sistema

$$x' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En este caso tenemos

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3.$$

Por consiguiente,

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 4/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 e^{At} &= P e^{Jt} P^{-1} = P \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} P^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{4}{5}e^{-3t} & \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t} \\ \frac{4}{5}e^{2t} - \frac{4}{5}e^{-3t} & \frac{4}{5}e^{2t} + \frac{1}{5}e^{-3t} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$x^* = -A^{-1}b = - \begin{bmatrix} -1/6 & 1/6 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -5/3 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, aplicando (2.36) obtenemos

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{4}{5}e^{-3t} & \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t} \\ \frac{4}{5}e^{2t} - \frac{4}{5}e^{-3t} & \frac{4}{5}e^{2t} + \frac{1}{5}e^{-3t} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 5/3 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 5/3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{4}{5}e^{-3t} & \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t} \\ \frac{4}{5}e^{2t} - \frac{4}{5}e^{-3t} & \frac{4}{5}e^{2t} + \frac{1}{5}e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 5/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/3 \\ -5/3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{6}{15}e^{2t} - \frac{1}{15}e^{-3t} - \frac{1}{3} \\ \frac{8}{15}e^{2t} + \frac{19}{15}e^{-3t} - \frac{5}{3} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

### Ej. 52. (Trayectoria de inversión)

Una empresa dedicada al transporte terrestre de carga quiere maximizar sus ganancias en un horizonte de tiempo  $[0, T]$ . Su función de ganancias está dada por

$$\Pi = \int_0^T [2.72K(t) - K^2(t) - I(t)] dt,$$

donde  $K(t)$  e  $I(t)$  denotan capital e inversión, respectivamente. Queremos encontrar la trayectoria óptima de inversión que maximiza las ganancias  $\Pi$  en el horizonte de tiempo establecido. Sabiendo que el capital inicial es  $K(0) = K_0$ , que la tasa de depreciación es  $\delta = 0.6$  y que la inversión bruta

se distribuye entre la inversión neta y la reposición de capital (véase la ecuación (1.37)), este problema puede plantearse como un problema de control óptimo, como sigue a continuación:

$$\begin{aligned} \max_{I(t)} \quad & \Pi = \int_0^T [2K(t) - 0.8K^2(t) - I^2(t)] dt \\ \text{s.a:} \quad & K'(t) = 0.8I(t) - 0.6K(t) \\ & K(0) = K_0. \end{aligned}$$

La función hamiltoniana es<sup>19</sup>

$$\mathcal{H}(K, I, \lambda, t) = 2K - 0.8K^2 - I^2 + \lambda(I - 0.6K).$$

Por el principio del máximo tenemos

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} = -2 + 1.6K(t) + 0.6\lambda(t) \quad (2.37)$$

$$\lambda(T) = 0.$$

Por otra lado,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = 0 \Rightarrow \lambda - 2I = 0, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial I^2} = -2 < 0. \quad (2.39)$$

Reemplazando (2.38) en (2.37) se obtiene  $I'(t) = -1 + 0.8K(t) + 0.6I(t)$ . Juntando esta ecuación con la ecuación de estado para el capital, obtenemos el sistema lineal

$$K'(t) = 0.8I(t) - 0.6K(t) \quad (2.40)$$

$$I'(t) = -1 + 0.8K(t) + 0.6I(t). \quad (2.41)$$

---

<sup>19</sup> El lector que no conozca sobre teoría de control óptimo puede pasar directamente a las ecuaciones (2.40) y (2.41). De cualquier forma, una muy buena introducción a la teoría de control puede encontrarse, por ejemplo, en Lomelí y Rumbos (2003).



Colocado en forma matricial se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} K' \\ I' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

De acuerdo con (2.34), la solución de equilibrio es

$$\begin{bmatrix} K^* \\ I^* \end{bmatrix} = -A^{-1}b = - \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix}.$$

Puesto que  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = 1$ , de acuerdo con (2.36) la solución es

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K(t) \\ I(t) \end{bmatrix} &= e^{At} \left( \begin{bmatrix} K(0) \\ I(0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K^* \\ I^* \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} K^* \\ I^* \end{bmatrix} \\ &= P \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} P^{-1} \left( \begin{bmatrix} K(0) \\ I(0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K(0) - 0.8 \\ I(0) - 0.6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (0.8e^{-t} + 0.2e^t)(K_0 - 0.8) + (-0.4e^{-t} + 0.4e^t)(I_0 - 0.6) + 0.8 \\ (-0.4e^{-t} + 0.1e^t)(K_0 - 0.8) + (0.2e^{-t} + 0.8e^t)(I_0 - 0.6) + 0.6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ya que  $K(0) = K_0$  y  $\lambda(T) = 0$ , por (2.38) se tiene

$$(-0.4e^{-T} + 0.1e^T)(K_0 - 0.8) + (0.2e^{-T} + 0.8e^T)(I_0 - 0.6) + 0.6 = 0.$$

De aquí, el valor de  $I_0$  es

$$I_0 = \frac{0.2e^{-T} - 0.4e^T}{0.1e^{-T} + 0.4e^T}(K_0 - 0.8) + 0.6.$$

◇◇◇

### • La variable input no es constante

#### Ejemplos

**Ej. 53.** Considere el sistema

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Los valores característicos de  $A$  son  $\lambda_1 = 7$  y  $\lambda_2 = -5$ , de manera que

$$J = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= P e^{Jt} P^{-1} = P \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{6t} \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2e^t + 3e^{6t} & -2e^t + 2e^{6t} \\ -3e^t + 3e^{6t} & 3e^t + 2e^{6t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Aplicando (2.33), se tiene

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t d\tau \\ &= e^{At} x(0) + e^{At} \left( \int_0^t e^{-A\tau} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tau d\tau \right). \end{aligned}$$

Reemplazando términos, tenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= P e^{Jt} P^{-1} x(0) + P e^{Jt} \left( \int_0^t (e^{J\tau})^{-1} \tau d\tau \right) P^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= P e^{Jt} P^{-1} x(0) + P e^{Jt} \left( \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-7\tau} & 0 \\ 0 & e^{5\tau} \end{bmatrix} \tau d\tau \right) \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(t) &= Pe^{Jt}P^{-1}x(0) \\
&+ Pe^{Jt} \begin{bmatrix} -\frac{1}{7}te^{-7t} - \frac{1}{49}e^{-7t} + \frac{1}{49} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}te^{5t} - \frac{1}{25}e^{5t} + \frac{1}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{7t} + \frac{1}{2}e^{-5t} & e^{7t} - e^{-5t} \\ \frac{1}{4}e^{7t} - \frac{1}{4}e^{-5t} & \frac{1}{2}e^{7t} + \frac{1}{2}e^{-5t} \end{bmatrix} x(0) \\
&+ \begin{bmatrix} e^{7t} & e^{-5t} \\ \frac{1}{2}e^{7t} & -\frac{1}{2}e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{7}te^{-7t} - \frac{2}{49}e^{-7t} + \frac{2}{49} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{7t} + \frac{1}{2}e^{-5t} & e^{7t} - e^{-5t} \\ \frac{1}{4}e^{7t} - \frac{1}{4}e^{-5t} & \frac{1}{2}e^{7t} + \frac{1}{2}e^{-5t} \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} -\frac{2}{49}e^{7t} - \frac{2}{7}t - \frac{2}{49} \\ \frac{1}{49}e^{7t} - \frac{1}{7}t - \frac{1}{49} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

**Ej. 54.** Considere el sistema

$$x' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}.$$

Los valores característicos de  $A$  son  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = 6$ , de manera que

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
e^{At} &= Pe^{Jt}P^{-1} = P \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{6t} \end{bmatrix} P^{-1} \\
&= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2e^t + 3e^{6t} & -2e^t + 2e^{6t} \\ -3e^t + 3e^{6t} & 3e^t + 2e^{6t} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Aplicando (2.33), se tiene

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \begin{bmatrix} e^\tau \\ \tau \end{bmatrix} d\tau \\
&= e^{At}x(0) + e^{At} \left( \int_0^t e^{-A\tau} \begin{bmatrix} e^\tau \\ \tau \end{bmatrix} d\tau \right).
\end{aligned}$$

Reemplazando términos, tenemos

$$\begin{aligned}
 x(t) &= Pe^{Jt}P^{-1}x(0) + Pe^{Jt} \left( \int_0^t (e^{J\tau})^{-1} P^{-1} \begin{bmatrix} e^\tau \\ \tau \end{bmatrix} d\tau \right) \\
 &= Pe^{Jt}P^{-1}x(0) + Pe^{Jt} \left( \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ 0 & e^{-6t} \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} e^\tau \\ \tau \end{bmatrix} d\tau \right) \\
 &= Pe^{Jt}P^{-1}x(0) + \frac{1}{5}Pe^{Jt} \left( \int_0^t \begin{bmatrix} 2 - 2\tau e^{-\tau} \\ 3e^{-5\tau} + 2\tau e^{-6\tau} \end{bmatrix} d\tau \right) \\
 &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2e^t + 3e^{6t} & -2e^t + 2e^{6t} \\ -3e^t + 3e^{6t} & 3e^t + 2e^{6t} \end{bmatrix} x(0) + \frac{1}{5} \begin{bmatrix} e^t & e^{6t} \\ -\frac{3}{2}e^t & e^{6t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Calculando aparte, tenemos

$$\begin{aligned}
 c_1(t) &= 1 - e^{-t} - te^{-t} \\
 c_2(t) &= \frac{1}{36} - \frac{1}{36}e^{-6t} - \frac{1}{6}te^{-6t}.
 \end{aligned}$$

Luego, la solución es

$$x(t) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2e^t + 3e^{6t} & -2e^t + 2e^{6t} \\ -3e^t + 3e^{6t} & 3e^t + 2e^{6t} \end{bmatrix} x(0) + \frac{1}{5} \begin{bmatrix} e^t + \frac{1}{36}e^{6t} - \frac{7}{6}t - \frac{37}{6} \\ -\frac{3}{2}e^t + \frac{1}{36}e^{6t} - \frac{10}{6}t - \frac{55}{36} \end{bmatrix}.$$



## ECUACIONES DIFERENCIALES

### DE SEGUNDO ORDEN

Una aplicación interesante de los sistemas lineales es aquella que consiste en la transformación de una ecuación diferencial lineal de orden  $n$  en un sistema lineal de orden  $n \times n$ . Aquí presentamos esta aplicación para el caso  $n = 2$ .

Una ecuación diferencial lineal de segundo orden, de dimensión 1, es una ecuación de la forma

$$\boxed{x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t)}, \quad (2.42)$$

donde  $a(t)$ ,  $b(t)$  y  $c(t)$  son funciones continuas. En esta sección se muestra cómo se puede resolver una ecuación del tipo (2.42), enfocando dicha ecuación como un sistema lineal, cuando los coeficientes  $a(t)$  y  $b(t)$  son constantes. Se dice que la ecuación (2.42) es de coeficientes constantes si es de la forma

$$\boxed{x'' = ax' + bx + c(t)} \quad (2.43)$$

La técnica para resolver esta ecuación se basa fundamentalmente en la introducción de nuevas variables conocidas como variables de estado. Estas variables están asociadas con la función  $x$  y sus derivadas. Una vez que se han introducido las relaciones dinámicas (lineales) entre las variables de estado, se puede formar el sistema lineal asociado. Considere el siguiente ejemplo de orden 2. Note que se puede utilizar la misma técnica para sistemas de mayor orden.

### **Ejemplo**

**Ej. 55.** Consideremos la ecuación

$$x'' = x' + 6x + 3, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 1.$$

Definamos las variables de estado:  $x_1 = x$  y  $x_2 = x'$ . Luego,

$$\begin{aligned} x_1 = x &\Rightarrow x'_1 = x' = x_2 \\ x_2 = x' &\Rightarrow x'_2 = x'' = x' + 6x + 3 = 6x_1 + x_2 + 3. \end{aligned}$$

Una vez que se han introducido las variables de estado, se puede formar el sistema

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Puesto que  $\lambda_1 = 3$  y  $\lambda_2 = -2$ , para la condición inicial  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ , la solución del sistema, de acuerdo con (2.36), está dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= P \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} P^{-1} \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/6 & 1/6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right) \\ &\quad - \begin{bmatrix} -1/6 & 1/6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Haciendo los cálculos, se obtiene

$$x(t) = x_1(t) = \frac{17}{10}e^{3t} - \frac{13}{10}e^{-2t} - \frac{1}{2}.$$

◇◇◇

### Ejemplo

#### Ej. 56. (Interacción Inflación-Desempleo)

El siguiente modelo, que describe la interacción entre las tasas de inflación y desempleo, está basado en Chiang, 1987. Sea  $P(t)$  el nivel de precios en el instante  $t$ . Entonces,  $p(t) = P'(t)/P(t)$  es la tasa porcentual del crecimiento del nivel de precios en dicho instante, y se le conoce como la tasa de inflación. La versión de *expectativas aumentadas* de la relación de Phillips (1958) es

$$p(t) = \alpha - \beta U(t) + h\pi(t) \quad \alpha, \beta > 0, 0 < h \leq 1, \quad (2.44)$$

donde  $U$  es la tasa de desempleo y  $\pi$  es la tasa porcentual esperada de inflación. Esta ecuación describe la relación inversa, observada por Phillips, entre la tasa de desempleo y la tasa de inflación. Esta relación ha sido aumentada por un factor adicional que recoge las expectativas de inflación de la gente, lo que influye en la tasa de inflación por medio de la tasa  $\pi$ .

Asumiendo una dinámica de expectativas adaptativas para la variable  $\pi$ , se tiene

$$\pi'(t) = j(p(t) - \pi(t)), \quad 0 < j \leq 1. \quad (2.45)$$

Esta ecuación expresa que si la tasa real de inflación está por encima de la esperada, esta última se revisa al alza ( $d\pi/dt > 0$ ). Al contrario, si  $p$  está por debajo de  $\pi$ , entonces  $\pi$  se revisa a la baja.

Para modelizar el efecto de la inflación sobre el desempleo, un efecto de retroalimentación, se considera una intervención de política monetaria. Denotando el nivel de dinero nominal por  $M$  y su tasa porcentual de crecimiento por  $m(t) = M'(t)/M(t)$ , se tiene la siguiente ecuación:

$$U'(t) = -k(m(t) - p(t)), \quad k > 0. \quad (2.46)$$

La diferencia  $m(t) - p(t)$  se conoce como la tasa de crecimiento del nivel de dinero real. Esta ecuación expresa una relación negativa entre la tasa de desempleo y este nivel de dinero en el mercado.

A partir de las ecuaciones (2.44)-(2.46) podemos derivar, por ejemplo, una ecuación dinámica para la tasa esperada de inflación. Sustituyendo (2.44) en (2.45), se obtiene

$$\pi'(t) = j(\alpha - \beta U(t)) + j(h - 1)\pi.$$

Derivando esta ecuación con respecto a  $t$  y suprimiendo la variable temporal, para simplificar, se obtiene

$$\pi'' = -j\beta U' + j(h - 1)\pi'.$$

Sustituyendo (2.46) en esta ecuación, queda

$$\pi'' = -(\beta k + j - jh)\pi' - j\beta k\pi + j\beta km, \quad (2.47)$$

donde, de (2.45), se ha usado la igualdad  $p = (\pi'/j) + \pi$ .

La ecuación (2.47) es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes y puede escribirse como sigue. Primero introducimos las variables de estado

$$\begin{aligned} \pi_1 = \pi &\Rightarrow \pi_1' = \pi' = \pi_2 \\ \pi_2 = \pi' &\Rightarrow \pi_2' = \pi'' = -(\beta k + j - jh)\pi' - j\beta k\pi + j\beta km \\ &\pi_2' = -j\beta k\pi_1 - (\beta k + j - jh)\pi_2 + j\beta km. \end{aligned}$$

A partir de aquí se obtiene el siguiente sistema, que puede resolverse explícitamente una vez que se tengan los valores específicos de los parámetros.

$$\begin{bmatrix} \pi_1' \\ \pi_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -j\beta k & -(\beta k + j - jh) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ j\beta km \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, para  $\beta = 0.2$ ,  $h = 0.4$ ,  $j = 1$ ,  $k = 0.5$  y  $m = 2.7$  se obtiene el sistema específico

$$\begin{bmatrix} \pi_1' \\ \pi_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & -0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.27 \end{bmatrix}.$$

Aplicando (2.35), se obtiene la siguiente solución:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \pi_1(t) \\ \pi_2(t) \end{bmatrix} &= P \begin{bmatrix} e^{-0.2t} & 0 \\ 0 & e^{-0.5t} \end{bmatrix} P^{-1} \left( \begin{bmatrix} \pi_{10} \\ \pi_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2.7 \\ 0 \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} -2.7 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{5}{3}e^{-0.2t} - \frac{2}{3}e^{-0.5t} & \frac{10}{3}e^{-0.2t} - \frac{10}{3}e^{-0.5t} \\ -\frac{1}{3}e^{-0.2t} + \frac{1}{3}e^{-0.5t} & -\frac{2}{3}e^{-0.2t} + \frac{5}{3}e^{-0.5t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.7 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



De aquí se obtiene

$$\begin{aligned}\pi(t) = \pi_1(t) &= \left( \frac{5}{3}e^{-0.2t} - \frac{2}{3}e^{-0.5t} \right) (\pi_{10} - 2.7) \\ &+ \left( \frac{10}{3}e^{-0.2t} - \frac{10}{3}e^{-0.5t} \right) \pi_{20} + 2.7.\end{aligned}$$

Se aprecia que la trayectoria de la expectativa de inflación es convergente a 2.7, independientemente desde dónde ella parta. Se pueden obtener las demás trayectorias haciendo los reemplazos necesarios en la ecuaciones anteriores.



### LISTA DE EJERCICIOS

**2.5.1.** Considere la ecuación

$$x'' = ax' + bx. \quad (2.48)$$

Introduciendo variables de estado, se obtiene el sistema

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Las raíces características de la matriz de coeficientes están dadas por

$$p(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda - b = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

Deduzca las soluciones que se dan a continuación de acuerdo con el valor del discriminante  $\Delta = a^2 + 4b$ :

**a)** Si  $\Delta > 0$ , entonces

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

b) Si  $\Delta = 0$ , entonces

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\alpha t}, \quad \alpha = \frac{1}{2}a.$$

c) Si  $\Delta < 0$ , entonces

$$x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)), \quad \alpha = \frac{1}{2}a, \quad \beta = \sqrt{4b - a^2}.$$

**2.5.2.** Aplique el método descrito anteriormente para resolver las siguientes ecuaciones:

$$x'' = 2x' + 3x, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 4$$

$$x'' = 6x' - 9x, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$$

$$x'' = x' - x, \quad x(0) = -2, \quad x'(0) = 5.$$

**2.5.3.** Considere la ecuación

$$x'' = ax' + bx + c, \quad b \neq 0. \quad (2.49)$$

Pruebe que la solución de equilibrio es el punto  $x^* = -c/b$ . ¿Qué condiciones se deben imponer sobre los valores característicos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  para que la solución de la ecuación converja al equilibrio para cualesquiera valores de las constantes  $C_1$  y  $C_2$ ?

#### 2.5.4. (Coeficientes indeterminados)

La ecuación diferencial

$$x'' = ax' + bx + \mathbf{f}(t) \quad (2.50)$$

se conoce también como ecuación no homogénea, por la presencia del término  $\mathbf{f}(t)$ . Si  $\mathbf{f}(t) = 0$ , se cae en el caso de la ecuación (2.48), que por no poseer el término  $\mathbf{f}(t)$ , se llama «homogénea». La ecuación

(2.50) se puede resolver por los métodos que hemos expuesto antes introduciendo variables de estado y transformando la ecuación en un sistema de ecuaciones diferenciales. También puede aplicarse el método conocido como «método de los coeficientes indeterminados»; que es una especie de receta y depende de la forma de la función  $\mathbf{f}(\mathbf{t})$ . Enseguida pasamos a explicar en qué consiste este método.<sup>20</sup>

La solución de la ecuación (2.50) puede escribirse como la suma de dos partes:

$$\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t)},$$

donde  $x_h(t)$  es la solución de la parte homogénea de la ecuación; esto es, cuando  $\mathbf{f}(\mathbf{t}) \equiv 0$  y  $x_p(t)$ , conocida como solución particular, es una solución de la ecuación diferencial que depende de la forma de la función  $\mathbf{f}(\mathbf{t})$ . En cada caso se propone como solución particular una función  $x_p(t)$  de la misma forma que la función  $\mathbf{f}(\mathbf{t})$ . Veamos algunos ejemplos.

- Si  $\mathbf{f}(\mathbf{t}) = C$ ,  $C$  constante. En este caso se propone como solución particular una constante  $x_p(t) = A$ . Esta constante es indeterminada y hay que encontrarla. Como es una solución, debe verificar la ecuación; esto es,

$$0 = bA + C.$$

Si  $b \neq 0$ , se puede despejar el valor de la constante  $A$  para obtener  $A = -C/b$ . Por consiguiente,  $x_p(t) = C/b$  es una solución (particular) de la ecuación. La solución encontrada es un equilibrio.

- Si  $\mathbf{f}(\mathbf{t}) = P(t)$ , donde  $P(t)$  es un polinomio de grado  $n$ . Veamos el caso cuando  $n = 1$ ; por ejemplo,  $\mathbf{f}(\mathbf{t}) = 2t + 3$ . En este caso se propone  $x_p(t) = At + B$ . Como es una solución, debe verificar la ecuación. Así se

---

<sup>20</sup> El método de los coeficientes indeterminados es ampliamente conocido y se puede consultar en cualquier libro sobre ecuaciones diferenciales. En particular, el lector puede revisar, por ejemplo, Sydsaeter et al. (2008).

obtiene el sistema algebraico de ecuaciones en las constantes  $A$  y  $B$ :

$$bA + 2 = 0$$

$$aA + bB + 3 = 0.$$

De aquí se obtiene  $A = -2/b$  y  $B = (2a/b^2) - 3/b$ .

Queda claro por qué este método lleva el nombre de coeficientes indeterminados. Aplique estas ideas para resolver las siguientes ecuaciones:

a)  $x'' = 2x' + 3x + 2$

b)  $x'' = 3x' + 2x + 2t - 4$

c)  $x'' = x' + 2x + t^2 - 5$

d)  $x'' = 4x' + x + 3e^t$

e)  $x'' = x' + 2x + \cos t$

f)  $x'' = 5x' - 3x + \sin 2t \cos 2t$

**2.5.5.** Considere el sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ x_2' &= \frac{5}{2}x_1 - \frac{7}{2}x_2. \end{aligned}$$

Hemos estudiado dos formas diferentes de resolver este sistema. Podemos intentar otra forma. Por ejemplo, a partir del sistema, despeje una variable en términos de la otra y obtenga una ecuación diferencial de segundo orden.

**2.5.6. (Camino inverso).** Para resolver una ecuación diferencial lineal de segundo orden se ha seguido un enfoque matricial y se han introducido variables de estado. Se requiere saber si este enfoque es reversible; esto es, dado un sistema lineal de orden  $2 \times 2$ , nos preguntamos ¿siempre puede replantearse este como una ecuación diferencial de segundo orden?

Intente con el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}x_1' &= ax_1 + bx_2 \\x_2' &= cx_1 + dx_2, \quad x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_1) = x_{20}.\end{aligned}$$

**2.5.7.** Considere la ecuación de segundo orden

$$x''(t) = F(t, x'),$$

donde la función  $F$  no depende de  $x$ . En este caso se puede transformar la ecuación en una de primer orden mediante el cambio de variable  $y = x'$ . Así la ecuación queda como sigue:

$$y' = G(t, y).$$

Esta ecuación se puede analizar por los métodos estudiados previamente. Aplique este método de cambio de variable para resolver las siguientes ecuaciones:

a)  $x'' = 2x' + 5$

b)  $x'' = x' + 2t$

# Capítulo 3

## Sistemas dinámicos no lineales

### 3.1. Introducción

En este capítulo se estudian los sistemas dinámicos no lineales, que son los sistemas que más aparecen en los modelos económicos y en diversas aplicaciones. Varios de esos modelos son muy conocidos en la literatura y algunos de ellos se analizan aquí. Gran parte de los sistemas no lineales no pueden resolverse explícitamente porque no existe un método algebraico universal que permita obtener la solución, como en el caso lineal. Sin embargo, esto no es impedimento para obtener conclusiones de interés sobre el modelo, pues, como en el caso escalar, la estrategia principal de análisis es cualitativa y está basada fundamentalmente en la información provista por el campo vectorial. Aunque las ideas son esencialmente las mismas, al crecer la dimensión, crece la dificultad y la teoría se vuelve un poco más sofisticada.

Otra estrategia de análisis, que es complementaria con la cualitativa,

consiste básicamente en «linealizar» el sistema de manera que se puedan aplicar las herramientas desarrolladas para el estudio de los sistemas lineales. En este sentido, el teorema de Hartman-Grobman (H-G), que se estudia en la siguiente sección, juega un rol fundamental.

Este capítulo consta de tres secciones. En esta primera sección se revisan los conceptos de vector tangente y campo vectorial, sobre los que se basa el análisis cualitativo. En la sección 3.2 se presenta el teorema de Hartman-Grobman, que es la herramienta fundamental para abordar los sistemas no lineales mediante la estrategia de linealización. En conjunto, el análisis cualitativo, que es básicamente geométrico, y el análisis de linealización, que es más bien cuantitativo, son suficientes para esbozar el diagrama de fases de muchos sistemas dinámicos no lineales, lo que permite obtener conclusiones sobre las características fundamentales del modelo. Finalmente, para estudiar los sistemas en los que aparece un equilibrio tipo silla, en la sección 3.3 se presenta el teorema de la variedad estable, que hace las veces del concepto de subespacio estable de los sistemas lineales.

**Definición 13.** Un sistema dinámico no lineal de dimensión  $n$  y de primer orden es una ecuación de la forma

$$x' = F(t, x), \quad (3.1)$$

donde  $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $F$  es una función no lineal y continua definida sobre un conjunto abierto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ .

El sistema (3.1) es equivalente al conjunto de  $n$  ecuaciones diferenciales escalares

$$\begin{aligned} x'_1 &= F_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x'_n &= F_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

donde  $F = (F_1, \dots, F_n)$ . En este caso, al menos una de las funciones  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  es no lineal y todas son continuas.

Note que cuando  $n = 1$ , el sistema deviene escalar; y cuando  $F$  es lineal y no depende explícitamente de la variable temporal  $t$ , el sistema deviene lineal de la forma  $x' = Ax$ . Note también que introduciendo la variable  $x_{n+1} = t$  (y, por lo tanto,  $x'_{n+1} = 1$ ), la ecuación (3.1) se transforma en el sistema autónomo

$$x' = F(x), \quad (3.2)$$

donde  $F$  ahora es una función definida sobre  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Veamos un ejemplo.

### **Ejemplo**

**Ej. 57.** Consideremos el siguiente sistema no autónomo:

$$\begin{aligned} x'_1 &= 2tx_1 + x_1x_2 \\ x'_2 &= x_1 + t^2x_2 + t^3. \end{aligned}$$

Haciendo  $x_3 = t$  y reemplazando en las ecuaciones anteriores, se obtiene el siguiente sistema autónomo:

$$\begin{aligned} x'_1 &= 2x_1x_3 + x_1x_2 \\ x'_2 &= x_1 + x_2x_3^2 + x_3^3 \\ x'_3 &= 1. \end{aligned}$$

Aun cuando la dimensión del sistema aumenta, la introducción, un tanto artificial, de la variable  $x_{n+1}$  hace que siempre sea posible convertir un sistema de la forma (3.1) en uno de la forma (3.2).





CAMPO VECTORIAL

Ya que gran parte de los modelos que aparecen en las aplicaciones están planteados en términos de dos variables, para analizar el sistema (3.2) concentramos nuestra atención en el caso bidimensional. En este caso, como suele hacerse en la literatura, escribimos el sistema de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}x_1' &= f(x_1, x_2) \\x_2' &= g(x_1, x_2).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Así pues, la función  $F$  de (3.2) es de la forma  $F = (f, g)$  y se supone que al menos una de las funciones,  $f$  o  $g$ , es no lineal y ambas son continuas.

**Definición 14.** Sea  $I$  un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ . Una solución de (3.3) es una función  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$ , tal que  $x$  satisface la ecuación puntualmente; esto es, para todo  $t \in I$ , se cumple  $x'(t) = (f(x(t)), g(x(t)))$ .

Note que encontrar la solución  $x$  es equivalente a encontrar el par de funciones  $x_1$  y  $x_2$  que resuelven el sistema (3.3). Usualmente nos referiremos a  $x = x(t)$  como la trayectoria solución.

**Ejemplo**

**Ej. 58.** Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}x_1' &= 2x_1 \\x_2' &= x_1^2 + 3x_2.\end{aligned}$$

Las funciones  $x_1(t) = e^{2t}$  y  $x_2(t) = e^{3t} + e^{4t}$  constituyen una solución del sistema dado. En efecto, para todo  $t \in \mathbb{R}$  se tiene  $x_1'(t) = 2e^{2t} = 2x_1(t)$  y  $x_2'(t) = 3e^{3t} + 4e^{4t} = e^{4t} + 3e^{3t} + 3e^{4t} = x_1^2(t) + 3x_2(t)$ .



La Figura 3.1 muestra la solución  $x = x(t)$  como una trayectoria que vive en  $\mathbb{R}^2$ .

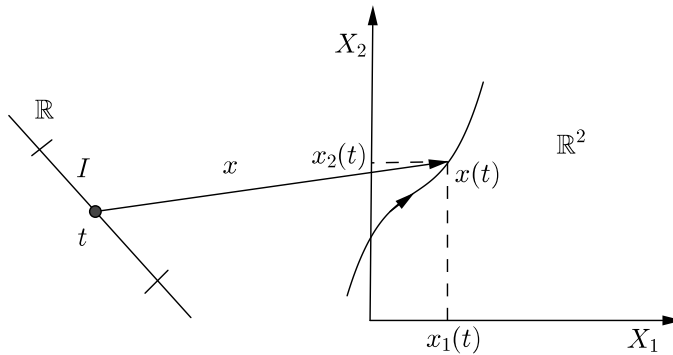


Figura 3.1 Trayectoria solución

Debido a que las funciones  $f$  y  $g$  son de clase  $C^1$ , para cada condición inicial  $(t_0, x(t_0))$  existe un intervalo  $I$  sobre el cual existe una única solución en el sentido del teorema de existencia y unicidad, estudiado en el capítulo 1. Este teorema permite descartar, por ejemplo, situaciones como las que se muestran en la Figura 3.2

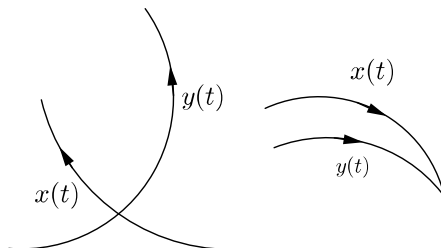


Figura 3.2 Unicidad de trayectorias

En efecto, si se produjera una intersección o superposición como se muestra en la Figura 3.2, entonces el punto de intersección se podría tomar como condición inicial y se generarían dos soluciones diferentes para tal condición inicial. Esto, ciertamente, violaría la unicidad establecida en el teorema de existencia y unicidad.

Como se ha dicho, el concepto de campo vectorial juega un rol fundamental en el análisis geométrico de los sistemas no lineales. Este concepto ya se introdujo en los dos primeros capítulos, pero su utilidad tiene mayor trascendencia en el contexto de los sistemas bidimensionales no lineales. Para introducir este concepto, primero necesitamos definir lo que es un vector tangente.

**Definición 15.** Sea  $x$  una trayectoria solución de (3.3). Para cada  $t$ , el vector

$$x'(t) = F(x_1(t), x_2(t)) = (x'_1(t), x'_2(t))$$

es el vector tangente a la trayectoria en el punto  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ .

La Figura 3.3 muestra una trayectoria con varios vectores tangentes a lo largo de ella en distintos instantes del tiempo.

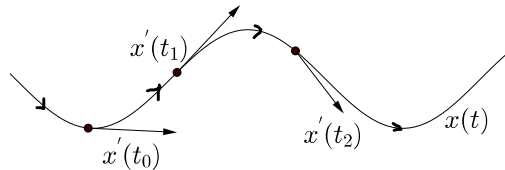


Figura 3.3 Vectores tangentes

Como se aprecia en la Figura 3.3, el vector tangente  $x'(t)$  indica la dirección en la que se está moviendo la trayectoria en el instante  $t$ , y la

magnitud  $\|x'(t)\|^1$  indica la tasa de cambio con la que la trayectoria se está describiendo en dicho instante.

**Definición 16.** Dado el sistema (3.3), el campo vectorial  $F = (f, g)$  es el conjunto infinito de vectores de la forma

$$v(P) = F(P) = (f(P), g(P)), \quad P \in \mathbb{R}^2$$

Para cada punto  $P$ , el campo vectorial apunta en una dirección fija determinada por las funciones  $f$  y  $g$ , como se muestra a continuación en la Figura 3.4.

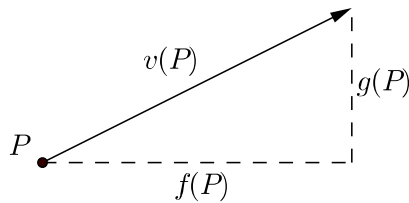


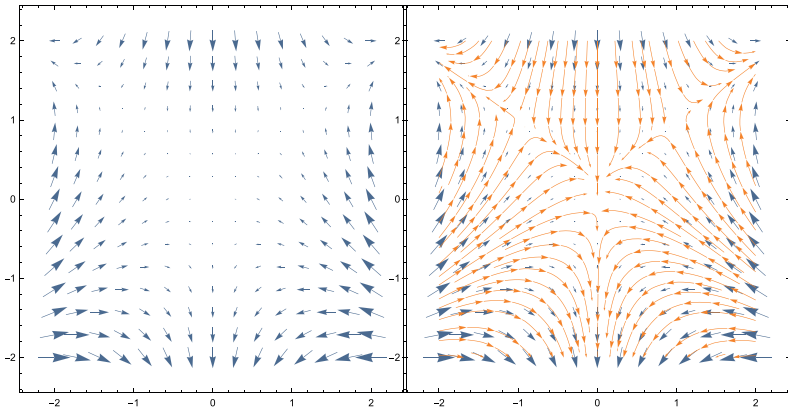
Figura 3.4 El campo vectorial en el punto  $P$

Como se aprecia en la Figura 3.5a, el campo vectorial luce como un conjunto infinito de vectores que apuntan en diversas direcciones. Por otro lado, la Figura 3.5b muestra que el campo vectorial indica cómo se mueven las diversas trayectorias del sistema, pues, en cada punto  $P = x(t)$ , el vector tangente  $x'(t)$  forma parte del campo vectorial y orienta el trazado de la trayectoria en dicho punto. El conjunto de todas

---

<sup>1</sup> $\|x'(t)\|$  es la longitud del vector  $x'(t)$  y se define por  $\|x'(t)\| = \sqrt{(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2}$ . Por ejemplo, en relación con el ejemplo 58, sea  $P = (3, 1)$  un punto de la trayectoria en algún instante  $t$ . El vector tangente en este punto es  $x'(t) = (6, 6)$ . Por lo tanto, la velocidad con la que la trayectoria se está describiendo en dicho instante es  $\|(6, 6)\| = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ .

las trayectorias se llama «diagrama de fases». Este término, que proviene de la física, indica las distintas fases de las trayectorias a medida que transcurre el tiempo. El espacio en el que viven las trayectorias también suele llamarse, por extensión, «espacio de fases».

(a)  $v(P) = (f(P), g(P))$ .

(b) Diagrama de fases.

Figura 3.5 Campo vectorial y trayectorias

Note que si  $x'(t) = (0, 0)$ , entonces el campo vectorial no indica ninguna dirección en el punto  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ . Por lo tanto, la trayectoria no se mueve en dicho punto, está estacionada. Sin embargo, si  $x'_1(t) = 0$  y  $x'_2(t) \neq 0$ , entonces el campo vectorial es vertical, pero no horizontal. Ahora, si la derivada es positiva, la orientación del campo es vertical hacia arriba; y si la derivada es negativa, la orientación es vertical hacia abajo. Por lo tanto, en dicho punto, la trayectoria sigue un movimiento vertical, o bien hacia arriba, o bien hacia abajo, dependiendo del signo de la derivada  $x'_2(t)$ . Por el contrario, si  $x'_1(t) \neq 0$  y  $x'_2(t) = 0$ , entonces, siguiendo el mismo argumento, se puede concluir que la trayectoria se mueve horizontalmente, pero no verticalmente en dicho punto. Si la derivada  $x'_1(t)$  es positiva, el movimiento es horizontal

hacia la derecha, y si la derivada es negativa, el movimiento es hacia la izquierda.

### ISOCLINAS E ISOZONAS

Una isoclina es una curva de  $\mathbb{R}^2$  sobre la cual el campo vectorial tiene la misma dirección. Son de particular interés aquellas isoclinas donde el campo tiene una dirección, o bien vertical, o bien horizontal. Denotamos estas isoclinas por  $\mathcal{C}_v$  y  $\mathcal{C}_h$ , respectivamente. Formalmente:

$$\mathcal{C}_v : \{P \in \mathbb{R}^2, f(P) = 0\}$$

$$\mathcal{C}_h : \{P \in \mathbb{R}^2, g(P) = 0\}.$$

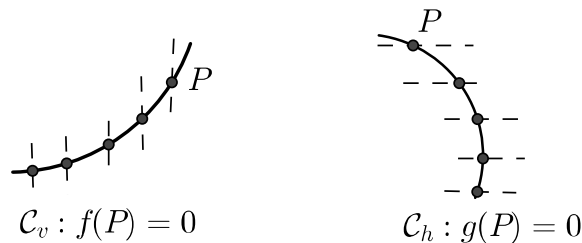


Figura 3.6 Isoclinas

Note que cuando las isoclinas se intersecan, el punto de intersección es un punto estacionario o de equilibrio, pues ambas derivadas son cero en dicho punto.

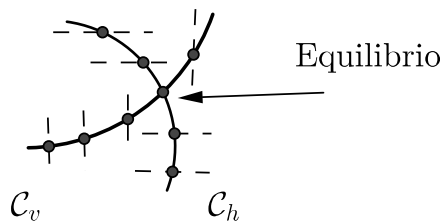


Figura 3.7 Equilibrio: punto de intersección

Las isoclinas  $\mathcal{C}_v$  y  $\mathcal{C}_h$  dividen el espacio de fases en dos regiones cada una. Por ejemplo, la isoclina  $\mathcal{C}_v$  de la Figura 3.6 divide el espacio de fases en una región que está por encima de ella y otra que está por debajo. Similarmente, la isoclina  $\mathcal{C}_h$  divide el espacio de fases en una región que está por la izquierda y otra que está por la derecha. Llamaremos a estas regiones «isozonas». Más precisamente:

$$\mathcal{R}_{v-} = \{P \in \mathbb{R}^2; g(P) < 0\}$$

$$\mathcal{R}_{v+} = \{P \in \mathbb{R}^2; g(P) > 0\}$$

$$\mathcal{R}_{h-} = \{P \in \mathbb{R}^2; f(P) < 0\}$$

$$\mathcal{R}_{h+} = \{P \in \mathbb{R}^2; f(P) > 0\}.$$

### Ejemplo

**Ej. 59.** Consideremos el sistema

$$x_1' = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2 - 1$$

$$x_2' = g(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2 + 1.$$

Sea  $P = (a, b)$  un punto cualquiera del espacio de fases, entonces:

$$\mathcal{C}_v : f(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = -b^2 + 1$$

$$\mathcal{C}_h : g(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b^2 - 1.$$

Las isoclinas  $\mathcal{C}_v$  y  $\mathcal{C}_h$  son parábolas cuyos ejes focales son paralelos al eje de abscisas (véase la Figura 3.8). Las isozonas son las siguientes:

$$\mathcal{R}_{v-} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a < b^2 - 1\}$$

$$\mathcal{R}_{v+} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a > b^2 - 1\}$$

$$\mathcal{R}_{h-} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a < -b^2 + 1\}$$

$$\mathcal{R}_{h+} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a > -b^2 + 1\}.$$

Desarrollando tenemos:

$$\mathcal{R}_{v-} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; b < -\sqrt{a+1} \vee b > \sqrt{a+1}\}$$

$$\mathcal{R}_{v+} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; -\sqrt{a+1} < b < \sqrt{a+1}\}$$

$$\mathcal{R}_{h-} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; -\sqrt{1-a} < b < \sqrt{1-a}\}$$

$$\mathcal{R}_{h+} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; b < -\sqrt{1-a} \vee b > \sqrt{1-a}\}.$$

A continuación, la Figura 3.8 muestra las isoclinas, las isozonas y el campo vectorial.

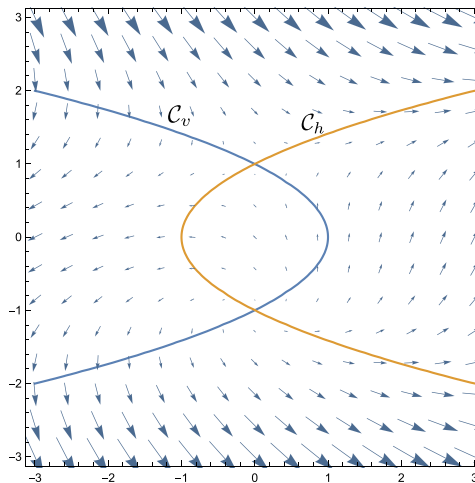


Figura 3.8 Isoclinas y campo vectorial

Observe que, sobre cada punto de  $\mathcal{C}_v$ , el campo vectorial tiene dirección vertical; y, sobre cada punto de  $\mathcal{C}_h$ , tiene dirección horizontal. La orientación del campo depende de la isozona que se considere.



La Figura 3.8 también muestra que hay dos puntos de equilibrio, aquellos donde se intersecan las isoclinas:  $P = (0, -1)$  y  $Q = (0, 1)$ . Para



poder trazar el diagrama de fases con mayor fidelidad, necesitamos saber cómo se comportan las trayectorias en las vecindades de estos equilibrios. La herramienta fundamental, en este sentido, es el teorema de Hartman-Grobman, que se estudia en la siguiente sección.

### LISTA DE EJERCICIOS

**3.1.1.** ¿Cuáles de los siguientes sistemas son no lineales?

a)  $x'_1 = x_1, \quad x'_2 = -2x_1^2 + x_2$

b)  $x'_1 = 3x_1 + 2x_2, \quad x'_2 = x_2/t$

c)  $x'_1 = 2x_1 - x_1^2 - x_2, \quad x'_2 = 2x_2 - x_1x_2$

**3.1.2.** Los primeros dos sistemas del ejercicio 1 pueden resolverse explícitamente. Obtenga sus soluciones.

**3.1.3.** Encuentre las isoclinas y trace el campo vectorial de los sistemas no lineales del ejercicio 1.

**3.1.4.** Considere la Figura 3.9 que se presenta a continuación:

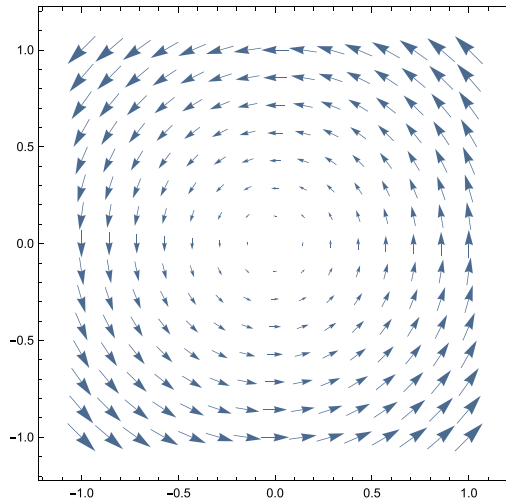


Figura 3.9 Campo vectorial

Suponga que el campo vectorial de cierta función  $F = (f, g)$  luce como el que se da en la Figura 3.9. ¿Cómo podría ser la trayectoria solución del sistema  $x'_1 = f(x_1, x_2)$ ,  $x'_2 = g(x_1, x_2)$ ? Plantee posibles alternativas para  $f(x_1, x_2)$  y  $g(x_1, x_2)$ .

## 3.2. Linealización y el teorema de Hartman-Grobman

A toda solución constante del sistema (3.3),  $x(t) = x^*$  para todo  $t$ , se le llama «solución de equilibrio» o «solución estacionaria». Una solución de equilibrio o, simplemente un equilibrio, es tal que si en algún instante la trayectoria se encuentra en el punto  $x^*$ , nunca dejará de estar allí, a menos que el sistema sufra una perturbación.

Debido a la definición, la solución constante  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$  es un equilibrio si y solamente si satisface el siguiente par de ecuaciones algebraicas:

$$0 = f(x_1, x_2)$$

$$0 = g(x_1, x_2).$$

En la literatura, normalmente se suele tomar el equilibrio  $x^*$  como el origen del espacio de fases. Esto siempre es posible, pues al hacer el cambio de variable  $y = x - x^*$  y reemplazando la nueva variable en la ecuación (3.3) se obtiene la ecuación

$$y' = F(y + x^*) \triangleq H(y).$$

Entonces, el punto  $x = x^*$  es un equilibrio de  $x' = F(x)$  si y solamente si  $y = 0$  es un equilibrio de  $y' = H(y)$ .

Puesto que la configuración del diagrama de fases depende en gran medida de si los equilibrios del sistema son atractores, repulsores, sillars, etc., es importante determinar la estabilidad de estos equilibrios. Esto implica necesariamente conocer cómo es el comportamiento de las trayectorias vecinas. Consideremos, pues, la siguiente perturbación de un equilibrio  $x^*$ :  $x(t) = x^* + \eta(t)$ , donde  $\eta(t)$  mide la discrepancia entre el equilibrio y una trayectoria vecina en el instante  $t$ . Esta situación se muestra a continuación en la Figura 3.10.

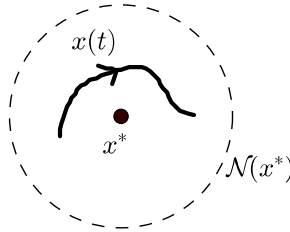


Figura 3.10 Equilibrio perturbado

Por Taylor, tenemos

$$\begin{aligned} \eta'_1 &= x'_1 \cong f(x^*) + f_{x_1}(x^*)(x_1 - x_1^*) + f_{x_2}(x^*)(x_2 - x_2^*) \\ &= f_{x_1}(x^*)(x_1 - x_1^*) + f_{x_2}(x^*)(x_2 - x_2^*) \\ \eta'_2 &= x'_2 \cong g(x^*) + g_{x_1}(x^*)(x_1 - x_1^*) + g_{x_2}(x^*)(x_2 - x_2^*) \\ &= g_{x_1}(x^*)(x_1 - x_1^*) + g_{x_2}(x^*)(x_2 - x_2^*). \end{aligned}$$

Usando notación matricial,

$$\eta' \cong \begin{bmatrix} f_{x_1}(x^*) & f_{x_2}(x^*) \\ g_{x_1}(x^*) & g_{x_2}(x^*) \end{bmatrix} \eta = J(x^*)\eta,$$

donde  $J(x^*)$  es la matriz jacobiana de  $F$  en  $x^*$ ,  $J(x^*) = JF(x^*)$ , y  $\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 \end{bmatrix}^T$ .

Si la perturbación  $\eta$  es muy pequeña, entonces por la continuidad de las funciones involucradas sería razonable esperar que la dinámica de  $\eta$  esté dada por la ecuación

$$\eta' = J(x^*)\eta.$$

De manera que como  $x' = \eta'$ , entonces cuando  $x$  está muy cerca de  $x^*$ , podemos analizar el sistema no lineal  $x' = F(x)$  por el «sistema lineal asociado» (SLA):

$$\boxed{x' = J(x^*)x} \quad (3.4)$$

### Ejemplo

**Ej. 60.** Consideremos el sistema del ejemplo 59. Como se ha establecido, los equilibrios se encuentran resolviendo las ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} x_1 + x_2^2 - 1 &= 0 \\ x_1 - x_2^2 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Rápidamente se obtienen  $P^* = (0, -1)$  y  $Q^* = (0, 1)$ . Para cada equilibrio planteamos a continuación su SLA.

$$\begin{aligned} P^* &\rightarrow SLA: x' = J(P^*)x = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x \\ Q^* &\rightarrow SLA: x' = J(Q^*)x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x. \end{aligned}$$

◇◇◇

Cuando  $J(x^*)$  es no singular, entonces el único equilibrio del sistema (3.4) es el equilibrio nulo,  $(0, 0)$ . Se dice que el equilibrio  $x^*$  de (3.2) y el equilibrio  $(0, 0)$  de (3.4) son topológicamente equivalentes si existen

vecindades de estos equilibrios tales que las trayectorias que están en dichas vecindades tienen el mismo comportamiento cualitativo. En este caso, la estabilidad de los equilibrios  $x^*$  y  $(0, 0)$  es la misma. Para definir formalmente esta idea, se necesita introducir primero el concepto de homeomorfismo.

**Definición 17.** Sean  $E_1$  y  $E_2$  dos espacios topológicos. Se dice que la función  $h : E_1 \rightarrow E_2$  es un homeomorfismo si es continua, biyectiva y la inversa  $h^{-1} : E_2 \rightarrow E_1$  también es continua. En el caso de que exista tal homeomorfismo, se dice que los espacios  $E_1$  y  $E_2$  son homeomorfos.

Si  $\mathcal{U}_1$  y  $\mathcal{U}_2$  son dos conjuntos abiertos de  $E_1$  y  $E_2$ , respectivamente, y  $h : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$  es un homeomorfismo, este se llama «homeomorfismo local». Se dice que un homeomorfismo  $h : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$  preserva la orientación de trayectorias si una trayectoria que va de  $P$  a  $Q$  en  $\mathcal{U}_1$ , se transforma en una trayectoria que va de  $h(P)$  a  $h(Q)$  en  $\mathcal{U}_2$ .

### Ejemplo

**Ej. 61.** Consideremos los sistemas lineales  $x' = Ax$  y  $y' = By$ , donde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Sea  $h(x) = Hx$ , donde

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad H^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces,  $B = H^{-1}AH$  y  $e^{Bt} = H^{-1}e^{At}H$ . Ahora, haciendo  $y = h(x) = H^{-1}x$ , se tiene el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} x_0 & \rightarrow & x(t) = e^{At}x_0 \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ y_0 & \rightarrow & y(t) = e^{Bt}y_0. \end{array}$$

Este esquema muestra que la aplicación  $h$  transforma las trayectorias del primer sistema en las trayectorias del segundo conservando su orientación. En realidad, como  $h$  es continua con inversa continua,  $h$  es un homeomorfismo y, entonces, existe una correspondencia uno a uno entre las trayectorias de ambos sistemas.



**Definición 18.** Sea  $x^*$  un equilibrio de (3.2). Se dice que los sistemas (3.2) y (3.4) son localmente topológicamente equivalentes alrededor de  $x^*$  y  $(0, 0)$  si existe un homeomorfismo local que preserve la orientación de trayectorias entre una vecindad  $\mathcal{U}_1$  de  $x^*$  y una vecindad  $\mathcal{U}_2$  de  $(0, 0)$ .

Esencialmente, esto significa que las trayectorias de ambos sistemas se comportan de forma similar en las vecindades de sus respectivos equilibrios, de donde estos tienen la misma estabilidad (o inestabilidad).

El teorema que se presenta a continuación establece bajo qué condiciones los sistemas (3.2) y (3.4) son localmente topológicamente equivalentes alrededor de los equilibrios  $x^*$  y  $(0, 0)$ . Antes necesitamos definir un concepto preliminar. Dado el sistema (3.2), se dice que un equilibrio es «hiperbólico» si ninguno de los valores característicos de  $J(x^*)$  tienen parte real nula.

**Teorema 14. (Hartman-Grobman, H-G).** Si  $x^*$  es un equilibrio hiperbólico de (3.2), entonces los sistemas (3.2) y (3.4) son localmente topológicamente equivalentes alrededor de  $x^*$  y  $(0, 0)$ .

### **Ejemplo**

**Ej. 62.** Con relación al ejemplo 60, tenemos

Valores característicos de  $J(P^*)$  :  $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$

Valores característicos de  $J(Q^*)$  :  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$ .

Puesto que los valores característicos de  $P^*$  son complejos con parte real no nula y los valores característicos de  $Q^*$  son reales no nulos, entonces  $P^*$  y  $Q^*$  son equilibrios hiperbólicos. Ahora, por el teorema H-G,  $P^*$  es inestable tipo fuente y  $Q^*$  es inestable tipo silla. En la Figura 3.11 se muestra el diagrama de fases del sistema. Se puede apreciar que, en una vecindad muy pequeña de los equilibrios  $P^*$  y  $Q^*$ , las trayectorias correspondientes se comportan como si el sistema fuera lineal. Esto es precisamente lo que predice el teorema H-G.

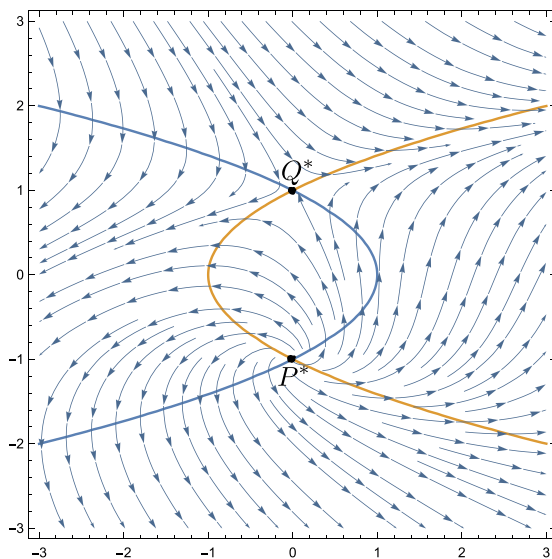


Figura 3.11 Diagrama de fases



A continuación se dan algunos ejemplos que combinan el análisis geométrico, basado en el concepto de campo vectorial, y el análisis cuantitativo, basado en el teorema H-G. En muchos casos, estas dos herramientas de análisis permiten diseñar el diagrama de fases con bastante precisión. Se presentan todos los pasos con detalle.

**Ejemplos**

**Ej. 63.** Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}x_1' &= -x_1 \\x_2' &= 1 - x_1^2 - x_2^2.\end{aligned}$$

Las isoclinas son

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_v : x_1' = 0 &\Rightarrow x_1 = 0 \\ \mathcal{C}_h : x_2' = 0 &\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 1.\end{aligned}$$

La isoclina  $\mathcal{C}_v$  es una recta vertical que pasa por el origen de coordenadas, y la isoclina  $\mathcal{C}_h$  es una circunferencia de radio 1 y está centrada en el origen de coordenadas. Ambas isoclinas se muestran en la Figura 3.12.

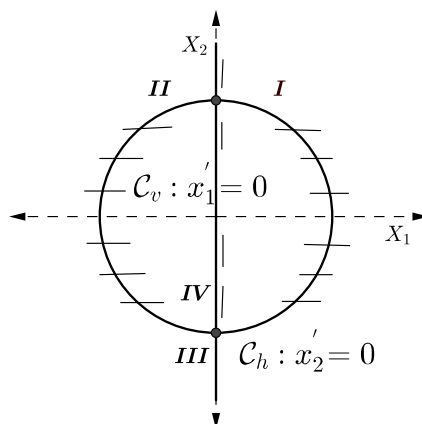


Figura 3.12 Isoclinas



$\mathcal{C}_v$  y  $\mathcal{C}_h$  dividen el espacio de fases en cuatro isozonas. Denotemos la isozona del lado derecho de  $\mathcal{C}_v$  por I; y la del lado izquierdo, por II. Asimismo, denotemos la isozona que está fuera de  $\mathcal{C}_h$  por III; y la que está dentro, por IV. Más exactamente:

$$\begin{aligned} x_1' < 0 &\equiv x_1 > 0 && \text{Isozona I} \\ x_1' > 0 &\equiv x_1 < 0 && \text{Isozona II} \\ x_2' < 0 &\equiv x_1^2 + x_2^2 > 1 && \text{Isozona III} \\ x_2' > 0 &\equiv x_1^2 + x_2^2 < 1 && \text{Isozona IV} \end{aligned}$$

Veamos las direcciones del campo vectorial en las distintas regiones del espacio de fases.

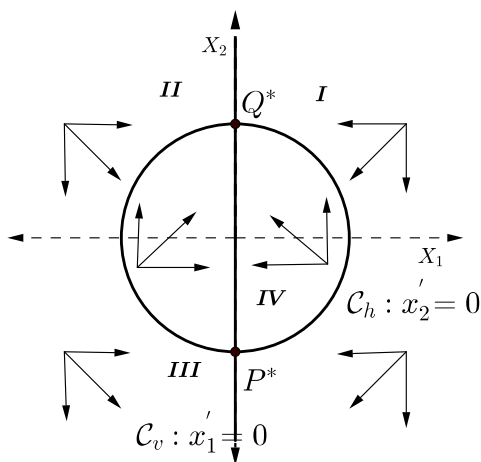


Figura 3.13 Campo vectorial por zonas.

El campo vectorial sugiere que  $P^*$  es un equilibrio inestable tipo silla y que  $Q^*$  es estable tipo atractor. Verifiquemos esto. De las ecuaciones

$$\begin{aligned} -x_1 &= 0 \\ 1 - x_1^2 - x_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

se obtienen  $P^* = (0, -1)$  y  $Q^* = (0, 1)$ . La matriz jacobiana es

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$J(P^*) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \text{ hiperbólico}$$

$$J(Q^*) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \text{ hiperbólico.}$$

Por el teorema H-G,  $P^*$  es inestable tipo silla y  $Q^*$  es estable tipo atractor.

El diagrama de fases se muestra a continuación en la Figura 3.14.

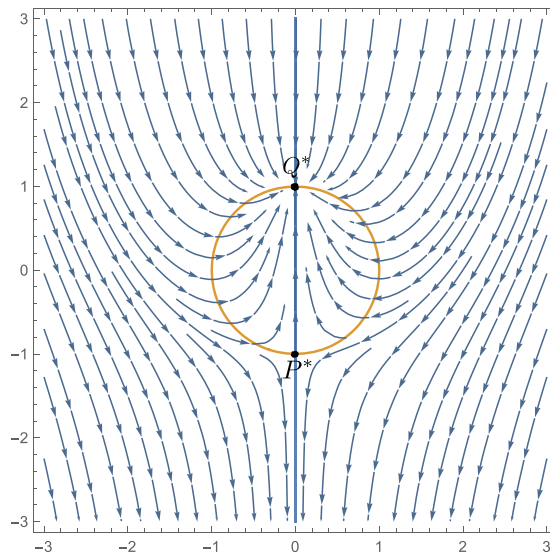


Figura 3.14 Diagrama de fases

Se aprecia que las trayectorias que entran en la isoclinas IV desde la isoclinas I tienen una orientación horizontal hacia la izquierda y una orientación vertical hacia arriba y que se dirigen hacia el punto de

equilibrio  $Q^*$ , que es un atractor, y se alejan del equilibrio  $P^*$ , que es un punto silla. Por otro lado, las trayectorias que están en la isozona I y no entran en la isozona IV, o bien se aproximan al equilibrio atractor, o bien se alejan del equilibrio silla y permanecen en la isozona I. El diagrama de fases es simétrico respecto de la isoclina  $\mathcal{C}_v$ , y las trayectorias de la isozona II muestran un comportamiento análogo al de las trayectorias de la isozona I.

El diagrama de fases de la Figura 3.14 no muestra las trayectorias convergentes al equilibrio tipo silla. En teoría sabemos que si el sistema fuera lineal, entonces aquellas trayectorias que estuvieran en el subespacio estable tendrían esta propiedad de convergencia, sin salir de tal subespacio. Si embargo, el sistema es no lineal y no existe tal cosa como subespacio estable (ni subespacio inestable). Como veremos más adelante, este concepto es reemplazado por el de «variedad estable» («variedad inestable»), y posee esencialmente las mismas características del subespacio estable de los sistemas lineales.

**Ej. 64.** Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1^2 + x_2^2 - 2 \\x_2' &= x_1^2 - x_2^2.\end{aligned}$$

El sistema tiene tres isoclinas, estas son:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_v : x_1' = 0 &\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 2 \\ \mathcal{C}_{h1} : x_2' = 0 &\Rightarrow x_2 = -x_1 \\ \mathcal{C}_{h2} : x_2' = 0 &\Rightarrow x_2 = x_1.\end{aligned}$$

Dos isoclinas son líneas rectas y la tercera es una circunferencia. A continuación, la Figura 3.15 muestra las isoclinas.

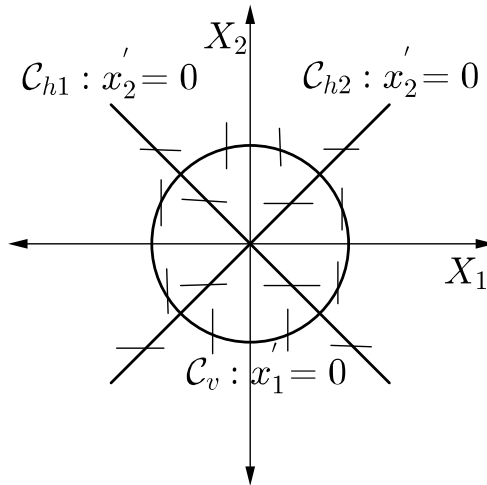


Figura 3.15 Isoclinas

- Isoclina  $x_1' = 0$ 
  - Isozona  $x_1' < 0 \equiv x_1^2 + x_2^2 < 2$ . En esta isozona, el campo vectorial tiene dirección horizontal hacia la izquierda. Es la región del espacio de fases que es interior a la circunferencia  $C_v$ .
  - Isozona  $x_1' > 0 \equiv x_1^2 + x_2^2 > 2$ . En esta isozona, el campo vectorial tiene dirección horizontal hacia la derecha. Es la región del espacio de fases que es exterior a la circunferencia  $C_v$ .
- Isoclina  $x_2' = 0$ 
  - Isozona  $x_2' < 0$ . En esta isozona, el campo vectorial tiene dirección vertical hacia abajo. Es la región del espacio de fases que resulta de la unión de las regiones determinadas por las desigualdades  $x_2 > |x_1|$  y  $x_2 < -|x_1|$
  - Isozona  $x_2' > 0$ . En esta isozona, el campo vectorial tiene dirección vertical hacia arriba. Es la región del espacio de fases determinada por

las desigualdades  $-|x_1| < x_2 < |x_1|$ .

A continuación, la Figura 3.16 muestra el campo vectorial en diversas regiones del espacio de fases.

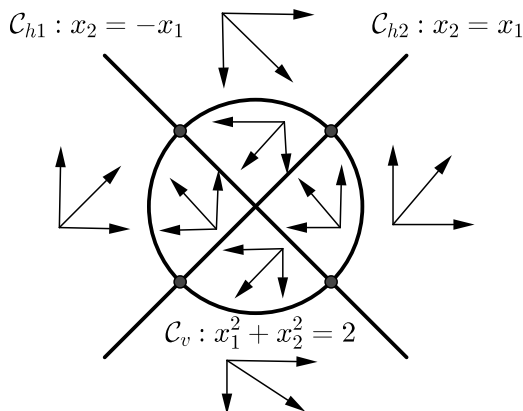


Figura 3.16 Campo vectorial

Los equilibrios se obtienen a partir de las siguientes ecuaciones algebraicas:

$$0 = x_1^2 + x_2^2 - 2$$

$$0 = x_1^2 - x_2^2 .$$

Se obtienen los puntos  $P_1^* = (1, 1)$ ,  $P_2^* = (1, -1)$ ,  $P_3^* = (-1, 1)$  y  $P_4^* = (-1, -1)$ .

La matriz jacobiana es

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix} .$$

Evaluando la matriz jacobiana en cada punto de equilibrio, resulta

$$\begin{aligned}
 J(P_1) &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -2\sqrt{2}, \lambda_2 = 2\sqrt{2}, \text{ hiperbólico} \\
 J(P_2) &= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 2 - 2i, \lambda_2 = 2 + 2i, \text{ hiperbólico} \\
 J(P_3) &= \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -2 - 2i, \lambda_2 = -2 + 2i, \text{ hiperbólico} \\
 J(P_4) &= \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -2\sqrt{2}, \lambda_2 = 2\sqrt{2}, \text{ hiperbólico.}
 \end{aligned}$$

Los cuatro equilibrios son hiperbólicos. Debido al teorema H-G se puede afirmar que  $P_1$  y  $P_4$  son inestables tipo silla, que  $P_2$  es inestable tipo fuente y que  $P_3$  es estable tipo sumidero. El diagrama de fases se muestra a continuación en la Figura 3.17.

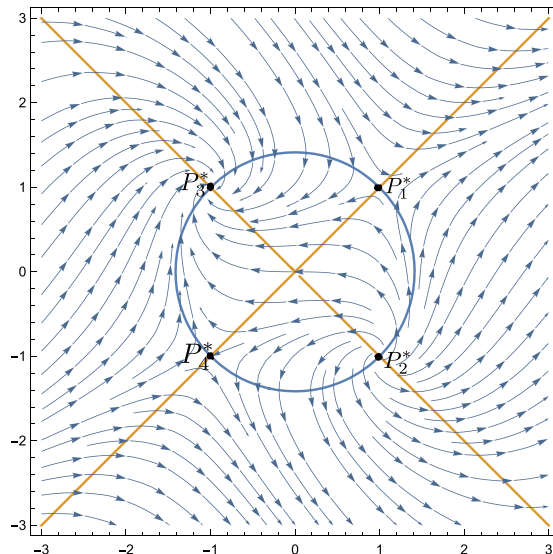


Figura 3.17 Diagrama de fases



Veamos a continuación un modelo real.

### Ejemplo

#### Ej. 65. (Competencia de especies)

Este modelo, que es muy conocido en la literatura, es una estupenda oportunidad para mostrar las ideas que se han venido desarrollando hasta el momento. El modelo establece la interacción entre dos especies que compiten por el mismo recurso.

Sean estas especies, por ejemplo, los conejos y las ovejas. Asumamos que el ecosistema está constituido únicamente por estas dos especies y que solo hay un recurso de consumo, que además es escaso. Los conejos compiten con las ovejas por este recurso para sobrevivir. Las dinámicas poblacionales se comportan de acuerdo con el modelo logístico, que se estudió en el primer capítulo.

Denotemos por  $x_1$  y  $x_2$  las poblaciones de conejos y ovejas, respectivamente. Las tasas de crecimiento per cápita de estas poblaciones están dadas por el siguiente par de ecuaciones:

$$\frac{x_1'}{x_1} = 3 - x_1 - 2x_2 \quad (3.5)$$

$$\frac{x_2'}{x_2} = 2 - x_1 - x_2. \quad (3.6)$$

La ecuación (3.5) establece que la tasa de crecimiento per cápita de la población de conejos es decreciente con respecto a la población misma de conejos y con respecto a la población de ovejas. Ciertamente, si no hubiera ovejas, entonces la población de conejos crecería, pero la presencia de ovejas afecta el crecimiento de la población de conejos, pues consumen el mismo recurso. Esta es la razón del signo negativo de  $x_2$ . El signo negativo de  $x_1$  indica que cuantos más conejos hay, la tasa de crecimiento

per cápita de esta especie tiende a decrecer, pues una mayor cantidad de conejos tendrían que compartir el mismo recurso escaso. La misma lógica sigue la ecuación (3.6), que representa la tasa de crecimiento per cápita de la población de ovejas. Las constantes 3 y 2 representan, respectivamente, las poblaciones iniciales de conejos y ovejas.

Coloquemos las ecuaciones de la siguiente forma:

$$x_1' = x_1(3 - x_1 - 2x_2)$$

$$x_2' = x_2(2 - x_1 - x_2).$$

Las isoclinas son las siguientes cuatro rectas:

$$C_{v1} : x_1 = 0$$

$$C_{h1} : x_2 = 0$$

$$C_{v2} : x_1 + 2x_2 = 3$$

$$C_{h2} : x_1 + x_2 = 2.$$

La Figura 3.18 muestra las isoclinas y el campo vectorial para las isozonas significativas y deja de lado los valores negativos de  $x_1$  y  $x_2$ .

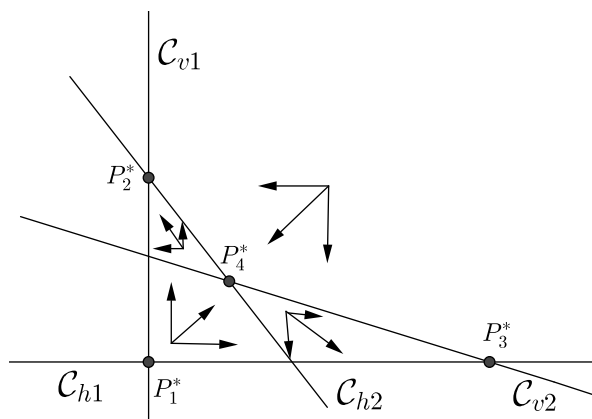


Figura 3.18 Campo vectorial



Los puntos de equilibrio son las intersecciones de las isoclinas:  $P_1^* = (0, 0)$ ,  $P_2^* = (0, 2)$ ,  $P_3^* = (3, 0)$  y  $P_4^* = (1, 1)$ .

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 3 - 2x_1 - 2x_2 & -2x_1 \\ -x_2 & 2 - x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}$$

Evaluando la matriz jacobiana en cada uno de los equilibrios, resulta

$$J(P_1^*) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \text{ hiperbólico}$$

$$J(P_2^*) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \text{ hiperbólico}$$

$$J(P_3^*) = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1, \text{ hiperbólico}$$

$$J(P_4^*) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -1 - \sqrt{2}, \lambda_2 = -1 + \sqrt{2}, \text{ hiperbólico.}$$

Por el teorema H-G,  $P_1^*$  es inestable tipo repulsor,  $P_2^*$  y  $P_3^*$  son estables tipo atractor y  $P_4^*$  es inestable tipo silla. La Figura 3.19 muestra a continuación el diagrama de fases.

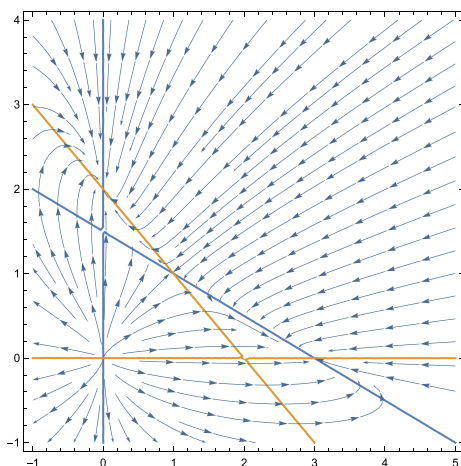


Figura 3.19 Diagrama de fases

*Conclusiones del modelo*

Basándonos en el diagrama de fases podemos establecer algunas conclusiones interesantes del modelo. En relación con la Figura 3.19, digamos en principio que el eje de abscisas corresponde a la población de conejos; y el eje de ordenadas, al de la población de ovejas. El área de interés es el primer cuadrante, por ser positivo para ambas especies.

Observemos que cualquier trayectoria que no pase por el equilibrio nulo se va a dirigir a algunos de los otros tres equilibrios. En este sentido, es apropiado preguntarse si todas las situaciones de equilibrio son deseables. Ciertamente, la respuesta es **no**, pues dos de los tres equilibrios implican la extinción de al menos una especie. El único equilibrio que no implica tal extinción es  $P_4^*$ , que es un punto silla. Así, la condición inicial del modelo debe ser tal que la trayectoria correspondiente se dirija a  $P_4^*$ ; de lo contrario, las especies se extinguirán en el largo plazo.<sup>2</sup> La cuestión de cómo encontramos la posición en el espacio de fases donde deba colocarse tal condición inicial se aborda en la siguiente sección. Por lo pronto, veamos qué ocurre en otras situaciones.

Si en un momento dado la condición inicial es el punto  $P_1^*$ , entonces en dicho momento no hay ni conejos ni ovejas, y al ser este un punto de equilibrio, entonces nunca aparecerán estas especies.<sup>3</sup> Sin embargo,  $P_1^*$  es un repulsor, por lo tanto, basta una ligera perturbación de esta situación para que las poblaciones de conejos y ovejas comiencen a crecer. En el largo plazo, sin embargo, alguna de estas poblaciones se extinguirá, a menos que la trayectoria de crecimiento siga la senda que conduce al equilibrio tipo silla. Así pues, parece imperativo encontrar tal senda.

---

<sup>2</sup> Técnicamente, las especies no se extinguen, pues el equilibrio nulo nunca se alcanza, ¿por qué?

<sup>3</sup> Ciertamente, ni los conejos ni las ovejas pueden venir de la nada.

Por otro lado, si en un momento dado la condición inicial es un punto muy alejado de  $P_1^*$ ; es decir, tanto la población de conejos como la de ovejas son muy numerosas, entonces estas poblaciones irán decreciendo con el paso del tiempo. La situación en la cual las poblaciones son muy numerosas no es sostenible en el tiempo. Es de suponer que como el recurso es escaso, entonces se comienza a dar ya no solo una competencia entre especies diferentes, sino también dentro de la misma especie.<sup>4</sup> Nuevamente, dependiendo de dónde esté exactamente colocada la condición inicial, ello determinará que alguna de las dos especies se extingan si acaso la trayectoria correspondiente se orienta hacia algunos de los equilibrios atractores; o que ambas especies convivan, si la trayectoria está sobre la senda que conduce al equilibrio tipo silla.

Por último, si la condición inicial fuera precisamente el punto silla, o estuviera colocada sobre la senda que conduce a este equilibrio, entonces las poblaciones seguirán conviviendo por siempre en esta situación. Sin embargo, puesto que este equilibrio está rodeado de trayectorias que se alejan de él, una ligera perturbación puede hacer que las cosas cambien drásticamente y la trayectoria de las poblaciones se conduzca de nuevo a una situación indeseable.



El siguiente ejemplo, que es típico de diversas situaciones, se conoce en la literatura como «presa-depredador». Este modelo presenta una diferencia destacable con relación a los ejemplos anteriores, pues el equilibrio no nulo no es hiperbólico y, por lo tanto, no se puede aplicar el teorema H-G para analizar su estabilidad.<sup>5</sup> Como veremos, el campo vectorial sugiere un comportamiento circular de las trayectorias y deja

---

<sup>4</sup> Esto es compatible con los signos negativos de  $x_1$  y  $x_2$  en el modelo.

<sup>5</sup> El otro equilibrio del modelo es  $(0, 0)$ , que no es significativo.

la duda de si el equilibrio es un centro, un sumidero o, más bien, una fuente. Algunos argumentos *ad hoc* tendrán que utilizarse para poder obtener conclusiones definitivas en este sentido.

Es sorprendente que el mismo comportamiento de las trayectorias es seguido por un famoso modelo económico que veremos luego y que trata de la relación entre salarios y empleos. Los contextos son diferentes y, sin embargo, la estructura matemática del modelo es la misma.

### Ejemplo

**Ej. 66. (Presa-Depredador).** El modelo que se presenta a continuación se conoce en la literatura como presa-depredador y fue propuesto en 1925 por el biofísico norteamericano Alfred Lotka e, independientemente, el mismo año, por el matemático italiano Vito Volterra.<sup>6</sup> Es un modelo en el que aparece un equilibrio no hiperbólico y en el que las trayectorias giran en torno a este. El modelo describe la interacción entre las poblaciones de dos especies, donde una de ellas, es la presa; y la otra, la depredadora. Por ejemplo, puede pensarse en los salmones como la presa y en los osos como la especie depredadora. Denotemos por  $x_1$  a la población de salmones y por  $x_2$  a la población de osos. Las hipótesis del modelo son las siguientes:

H1. Los salmones tiene una cantidad ilimitada de recursos y, por lo tanto, frente a la ausencia de osos, su población, según Malthus, crecerá exponencialmente a una tasa constante  $r_1 > 0$ ; esto es,  $x'_1 = r_1 x_1$ .

H2. Sin embargo, el ecosistema de los salmones es compartido por los osos, que es la especie depredadora y, por lo tanto, la población de salmones decrece ante la presencia de los osos, pues los salmones son la principal fuente de alimentación de los osos. Digamos que la forma en que la presencia de osos afecta a la población de salmones está dada por

<sup>6</sup> Por esta razón, al modelo también se le conoce como modelo de Lotka-Volterra.

el producto  $ax_1x_2$ , donde la constante  $a > 0$  representa una valoración de la interacción entre ambas especies y afecta negativamente a la población de salmones. Así, la dinámica de la población de salmones es

$$x_1' = r_1x_1 - ax_1x_2.$$

H3. La única fuente de alimentación de los osos son los salmones, de manera que, ante la ausencia de salmones, los osos se extinguirán rápidamente de forma exponencial a una tasa constante  $r_2 > 0$ , esto es,  $x_2' = -r_2x_2$ .

H4. La presencia de salmones acrecienta la población de osos según la expresión  $bx_1x_2$ , donde la constante  $b > 0$  representa una valoración de la interacción entre ambas especies e impacta positivamente sobre la población de osos. Así, la dinámica de la población de osos es

$$x_2' = -r_2x_2 + bx_1x_2.$$

Po consiguiente, el modelo está dado por el siguiente par de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1' &= r_1x_1 - ax_1x_2 = x_1(r_1 - ax_2) \\ x_2' &= -r_2x_2 + bx_1x_2 = x_2(-r_2 + bx_1). \end{aligned}$$

Las isoclinas son:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{v1} &: x_1 = 0 \\ \mathcal{C}_{v2} &: x_2 = r_1/a \\ \mathcal{C}_{h1} &: x_2 = 0 \\ \mathcal{C}_{h2} &: x_1 = r_2/b. \end{aligned}$$

Las isoclinas y el campo vectorial se muestran a continuación en la Figura 3.20.

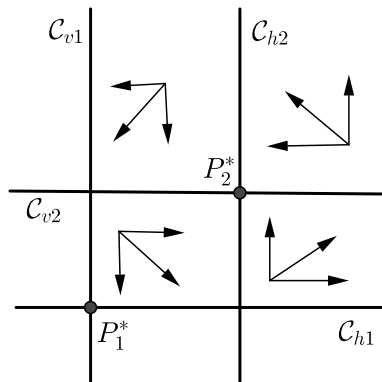


Figura 3.20 Campo vectorial

Los puntos de equilibrio son  $P_1^* = (0,0)$  y  $P_2^* = (r_2/b, r_1/a)$ , y la matriz jacobiana es

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} r_1 - ax_2 & -ax_1 \\ bx_2 & -r_2 + bx_1 \end{bmatrix}.$$

Evaluando en los puntos de equilibrio se tiene

$$J(P_1^*) = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & -r_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = r_1, \lambda_2 = -r_2$$

$$J(P_2^*) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{b}r_2 \\ \frac{b}{a}r_1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -\sqrt{r_1 r_2}i, \lambda_2 = \sqrt{r_1 r_2}i.$$

El equilibrio  $P_1^*$  es hiperbólico y por el teorema H-G es inestable tipo silla. Este equilibrio representa una situación no deseable, pues implica la extinción de ambas especies. El equilibrio  $P_2^*$  no es hiperbólico y, por lo tanto, no podemos clasificar su estabilidad a partir del teorema H-G.

Como indicábamos antes, el campo vectorial no proporciona información suficiente para saber cómo se comportan las trayectorias alrededor

del equilibrio  $P_2^*$ , que es el que importa. Todo lo que podemos concluir a partir de la Figura 3.20 es que las trayectorias parecen girar en sentido antihorario en torno a  $P_2^*$ . Para indagar acerca de la forma específica de las trayectorias, hagamos el siguiente análisis.

El par de ecuaciones que definen el modelo se puede escribir como una ecuación de variables separables. En efecto, por la regla de la cadena, las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1(r_1 - ax_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2(-r_2 + bx_1)\end{aligned}$$

pueden combinarse para producir la siguiente ecuación escalar:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2(-r_2 + bx_1)}{x_1(r_1 - ax_2)}.$$

Esta ecuación es de variables separables. Siguiendo el procedimiento usual para resolver este tipo de ecuaciones, se obtiene

$$\begin{aligned}(r_1 - ax_2)\frac{dx_2}{x_2} &= (-r_2 + bx_1)\frac{dx_1}{x_1} \\ \left(\frac{r_1}{x_2} - a\right) dx_2 &= \left(-\frac{r_2}{x_1} + b\right) dx_1 \\ \int \left(\frac{r_1}{x_2} - a\right) dx_2 &= \int \left(-\frac{r_2}{x_1} + b\right) dx_1 \\ r_1 \ln x_2 - ax_2 &= -r_2 \ln x_1 + bx_1 + C \\ \ln x_2 - (a_1x_2 + C_1) &= -r \ln x_1 + b_1x_1,\end{aligned}\tag{3.7}$$

donde  $a_1 = a/r_1$ ,  $C_1 = -C/r_1$ ,  $r = r_2/r_1$  y  $b_1 = b/r_1$ . Las trayectorias solución del modelo satisfacen la ecuación algebraica (3.7). Para  $x_1$  fijo, una situación típica<sup>7</sup> de esta ecuación se presenta en la Figura 3.21.

<sup>7</sup> El argumento es el mismo si acaso la línea recta no corta a la línea logarítmica.

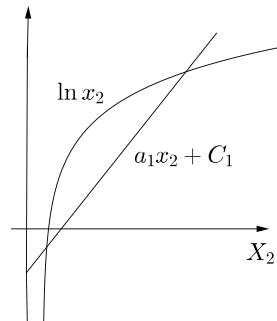


Figura 3.21 Procedimiento *ad hoc*

Si fijamos  $x_1$  en el lado derecho de (3.7), entonces en el caso de que exista  $x_2$  que satisfaga la ecuación, de la Figura 3.21 se deduce que esto solo es posible para a lo más dos valores diferentes de  $x_2$ . Esto implica que si en el espacio de fases trazamos una recta vertical, esta solo cortará la gráfica de la ecuación (3.7) en a lo más dos puntos. Esto descarta la posibilidad de que cualquier trayectoria solución sea de tipo espiral, por lo que necesariamente debe ser una curva cerrada.

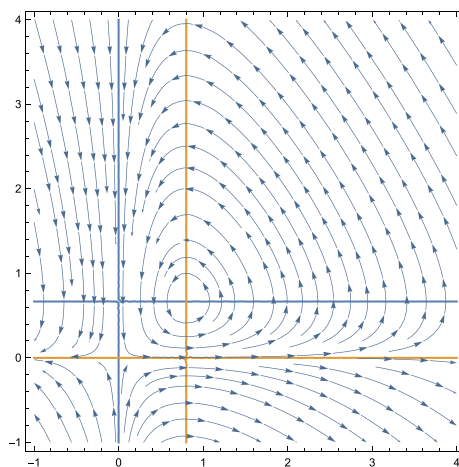


Figura 3.22 Diagrama de fases



Se deduce, pues, que el equilibrio nulo es inestable tipo silla y que el equilibrio no nulo es un centro.

### *Conclusiones del modelo*

La conclusión que se obtiene de la dinámica de este ecosistema es la siguiente. Cuando la población de salmones comienza a crecer, también lo hace la población de osos (pues, hay más salmones para comer). Sin embargo, a medida que crece la población de osos, los salmones comienzan a desaparecer (pues cada vez hay más osos que comen salmones). Al comenzar a decrecer la población de salmones, también decrece la población de osos (pues, a los osos se les va agotando su única fuente de alimentación.) Al decrecer la población de osos, los salmones comienzan a multiplicarse nuevamente (pues, hay menos osos que comen salmones) y así sucesivamente se va repitiendo el ciclo de vida en este ecosistema y se generan los ciclos descritos en el diagrama de fases.



A continuación presentamos el modelo económico de Goodwin, que, como mencionábamos antes, sigue el mismo patrón del modelo presa-depredador. Ciertamente, si las ecuaciones dinámicas que definen el modelo tienen la misma estructura matemática, no puede esperarse llegar a resultados diferentes desde el punto de vista cualitativo. Uno se pregunta inmediatamente quién es la presa y quién es el depredador en este modelo. Veamos.

### **Ejemplo**

#### **Ej. 67. (Modelo del Ciclo Económico de Goodwin)**

Richard Goodwin fue un economista norteamericano (1913-1996) que

dedicó la mayor parte de su investigación a entender la dinámica del capitalismo. En su trabajo más conocido, “A Growth Cycle”, publicado en 1982 en *Socialism, Capitalism and Economic Growth*, Goodwin propone un modelo cíclico del tipo Lotka-Volterra para la relación capital-trabajo.<sup>8</sup> Este modelo se basa en la idea de que entre estos dos factores de producción existe permanentemente una relación de conflicto y dependencia por su participación en la distribución del producto. Ninguna parte puede aumentar su participación indefinidamente a expensas de la otra, pues en el largo plazo terminaría afectándose a sí misma.<sup>9</sup> *Ceteris paribus*, un aumento en los salarios afecta la inversión y, a su vez, un bajo nivel de inversión afecta el empleo.

Consideremos que la economía está formada por capitalistas y trabajadores. Para desarrollar el modelo, introduzcamos la siguiente notación:

$Y$ :	Producto
$K$ :	Capital
$L$ :	Fuerza laboral
$\ell$ :	Demanda de trabajo
$a$ :	Productividad del trabajo
$w$ :	Tasa promedio salarial.

La variable  $a$  mide la productividad del trabajo empleado; esto es,

$$a(t) \triangleq \frac{Y(t)}{\ell(t)}. \quad (3.8)$$

Supongamos que tanto la productividad del trabajo como la fuerza

<sup>8</sup> Goodwin tenía una visión del mundo inspirada en la obra de Karl Marx.

<sup>9</sup> Esta situación es similar a la que se da entre salmones y osos.

laboral<sup>10</sup> crecen a tasas constantes  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente:

$$a(t) = a_0 e^{\alpha t} \quad (3.9)$$

$$L(t) = L_0 e^{\beta t}. \quad (3.10)$$

La relación entre el capital y el producto se supone constante:

$$\frac{K(t)}{Y(t)} = \sigma. \quad (3.11)$$

Las variables fundamentales del modelo de Goodwin son la parte del producto dedicada a los trabajadores, que denotamos por  $u$ , y la parte del trabajo efectivamente empleada, que denotamos por  $v$ . Consideremos primero la variable  $u$ ; esta viene definida por la ecuación

$$u(t) = \frac{w(t)\ell(t)}{Y(t)}.$$

Debido a (3.8), esta variable también puede expresarse como

$$u(t) \triangleq \frac{w(t)}{a(t)}. \quad (3.12)$$

En cuanto a la porción de empleo, esta viene dada por

$$v(t) = \frac{\ell(t)}{L(t)}. \quad (3.13)$$

De (3.12), por diferenciación logarítmica, se obtiene

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = \frac{w'(t)}{w(t)} - \frac{a'(t)}{a(t)}.$$

Debido a (3.9), esta ecuación se puede escribir como

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = \frac{w'(t)}{w(t)} - \alpha. \quad (3.14)$$

---

<sup>10</sup> Para simplificar, asumimos que la fuerza laboral es toda la población.

Goodwing asumió que la tasa per cápita de los salarios tiene una relación lineal positiva con la tasa empleo; esto es,<sup>11</sup>

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = -\gamma + \rho v, \quad \gamma, \rho > 0.$$

Tomando en cuenta esta expresión, la ecuación (3.14) puede escribirse

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = -\gamma + \rho v - \alpha.$$

o, equivalentemente,

$$u'(t) = u(t)(-\gamma + \rho v(t) - \alpha). \quad (3.15)$$

Consideremos ahora la evolución de la variable  $v$ . De (3.13), de nuevo, por derivación logarítmica, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{v'(t)}{v(t)} &= \frac{\ell'(t)}{\ell(t)} - \frac{L'(t)}{L(t)} \\ &= \frac{\ell'(t)}{\ell(t)} - \beta. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Despejando  $\ell$  de (3.8), queda

$$\ell(t) = \frac{Y(t)}{a(t)}.$$

Luego, una vez más por derivación logarítmica, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\ell'(t)}{\ell(t)} &= \frac{Y'(t)}{Y(t)} - \frac{a'(t)}{a(t)} \\ &= \frac{Y'(t)}{Y(t)} - \alpha. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Se supone que los capitalistas invierten todos sus beneficios. Luego, puesto que  $u$  es la parte del producto que va para los trabajadores, denotando por  $I$  la inversión, podemos escribir

$$K'(t) = I(t) = (1 - u(t))Y(t). \quad (3.18)$$

<sup>11</sup> Esto es una versión de la asunción de Goodwin que consideró que esta tasa cambiaba de acuerdo con la curva de Phillips.

Ahora bien, de (3.11) podemos despejar  $K'(t)$  para obtener

$$K'(t) = Y'(t)\sigma,$$

y reemplazando en (3.18) queda

$$\frac{Y'(t)}{Y(t)} = \frac{1 - u(t)}{\sigma}. \quad (3.19)$$

Ahora, reemplazando (3.19) en (3.17), se obtiene

$$\frac{\ell'(t)}{\ell(t)} = \frac{1 - u(t)}{\sigma} - \alpha. \quad (3.20)$$

Finalmente, llevando este resultado a (3.16), se obtiene la dinámica para la variable  $v$ :

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{1 - u(t)}{\sigma} - \alpha - \beta$$

o, equivalentemente,

$$v'(t) = v(t) \left[ \left( \frac{1}{\sigma} - (\alpha + \beta) \right) - \frac{1}{\sigma} u(t) \right]. \quad (3.21)$$

Juntando (3.21) con (3.15), se obtienen el par de ecuaciones que constituyen el modelo de Goodwin:

$$\begin{aligned} v' &= v \left[ \left( \frac{1}{\sigma} - (\alpha + \beta) \right) - \frac{1}{\sigma} u \right] \\ u' &= u(-(\gamma + \alpha) + \rho v). \end{aligned}$$

Observe que estas ecuaciones tienen la misma forma estructural que el modelo de Lotka-Volterra. La parte del trabajo empleada  $v$  hace las veces de la presa, y la participación del producto de los trabajadores  $u$  hace las veces del depredador.

Los equilibrios del modelo son  $P_1 = (0, 0)$  y  $P_2 = (v^*, u^*)$ , donde

$$\begin{aligned} u^* &= 1 - (\alpha + \beta)\sigma \\ v^* &= \frac{\gamma + \alpha}{\rho}. \end{aligned}$$

La matriz jacobiana evaluada en el punto de equilibrio no nulo es

$$J(P_2^*) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-(\alpha+\gamma)}{\sigma\rho} \\ \rho(1 - \sigma(\alpha + \beta)) & 0 \end{bmatrix}.$$

Así pues, tanto las ecuaciones que determinan el modelo como la matriz  $J(P_2^*)$  afianzan la idea de que el modelo de Goodwin tiene exactamente el mismo comportamiento estructural del modelo presa-depredador de Lotka-Volterra.

La conclusión del modelo es que, en una economía capitalista, el salario y el empleo son variables que están permanentemente en conflicto, pero dependientes una de otra, lo que hace que se establezca una dinámica económica de tipo cíclico y que se repite de manera indefinida.



El siguiente ejemplo, que aparece en Strogatz (2018, p. 153), muestra claramente que una ligera perturbación en el término no lineal de un sistema dinámico puede cambiar dramáticamente el comportamiento cualitativo de las trayectorias. El ejemplo muestra también que, de nuevo, el enfoque geométrico no permite obtener conclusiones definitivas acerca de la estabilidad del equilibrio y, por ende, del comportamiento cualitativo de las trayectorias en torno a él. Otra bondad del ejemplo es que introduce una técnica de análisis, basada en las coordenadas polares, que podría ser muy útil en situaciones similares.

### **Ejemplo**

#### **Ej. 68. (Coordenadas polares)**

Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 + ax_1(x_1^2 + x_2^2) \\ x_2' &= -x_1 + ax_2(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned}$$

El único equilibrio es el punto  $P^* = (0, 0)$ . En efecto, consideremos el sistema algebraico

$$0 = x_2 + ax_1(x_1^2 + x_2^2) \quad (3.22)$$

$$0 = -x_1 + ax_2(x_1^2 + x_2^2), \quad (3.23)$$

con  $a \neq 0$ . Sea  $x_1 \neq 0$ , entonces de (3.23) se deduce que  $x_2 \neq 0$ . Ahora, dividiendo ambas ecuaciones, se obtiene

$$-\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow -x_1^2 = x_2^2,$$

lo que es una contradicción. Claramente, la misma contradicción se genera si partimos de la suposición de que  $x_2 \neq 0$ . Por consiguiente, el único equilibrio es el equilibrio nulo.

La matriz jacobian evaluada en el equilibrio  $P^*$  es

$$J(P^*) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Puesto que  $\lambda_1 = -i$  y  $\lambda_2 = i$ ,  $P^*$  es no hiperbólico y, por lo tanto, no podemos aplicar el teorema H-G. Observe que si el sistema original hubiera sido lineal; entonces, precisamente por el teorema H-G, concluiríamos que el equilibrio nulo es un centro.

La forma de las ecuaciones que forman el sistema sugiere que podemos usar coordenadas polares para analizarlo. Sean, pues,  $x_1 = r \cos \theta$  y  $x_2 = r \sin \theta$ , entonces  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$  y  $\tan \theta = x_2/x_1$ . Luego,

$$\begin{aligned} rr' &= x_1 [x_2 + ax_1(x_1^2 + x_2^2)] + x_2 [-x_1 + ax_2(x_1^2 + x_2^2)] \\ &= x_1x_2 + ax_1^2(x_1^2 + x_2^2) - x_1x_2 + ax_2^2(x_1^2 + x_2^2) \\ &= a(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) \\ &= a(x_1^2 + x_2^2)^2 \\ &= ar^4. \end{aligned}$$

De aquí se obtiene la ecuación

$$r' = ar^3. \quad (3.24)$$

Por otro lado, recordemos que si  $f(t) = \arctan w(t)$ , entonces  $f'(t) = w'(t)/(1 + w^2(t))$ . Luego,

$$\theta' = [\arctan(x_2/x_1)]' = \frac{x_1x_2' - x_2x_1'}{r^2}.$$

Haciendo los reemplazos correspondientes, se obtiene la ecuación

$$\theta' = -1. \quad (3.25)$$

Así, el sistema original en las variables (cartesianas)  $x_1$  y  $x_2$  ha sido transformado en el sistema en las variables (polares)  $r$  y  $\theta$  dado por las ecuaciones (3.24) y (3.25):

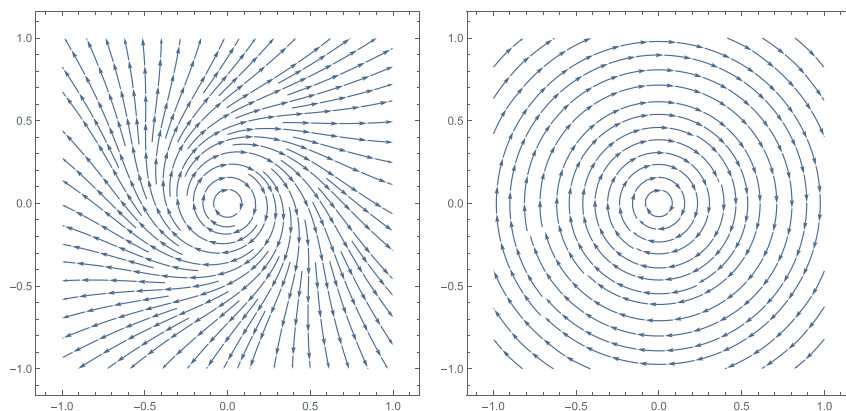
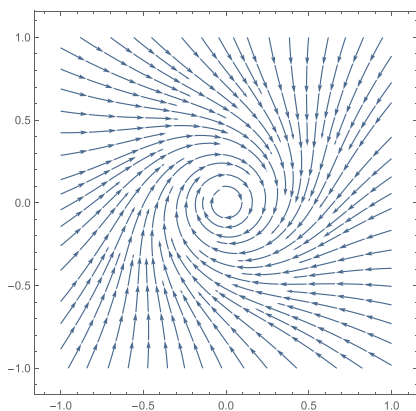
$$\begin{aligned} r' &= ar^3 \\ \theta' &= -1. \end{aligned}$$

Al ser la derivada del ángulo de rotación negativa, la segunda ecuación indica que el giro de la trayectoria es decreciente; esto es, la trayectoria gira en el sentido horario y, además, este giro es a una velocidad constante igual a 1.

Por otro lado, ya que  $r$  es siempre una magnitud positiva, la primera ecuación indica que la derivada de  $r$  es creciente o decreciente dependiendo del signo del parámetro  $a$ . En efecto, si  $a > 0$ , entonces la derivada  $r'$  es positiva, por lo que  $r$  es creciente y, entonces, las trayectorias se van alejando del origen de coordenadas a medida que transcurre el tiempo. Las trayectorias giran en sentido horario y forman espirales que se alejan del equilibrio  $P^*$ . En este caso,  $P^*$  sería una fuente. Ahora, si  $a < 0$ , ocurre totalmente lo contrario; es decir, las trayectorias



giran y forman espirales que se acercan a  $P^*$ . En este caso, el equilibrio  $P^*$  sería un sumidero. Finalmente, si  $a = 0$ , entonces la derivada  $r' = 0$ , por lo que  $r$  es constante y, entonces, las trayectorias permanecen en torno a  $P^*$  a la misma distancia y forman círculos. En este caso,  $P^*$  sería un equilibrio tipo centro. Estas tres situaciones se muestran en la Figura 3.24.

(a)  $a > 0$ (b)  $a = 0$ Figura 3.24 (c)  $a < 0$ 

Observe que si  $a = 0$ , entonces para que el sistema cambie sus

propiedades cualitativas basta que este valor cambie ligeramente: o bien a un valor positivo del parámetro  $a$ , o bien a un valor negativo, pues aun cuando sean valores de magnitud muy pequeñas, la naturaleza del equilibrio cambia drásticamente.



### LISTA DE EJERCICIOS

**3.2.1.** Para cada uno de los siguientes sistemas, encuentre los equilibrios y las isoclinas y, además, trace el campo vectorial.

a)  $x'_1 = 480x_1 - 8x_1^2 - 6x_1x_2$ ,  $x'_2 = 2500x_2 - x_1^2x_2 - x_2^3$

b)  $x'_1 = 4x_1 - 3x_1x_2$ ,  $x'_2 = 3x_2 - x_1x_2$

c)  $x'_1 = x_1x_2 - 2x_2$ ,  $x'_2 = x_1x_2 - 2x_1$

d)  $x'_1 = x_1 + x_2^2 - 1$ ,  $x'_2 = x_1x_2 + x_1^2$

e)  $x'_1 = x_1 - x_2$ ,  $x'_2 = 1 - e^{x_1}$

**3.2.2.** Con respecto a los sistemas del ejercicio anterior, verifique el teorema H-G y, basándose en esta información, esboce el diagrama de fases.

**3.2.3.** Con respecto al sistema dinámico

$$x'_1 = ax_1 - x_1x_2$$

$$x'_2 = bx_2 - x_1x_2,$$

donde  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$ , resuelva lo siguiente:

a) Pruebe que el sistema posee dos equilibrios  $P_1^* = (0, 0)$  y  $P_2^* = (b, a)$ .

b) Encuentre los valores de  $a$  y  $b$  para que el equilibrio  $P_1^*$  sea o bien repulsor, o bien atractor, o bien silla. Haga un gráfico para tales restricciones de los parámetros  $a$  y  $b$ .

c) Encuentre los valores de  $a$  y  $b$  para que el equilibrio  $P_2^*$  sea o bien repulsor, o bien atractor, o bien silla.

**3.2.4.** Repita el análisis de competencia de especies para los siguientes modelos:

a)  $x_1' = x_1(4 - x_1 - 2x_2)$ ,  $x_2' = x_2(6 - 2x_1 - x_2)$

b)  $x_1' = x_1(6 - 2x_1 - x_2)$ ,  $x_2' = x_2(8 - 4x_1 - 2x_2)$

**3.2.5.** Considere la siguiente variante del modelo Lotka-Volterra, donde se ha introducido un comportamiento tipo logístico para la presa:

$$\begin{aligned}x_1' &= ax_1 \left(1 - \frac{x_2}{K}\right) - bx_1x_2 \\x_2' &= cx_1x_2 - dx_2, \quad d > cK.\end{aligned}$$

Haga el análisis completo del modelo y compare con el desarrollado en el ejemplo 66.

**3.2.6.** La Figura 3.25 proporciona las isoclinas de un sistema no lineal  $x_1' = f(x_1, x_2)$ ,  $x_2' = g(x_1, x_2)$ .

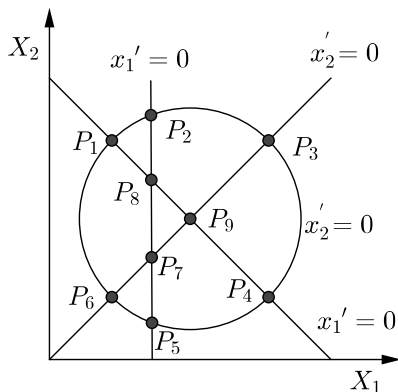


Figura 3.25 Isoclinas

Basándose en la Figura 3.25, resuelva lo siguiente:

- Indique los puntos de equilibrio.
- A partir de las isoclinas, proponga dos posibles funciones:  $f$  y  $g$ .

**3.2.7.** La Figura 3.26 muestra el diagrama de fases de un sistema  $x'_1 = f(x_1, x_2)$ ,  $x'_2 = g(x_1, x_2)$  (La recta y la parábola son las isoclinas del sistema. Además, la parábola pasa por el punto  $P = (4, -16/3)$ ).

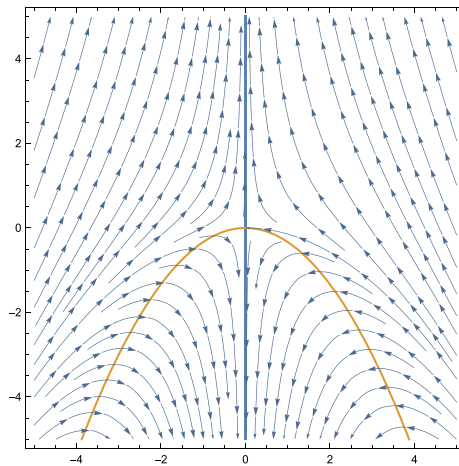


Figura 3.26 Diagrama de fases

Resuelva lo siguiente:

- Identifique el punto de equilibrio y diga qué tipo de equilibrio es, según el diagrama de fases.
- Encuentre las funciones  $f$  y  $g$ .
- Clasifique el punto de equilibrio con el teorema H-G.

### 3.3. Variedades estables y soluciones estacionarias tipo silla

En esta sección presentamos el teorema de la variedad estable. Este teorema, que es uno de los principales resultados de la teoría de los sistemas dinámicos, presenta condiciones que aseguran la existencia del subespacio estable en su versión no lineal. Aunque matemáticamente sofisticado, es un resultado que se podía esperar, pues el teorema H-G indica que un sistema no lineal se comporta localmente en torno a un equilibrio hiperbólico como su sistema lineal asociado. Puesto que en los modelos no lineales aparecen frecuentemente equilibrios tipo silla, el teorema de la variedad estable es una herramienta de mucha importancia en la medida que puede ser de interés que una trayectoria del modelo se dirija en el largo plazo hacia estos puntos de equilibrio.

Sea  $x^*$  un punto de equilibrio del sistema (3.2), y sean  $E^s$  y  $E^u$ , los subespacios estable e inestable del sistema lineal asociado  $x' = J(x^*)x$ . Definimos  $E^s(x^*)$  y  $E^u(x^*)$  como las traslaciones de  $E^s$  y  $E^u$ , respectivamente:

$$E^s(x^*) \triangleq E^s + x^*$$

$$E^u(x^*) \triangleq E^u + x^*.$$

Técnicamente, a  $E^s(x^*)$  y  $E^u(x^*)$  se les conoce como subespacios afines. Note que si  $x^* = 0$ , entonces  $E^s(x^*) = E^s$  y  $E^u(x^*) = E^u$ .

**Teorema 15. (Teorema de la variedad estable).** Sea  $x^*$  un punto de equilibrio hiperbólico del sistema (3.2), y sea  $\mathcal{U}$  un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  que contiene a  $x^*$ . Sea, además,  $F \in C^1(\mathcal{U})$  y  $x(t; t_0, x_0)$  la trayectoria correspondiente a la condición inicial  $x_0 = x(t_0)$ . Si  $x^*$  es un equilibrio tipo silla, entonces existen curvas diferenciables denotadas por  $W_{loc}^s(x^*)$

y  $W_{loc}^u(x^*)$ , que se llaman «variedades» y están definidas en una vecindad de  $x^*$  contenida en  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{N}(x^*) \subset \mathcal{U}$ . Las variedades  $W_{loc}^s(x^*)$  y  $W_{loc}^u(x^*)$  están caracterizadas de la siguiente manera:

- a)  $W_{loc}^s(x^*)$  y  $W_{loc}^u(x^*)$  son tangentes en el punto  $x^*$  a  $E^s(x^*)$  y  $E^u(x^*)$ , respectivamente.
- b)  $W_{loc}^s(x^*)$  y  $W_{loc}^u(x^*)$  están dadas por

$$W_{loc}^s(x^*) = \{x_0 \in \mathcal{N}(x^*); x(t; t_0, x_0) \in \mathcal{N}(x^*) \forall t \geq t_0, \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; t_0, x_0) = x^*\}$$

$$W_{loc}^u(x^*) = \{x_0 \in \mathcal{N}(x^*); x(t; t_0, x_0) \in \mathcal{N}(x^*) \forall t \leq t_0, \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t; t_0, x_0) = x^*\}.$$

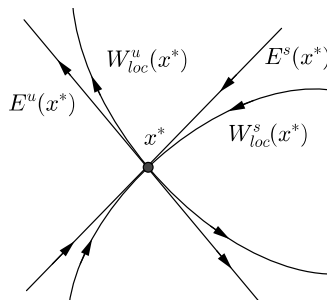


Figura 3.27  $W_{loc}^s(x^*)$  y  $W_{loc}^u(x^*)$

Las variedades  $W_{loc}^s(x^*)$  y  $W_{loc}^u(x^*)$  son, respectivamente, los conjuntos que hacen las veces de los subespacios  $E^s$  y  $E^u$  de los sistemas lineales. Como en el caso lineal, estos conjuntos son invariantes; es decir, para todo  $t$  se cumple que  $x(t)(W_{loc}^s(x^*)) \subset W_{loc}^s(x^*)$  y  $x(t)(W_{loc}^u(x^*)) \subset W_{loc}^u(x^*)$ . Además, las trayectorias que comienzan en dichos subespacios, o bien convergen, o bien divergen del equilibrio  $x^*$ . En general, calcular  $W_{loc}^s(x^*)$  y  $W_{loc}^u(x^*)$  es bastante complicado, salvo en casos específicos como en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo**

**Ej. 69.** El sistema

$$\begin{aligned}x_1' &= -4x_1 \\x_2' &= 2x_2 - 3x_1^2\end{aligned}$$

tiene por único equilibrio el punto  $x^* = (0, 0)$ . El sistema lineal asociado es

$$(SLA) : \quad x' = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x.$$

Puesto que los valores característicos de la matriz de coeficientes son  $\lambda_1 = -4$  y  $\lambda_2 = 2$ ,  $x^*$  es un equilibrio hiperbólico y, por el teorema H-G, se trata de un equilibrio inestable tipo silla. Los subespacios (afines) estable e inestable son

$$\begin{aligned}E^s(x^*) &= \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : u = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \rightarrow \text{Eje } X_1 \\E^u(x^*) &= \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : v = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \rightarrow \text{Eje } X_2.\end{aligned}$$

Dada la condición inicial  $x_0 = (x_{10}, x_{20})$ , la solución del sistema es

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x_{10}e^{-4t} \\x_2(t) &= \left( x_{20} - \frac{3}{10}x_{10}^2 \right) e^{2t} + \frac{3}{10}x_{10}^2 e^{-8t}.\end{aligned}$$

A partir de las soluciones obtenidas es claro que

$$\begin{aligned}W_{loc}^s(x^*) &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathcal{N}(0, 0); x_2 = \frac{3}{10}x_1^2 \right\} \\W_{loc}^u(x^*) &= \{ (x_1, x_2) \in \mathcal{N}(0, 0); x_1 = 0 \} = E^u(x^*).\end{aligned}$$

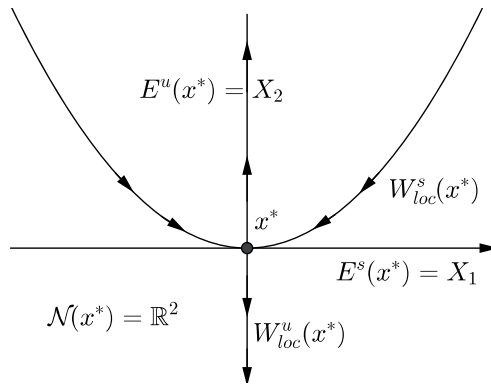


Figura 3.28  $W_{loc}^s(x^*)$  y  $W_{loc}^u(x^*)$

El diagrama de fases se muestra a continuación en la Figura 3.29.

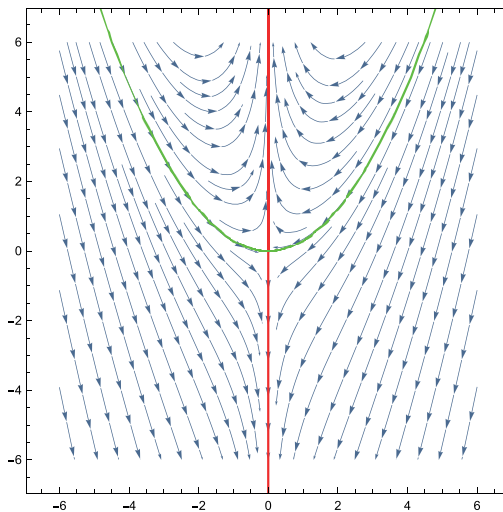


Figura 3.29 Diagrama de fases





**Ejemplo****Ej. 70. (Modelo de crecimiento neoclásico)**

El siguiente modelo de crecimiento económico, basado en el artículo «A mathematical theory of saving» que publicara Frank P. Ramsey en 1928 en *Economic Journal*, plantea un problema de optimización dinámica para determinar la trayectoria óptima de consumo de los individuos de tal manera que se maximice la utilidad agregada, es decir, el beneficio o la felicidad de las familias en un horizonte de tiempo infinito.<sup>12</sup>

A diferencia del modelo de Solow, estudiado en el capítulo 1, en este caso, el consumo se determina de manera endógena, de acuerdo con una trayectoria elegida con criterios de optimalidad.

En las hipótesis del modelo se considera una economía cerrada y sin intervención del Gobierno. Además, las familias valorizan más el consumo actual que el consumo futuro, por lo que se introduce una tasa de descuento  $\eta > 0$ , que trae a valor presente los beneficios futuros.<sup>13</sup> Se considera también que los individuos económicos son idénticos, por lo que poseen la misma función de utilidad, y que la tasa de crecimiento per cápita de la población es una constante exógena  $n$ . Toda la población trabaja, de manera que no hay distinción entre población y trabajadores. Finalmente, como en el modelo de Solow, se considera una función de producción neoclásica.

---

<sup>12</sup> Se asume que las familias son dinastías que de generación en generación viven un tiempo infinito.

<sup>13</sup> Ramsey visualizaba que era el Estado quien planteaba el modelo, por esto consideraba que la introducción de un factor de descuento era inapropiado y que expresaba una despreocupación por las generaciones futuras. El factor de descuento, sin embargo, es muy realista en la práctica, pero además juega un rol importante para la buena definición del problema de optimización.

A partir de estas consideraciones y siguiendo argumentos similares a los del modelo de Solow, se pueden plantear las siguientes ecuaciones que modelizan el problema:

$$Y(t) = C(t) + I(t), \quad (3.26)$$

$$I(t) = K'(t) + \delta K(t), \quad (3.27)$$

$$L(t) = e^{nt}L(0). \quad (3.28)$$

Las ecuaciones (3.26) y (3.27) indican la distribuciones de la renta e inversión, respectivamente. El factor  $\delta$  en (3.27) es la tasa de depreciación del capital. La ecuación (3.28) expresa un crecimiento de la población de tipo malthusiano. Combinando (3.26) y (3.27) y dividiendo entre la población  $L(t)$  se obtiene

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{C(t)}{L(t)} + \frac{K'(t)}{L(t)} + \frac{\delta K(t)}{L(t)},$$

lo que es equivalente a

$$y(t) = c(t) + \frac{K'(t)}{L(t)} + \delta k(t). \quad (3.29)$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} k'(t) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{K(t)}{L(t)} \right) = \frac{L(t)K'(t) - K(t)L'(t)}{(L(t))^2} \\ &= \frac{K'(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{L(t)} \frac{L'(t)}{L(t)} \\ &= \frac{K'(t)}{L(t)} - k(t)n. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Como la función de producción tiene rendimientos constantes a escala, entonces  $y(t) = f(k(t))$ . Así; reemplazando (3.30) en (3.29), se obtiene

$$k'(t) = f(k) - (n + \delta)k(t) - c(t).$$

La utilidad de cada individuo es función de su consumo,  $u = u(c)$ , y es razonable imponer que esta función sea creciente y cóncava; esto es,  $u'(c) > 0$  y  $u''(c) < 0$ , con las propiedades adicionales (condiciones de Inada)

$$\lim_{c \rightarrow 0} u'(c) = \infty, \quad \lim_{c \rightarrow \infty} u'(c) = 0.$$

Puesto que estamos asumiendo que todos los individuos tienen la misma función de utilidad, el funcional que se tiene que maximizar es

$$U = \int_0^{\infty} e^{-\eta t} u(c(t)) L(0) e^{nt} dt.$$

Normalizando la condición inicial  $L(0) = 1$  y haciendo  $\beta = \eta - n > 0$ , el funcional  $U$  queda expresado en la siguiente forma:<sup>14</sup>

$$U = \int_0^{\infty} e^{-\beta t} u(c(t)) dt.$$

Así pues, el problema de las familias se puede plantear como el siguiente problema de control óptimo:

$$\begin{aligned} \max_{c(t)} \quad & U = \int_0^{\infty} e^{-\beta t} u(c(t)) dt \\ \text{s.a :} \quad & k' = f(k) - (n + \delta)k - c \\ & k(0) = k_0 < \bar{k} \\ & 0 \leq c(t) \leq f(k). \end{aligned}$$

Aplicando el principio del máximo,<sup>15</sup> se puede establecer un sistema dinámico para las variables consumo,  $c$ , y capital,  $k$ .

$$k' = f(k) - (n + \delta)k - c \tag{3.31}$$

$$c' = -\frac{u'(c)}{u''(c)} \left( f'(k) - (n + \delta + \beta) \right). \tag{3.32}$$

<sup>14</sup> No es propósito de este ejemplo verificar que la integral es convergente, por lo que se puede asumir que sí lo es.

<sup>15</sup> El principio de máximo es una técnica estándar que permite resolver este tipo de problemas. Por ejemplo, el lector puede revisar "Optimización dinámica" de E. Cerdá (2001) para familiarizarse con esta herramienta.

Por sus características, las ecuaciones (3.31) y (3.32) solo pueden analizarse cualitativamente. De (3.31) y (3.32) se obtiene

$$k' = 0 \Leftrightarrow c(k) = f(k) - (n + \delta)k$$

$$c' = 0 \Leftrightarrow f'(k) = n + \delta + \beta.$$

La ecuación  $k' = 0$  induce la isoclina  $c(k) = f(k) - (n + \delta)k$ , que es la diferencia entre las curvas de producción y de depreciación. Esta diferencia crece desde cero hasta un nivel máximo  $k = \hat{k}$ . En este punto, las curvas de producción y de depreciación tienen la misma pendiente  $n + \delta$ , pues  $0 = c'(\hat{k}) = f'(\hat{k}) - (n + \delta)$ . A partir del nivel de capital  $\hat{k}$ , la diferencia entre estas curvas comienza a decrecer hasta llegar de nuevo a cero, cuando  $k = \bar{k}$ . Por otro lado, la ecuación  $c' = 0$  induce la isoclina  $c(k) = k^*$ . Observe que en este punto la pendiente de la curva de producción es  $f'(k^*) = n + \delta + \beta$ . Como  $\beta > 0$  y, para  $k = \hat{k}$ , la pendiente de  $f$  es  $n + \delta$ , entonces  $k^* < \hat{k}$ .

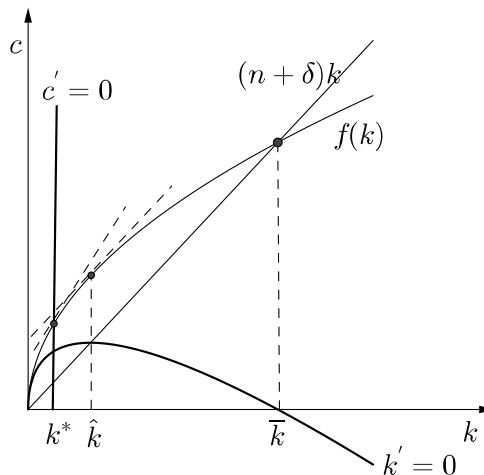


Figura 3.30 Isoclinas  $k' = 0$ ,  $c' = 0$

Las isoclinas obtenidas dividen el espacio de fases en cuatro zonas del plano  $k - c$ . El campo vectorial en cada una de estas zonas tiene una dirección horizontal, DH, o una dirección vertical, DV. Estas direcciones están determinadas por las siguientes relaciones:

$$DH : \begin{cases} k' > 0 & \Leftrightarrow c < f(k) - (n + \delta)k \\ k' < 0 & \Leftrightarrow c > f(k) - (n + \delta)k \end{cases}$$

$$DV : \begin{cases} c' > 0 & \Leftrightarrow f'(k) > n + \delta + \beta \\ c' < 0 & \Leftrightarrow f'(k) < n + \delta + \beta. \end{cases}$$

A continuación, la Figura 3.31 muestra el campo vectorial por regiones.

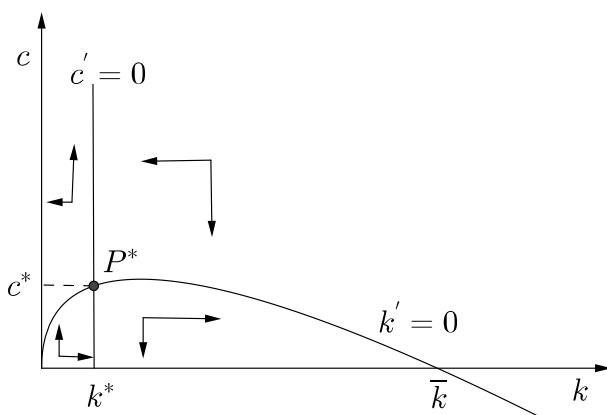


Figura 3.31 Campo vectorial

El campo vectorial sugiere que el punto de equilibrio  $P^* = (k^*, c^*)$  es inestable tipo silla. Verifiquemos esto con el teorema H-G.

$$J(P^*) = \begin{bmatrix} f'(k^*) - (n + \delta) & -1 \\ -\frac{u'(c^*)}{u''(c^*)} f''(k^*) & 0 \end{bmatrix}.$$

Como

$$|J(P^*)| = -\frac{u'(c^*)}{u''(c^*)} f''(k^*) < 0,$$

entonces  $J(P^*)$  posee dos valores característicos de diferentes signos, de donde, en efecto,  $P^*$  es un equilibrio tipo silla. Así pues, como se muestra en la Figura 3.32, el modelo tiene una variedad estable sobre la cual viven las únicas trayectorias que convergen al equilibrio  $P^*$ . Aunque conocemos de su existencia, en este caso no es posible encontrar con precisión dicha variedad.

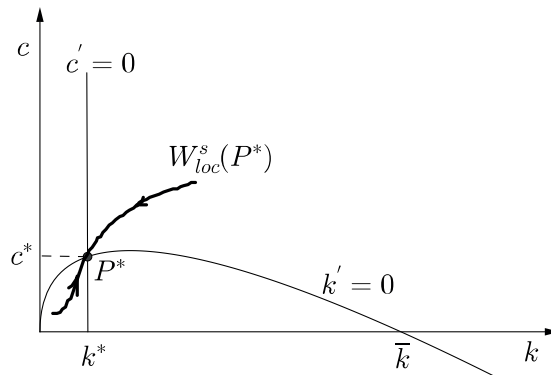


Figura 3.32 Variedad estable

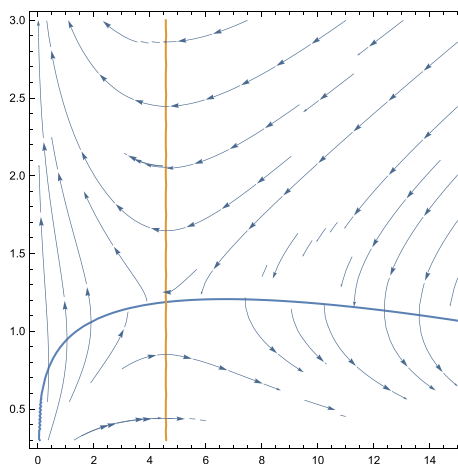


Figura 3.33 Diagrama de fases

### Conclusiones

El diagrama de fases muestra todas las soluciones del sistema (3.31)-(3.32); sin embargo, no todas ellas son trayectorias deseables desde el punto de vista económico. En efecto, el diagrama muestra que si el consumo se hace muy grande, entonces el capital se hace muy pequeño, casi insignificante; lo que no es conveniente para la producción. Al contrario, si el capital se hace muy grande, el consumo se vuelve insignificante; lo que no es deseable para los individuos. En el largo plazo, todas las trayectorias del modelo tenderán a estas dos situaciones, salvo aquellas trayectorias que se ubiquen en la variedad estable  $W_{loc}^s(P^*)$ .

### LISTA DE EJERCICIOS

**3.3.1.** En cuanto al modelo de Ramsey, observe que la economía puede converger al punto de equilibrio desde una posición situada por encima o por debajo del punto de equilibrio, de acuerdo con el valor del capital inicial en relación con el valor de equilibrio  $k^*$ . ¿Dónde y por qué sería más conveniente colocar el capital inicial  $k_0$ ?

**3.3.2.** Con respecto a los sistemas que se dan a continuación, haga el diagrama de fase y esboce la curva  $W_{loc}^u(P^*)$ , donde  $P^*$  es el punto de equilibrio.

a)

$$x_1' = x_1 - x_2^3$$

$$x_2' = -2x_2$$

b)

$$x_1' = x_2^2 - x_1$$

$$x_2' = -x_2$$

Parte II

**TIEMPO DISCRETO**





# Capítulo 4

## Sistemas dinámicos discretos

### 4.1. Introducción

Un sistema dinámico discreto es aquel en el cual la variable temporal  $t$  varía en un conjunto contable. Específicamente, nosotros consideraremos que  $t$  vive en  $\mathbb{Z}_0^+$ . Los sistemas dinámicos discretos también se conocen como sistemas o ecuaciones en diferencia. La diferencia entre dos instantes consecutivos del tiempo determinan un período. Esto permite modelar la dinámica de muchas variables económicas de interés que se miden de período en período. La teoría de los sistemas dinámicos discretos es análoga a la teoría continua, y muchos resultados de esta tienen su correspondiente versión discreta.

Este capítulo tiene tres secciones. En la sección 4.2 se introducen las ecuaciones en diferencia lineales de primer orden. Se analizan primero las ecuaciones escalares, es decir, ecuaciones donde la variable de estado vive en  $\mathbb{R}$ . La extensión del caso escalar al multidimensional se hace en la sección 4.3, donde se analizan específicamente los sistemas de dimensión 2 y, como una aplicación de estos, se analizan también las ecuaciones en

diferencia de segundo orden.

## 4.2. Ecuaciones lineales de primer orden

**Definición 19.** Una ecuación en diferencias lineal, escalar y de primer orden es una expresión de la forma

$$\boxed{x(t+1) = ax(t) + f(t)} \quad (4.1)$$

donde  $t \in \mathbb{Z}_0^+$ ,  $x = x(t) \in \mathbb{R}$  es la variable de estado y  $f = f(t) \in \mathbb{R}$  es una función cualquiera.

Si  $x = x(t)$  es una solución de la ecuación (4.1), entonces para la condición inicial  $x(0) = x_0$  obtenemos

$$\begin{aligned} x(1) &= ax_0 + f(0) \\ x(2) &= ax(1) + f(1) \\ &= a(ax_0 + f(0)) + f(1) \\ &= a^2x_0 + af(0) + f(1) \\ x(3) &= ax(2) + f(2) \\ &= a(a^2x_0 + af(0) + f(1)) + f(2) \\ &= a^3x_0 + a^2f(0) + af(1) + f(2). \end{aligned}$$

Por inducción se puede establecer la siguiente expresión para  $x(t)$  en cualquier instante  $t$ :

$$\boxed{x(t) = a^t x_0 + \sum_{k=1}^t a^{t-k} f(k-1); \quad t = 1, 2, \dots} \quad (4.2)$$

Así pues, si  $x(t)$  es una solución de la ecuación, esta debe tener la forma dada en (4.2).

Ahora bien, si  $x = x(t)$  es de la forma (4.2); entonces, reemplazando en (4.1), se verifica que  $x$  es una solución de la ecuación (4.1). En efecto,

$$\begin{aligned} x(t+1) &= a^{t+1}x_0 + \sum_{k=1}^{t+1} a^{t+1-k} f(k-1) \\ &= a^{t+1}x_0 + \sum_{k=1}^t a^{t+1-k} f(k-1) + f(t) \\ &= a \left( a^t x_0 + \sum_{k=1}^t a^{t-k} f(k-1) \right) + f(t) \\ &= ax(t) + f(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto, (4.2) es la única solución de la ecuación (4.1).

Como en el caso continuo, a una solución de la ecuación (4.1) también se le llama «trayectoria solución» y su gráfica es un conjunto de puntos espaciados en el plano, como se muestra en la Figura 4.1.

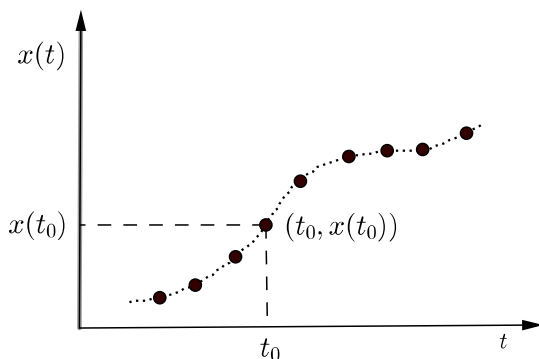


Figura 4.1 Trayectorias solución

Si en (4.1) se toma  $f \equiv 0$ , se obtiene la ecuación homogénea

$$\boxed{x(t+1) = ax(t)} \quad (4.3)$$

De acuerdo con (4.2), la trayectoria solución para la condición inicial  $x(0) = x_0$  es

$$\boxed{x(t) = a^t x_0, \quad t = 0, 1, \dots} \quad (4.4)$$

Por otro lado, si  $f(t) = b$  para todo  $t$ , la ecuación es

$$\boxed{x(t+1) = ax(t) + b} \quad (4.5)$$

En este caso, de (4.2) se tiene

$$\begin{aligned} x(t) &= a^t x_0 + \sum_{k=1}^t a^{t-k} b \\ &= a^t x_0 + (1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{t-1})b \end{aligned}$$

Si  $a \neq 1$ , entonces

$$x(t) = a^t x_0 + \left( \frac{1 - a^t}{1 - a} \right) b. \quad (4.6)$$

Reordenando, se obtiene

$$\boxed{x(t) = a^t \left( x_0 - \frac{b}{1 - a} \right) + \frac{b}{1 - a}} \quad (4.7)$$

Si  $a = 1$ , entonces

$$x(t) = x_0 + \underbrace{(1 + 1 + 1 + \dots + 1)}_{t \text{ veces}} = x_0 + bt. \quad (4.8)$$

Observe que la expresión (4.7) es similar a aquella dada en (1.15), que proporciona la solución de la versión continua de la ecuación (4.1).

Como en el caso continuo, una solución de equilibrio de (4.5), o simplemente un equilibrio, es una solución constante de la ecuación. Igual que en el caso continuo, un equilibrio se denotará por  $x^*$ .

La solución de equilibrio de la ecuación (4.5) con  $a \neq 1$  es

$$x^* = \frac{b}{1-a}. \tag{4.9}$$

En efecto, si  $x(t) = x^*$  para todo  $t$ , entonces

$$x^* = ax^* + b \Leftrightarrow x^* = b/(1-a).$$

Teniendo en cuenta (4.7), la solución de (4.5) puede escribirse como

$$x(t) = a^t(x_0 - x^*) + x^* \tag{4.10}$$

**Ejemplo**

**Ej. 71.**

$$x(t+1) = \frac{3}{4}x(t) + 2, \quad x(0) = x_0$$

Puesto que  $a = 3/4$  y  $b = 2$ ,  $x^* = 8$ . Luego, la solución es

$$x(t) = \left(\frac{3}{4}\right)^t (x_0 - 8) + 8.$$

A continuación, la Figura 4.2 muestra las correspondientes trayectorias solución para diversas condiciones iniciales.

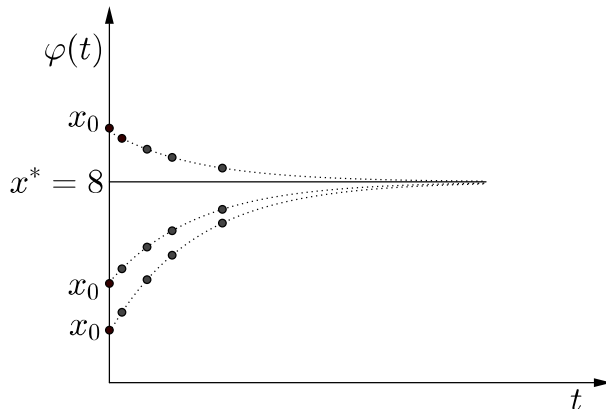


Figura 4.2 Trayectorias para distintas condiciones iniciales



Esencialmente, existen dos situaciones típicas para el comportamiento de la trayectoria dada en (4.10): una de ellas es cuando  $|a| < 1$  y la otra cuando  $|a| > 1$ . En el primer caso, puesto que la trayectoria converge de forma monótona al punto de equilibrio, diremos que este es asintóticamente estable. Observe que este comportamiento de la trayectoria es para cualquier condición inicial y, por lo tanto, el equilibrio es en realidad globalmente asintóticamente estable. En el segundo caso, de (4.10) se observa que, para cualquier condición inicial, salvo el propio punto de equilibrio, la trayectoria correspondiente se aleja del equilibrio, diverge de él. En esta situación diremos que el equilibrio es inestable. La relación entre  $x^*$  y el parámetro  $a$  es la siguiente:

$$x^* \text{ es estable} \Leftrightarrow |a| < 1$$

En el ejercicio 4.2.1 se pide analizar el comportamiento de las trayectorias en función del parámetro  $a$ .

### Ejemplos

#### Ej. 72. (Modelo de la telaraña)

Este modelo está basado en la relación estática entre la oferta y la demanda de un bien. El modelo deriva su nombre de la forma en que se va trazando la trayectoria del precio a medida que transcurre el tiempo.<sup>1</sup>(véase la Figura 4.4). Supongamos que la demanda y la oferta de un bien es lineal con respecto a su precio. Denotando por  $D(t)$ ,  $S(t)$  y  $p(t)$ , la demanda, la oferta y el precio, respectivamente, el modelo es

$$D(t) = a + bp(t), \quad (4.11)$$

$$S(t) = c + dp(t - 1). \quad (4.12)$$

<sup>1</sup> Según Waugh (1964) al parecer fue Kaldor quien en 1934 fue el primero en llamar «telaraña» a este modelo.

Los parámetros  $b$  y  $d$ , que denotan las pendientes de la demanda y la oferta, son tales que  $b < 0$  y  $d > 0$ . El signo negativo de  $b$  refleja el hecho de que la demanda de un bien disminuye cuando aumenta su precio y, por el contrario, el signo positivo de  $d$  refleja el hecho de que la oferta de un bien aumenta cuando aumenta el precio. La lógica de la ecuación para la oferta es la siguiente. El instante actual  $t$  corresponde al final del período  $t$ . En este instante, la cantidad que el productor decide producir se basa en la observación del precio del final del período anterior, cuando el precio era  $p(t - 1)$ . Los productores consideran que dicho precio se mantendrá hasta el final del período  $t$ , momento en el que el precio se actualiza de acuerdo con la oferta y la demanda. Esta lógica se muestra en el siguiente esquema:

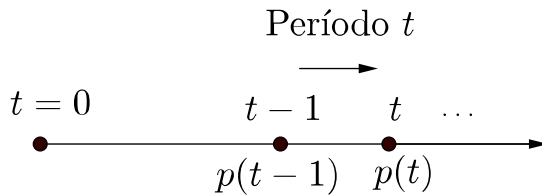


Figura 4.3 Esquema lógico de la oferta

Si el mercado absorbe toda la oferta; es decir, si la demanda coincide con la oferta, se tiene una situación de *equilibrio económico*;<sup>2</sup> esto es,  $D(t) = S(t)$ . Así pues, de (4.11) y (4.12) se obtiene la siguiente dinámica para el precio de equilibrio económico:

$$p(t + 1) = (d/b)p(t) + (c - a)/b.$$

Aplicando (4.10), la trayectoria del precio está dada por

$$p(t) = \left(\frac{d}{b}\right)^t (p_0 - p^*) + p^*,$$

<sup>2</sup> Enfatizamos la expresión «equilibrio económico» para distinguirla de la noción de equilibrio matemático.



donde  $p^* = (c - a)/(b - d)$ .

Observe que la trayectoria del precio es oscilante, pues  $d/b < 0$ . Además, es explosiva si  $|d| > |b|$  y, al contrario, es convergente (al precio de equilibrio) si  $|d| < |b|$ . Así, tenemos el siguiente resultado:

$$p^* \text{ es estable} \Leftrightarrow |d| < |b|.$$

A continuación, la Figura 4.4 muestra el caso de una trayectoria convergente.

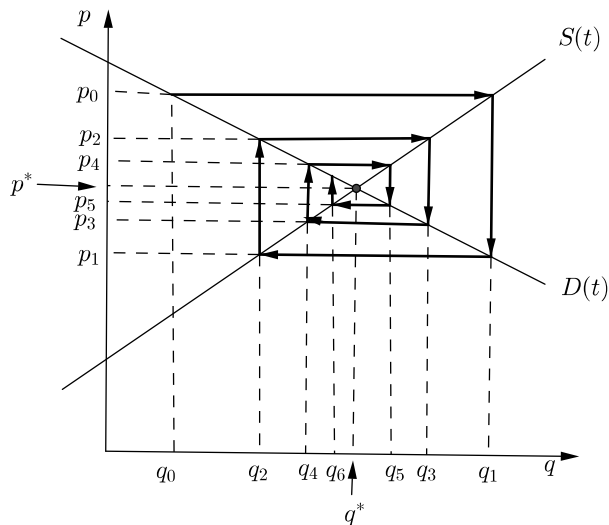


Figura 4.4 Modelo de telaraña

### Ej. 73. (Modelo de crecimiento del multiplicador-acelerador)

Sean  $Y(t)$ ,  $I(t)$  y  $S(t)$  la renta, la inversión y el ahorro nacional en el período  $t$ , respectivamente. Las siguientes ecuaciones constituyen un modelo dinámico simple (sin gastos del Gobierno, ni vínculos con el exterior). El ahorro es una proporción de la renta y la inversión en capital es proporcional a la variación de la renta en dos períodos consecutivos.

Bajo estas consideraciones, podemos plantear las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} S(t) &= \alpha Y(t), \quad 0 < \alpha < 1 \\ I(t+1) &= \beta(Y(t+1) - Y(t)), \quad 0 < \beta < 1 \\ S(t) &= I(t). \end{aligned}$$

La tercera ecuación es una consecuencia de las hipótesis del modelo y se conoce como condición de equilibrio. A partir de estas tres ecuaciones, puede encontrarse fácilmente una ecuación dinámica para el comportamiento de la trayectoria de la renta de período en período. En efecto, por la condición de equilibrio e igualando la primera con la segunda ecuación se obtiene

$$Y(t+1) = \frac{\beta}{\beta - \alpha} Y(t).$$

De aquí, específicamente para la condición inicial  $Y(0) = Y_0$ , se obtiene

$$Y(t) = \left( \frac{\beta}{\beta - \alpha} \right)^t Y_0, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

De (4.13) se deduce que para tener un crecimiento sostenido de la renta debemos exigir que  $\alpha < \beta$ . La tasa porcentual de crecimiento, denotada por  $\gamma_Y$ , es constante y está dada por

$$\gamma_Y = \frac{Y(t+1) - Y(t)}{Y(t)} = \frac{\alpha}{\beta - \alpha}.$$

#### **Ej. 74. (Acumulación compuesta de capital)**

Sea  $m(t)$  el capital de un individuo al final del período  $t$ . Si la tasa de interés es  $r > 0$ , entonces la acumulación de este capital está dada por la siguiente ecuación:

$$m(t+1) = (1+r)m(t) + d(t+1) - e(t+1), \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

donde  $d(t+1)$  y  $e(t+1)$  son, respectivamente, el depósito y la extracción sobre su cuenta que hace este individuo durante el período  $t+1$ . Para la condición inicial  $m(0) = m_0$ , de acuerdo con (4.2), la trayectoria del capital acumulado es

$$m(t) = (1+r)^t m_0 + \sum_{k=1}^t (1+r)^{t-k} (d(k) - e(k)), \quad t = 1, 2, \dots$$

Sea  $n(k) = d(k) - e(k)$  el depósito neto; esto es, la diferencia entre lo que se deposita y se extrae en cada período. Entonces,

$$m(t) = (1+r)^t m_0 + \sum_{k=1}^t (1+r)^{t-k} n(k), \quad t = 1, 2, \dots$$

Puesto que  $1+r > 1$ , la expresión anterior indica que si el depósito neto es positivo, entonces el monto acumulado va creciendo de período en período.



### LISTA DE EJERCICIOS

**4.2.1.** Como hemos visto, si  $x^*$  es el equilibrio de la ecuación  $x(t+1) = ax(t) + b$ , la trayectoria solución está dada por la expresión

$$\varphi(t) = a^t(x_0 - x^*) + x^*.$$

Analice el comportamiento de las trayectorias en cada uno de los siguientes casos:

- a)  $-1 < a < 0$
- b)  $0 < a < 1$
- c)  $a < -1$
- d)  $a > 1$

En cada caso grafique la trayectoria correspondiente.

**4.2.2.** Para las ecuaciones que se dan a continuación, encuentre los equilibrios, analice su estabilidad y trace algunas trayectorias para diversas condiciones iniciales:

a)  $\frac{1}{2}x(t+1) - 2x(t) = 4$

b)  $2x(t+1) = -3x(t) - 2$

c)  $x(t+1) - \frac{1}{4}x(t) + 3 = 0$

**4.2.3.** Dadas las funciones de demanda  $Q(t) = 30 - 2p(t)$  y de oferta  $S(t) = -6 + 4p(t - 1)$ , determine la trayectoria del precio  $p(t)$  considerando  $p(0) = 4$ .

**4.2.4.** Resuelva la ecuación

$$x(t+1) = \frac{2}{3}x(t) + y(t)$$

sabiendo que  $y(t)$  cumple la relación  $y(t+1) = \frac{2}{3}y(t)$ .

**4.2.5.** Obtenga y analice el modelo discreto de crecimiento poblacional de Malthus. Para esto, suponga una tasa de crecimiento constante per cápita igual a  $r$ .

## 4.3. Sistemas lineales de ecuaciones en diferencia

**Definición 20.** Un sistema lineal de ecuaciones en diferencias de primer orden y de dimensión  $n$  es una ecuación de la forma

$$x(t+1) = Ax(t), \tag{4.14}$$

donde  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  y  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  para todo  $t$ .

Procediendo de manera similar al caso escalar, dada la condición inicial  $x(0) = x_0$ , la solución de (4.14) está dada por la expresión

$$\boxed{x(t) = A^t x_0, \quad t = 0, 1, \dots} \quad (4.15)$$

La potencia  $A^t$  de (4.15) hace las veces de la exponencial  $e^{At}$  del caso continuo. Para obtener una fórmula cerrada de la expresión  $A^t$ , aplicamos el teorema de Jordan, tal como se hizo en el caso continuo:

$$A = PJP^{-1} \Rightarrow A^t = PJ^tP^{-1}.$$

Para  $n = 2$ , el producto  $PJP^{-1}$  tiene básicamente las siguientes formas:

$$P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} P^{-1}, \quad P \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}, \quad P \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Ahora bien, por inducción, se prueba fácilmente que

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow J^t = \begin{bmatrix} \lambda_1^t & 0 \\ 0 & \lambda_2^t \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow J^t = \begin{bmatrix} \lambda^t & t\lambda^{t-1} \\ 0 & \lambda^t \end{bmatrix}.$$

En cuanto al tercer caso, este es más elaborado. Veamos, sea

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}; \quad \cos \theta = \alpha/\rho; \quad \sin \theta = \beta/\rho.$$

Por consiguiente,

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Así, por inducción se obtiene

$$J^t = \rho^t \begin{bmatrix} \cos t\theta & -\sin t\theta \\ \sin t\theta & \cos t\theta \end{bmatrix}.$$

Veamos el siguiente ejemplo.

### **Ejemplo**

**Ej. 75.** Consideremos el sistema

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 1.$$

Los valores característicos son  $\lambda_1 = 2$  y  $\lambda_2 = 3$ . Así,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^t & 0 \\ 0 & 3^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2^t + 2 \cdot 3^t & 2^t - 3^t \\ -2^{t+1} + 2 \cdot 3^t & 2^{t+1} - 3^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$x_1(t) = -2^t + 2 \cdot 3^t + 2^t - 3^t = 3^t$$

$$x_2(t) = -2 \cdot 2^t + 2 \cdot 3^t + 2 \cdot 2^t - 3^t = 3^t.$$

De aquí se deduce que la trayectoria  $x(t)$  vive sobre la recta  $\mathcal{L} : y = x$ .

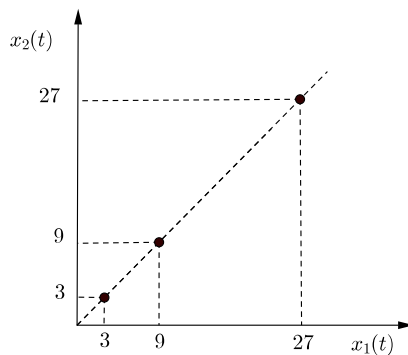


Figura 4.5 Trayectoria solución



EL CASO NO HOMOGÉNEO

Consideremos el sistema no homogéneo

$$\boxed{x(t+1) = Ax(t) + b, \quad A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \quad b \neq 0} \quad (4.16)$$

Note que si  $1 \notin \sigma(A)$ , entonces  $A - I$  es una matriz inversible. Procediendo como en el caso escalar tenemos

$$x(t) = A^t x_0 + \left( \sum_{k=1}^t A^{t-k} \right) b. \quad (4.17)$$

Ahora,

$$\left( \sum_{k=1}^t A^{t-k} \right) (A - I) = A^t - I,$$

de manera que

$$\sum_{k=1}^t A^{t-k} = (A^t - I)(A - I)^{-1}.$$

Reemplazando esta expresión en (4.17), se obtiene

$$x(t) = A^t x_0 + (A^t - I)(A - I)^{-1} b. \quad (4.18)$$

La solución de equilibrio del sistema es

$$x^* = -(A - I)^{-1} b. \quad (4.19)$$

Reemplazando (4.19) en (4.18), la solución de (4.16) se puede escribir así:

$$\boxed{x(t) = A^t(x(0) - x^*) + x^*} \quad (4.20)$$

**Ejemplo**

**Ej. 76.** Consideremos la siguiente versión no homogénea del ejemplo 75:

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como  $1 \notin \sigma(A)$ , entonces  $A - I$  es inversible. Aplicando (4.19), se obtiene

$$x^* = -(A - I)^{-1}b = - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente, de (4.20), la trayectoria solución viene dada por

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2^t + 2 \cdot 3^t & 2^t - 3^t \\ -2^{t+1} + 2 \cdot 3^t & 2^{t+1} - 3^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) - 1/2 \\ x_2(0) - 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

◇◇◇

### Análisis cualitativo

Hemos visto que si  $1 \notin \sigma(A)$ , entonces la solución del sistema (4.16) está dada por (4.20), donde  $x^* = -(A - I)^{-1}b$ . Nos preguntamos bajo qué condiciones la trayectoria  $x(t)$  converge a la solución de equilibrio  $x^*$ . Para analizar esta convergencia, tomemos el caso más simple: cuando  $n = 2$ . En este caso, como sabemos, la matriz  $A^t = PJ^tP^{-1}$  tiene tres formas específicas que dependen básicamente de la matriz  $J$ . Teniendo esto en cuenta, se obtiene el siguiente resultado.<sup>3</sup>

**Teorema 16.** Sea  $A$  una matriz en  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  con radio espectral  $\rho$  y sea  $c$  una constante cualquiera. Entonces,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} A^t c = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \rho < 1.$$

En el caso del ejemplo anterior, el radio espectral es  $\rho = 3$ , de manera que la trayectoria solución diverge del equilibrio.

### ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN

Una ecuación en diferencias lineal, de segundo orden y de coeficiente constante es una expresión de la forma

<sup>3</sup> Este resultado se cumple para cualquier dimensión.



$$\boxed{x(t+2) = ax(t+1) + bx(t) + c(t), \quad b \neq 0} \quad (4.21)$$

Como en el caso continuo, para resolver esta ecuación introducimos variables de estado para convertir la ecuación en un sistema lineal de orden  $2 \times 2$ . Veamos el siguiente ejemplo.

### **Ejemplo**

**Ej. 77.** Consideremos la siguiente ecuación:

$$x(t+2) = 2x(t+1) + 3x(t) + 2; \quad x(0) = 1/2, \quad x(1) = -1/2.$$

Introduciendo las variables de estado

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= x(t+1), \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x(t+1) = 0x_1(t) + 1x_2(t) \\ x_2(t+1) &= x(t+2) = 2x(t+1) + 3x(t) + 2 \\ &= 3x_1(t) + 2x_2(t) + 2. \end{aligned}$$

Este par de ecuaciones es equivalente al sistema

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

que es de la forma (4.16).

Los valores característicos de la matriz de coeficientes son  $\lambda_1 = 3$  y  $\lambda_2 = -1$ . Para obtener la solución explícita, necesitamos calcular la matriz de cambio de base  $P$ . Con los valores característicos obtenidos

calculamos los correspondientes vectores característicos para formar la matriz  $P$ .

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

La solución de equilibrio es

$$x^* = -(A - I)^{-1}b = - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

Puesto que  $|\lambda_1| > 1$  y  $|\lambda_2| > 1$ , de acuerdo con el teorema 16, el sistema diverge del equilibrio. Como  $x_1(0) = x(0) = 1/2$  y  $x_2(0) = x(1) = -1/2$ ; entonces, de acuerdo con (4.20), la solución del sistema está dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= P \begin{bmatrix} 3^t & 0 \\ 0 & (-1)^t \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) + 1/2 \\ x_2(0) + 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{3^t + 3(-1)^t}{4} \\ a_{12} &= \frac{3^t - (-1)^t}{4} \\ a_{21} &= \frac{3^{t+1} - 3(-1)^t}{4} \\ a_{22} &= \frac{3^{t+1} + (-1)^t}{4}. \end{aligned}$$

Específicamente, la solución de la ecuación escalar es

$$x(t) = x_1(t) = \frac{3^t + 3(-1)^t}{4} - \frac{1}{2}.$$

Observe que la solución de equilibrio de la ecuación escalar original es  $-1/2$ , de manera que este equilibrio no es estable, pues la solución dada diverge de él.



### LISTA DE EJERCICIOS

**4.3.1.** Encuentre  $x(t)$  para cada uno de los siguientes sistemas:

$$\text{a) } x(t+1) = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x(t), \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } x(t+1) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x(t), \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } x(t+1) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} x(t), \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} x(t), \quad x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{e) } x(t+1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t), \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

**4.3.2.** Analice la estabilidad de los sistemas del ejercicio 4.3.1.

**4.3.3.** Resuelva las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } x(t+2) - 3x(t+1) = -2x(t)$$

$$\text{b) } x(t+2) = 2x(t+1) - 3x(t) + 2$$

$$\text{c) } x(t+2) = 3x(t+1) + 2x(t) + 1$$

**4.3.4.** En una determinada población se observa que del primer al segundo año la población crece de 120 a 130 individuos, y que cada año se duplica el crecimiento del año anterior y se añaden 20 individuos foráneos. Encuentre y analice la trayectoria de la población.

**4.3.5.** En el caso general, dada la ecuación

$$x(t+2) = ax(t+1) + bx(t),$$

el sistema correspondiente, en términos de las variables de estado, es

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

La ecuación característica de la matriz de coeficientes es

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0,$$

de donde

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b}.$$

Deduzca las soluciones que se dan a continuación de acuerdo con el valor del discriminante  $\Delta = a^2 + 4b$ .

a) Si  $\Delta > 0$ , entonces  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .

$$x(t) = C_1\lambda_1^t + C_2\lambda_2^t, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$$

b) Si  $\Delta = 0$ , entonces  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ .

$$x(t) = C_1\lambda^t + C_2t\lambda^t, \quad \lambda = \frac{1}{2}a$$

c) Si  $\Delta < 0$ , entonces  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ .

$$x(t) = \rho^t(C_1 \cos \theta t + C_2 \sin \theta t)$$

Como  $\alpha = \frac{1}{2}a$  y  $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$ , entonces

$$\rho = \sqrt{b}, \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{a}, \quad \theta \in [0, \pi].$$

## 4.4. Una aplicación interesante

En esta sección vamos a estudiar brevemente las cadenas de Markov, que constituyen una oportunidad interesante para poner en práctica algunos de los conceptos de la teoría de los sistemas dinámicos discretos que hemos venido estudiando.

Las cadenas de Markov se utilizan ampliamente en diversos contextos, pues sus propiedades fundamentales son muy adecuadas para modelar dinámicas que ocurren frecuentemente en la práctica, esto es, dinámicas donde el futuro solo depende del pasado inmediato. La literatura sobre cadenas de Markov es muy vasta;<sup>4</sup> aquí solo haremos una breve introducción, para lo cual solo se requiere del lector conocimientos básicos sobre teoría de la probabilidad.

Para definir una cadena de Markov, introduzcamos primero el conjunto finito  $\mathcal{S} \triangleq \{1, 2, \dots, N\}$ , que llamaremos «espacio de estados». A cada elemento  $i \in \mathcal{S}$  se le conoce como un estado de la cadena.

**Definición 21.** Sea  $A = [a_{ij}], i, j \in \mathcal{S}$  una matriz cuadrada con valores en  $\mathbb{R}$ . Se dice que  $A$  es una matriz estocástica (por filas)<sup>5</sup> si se cumplen las siguientes dos condiciones:

- a)  $a_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{S}$
- b)  $\sum_{j \in \mathcal{S}} a_{ij} = 1, \quad \forall i \in \mathcal{S}$

### Ejemplo

<sup>4</sup> Una buena introducción al tema es el clásico libro de Kemeny y Snell (1976).

<sup>5</sup> De manera similar, también se puede definir una matriz estocástica por columnas o doblemente estocástica cuando la matriz es estocástica tanto por filas como por columnas. Aquí solo consideramos matrices estocásticas por filas.

**Ej. 78.** Mientras que las matrices  $A$  y  $B$  son matrices estocásticas, la matriz  $C$  no lo es, pues la suma de las entradas de la tercera fila es mayor que 1.

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0 & 0.8 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

◇◇◇

Sea  $x = \{x(0), x(1), x(2), \dots\}$  un conjunto infinito de variables aleatorias definidas sobre cierto espacio de probabilidad. Para cada  $t = 0, 1, 2, \dots$ , la variable  $x(t)$  puede tomar con cierta probabilidad un único valor en el espacio de estados  $\mathcal{S}$ . Al conjunto de variables aleatorias  $x$  se le llama «proceso estocástico» y  $x(t)$  representa al proceso en el instante  $t$ . La probabilidad de que la variable  $x(t)$  tome el valor  $i \in \mathcal{S}$  se denota por  $p_i(t)$ ; esto es,

$$p_i(t) \triangleq \Pr(x(t) = i), \quad i \in \mathcal{S}.$$

El vector  $\pi(t) = (p_1(t), \dots, p_N(t))$  se llama «vector de distribución de probabilidad de la variable  $x(t)$ » o, también, «distribución del proceso estocástico en el instante  $t$ ». En particular, el vector  $\pi(0) = (p_1(0), \dots, p_N(0))$  es la «distribución inicial» del proceso y lo denotaremos simplemente por  $\pi_0$ .

La probabilidad de que el proceso  $x$  salte del estado  $i$  en el instante  $t$  al estado  $j$  en el instante  $t+1$  se denota por  $p_{ij}(t)$  y se define explícitamente por la siguiente probabilidad condicional:

$$p_{ij}(t) \triangleq \Pr(x(t+1) = j | x(t) = i), \quad i, j \in \mathcal{S}.$$

Fijando  $t$  y tomando  $i, j$  en  $\in \mathcal{S}$ , las probabilidades presentadas definen una matriz estocástica conocida como «matriz de transición de probabilidades del proceso  $x$ ». Si estas probabilidades de salto de un estado a otro no dependen del instante en que se observen, entonces se dice que el proceso es homogéneo. Denotaremos la matriz de transición de probabilidades del proceso homogéneo  $x$  por  $\Pi$ :

$$\Pi = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix}.$$

Puesto que  $\Pi$  es una matriz estocástica, para cada  $i = 1, \dots, n$  se tiene  $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$ .

Si se cumple que en cada instante el futuro del proceso  $x$  no depende de toda su historia pasada, sino solo del pasado inmediato, se dice que el proceso es una cadena de Markov. Más exactamente, si  $i, j, \dots, r$  y  $s$  son diversos estados del proceso  $x$ , se dice que  $x$  es una cadena de Markov homogénea si se cumple

$$\begin{aligned} \Pr(x(t+1) = j | x(t) = i, \dots, x(1) = r, x(0) = s) \\ &= \Pr(x(t+1) = j | x(t) = i) \\ &= p_{ij}. \end{aligned}$$

Los elementos que determinan una cadena de Markov son el espacio de estados  $\mathcal{S}$ , el vector de distribución inicial  $\pi_0$  y la matriz de transición de probabilidades  $\Pi = (p_{ij})_{N \times N}$ .

Con la notación introducida y debido al teorema de la probabilidad total,  $p_j(t+1) = \Pr(x(t) = j)$  se puede calcular como sigue:

$$\begin{aligned}
 p_j(t+1) &= p_{1j}p_1(t) + p_{2j}p_2(t) + \cdots + p_{Nj}p_N(t) \\
 &= \sum_{i=1}^N p_i(t)p_{ij}, \quad j \in \mathcal{S}.
 \end{aligned}$$

Esta ecuación se puede escribir de manera más compacta como un sistema lineal de ecuaciones en diferencias:

$$\boxed{\pi(t+1) = \pi(t)\Pi} \tag{4.22}$$

Tomando transpuesta, esta ecuación adquiere la forma (4.14) con  $A = \Pi^T$ . La trayectoria del vector de estado  $\pi(t)$  viene dada por

$$\pi(t) = \pi(0)\Pi^t, \quad t = 0, 1, \dots \tag{4.23}$$

Nos interesa saber cómo se comporta la cadena de Markov en el largo plazo. Para esto habría que estudiar qué sucede en el infinito con el vector de distribución de probabilidades  $\pi(t)$ , sujeto a la dinámica dada por la ecuación (4.22). Por lo que hemos venido estudiando, sabemos que la respuesta a esta cuestión implica básicamente estudiar la matriz  $\Pi$ . Sin embargo, en este caso, por ser  $\Pi$  una matriz estocástica, hay algunas particularidades que merecen tomarse en cuenta. Veamos.

Sea  $p_{ij}^{(t)} = \Pr(x(t) = j | x(0) = i)$  la probabilidad de salto del estado  $i$  al estado  $j$  en  $t$  pasos, y denotemos por  $\Pi^{(t)}$  la matriz que contiene estas probabilidades. Puede probarse que esta matriz también se obtiene a partir de la  $t$ -ésima potencia de la matriz  $\Pi$ ; esto es,

$$\boxed{\Pi^{(t)} = \Pi^t}$$

De esta igualdad se deduce de inmediato la «ecuación de Chapman-Kolmogorov»:

$$\boxed{\Pi^{(t_1+t_2)} = \Pi^{(t_1)}\Pi^{(t_2)}}$$

La siguiente definición es fundamental en la teoría de las cadenas de Markov.



**Definición 22.** La cadena de Markov  $x$  con espacio estado  $\mathcal{S}$  y matriz de transición de probabilidad  $\Pi$  se llama «ergódica» si los límites

$$p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^{(t)}$$

- a) Existen para todo  $j \in \mathcal{S}$
- b) Son independientes de  $i \in \mathcal{S}$
- c) Forman un vector de distribución de probabilidades  $\pi_s = (p_1, \dots, p_N)$ ; esto es,  $\sum_{j \in \mathcal{S}} p_j = 1$

El vector  $\pi_s$  definido en c) se conoce en la literatura como «vector estacionario». Una cadena de Markov es ergódica si en el largo plazo su distribución se estaciona alrededor del vector  $\pi_s$ .

Se dice que una matriz  $A$  es casi-positiva si existe  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $A^n$  tiene todas sus entradas positivas. El siguiente resultado proporciona condiciones necesarias y suficientes para que una cadena de Markov sea ergódica. Este resultado, cuya demostración escapa del propósito introductorio de esta sección, está relacionado con el carácter positivo de la matriz de transición.

**Teorema 17.** Sea  $x$  una cadena de Markov homogénea con matriz de transición de probabilidad  $\Pi$  y espacio de estados  $\mathcal{S}$ . Entonces,  $x$  es ergódica si y solamente si  $\Pi$  es casi-positiva.

Puesto que el límite  $p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^{(t)}$  en una cadena de Markov ergódica es independiente de la fila  $i$ , entonces por (4.23) se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \pi(t) = \pi_0 \lim_{t \rightarrow \infty} \Pi^t = \pi_s.$$

El siguiente resultado es una consecuencia de la ecuación de Chapman-Kolmogorov. Note que este resultado implica que el vector  $\pi_s$  es un vector propio por la izquierda de la matriz  $\Pi$ , asociado al valor propio  $\lambda = 1$ . Se deja la demostración como ejercicio.

**Teorema 18.** Sea  $x$  una cadena de Markov ergódica con matriz de transición de probabilidad  $\Pi$  y espacio de estados  $\mathcal{S}$ . Entonces, el vector estacionario  $\pi_s$  es la única solución (con entradas positivas) de la ecuación

$$\boxed{\pi = \pi\Pi} \quad (4.24)$$

con la condición de que el vector  $\pi$  sea estocástico, es decir, de que sus entradas sumen 1.

La ecuación (4.24) es muy importante, pues constituye un medio para encontrar el vector estacionario  $\pi$ .

Hasta aquí nuestra revisión de algunos conceptos básicos sobre cadenas de Markov. Como dijimos antes, las cadenas de Markov se utilizan ampliamente en diversos contextos, pues su estructura se presenta en muchos procesos estocásticos que ocurren en la práctica. El siguiente ejemplo es un modelo sencillo de movilidad social en una cierta población. La manera cómo se va distribuyendo la población trabajadora de generación en generación obedece a una cierta dinámica cuyas consecuencias será importante analizar.

### **Ej. 79. (Distribución de la fuerza laboral)**

La población laboral de una determinada ciudad está distribuida de la siguiente manera. Trabajadores altamente calificados (A), Trabajadores medianamente calificados (M) y Trabajadores bajamente calificados (B). Sean  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  y  $x_3(t)$  el número de personas en la generación  $t$  en cada una de estas categorías. Supongamos que de generación en generación se cumple lo siguiente:

H1. Cada trabajador tiene solamente un hijo.

H2. El 60 % de los hijos de los trabajadores del tipo  $A$  pasan a ser también trabajadores del tipo  $A$ , el 25 % pasa a ser del tipo  $M$  y el 15 % pasa a ser de tipo  $B$ .

H3. El 25 % de los hijos de los trabajadores del tipo  $M$  pasan a ser trabajadores del tipo  $A$ , el 45 % pasa a ser del tipo  $M$  y el 30 % pasa a ser del tipo  $B$ .

H4. El 15 % de los hijos de los trabajadores del tipo  $B$  pasan a ser trabajadores del tipo  $A$ , el 30 % pasa a ser del tipo  $M$  y el 65 % pasa a ser del tipo  $B$ .

Bajo estas hipótesis, estamos interesados en saber cómo será la distribución de trabajadores en el largo plazo. Claramente, la situación planteada configura una cadena de Markov. Los estados son las categorías  $A$ ,  $M$  y  $B$ , y los porcentajes dados corresponden a las probabilidades de salto o transición de una categoría a otra en una generación (o un paso). Como estas probabilidades se mantienen de generación en generación, se trata de una cadena de Markov homogénea. La matriz de transición de probabilidades es

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.60 & 0.25 & 0.15 \\ 0.25 & 0.45 & 0.30 \\ 0.15 & 0.20 & 0.65 \end{bmatrix}.$$

Puesto que la matriz  $\Pi$  es casi-positiva (positiva en realidad), la cadena de Markov es ergódica. Por consiguiente, la respuesta a la pregunta que nos formulábamos anteriormente consiste en encontrar el vector estacionario.

Así, aplicando (4.24), se obtiene

$$\pi_s = (0.3252 \quad 0.2883 \quad 0.3865).$$

De manera que en el largo plazo, aproximadamente, el 32 % de la población trabajadora será del tipo  $A$ , el 28 % del tipo  $M$  y el 38 % del tipo  $B$ . Estos resultados tendrían que contrastarse con la distribución inicial para concluir si se ha producido movilidad social. Por ejemplo, si la distribución inicial indicara que el porcentaje de trabajadores del

tipo  $A$  fuera 15%; y la del tipo  $B$ , 50%, es claro que habría habido una significativa mejora en esta distribución.



### LISTA DE EJERCICIOS

**4.4.1.** Diga cuáles de las siguientes matrices son estocásticas, o bien por filas, o bien por columnas.

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.7 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

**4.4.2.** ¿Para qué valores de  $p$  y  $q$ , es estocástica la matriz  $A$ ?

$$A = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{bmatrix}$$

**4.3.3.** En modelos meteorológicos se usan también las cadenas de Markov. Estos modelos son importantes porque la naturaleza del clima tiene consecuencias económicas. Veamos un modelo sencillo. Supongamos que solo existen dos posibilidades climáticas: día soleado (S) o día nublado (N). De día a día, el clima del día siguiente solo depende del clima del día actual. Así, si está soleado, la probabilidad de que al día siguiente esté nublado es 0.3; por el contrario, si está nublado, la probabilidad de que al día siguiente esté soleado es 0.6.

Basándose en estos supuestos, resuelva los siguientes ejercicios:

a) Evidentemente, el estado del clima de cualquier día es incierto; es una variable aleatoria. La familia infinita de todas estas variables constituye una cadena de Markov homogénea. Defina esta variable, identifique el espacio de estados y determine la matriz de transición de probabilidad.

b) Si el miércoles es un día soleado, ¿cuál es la probabilidad de que el jueves también lo sea?

c) Si el miércoles es un día soleado, ¿cuál es la probabilidad de que el domingo sea un día nublado y cuál es la probabilidad de que, más bien, sea un día soleado?

d) En el largo plazo, ¿cuál es la probabilidad de que un determinado día sea soleado o nublado?

**4.3.4.** El mercado de un determinado bien de consumo está cubierto por tres firmas diferentes:  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Hay ciertas diferencias entre los productos que ofrecen las correspondientes empresas, lo que genera determinadas preferencias entre los consumidores. Estas preferencias son dinámicas y varían de mes a mes de acuerdo con la siguiente tabla:

	A	B	C
A	0.4	0.4	0.2
B	0.2	0.5	0.3
C	0.4	0.3	0.3

Las entradas en las nueve posiciones de esta matriz representan las probabilidades de cambio de las preferencias de consumo del artículo producido por las tres empresas. Como se aprecia, la estructura de esta situación es similar a la del ejercicio anterior. Conteste a las siguientes preguntas:

a) Si actualmente la participación de mercado de las firmas  $A$ ,  $B$  y  $C$  es 35 %, 40 % y 25 %, respectivamente, ¿cuál será esta participación dentro de tres meses?

b) ¿Cuál será la participación de mercado de las tres firmas en el largo plazo?

# Capítulo 5

## Sistemas dinámicos discretos escalares no lineales

### 5.1. Introducción

En este capítulo se estudian las ecuaciones en diferencias no lineales. Debido a la no linealidad, el análisis de este tipo de ecuaciones es cualitativo. En este abordaje se utiliza la idea de que en cada período del tiempo el estado del sistema es una transformación del estado del período anterior. La variable de estado actual reúne toda la información del sistema hasta ese instante, de manera que el estado siguiente recoge dicha información. Se establece así una relación de recurrencia que permite obtener los estados del sistema en cada período,

En comparación con los anteriores, este capítulo es corto, pero es muy rico en ideas, y las herramientas de análisis que se presentan son las fundamentales en la teoría. En la primera sección se introduce formalmente el concepto de ecuación en diferencias no lineal; y, en la segunda, se desarrolla el análisis cualitativo de este tipo de ecuaciones.

## 5.2. Ecuaciones escalares

A continuación se presenta formalmente una ecuación en diferencias no lineal. Para todo el resto del capítulo, el símbolo  $I$  denota un intervalo de la recta,  $I \subset \mathbb{R}$ .

**Definición 23.** Sea  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow I$  una función no lineal. Una ecuación en diferencias de primer orden, no lineal, es una expresión de la forma

$$\boxed{x(t+1) = f(x(t)) ; t = 0, 1, \dots} \quad (5.1)$$

Como siempre,  $x(t)$  representa el estado del sistema en el instante  $t$ . Como los distintos estados del sistema se van obteniendo de forma recurrente por una transformación del estado anterior, a la función  $f$  se le llama «función de recurrencia».

La dinámica del sistema (5.1) puede describirse por el siguiente diagrama:

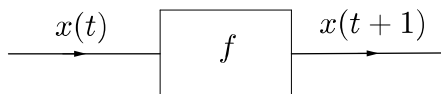


Figura 5.1 Función de recurrencia y dinámica discreta

Este diagrama describe la idea de que, en cada período, la variable de estado es sometida a una transformación definida por la función  $f$ , lo que produce el nuevo valor de la variable de estado correspondiente al período siguiente.

La solución de la ecuación (5.1) se resuelve procediendo de la misma manera como se hizo en el caso lineal, es decir, por recurrencia. Dada

una condición inicial  $x(0) = x_0$ , la trayectoria está dada por la siguiente sucesión:

$$\begin{aligned} x(1) &= f(x_0) \\ x(2) &= f(x(1)) = f(f(x_0)) = f^2(x_0) \\ x(3) &= f(x(2)) = f(f^2(x_0)) = f^3(x_0). \end{aligned}$$

Procediendo de esta manera, por inducción se obtiene

$$\boxed{x(t) = f^t(x_0), \quad t = 0, 1, \dots} \tag{5.2}$$

**Ejemplo**

**Ej. 80.** Consideremos la siguiente ecuación:

$$x(t + 1) = \sqrt{x(t)}; \quad x(0) = x_0 \geq 0.$$

Procediendo como se ha mostrado anteriormente, la solución de la ecuación es  $x(t) = \sqrt[t]{x_0}$ . En efecto,

$$\begin{aligned} x(1) &= f(x_0) = \sqrt{x_0} \\ x(2) &= f(x(1)) = \sqrt{\sqrt{x_0}} = \sqrt[2]{x_0} \\ x(3) &= f(x(2)) = \sqrt{\sqrt[2]{x_0}} = \sqrt[3]{x_0} \\ &\vdots = \vdots \\ x(t) &= \sqrt[t]{x_0}. \end{aligned}$$

Observe que  $x^* = 0$  es una solución constante de la ecuación; esto es, para todo  $t$ ,  $x(t) = x^* = 0$  satisface la ecuación. En el largo plazo, es decir, para  $t$  muy grande, la trayectoria  $x(t; x_0)$  se va a aproximando al punto  $x^* = 0$  independientemente de cuál sea la condición inicial  $x_0 \geq 0$ . Se dice, entonces, que  $x^*$  es un equilibrio globalmente asintóticamente estable.





**LISTA DE EJERCICIOS**

**5.1.1.** Encuentre la trayectoria solución de la ecuación

$$x(t+1) = \frac{1}{2x(t)}, \quad x(0) = x_0 \neq 0.$$

**5.1.2.** Con relación a la ecuación del ejercicio anterior, encuentre la solución de equilibrio si  $x_0 > 0$ .

**5.1.3.** Los cuatro primeros términos de la ecuación  $x(t+1) = f(x(t))$  son  $x(0) = 1$ ,  $x(1) = 2$ ,  $x(2) = 8$  y  $x(3) = 128$ . Encuentre una posible función  $f$  y calcule  $f(4)$ .

### 5.3. Análisis cualitativo

A continuación se define formalmente una solución de equilibrio de la ecuación (5.1). Como siempre, esta es una función constante que satisface la ecuación, pero en el caso actual esta solución constituye un punto especial de la función  $f$ , es un «punto fijo».

**Definición 24.** Decimos que la función  $x(t)$  es una solución de equilibrio de la ecuación (5.1) si es constante y satisface la ecuación; esto es,  $x(t) = x^*$  para todo  $t$  y se cumple que

$$\boxed{x^* = f(x^*)} \tag{5.3}$$

La ecuación (5.3) indica que un equilibrio de la ecuación (5.1) es un punto fijo de la función  $f$ . Luego, para obtener  $x^*$  hay que resolver la ecuación algebraica  $x = f(x)$ . Observe que la solución de esta ecuación se encuentra en la intersección de la recta  $\mathcal{L} : y = x$  con la gráfica de  $f$ .

La Figura 5.2 muestra gráficamente la idea de punto fijo. Este ocurre en la intersección mencionada anteriormente, de manera que el número de puntos fijos (equilibrios) es igual al número de intersecciones.

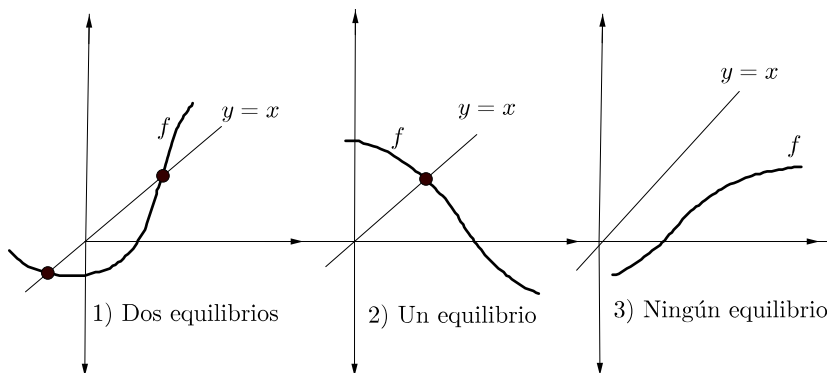


Figura 5.2 Solución de equilibrio-punto fijo

**Ejemplos**

**Ej. 81.** Con relación al Ej. 80, la solución de la ecuación  $x = \sqrt{x}$  produce los puntos fijos  $x_1^* = 0$  y  $x_1^* = 1$ . Por lo tanto, la ecuación posee dos equilibrios,  $x_1^*$  y  $x_2^*$ . La Figura 5.3 muestra estos equilibrios.

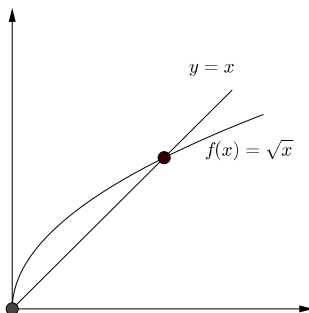


Figura 5.3 Puntos fijos de  $f(x) = \sqrt{x}$

**Ej. 82.** Consideremos la ecuación

$$x(t+1) = \frac{x^2(t)}{1 + e^{x(t)}}.$$

En este caso, la función de recurrencia  $f(x) = x^2/(1 + e^x)$  posee un único punto fijo,  $x^* = 0$ . En efecto, si  $x \neq 0$ , entonces la ecuación  $f(x) = x$  se reduce a la ecuación  $1 + e^x = x$ , que no posee solución.

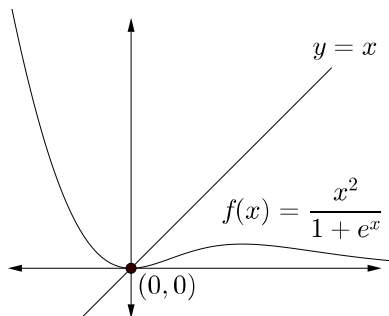


Figura 5.4 Puntos fijos de  $f(x) = x^2/(1 + e^x)$

**Ej. 83.** Los equilibrios de la ecuación  $x(t+1) = x^3(t)$  corresponden a los puntos fijos de la función  $f(x) = x^3$ :  $x_1^* = -1$ ,  $x_2^* = 0$  y  $x_3^* = 1$ .

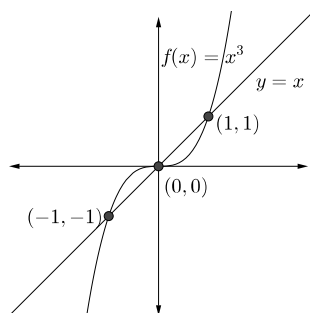


Figura 5.5 Puntos fijos de  $f(x) = x^3$



Puesto que la función  $f$  de la ecuación (5.1) es no lineal, encontrar algebraicamente sus equilibrios puede ser muy complicado, sino imposible. Incluso podría suceder que tales equilibrios no existan, como se muestra en las Figuras 5.2 y 5.3. El siguiente resultado, conocido como «Teorema del punto fijo de Banach», establece condiciones que aseguran la existencia de puntos fijos. Para presentar este resultado, se necesita introducir previamente el concepto de función contractiva.

**Definición 25.** Se dice que la función  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una contracción si existe  $L \in \mathbb{R}$ ,  $0 < L < 1$ , tal que

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1| \quad \forall x_1, x_2 \in X. \quad (5.4)$$

El número  $L$  se llama «constante de contracción».

Observe que una contracción es un caso particular de una función lipschitziana, la cual se estudió en el capítulo 1.

### Ejemplos

**Ej. 84.** Consideremos la función  $f(x) = x^2$ ,  $x \in ]-a, a[$ ,  $0 < a < 1/2$ . Entonces,

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |x_2^2 - x_1^2| = |x_2 + x_1||x_2 - x_1| < 2a|x_2 - x_1|.$$

Puesto que  $f$  satisface la ecuación (5.4) con  $L = 2a < 1$ ,  $f$  es una contracción. Observe que para obtener la constante  $L$  fue decisivo restringir el dominio natural de la función  $f$  de  $\mathbb{R}$  al intervalo  $]-a, a[$ . Así, el ejemplo se ha construido «artificialmente», pero permite ver la importancia que juega el dominio de una función para que esta sea una contracción.

**Ej. 85.** La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \frac{e^x}{2 + e^x}$$

es una contracción. En efecto, por el teorema del valor medio para  $x_1 < x_2$  existe  $c$ ,  $x_1 < c < x_2$ , tal que

$$\begin{aligned} |f(x_2) - f(x_1)| &= \left| \frac{2e^c}{4 + 4e^c + e^{2c}} \right| |x_2 - x_1| \\ &< \frac{1}{2} |x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

Luego, tomando  $L = 1/2$ , obtenemos la desigualdad requerida. Observe que si bien  $c$  depende de los puntos considerados  $x_1$  y  $x_2$ , la constante de contracción  $L$  es independiente de estos puntos. El ejemplo muestra la importancia del teorema del valor medio como una herramienta para verificar la ecuación (5.4).



Si la función  $f$  es una contracción, es claro que  $f$  es continua. Lo contrario, sin embargo, no es necesariamente cierto. Como contraejemplo, basta considerar la función  $f(x) = x$ , que es continua, pero no es una contracción. En efecto, si existe  $0 < L < 1$ , tal que para  $x_1 \neq x_2$  se tiene la desigualdad  $|x_2 - x_1| < L|x_2 - x_1|$ , entonces  $1 < L$ , lo que es una contradicción.

**Teorema 19. (Teorema del punto fijo de Banach).** Sea  $X$  un subconjunto completo<sup>1</sup> de  $\mathbb{R}$ , y consideremos la función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(X) \subset X$ . Si la función  $f$  es una contracción, entonces  $f$  posee un único punto fijo en  $X$ .

<sup>1</sup> Esto significa que toda sucesión de Cauchy en  $X$  converge a un punto que está en el mismo conjunto.

*Demostración.* Como  $f$  es una contracción, existe  $L$ ,  $0 < L < 1$ , tal que

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1| \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Ahora bien, para  $x_0 \in X$  consideremos la sucesión dada por (5.2),

$$x(t) = f^t(x_0).$$

Entonces,

$$|x(1) - x(2)| = |f(x_0) - f(x(1))| \leq L|x_0 - x(1)|$$

$$|x(2) - x(3)| = |f(x(1)) - f(x(2))| \leq L|x(1) - x(2)| \leq L^2|x_0 - x(1)|$$

$$|x(3) - x(4)| = |f(x(2)) - f(x(3))| \leq L|x(2) - x(3)| \leq L^3|x_0 - x(1)|$$

$$\vdots = \vdots$$

$$|x(t) - x(t+1)| \leq L^t|x_0 - x(1)| \quad (\text{Inducción})$$

De aquí, por la desigualdad triangular, se sigue

$$\begin{aligned} |x(t) - x(t+k)| &= |x(t) - x(t+1)| + |x(t+1) - x(t+2)| + \dots \\ &\quad + |x(t+k-1) - x(t+k)| \\ &\leq (L^t + L^{t+1} + \dots + L^{t+k-1})|x_0 - x(1)| \\ &= \frac{L^t(1 - L^k)}{1 - L}|x_0 - x(1)|. \end{aligned}$$

Luego,

$$|x(t) - x(t+k)| \leq \frac{L^t}{1 - L}|x_0 - x_1|.$$

Como  $L < 1$ , esta desigualdad muestra que la sucesión  $\{x(t)\}_{t=0}^{\infty}$  es de Cauchy y, puesto que  $X$ , es completo, la sucesión es convergente en  $X$ . Sea  $x^* \in X$  tal que  $x^* = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ . Por la continuidad de  $f$  se tiene

$$f(x^*) = f(\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(x(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t+1) = x^*.$$

Luego,  $x^*$  es un punto fijo de  $f$ . Para probar la unicidad de  $x^*$ , supongamos la existencia de  $x^{**} \neq x^*$  tal que  $x^{**} = f(x^{**})$ . Luego,

$$|x^{**} - x^*| = |f(x^{**}) - f(x^*)| < L|x^{**} - x^*|.$$

Puesto que  $x^{**} \neq x^*$ , esta desigualdad implica que  $L > 1$ , lo que es una contradicción.  $\square$

Note que la convergencia de la sucesión de puntos  $x(t)$  al punto fijo  $x^*$  es independiente de la condición inicial  $x_0$ . Esto significa que, desde cualquier punto  $x_0 \in X$ , la trayectoria  $x(t; x_0)$  siempre converge al mismo punto  $x^*$ . Esta idea está representada en la Figura 5.6.

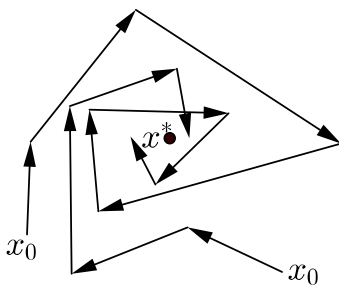


Figura 5.6 Teorema del punto fijo

### OBSERVACIÓN

El teorema anterior garantiza la existencia y unicidad de un punto fijo, pero no señala cuál es dicho punto. Sin embargo, la demostración del teorema provee un procedimiento que permite aproximarse a dicho punto por medio de la sucesión (5.2). Ya que  $f$  es una contracción, se puede obtener una estimación de la aproximación que uno desee. En efecto, por la desigualdad triangular tenemos

$$\begin{aligned}
 |x(1) - x^*| &= |f(x_0) - f(x^*)| \\
 &\leq L|x_0 - x^*| \\
 &\leq L(|x_0 - x(1)| + |x(1) - x^*|).
 \end{aligned}$$

De aquí se sigue que

$$|x(1) - x^*| \leq \frac{L}{1-L}|x_0 - x(1)|.$$

Aplicando el mismo procedimiento y tomando como base el punto  $x(1)$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 |x(2) - x^*| &= |f(x(1)) - f(x^*)| \\
 &\leq L|x(1) - x^*| \\
 &\leq \frac{L^2}{1-L}|x_0 - x(1)|.
 \end{aligned}$$

Después de  $t$  pasos se obtiene la siguiente expresión que permite estimar el error de aproximación (por inducción):

$$|x(t) - x^*| \leq \frac{L^t}{1-L}|x_0 - x(1)| \quad (5.5)$$

La desigualdad (5.5) implica que se puede estimar el valor de  $x^*$  con una aproximación dada tomando  $t$  tan grande como sea suficiente.

### **Ejemplo**

**Ej. 86.** Consideremos la ecuación

$$x(t+1) = \frac{e^{x(t)}}{2 + e^{x(t)}}, \quad x(0) = x_0.$$

Primero observe que intentar resolver la ecuación

$$x = f(x) = \frac{e^x}{2 + e^x}$$



con el propósito de encontrar las soluciones de equilibrio es una tarea complicada. Sin embargo, puesto que la función  $f$  es una contracción (véase Ej. 85), por el teorema anterior, dicha función posee un único punto fijo  $x^*$  y, por lo tanto, la ecuación dada tiene un único equilibrio. Por el argumento seguido en la prueba del teorema anterior sabemos que, partiendo de cualquier condición inicial  $x_0$ , la trayectoria correspondiente  $x(t; x_0) = f^t(x_0)$  convergerá a tal equilibrio. Por la estimación (5.5) podemos aproximarnos a él tanto como queramos tomando  $t$  cada vez más grande. En el largo plazo, cualquier trayectoria solución se aproximará a la solución de equilibrio.

Tomando  $x(0) = 0$  se obtiene  $x(1) = e^0/(2 + e^0) = 1/3$ . Para acercarnos a  $x^*$ , por ejemplo, con un error de aproximación menor que  $10^{-4}$ , hacemos el siguiente cálculo con  $L = 1/2$ . Aplicando (5.5) tenemos

$$\begin{aligned} |x(t) - x^*| &< \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^t}{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{3} \right| < 10^{-4} \\ (0.5)^t &< 1.5 \times 10^{-4} \\ t &> \frac{\ln(0.00015)}{\ln(0.5)} \\ t &> 12.58. \end{aligned}$$

Este resultado implica que partiendo de la condición inicial  $x(0) = 0$ , la trayectoria correspondiente estará a una distancia de  $x^*$  menor que  $10^{-4}$  después del décimo segundo paso. La trayectoria converge muy rápido al equilibrio.

Sabemos que una función que es una contracción también es continua, pero lo contrario no es necesariamente cierto y, por lo tanto, no puede asegurarse la existencia de equilibrios para ecuaciones definidas por funciones continuas. Sin embargo, si una función continua transforma un intervalo cerrado en el mismo intervalo, entonces ella posee al menos

un punto fijo y, por lo tanto, un equilibrio. Esta es una consecuencia del teorema del valor intermedio, como se muestra a continuación.

**Teorema 20.** Si la función  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  es continua, entonces existe  $x^* \in [a, b]$  tal que  $f(x^*) = x^*$ .

*Demostración.* Si  $f(a) = a$  o  $f(b) = b$ , entonces  $a$  o  $b$  son puntos fijos de  $f$ . Supongamos, pues, que  $f(a) \neq a$  y  $f(b) \neq b$  y definamos la función  $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$  como sigue:

$$g(x) = f(x) - x.$$

Puesto que  $f(a) \neq a$  y  $f(a) \in [a, b]$ ,  $g(a) > 0$ . De la misma forma,  $g(b) < 0$ . Como  $g$  es continua, entonces por el teorema del valor intermedio, existe  $x^* \in ]a, b[$  tal que  $g(x^*) = 0$ , lo que implica que  $f(x^*) = x^*$ .  $\square$

### Ejemplo

**Ej. 87.** Consideremos la función  $f(x) = x^3$ ,  $x \in I = [-1, 1]$ . Puesto que  $f$  transforma el intervalo  $I$  en el intervalo  $I$ , por el teorema anterior esta función posee al menos un punto fijo en el intervalo  $I$ . En realidad, como sabemos de Ej. 83, son tres puntos fijos:  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 0$  y  $x_3 = 1$ .



Si para cualquier trayectoria  $x(t; x_0)$  que parte suficientemente cerca de  $x^*$  se tiene  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; x_0) = x^*$ , entonces se dice que  $x^*$  es un equilibrio localmente asintóticamente estable (l.a.e.) La definición formal es la misma que en tiempo continuo; solo que en este caso el tiempo avanza de manera discreta. El siguiente teorema es la versión discreta del teorema 7.

**Teorema 21.** Sea  $I$  un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$  y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , una función de clase  $C^1$ . Sea  $x^* \in I$  un equilibrio del sistema

$$x(t+1) = f(x(t)).$$

a) Si  $|f'(x^*)| < 1$ , entonces  $x^*$  es l.a.e.

b) Si  $|f'(x^*)| > 1$ , entonces  $x^*$  es inestable.

*Demostración.* a) Puesto que  $f'$  es continua en  $I$  y  $|f'(x^*)| < 1$ , existen  $\epsilon > 0$  y  $0 < k < 1$ , tales que  $|f'(x^*)| < k$  para todo  $x \in I_\epsilon = ]x^* - \epsilon, x^* + \epsilon[ \subset I$ . Tomemos  $x(0) \in I_\epsilon$ . Por el teorema del valor medio, entre  $x(0)$  y  $x^*$  existe  $c_0$ , tal que

$$f(x(0)) - f(x^*) = f'(c_0)(x(0) - x^*);$$

o, equivalentemente,

$$x(1) - x^* = f'(c_0)(x(0) - x^*),$$

de donde

$$|x(1) - x^*| = |f'(c_0)||x(0) - x^*| < k|x(0) - x^*|.$$

Como  $|x(1) - x^*| < k\epsilon < \epsilon$ , entonces  $x(1) \in I_\epsilon$ , y podemos repetir el procedimiento tomando como base el punto  $x(1)$ .

$$|x(2) - x^*| = |f(x(1)) - x^*| = |f'(c_1)||x(1) - x^*| < k|x(1) - x^*| < k^2|x(0) - x^*|,$$

donde  $c_1$  está entre  $x(1)$  y  $x^*$  y, por lo tanto,  $c_1 \in I_\epsilon$ . Continuando de esta forma, después de  $t$  pasos tenemos, por inducción, la siguiente desigualdad:

$$|x(t) - x^*| < k^t|x(0) - x^*|. \quad (5.6)$$

Como  $0 < k < 1$ , la desigualdad (5.6) implica que  $x^*$  es estable, pues la condición inicial  $x(0)$  se tomó arbitrariamente en  $I_\epsilon$ . Más aún, tomando límites a ambos miembros de la desigualdad, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; x(0)) = x^*.$$

Por consiguiente,  $x^*$  es l.a.e.

**b)** Si  $|f'(x^*)| > 1$ , por la continuidad de  $f'$  existen  $\epsilon > 0$  y  $k > 1$ , tales que  $|f'(x^*)| > k$  para todo  $x \in I_\epsilon = ]x^* - \epsilon, x^* + \epsilon[$ . Así, procediendo similarmente a la prueba del ítem **a)**, se tiene

$$|x(1) - x(0)| = |f'(c_0)|x(0) - x^*| > k|x(0) - x^*|$$

y después de  $t$  pasos,

$$|x(t) - x^*| > k^t|x(0) - x^*|,$$

lo que implica que para cualquier condición inicial  $x(0)$  suficientemente cercana de  $x^*$ , la trayectoria  $x(t; x(0))$  se aleja cada vez más de  $x^*$ , pues

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; x(0)) = +\infty.$$

□

### OBSERVACIÓN

Es claro que si  $|f'(x)| < 1$  para todo  $x \in I$ , entonces  $x^*$  es globalmente asintóticamente estable en  $I$ .

### Ejemplos

**Ej. 88.** Del Ej. 82 sabemos que el único equilibrio de la ecuación

$$x(t + 1) = f(x(t)) = \frac{x^2(t)}{1 + e^{x(t)}}, \quad x(0) = x_0$$

es la solución nula,  $x^* = 0$ . Puesto que  $f'(0) = 0 < 1$ , entonces de acuerdo con el teorema anterior, dicha solución es un equilibrio l.a.e.

**Ej. 89. (Modelo logístico discreto).** En analogía con el modelo logístico en tiempo continuo, planteamos el modelo logístico discreto. La variable de estado  $x(t)$  denota la cantidad de población en el período  $t$ . Recordemos que lo que establece el modelo logístico es el decrecimiento lineal de la tasa per cápita de crecimiento poblacional. Puesto en términos de diferencias tenemos

$$\frac{x(t+1) - x(t)}{x(t)} = r - ax(t), \quad a > 0, \quad 0 < r < 1. \quad (5.7)$$

Observe que para una población suficientemente pequeña, esta cambia casi de manera exponencial. En efecto, de la ecuación tenemos

$$x(t+1) = x(t) + rx(t) - ax^2(t).$$

Si la población  $x(t)$  es muy pequeña, entonces la cantidad  $x^2(t)$  puede ser despreciable, de donde la ecuación queda como sigue:

$$x(t+1) = (r+1)x(t).$$

Dada la condición inicial  $x_0$ , la solución es

$$x(t) = (r+1)^t x_0.$$

Observe también que la capacidad máxima de crecimiento poblacional (*carrying capacity*) es  $K = r/a$ . Reordenando la ecuación (5.7), esta puede escribirse como

$$x(t+1) = x(t) + rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right). \quad (5.8)$$

La ecuación (5.7) constituye el modelo logístico discreto, y sus soluciones estacionarias son  $x^* = 0$  y  $x^* = K$ . Ahora bien, la función de recurrencia es  $f(x) = (1+r)x - ax^2$ , por lo que

$$\begin{aligned} f'(0) &= 1+r > 1 \Rightarrow x^* = 0 \text{ es inestable} \\ f'(K) &= 1-r < 1 \Rightarrow x^* = K \text{ es l.a.e.} \end{aligned}$$



**LISTA DE EJERCICIOS**

**5.2.1.** Como en el caso continuo, hay ciertas ecuaciones en diferencia no lineales cuyas soluciones se pueden obtener explícitamente. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a)  $x^2(t+1) = \frac{1}{3}x^2(t)$ ;  $x(0) = x_0$

b)  $x^2(t+1) = \frac{1}{3}x^2(t) + 5$ ;  $x(0) = x_0$

**5.2.2.** Encuentre los equilibrios de las siguientes ecuaciones:

a)  $x(t+1) = x^2(t) - 2$

b)  $x(t+1) = x^3(t) + 2x^2(t) - 2$

c)  $x(t+1) = -x^4(t) + 2x^2(t)$

**5.2.3.** En el caso de que sea posible, aplique el teorema 21 para analizar los equilibrios del ejercicio 5.2.2.

**5.2.4.** Pruebe que las siguientes funciones son contracciones:

a)  $f(x) = \frac{1}{6}x - \frac{1}{4x^2}$ ,  $x > 0$

b)  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ,  $x > 1$

**5.2.5.** ¿Para qué valores de  $a$  la función  $f(x) = ax$  es una contracción?

**5.2.6** ¿Es la función  $f(x) = e^x$  una contracción?



# Anexo





# Anexo A

## Conceptos básicos

Con el propósito de hacer autosuficiente la lectura de este libro, se presentan aquí de manera muy breve diversos conceptos que se mencionan a lo largo de estas páginas. Se asume que el lector tiene conocimientos básicos de álgebra lineal; por ejemplo, que conoce lo que es una combinación lineal de vectores, un conjunto linealmente independiente de vectores, una base de un espacio vectorial, la dimensión de un espacio vectorial, etc.

### EL SUPREMO DE UN CONJUNTO

**Definición 1.** Sea  $A \subset \mathbb{R}$  un conjunto no vacío. Se dice que  $A$  es acotado si existe una constante  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c > 0$ , tal que

$$|x| \leq c \quad \forall x \in A$$

La constante  $c$  se llama «cota del conjunto».

#### **Ejemplo**

**Ej. 1.** La desigualdad  $|x^2 - 9| < 7$  tiene por solución el conjunto  $A = ] - 4, -\sqrt{2}[ \cup ]\sqrt{2}, 4[$ . Una cota de este conjunto es, por ejemplo,

$c = 5$ , pues  $|x| < 5$  para todo  $x \in A$ . Es claro que el conjunto  $A$  tiene infinitas cotas.



Si se cumple que  $x < c$  para todo  $x \in A$ , se dice que  $c$  es una cota superior del conjunto  $A$ . Si, por el contrario, se cumple que  $c < x$  para todo  $x \in A$ , entonces se dice que  $c$  es una cota inferior. Es claro que un conjunto  $A$  es acotado si y solamente si lo es tanto superior como inferiormente.

**Definición 2.** Sea  $A \subset \mathbb{R}$  un conjunto no vacío. Al menor  $c_0$  de las cotas superiores del conjunto  $A$  se le llama «supremo de  $A$ » y se denota por  $c_0 = \sup A$ .

El supremo de un conjunto, si existe, es único. El «axioma del supremo» establece que todo conjunto  $A \subset \mathbb{R}$ , no vacío y acotado superiormente, posee supremo.

De manera análoga a como se ha definido el supremo, se puede definir el ínfimo, es decir, como aquel número que es la mayor de las cotas inferiores. Si un conjunto no vacío es acotado inferiormente, tendrá un (único) ínfimo.

### Ejemplo

**Ej. 2.** Consideremos una función muy sencilla, por ejemplo,  $f(x) = 3x^2 + 5$ . Luego,

$$\sup_{x \in [0,2]} \{f(x)\} = 17.$$

En efecto, el conjunto en cuestión es  $A = \{f(x), x \in [0, 2]\}$  y si  $x \in [0, 2[$ , entonces

$$5 \leq f(x) < 17.$$

Luego, la menor de las cotas superiores del conjunto  $A =$  es 17, de donde, por definición, 17 es el supremo. Por cierto, el ínfimo es 5.





# Anexo B

## Espacios vectoriales normados

Enseguida se define el concepto de norma, y basándonos en este concepto luego introducimos la noción de distancia entre dos puntos del espacio vectorial  $V$ . Esta noción de distancia nos permitirá hablar de cercanía y convergencia en  $V$ . Se asume que el espacio vectorial  $V$  está definido sobre el campo de los números reales. Usamos indistintamente la expresión «vector» o «punto» cuando nos referimos a un elemento de  $V$ .

**Definición 3.** Sea  $V$  un espacio vectorial. Una norma sobre  $V$  es una función  $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface las siguientes propiedades:

- a)  $\|x\| \geq 0$
- b)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- c)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- d)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (Desigualdad triangular)

Intuitivamente, la norma  $\|x\|$  mide el «tamaño» del vector  $x$ . El par  $(V, \| \cdot \|)$  se conoce como espacio normado, de manera que con la definición

de norma se ha introducido una noción de longitud sobre el espacio de vectores  $V$ .

### Ejemplos

**Ej. 3.** Sea  $V = \mathbb{R}$  y definamos la norma de  $x$  como su valor absoluto:

$$\|x\| = |x|.$$

Se puede probar sin dificultad que el valor absoluto satisface las cuatro propiedades anteriormente mencionadas.

**Ej. 4.** Sea  $V = \mathbb{R}^n$  y definamos la siguiente norma:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Esta norma, que por cierto no es la única que se puede definir sobre  $V$ , se llama «norma euclidiana» y es la norma usual sobre  $\mathbb{R}^n$ .



Una vez que se ha definido una norma sobre  $V$ , se puede medir la distancia entre dos vectores  $x$  e  $y$  de  $V$  mediante la norma de la diferencia entre ellos.

**Definición 4.** Sea  $V$  un espacio vectorial. La distancia inducida por la norma  $\| \cdot \|$  sobre  $V$  es una función  $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$d(x, y) \triangleq \|x - y\|.$$

La función  $d$  satisface las siguientes propiedades:

- a)  $d(x, y) \geq 0$
- b)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- c)  $d(x, y) = d(y, x)$
- d)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

En términos generales, la función  $d$  se conoce como métrica; y el par  $(V, d)$ , como espacio métrico.

Basándonos en la noción de distancia podemos definir una bola abierta.

**Definición 5.** Una bola abierta centrada en  $x_0 \in V$  y de radio  $\epsilon > 0$  se denota por  $\mathcal{B}(x_0, \epsilon)$  y se define por

$$\mathcal{B}(x_0, \epsilon) = \{x \in V : \|x - x_0\| < \epsilon\}.$$

Así, una bola centrada en  $x_0$  es el conjunto de todos aquellos puntos cuya distancia a  $x_0$  es menor que un radio prefijado.

### Ejemplos

**Ej. 5.** Si  $V = \mathbb{R}$  y la norma está dada por el valor absoluto, entonces  $\mathcal{B}(x_0, \epsilon) = ]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ .

**Ej. 6.** Si  $V = \mathbb{R}^2$  y la norma está dada por la norma euclidiana, entonces  $\mathcal{B}(x_0, \epsilon)$  es un disco sin borde, como se muestra en la Figura B.1

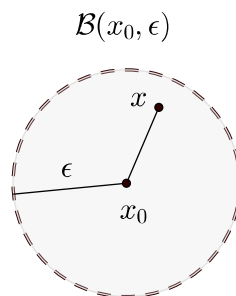


Figura B.1 Bola abierta





**Definición 6.** Sea  $A \subset V$  un conjunto no vacío. Se dice que  $x \in A$  es un punto interior de  $A$  si existe una bola abierta centrada en  $x$  y que está contenida en  $A$ . Si todos los puntos de  $A$  satisfacen esta condición, es decir, todos los puntos de  $A$  son puntos interiores, entonces se dice que el conjunto  $A$  es abierto.

La bola  $\mathcal{B}(x_0, \epsilon)$  se llama «abierta» porque no contiene a su frontera geométrica. Precisamente, los puntos que se encuentran sobre esta frontera se conocen como puntos de borde. Más formalmente tenemos la siguiente definición.

**Definición 7.** Sea  $A \subset V$  un conjunto no vacío. Se dice que  $x \in V$  es un punto de borde de  $A$  si existe  $\epsilon > 0$ , tal que

$$\mathcal{B}(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge \mathcal{B}(x, \epsilon) \cap A^c \neq \emptyset.$$

El conjunto de todos los puntos de borde de  $A$  se denota por  $\partial A$ . En la Figura B.2 se muestra un punto interior, el punto  $y$ , y un punto de borde, el punto  $z$ , de la bola centrada en  $x_0$ .

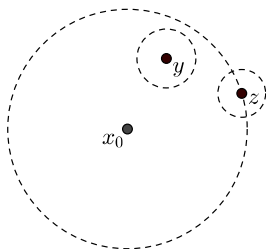


Figura B.2 Punto interior y punto de borde

Para terminar esta sección, definamos ahora los conceptos de sucesión y convergencia de puntos en  $V$ . Habiendo introducido una noción de

distancia, podemos interpretar que un conjunto de puntos está cerca de otro, lo que induce el concepto de convergencia. Para definir formalmente este concepto, definamos primero lo que es una sucesión en  $V$ .

Digamos que a cada  $n \in \mathbb{N}$  se le asigna un único  $x = x_n \in V$ , entonces al conjunto infinito de vectores  $x_1, x_2, \dots$  se le llama «sucesión de puntos en  $V$ » y se denota por  $\{x_n\}$ . Formalmente tenemos la siguiente definición.

**Definición 8.** Sea  $V$  un espacio vectorial. La función  $S : \mathbb{N} \rightarrow V$  que a cada número natural le asigna un único punto del espacio  $V$  se llama «sucesión en  $V$ ».

Eventualmente, a veces se considera el conjunto  $\mathbb{Z}_0^+$  en vez de  $\mathbb{N}$  y, entonces, la sucesión comienza en  $x_0$  en lugar de en  $x_1$ .

### Ejemplos

**Ej. 7.**  $V = \mathbb{R}$ . La siguiente es una sucesión de números reales:

$$x_n = 1 + e^{-2n}.$$

**Ej. 8.**  $V = \mathbb{R}^2$ . La siguiente es una sucesión de vectores bidimensionales:

$$x_n = \begin{bmatrix} 2 + \frac{1}{n} \\ \frac{3}{2+e^n} \end{bmatrix}.$$



**Definición 9.** Sea  $V$  un espacio vectorial con norma  $\| \cdot \|$ . Se dice que la sucesión  $\{x_n\}$  converge a  $x \in V$  si

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow d(x, y) = \|x_n - x\| < \epsilon.$$

El punto  $x$  se llama «límite de la sucesión»  $\{x_n\}$  y se escribe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Básicamente, cuando se dice que  $x$  es el límite de la sucesión  $\{x_n\}$ , se quiere decir que, a medida que  $n$  va creciendo, los puntos de la sucesión se van aproximando en distancia cada vez más a  $x$ .

### Ejemplos

**Ej. 9.** Con relación a las sucesiones de los ejemplos anteriores y considerando la norma euclidiana, tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + e^{-2n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 2 + \frac{1}{n} \\ \frac{3}{2+e^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



Cuando los términos de una sucesión se van a aproximando uno a otro a medida que  $n$  crece, se dice que tal sucesión es una sucesión de Cauchy. Formalmente tenemos la siguiente definición.

**Definición 10.** Sea  $V$  un espacio vectorial con norma  $\| \cdot \|$ . Se dice que la sucesión  $\{x_n\}$  es de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m > n_0, \Rightarrow d(x_n, x_m) = \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

**Definición 11.** Sea  $V$  un espacio vectorial con norma  $\| \cdot \|$ . Si toda sucesión de Cauchy en  $V$  es convergente, entonces se dice que  $(V, d)$  es un espacio métrico completo.

### Ejemplo

**Ej. 10.** Toda sucesión de números reales que sea de Cauchy es convergente, por lo que  $\mathbb{R}$  es un espacio métrico completo. Más generalmente,  $\mathbb{R}^n$  es un espacio métrico completo. Más aún, cualquier espacio vectorial  $V$  de dimensión finita es completo bajo cualquier norma. Por ejemplo, el espacio de matrices  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  es completo.





## REFERENCIAS

- Barro, R. J. y Sala-i Martin, X. (1995). *Economic Growth*. Cambridge: MIT Press.
- Cerdá Tena, E. (2001). *Optimización dinámica*. Madrid: Pearson Educación.
- Chiang, Alpha C. (1987). *Métodos fundamentales de economía matemática*. México: McGraw-Hill.
- Domar, E. D. (1946). *Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment*. *Econometrica*. Journal of the Econometric Society, 14(2), 137-147.
- Easterly, W. (2003). *En busca del crecimiento: andanzas y tribulaciones de los economistas del desarrollo*. Barcelona: Antoni Bosch Editor.
- Goodwin, R. M. (1982). *A Growth Cycle*. En R. M. Goodwin. *Essays in Economic Dynamics* (pp. 165-170). Londres: The MacMillan Press.
- Haavelmo, T. (1954). *A Study in the Theory of Economic Evolution*. Amsterdam: North Holland Publishing Company.
- Kemeny, J. G. y Snell, J. L. (1976). *Finite Markov Chains*, vol. 6. Nueva York: Springer.
- Lomelí, H. y Rumbos, B. (2003). *Métodos dinámicos en economía: otra búsqueda del tiempo perdido*. México, D. F.: Thomson Editorial.
- Lorenz, H. W. (1993). *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*, vol. 334. Berlín: Springer.

- Malthus, T. R. (1798). *An Essay on the Principle of Population*. London: J. Johnson.
- Phillips, A. W. (1958). *The Relation between Unemployment and the Rate of Change of Money Wage Rates in the United Kingdom, 1861-1957*. *Economica*, 25(100), 283-299.
- Poincaré, H. (1881). *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 7, 375-422.
- Ramsey, F. P. (1928). *A Mathematical Theory of Saving*. *The Economic Journal*, 38(152), 543-559.
- Solow, R. M. (1956). *A Contribution to the Theory of Economic Growth*. *The Quarterly Journal of Economics*, 70(1), 65-94.
- Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear Dynamics and Chaos with Student Solutions Manual: With applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Boca Ratón: CRC Press.
- Sydsaeter, K. y Hammond, P. (2008). *Further Mathematics for Economic Analysis*. Nueva Jersey: Prentice-Hall.
- Waugh, F. V. (1964). *Cobweb models*. *American Journal of Agricultural Economics*, 46(4), 732-750.

Sistemas dinámicos para el análisis económico es un libro orientado a profesores y estudiantes tanto de economía como de matemáticas aplicadas que posean una buena formación en álgebra lineal y análisis matemático, y que tengan un interés especial por la teoría y los modelos matemáticos de la economía. El texto cubre los temas de sistemas dinámicos que más aparecen en la teoría económica.

ISBN: 978-612-48974-3-6



9 786124 897436