ESPACIOS DE HARDY H^p Y BMO.

Un Breve Clásico Panorama

HARDY SPACES H^p AND BMO.

A Brief Clasicc Overview.

Alejandro Ortiz Fernández.*

Dedicado a la memoria del Maestro Prof. Antoni Zygmund, formador de generaciones de matemáticos.

Resumen

En esta breve nota damos una visión de los espacios de Hardy H^p y de los espacios de oscilación media acotada BMO, dos clásicos espacios que ha jugado un importante rol en las investigaciones de temas centrales en el análisis armónico. La bibliografía dada nos abre muchos caminos a seguir en este campo.

Palabras claves. BMO, H^p, BMO_φ, átomo, operador, peso, $H^{p,q}$, $\mathcal{L}^{p,\lambda}$, dualidad, (p,q)-átomo.

Abstract

In this brief note we give an overwiew of Hardy spaces H and bounded mean oscillation spaces, BMO, two classic spaces that have played an important role in investigations of central branches in harmonic analysis. The given bibliography opens paths to follow in this field.

Keywords. BMO, H^p, BMO_φ, atom, operator, weight, $H^{p,q}$, $\mathcal{L}^{p,\lambda}$, duality, (p,q)- atom.

1. Introducción. El análisis armónico es poco conocido en nuestro país ; algo lamentable pues es una de las teorías centrales de la matemática por la belleza de sus ideas, métodos y sobre todo por sus aplicaciones a muchos problemas concretos. Desde sus inicios, con el cálculo infinitesimal y sobre todo en el siglo XVIII, destacados matemáticos se dedicaron a su cultivo. Esto motivó el proyecto de que escribamos el presente artículo de divulgación, y otros, con el objetivo de motivar a los jóvenes matemáticos el estudio e investigación de esta rama del análisis. Este escrito está dedicado a los espacios de Hardy H^p y a los espacios BMO pues ellos contribuyeron al progreso de

* Sección Matemática. Pontificia Universidad Católica del Perú. (jortiz@pucp.edu.pe).

varias áreas en distintas escuelas donde las investigaron. Sobre estos espacios se ha escrito mucho, tanto en artículos como en libros . Con el objetivo de orientar su estudio citemos algunos , dentro de los que disponemos, como son : [7] , [27] , [24] , [26] , [9] , [18] , , entre otras importantes publicaciones . Ver las Referencias dadas.

Los espacios de Hardy H^p y los BMO aparecieron en varias aplicaciones ,como las ecuaciones en derivadas parciales ,por ejemplo . Así los espacios H^p surgieron en estudios de la escuela Inglesa siendo G.H.Hardy uno de sus notables investigadores (década de los años 1910, 20´s) ; en tanto a los espacios BMO, ellos fueron introducidos por F.John – L.Nirenberg en 1961 , [11] , y fueron aplicados de inmediato a problemas de la matemática aplicada. Veamos algunos argumentos sobre estos espacios .

Por definición se tiene

BMO = $\{ f \in L^1(Q_0) \,/\, [f]_{BMO} = \sup_{Q \subset Q_0} \frac{1}{|Q|}\int_Q | f(x) - f_Q| \, dx \leq M < \infty \}$, donde Q_0 es un cubo fijo en R^n y tanto Q_0 como Q son cubos con lados paralelos a los ejes coordenados ; f_Q es el promedio $\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\, dx$. Con la norma $\| f\|_{BMO} = [f]_{BMO} + \|f\|_{L^1(Q_0)}$, BMO es un espacio de Banach .

La investigación de estos espacios fue muy significativa pues se aplicaron a otras ramas como son las ecuaciones en derivadas parciales (EDP´s), las funciones analíticas, las martingalas en las probabilidades , espacios de tipo parabólicos , la teoría de interpolación, los espacios homogéneos , las variedades diferenciales , ….. Por otro lado , se observa que $L^\infty \subset$ BMO; además , se verifica que si $1 \leq p < o$, BMO $\subset L^p(Q_0)$, una relación importante pues se comprueba que BMO es el adecuado sustituto de L^∞ en ciertos casos que fallan en el límite L^∞. También , en el otro extremo , el sustituto de L^1 es el espacio de Hardy H^p,

($H^1 \subset L^1$), definido vía : $H^1 = \{ f \in L^1 \,/\, R_j f \in L^1 \,,\, j = 1,2, \dots , n \}$, donde R_j es la transformada de Riesz $[R_j f]^\wedge (x) = \frac{x_j}{|x|} \hat{f}(x)$. H^1 es un espacio de Banach con la norma

$\|f\|_{H^1} = \|f\|_{L^1} + \sum_{j=1}^{n} \|R_j f\|_{L^1}$. Por definición S es el espacio de las funciones f rápidamente decrecientes , esto es , $f \in C^\infty$ y para todo entero $k \geq 0$, $\lim_{|x| \to \infty} x^k f(x) = 0$. También , sea el espacio $S_0 = \{ f \in S \,/\, \hat{f} \in D(R_0^n) \}$, el cual es denso en H^1 . (D es el espacio de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto.

2 . El Teorema de la Dualidad . [7] .

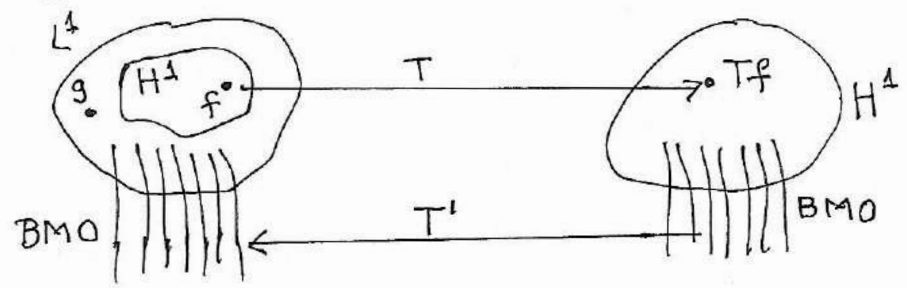
El celebrado resultado de dualidad de Charles Fefferman (1971) establece que $(H^1)^* =$ BMO , donde $< f , g > = \int f(x)\, g(x)\, dx$, $f \in S_0$, $g \in$ BMO , lo cual se extiende por continuidad a una forma bilineal continua sobre $H^1 \times$ BMO. Este resultado ha sido extendido y generalizado en diferentes contextos del ~~del~~ análisis armónico . Se tiene la siguiente caracterización :

$g \in$ BMO si y solo si $g = g_0 + \sum_{j=1}^{n} R_j\, g_j$, con $g_j \in L^\infty$, $j = 0 , 1 , 2, \dots , n$.

Desde que $R_j : L^\infty \longrightarrow$ BMO es un operador continuo , tal representación permite obtener una norma equivalente en BMO . Asi , Neri [16] sugiere tomar

$\|g\|_{BMO} = \inf_{g=g_0+\sum R_j g_j} \{ \|g\|_{L^\infty} + \sum_{j=1}^{n} \|g_j\|_{L^\infty} \}$. De un modo mas general , sobre los espacios BMO y H^1 (y sus respectivas generalizaciones) se hacen actuar operadores de tipo convolución , como son , por ejemplo, los operadores integrales singulares de Calderón – Zygmund

$Tf(x) = \text{v.p.} \int_{R^n} k(x-y) f(y)\, dy$, donde el núcleo k es homogéneo de grado - n , esto es , $k(\lambda x) = \lambda^{-n} K(x)$ ó $k(x) = |x|^{-n} k(\frac{x}{|x|})$, $\int_\Sigma k(x)\, d\sigma = 0$; además , k satisface ciertas condiciones de regularidad, como $k \in C^\infty(\Sigma)$ (contorno de la bola unitaria). Un resultado fundamental de la teoría clásica es : " $T : L^p \to L^p$, $1 < p < \infty$, es un operador continuo " . Los casos críticos son $p = 1$ y $p = \infty$, lo que resalta el papel de los espacios BMO y H^1 . De un modo general , en el contexto de los operadores de tipo convolución , se tiene ([16]) : " si $g \in L^1$, entonces $T : H^1 \to H^1$, $f \to g * f$, es un operador continuo y se extiende a un operador continuo sobre BMO , con norma $\leq \|g\|_{L^1}$ ".



Teorema de la Dualidad

La extensión de estos espacios , H^1 y BMO , a espacios tipo Sobolev es de alguna manera natural. Así , sea $k \in Z^+$; por definición

$H^1_k = \{ f \in H^1 / D^\alpha f \in H^1, |\alpha| \leq k \}$; $\|f\|_{H^1_k} = \|f\|_{H^1} + \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{H^1}$;

$BMO_k = \{ f \in BMO / D^\alpha f \in BMO, |\alpha| \leq k \}$; $\|f\|_{BMO_k} = \|f\|_{BMO} + \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{BMO}$, los que con sus respectivas normas son espacios de Banach ; entonces se tiene , [16] , : si k es un núcleo de Calderón-Zygmund , entonces $T : H^1_k \to H^1_k$ ($f \to k * f$) y $T : BMO_k \to BMO_k$ ($f \to k * f$) son operadores continuos ". Se observa que estos resultados también aparecen en [7]. Se verifica que los espacios H^1_k , k = 1, 2 , ... son isomorfos entre sí , así mismo lo son los espacios BMO_k. El isomorfismo está dado por por el operador integral fraccional I , definido vía

$[If]^\wedge(x) = \varphi^{-1}(x) \hat{f}(x)$, donde $\varphi \in C^\infty$, $\varphi(x) = |x|$ si $|x| \geq 1$. De un modo general , si s es un número real , se define I^s vía $[I^s f]^\wedge(x) = \varphi^{-s}(x) \hat{f}(x)$, que permite definir los espacios de Banach $H^1_s = I^s(H^1)$ y $BMO_s = I^s(BMO)$ con sus respectivas normas

$\|f\|_{H^1_s} = \|I^{-s} f\|_{H^1}$ y $\|f\|_{BMO_s} = \|I^{-s} f\|_{BMO}$. Para $s \in R$, los H^1_s son isomorfos entre sí , así como los son los BMO_s . Es conveniente resaltar que H^1 ni BMO son espacios de Hilbert , lo que sigue de un argumento debido a Neri , [16] , en donde se afirma que H^1 no es reflexivo , esto es ,

$(H^1)^{**} = (BMO)^* \neq H^1$.

3. Espacios BMO_φ . Spanne , [21] , ha extendido los espacios BMO a través de los espacios BMO_φ donde $\varphi(t)$ es una función positiva, no-decreciente , definida sobre (0 , ∞) . Por definición $BMO_\varphi = \{ f \in L^1(Q_0) \,/\, [f]_{BMO_\varphi} = \sup_{Q \subset Q_0} \frac{1}{\varphi(r)} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|\, dx \leq M < \infty \}$

donde r es la longitud del lado del cubo Q . Con la respectiva norma , BMO es un espacio de Banach . La importancia de estos espacios es que para casos particulares de φ se obtienen clásicos espacios de funciones. Veamos .

a . Si $\varphi(t) = 1$, $BMO_\varphi \simeq BMO$ ($\simeq$ es isomorfismo);

b . Si $\varphi(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, entonces $BMO_\varphi \simeq \Lambda_\alpha$, donde Λ_α es el espacio de Lipschitz $\{ f \in L^\infty \,/\, [f]_{\Lambda_\alpha} = \sup_{x,y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq M < \infty \}$. Si $-1 \leq \alpha < 0$, $BMO_\varphi \simeq L^{p,\lambda}$, $\alpha = -\frac{\lambda}{p}$, donde $L^{p,\lambda}$ es el espacio de Morrey

$\{ f \in L^1(Q_0) / \; [f]_{L^{p,\lambda}} = \sup \{ \frac{1}{r^\lambda} \int_Q |f(x)|^p\, dx \}^{\frac{1}{p}} \leq M < \infty \}$, (remarcamos que $|Q| = r^n$).

Spane estudia la caracterización de los espacios BMO_φ y , a fin de evitar expresiones de carácter técnico , remarcamos solo algunos resultados .

i . Si $\varphi(t)t^{-1}$ es casi decreciente (esto es , si $t' \leq t$, $\varphi(t)t^{-1} < \varphi(t')(t')^{-1}$), entonces

$$f(x) = \int_{|x|}^{r} \varphi(t)\frac{dt}{t} \in BMO_\varphi .$$

ii . Si $\varphi_1(t)t^{-1}$ es no-creciente , $BMO_{\varphi_1} \subset BMO_{\varphi_2}$ si y solo si $\exists$ c , δ constantes tal que $\varphi_1(r) \leq c\,\varphi_2(r)$, $0 < r < \delta$. La inclusión es continua .

iii . Si $\int_0^\delta \varphi(t)\frac{dt}{t} < \infty$, entonces todo $f \in BMO_\varphi$ es continuo y su módulo de continuidad $w(f,r) = \sup_{|x-y| \leq r} |f(x) - f(y)|$ satisface $w(f,r) \leq c\left(\int_0^r \varphi(t)\frac{dt}{t}\right)[f]_{BMO_\varphi}$.

iv . Si $\varphi(t)t^{-1}$ es casi-decreciente y $\int_0^\delta \varphi(t)\frac{dt}{t} = +\infty$, entonces en BMO_φ existen funciones no continuas ni limitadas.

Casos Particulares . [21]. Veamos los siguientes argumentos .

a . Si $\varphi(t) = 1$, entonces $\frac{1}{t}$ es casi decreciente , $\int_0^\delta \frac{dt}{t} = +\infty$ y $BMO_\varphi \simeq BMO$ contiene funciones no limitadas . Esto es el resultado de John-Nirenberg [11] , quienes prueban que $f(x) = \log|x| \in BMO$. Así iv . es una generalización del resultado de John-Nirenberg .

b . Sea $\varphi(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$. Se observa que $\int_0^r \varphi(t)\frac{dt}{t} = \int_0^r \frac{t^\alpha}{t}dt = \frac{r^\alpha}{\alpha} < \infty$. Luego $w(f,r) \leq c\frac{r^\alpha}{\alpha}[f]_{BMO_\varphi} \leq c\,r\,[f]_{BMO_\varphi}$; si r es pequeño , w(f,r) es pequeño y f es continuo.Concretamente : $BMO_{t^\alpha} \simeq \Lambda_\alpha$ (teorema de Meyers-Campanato) . Por otro lado , si en general $\Lambda_\varphi = \{ f / [f]_{\Lambda_\alpha} = \sup_{x,y \in R^n} \frac{|f(x) - f(y)|}{\varphi(|x-y|)} \leq M < \infty \}$, entonces $\Lambda_\alpha \subset BMO_\varphi$ continuamente.

4 . Caracterizaciones de BMO_φ . [10 a. y b.] . S. Janson ha obtenido interesantes caracterizaciones de los espacios BMO_φ. La primera de ellas es una extensión de la caracterización de Ch.Fefferman ([7]) ; la segunda está relacionada a la función conmutador de un operador integral singular. En la primera idea Janson considera una condición extra para φ; así, asume que $\int_r^\infty \frac{\varphi(t)}{t}\frac{dt}{t} \leq c\ \frac{\varphi(r)}{r}$ (1), (condición de crecimiento). Se observa que se tiene $\int_r^\infty \frac{\varphi(t)}{t}\frac{dt}{t} \geq \frac{\varphi(r)}{r}$ y que la condición (1) implica que la función $\theta(r) = r\int_r^\infty \frac{\varphi(t)}{t}\frac{dt}{t}$, la que es positiva , no-decreciente y con tinua , define al mismo espacio BMO_φ , lo que sugiere que bajo la hipótesis (1) , φ puede ser asumida continua en BMO_φ. Bajo esas hipótesis , Janson prueba que :

" $f \in BMO_\varphi$ si y solo si $f = f_0 + \sum_{j=1}^{n} R_j f_j$, donde $f_j \in \Lambda_\alpha$, j = 1 , 2 , ..., n" . La parte crucial es la condición "si " ya que la condición " y solo si es claro pues $R_j : \Lambda_\alpha \to BMO_\varphi$ es un operador continuo , de donde $\| f\|_{BMO_\varphi} \leq \|f_0\|_{BMO} + \sum_{j=1}^{n} \|R_j f_j\|_{BMO_\varphi} \leq c_0 \|f_0\|_{\Lambda_\varphi} + \sum_{j=1}^{n} c_j \|f_j\|_{\Lambda_\varphi}$.

La prueba de la condición "si" es un tanto técnica y elaborada [10.a] . En cuanto a la segunda caracterización, sea el operador integral singular

$T g(x) = \text{v.p.}\int k(x-y)\, g(y)\, dy$; hemos mencionado que $T : L^p \to L^p$, $1 < p < \infty$, es un operador acotado y que esta condición falla en los casos límites $p = 1 , \infty$; sin embargo T es de tipo débil (1 , 1) , esto es , satisface la condición $|\{ x \in R^n / |T f(x)| > \alpha \}| \leq \frac{A}{\alpha} \|f\|_{L^1}$, donde $|\{...\}|$ es la medida de Lebesgue del conjunto { ... } . La característica que Janson da para BMO_φ es vía una condición de regularidad de un operador análogo a T , definido sobre L^p y con valores en un apropiado espacio de Orlicz . Concretamente , sea f definida sobre R^n y sea M la función multiplicación por f , la función commutador , asociado a T , es por definición $c_f = MT - TM$;

Así $c_f\, g(x) = MT g(x) - TM g(x) = f(x)\, \text{v.p.}\int k(x-y)\, g(y)\, dy - \text{v.p.}\int k(x-y)\, f(y)\, g(y)\, dy =$

$\text{v.p.}\int [\, f(x) - f(y)\,]\, k(x-y)\, g(y)\, dy$. Coifman-Rochberg-Weiss probaron que si $f \in BMO$ entonces $c_f : L^p \to L^p$, $1 < p < \infty$, es un operador acotado. Motivado por este resultado , Janson [10.b] establece una caracterización para BMO_φ bajo la siguiente hipótesis : sea $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ con $\alpha \leq 1$;

sean φ y ψ dos funciones positivas no-decrecientes sobre R^+ tales que $\frac{\varphi(t)}{t}$ es decreciente , ψ es convexa con $\psi(0) = 0$, relacionadas entre si por $\varphi(r) = r^{\frac{n}{p}}\, \psi^{-1}(r^{-n})$. Entonces

$c_f : L^p \to L_\psi$ es continua <u>si y solo si</u> $f \in BMO_\varphi$, donde L_ψ es el espacio definido vía

$L_\psi = \{ f / \int \psi(\lambda |f|)\, dx < \infty \}$ para algún $\lambda > 0$. Además ,

$\| c_f \|_{\mathcal{L}(L^p, L_\psi)} \simeq \|f\|_{BMO_\varphi}$.

5 . Espacios de Hardy H^p . [8] , [7] , [5] , [26] . La evolución de los espacios de Hardy está íntimamente ligada a fundamentales cuestiones del análisis real y complejo. Sea $f \in L^p(R)$, $1 < p < \infty$, a la cual asociamos la función analítica $F(x+it) = U(x,t) + i\,V(x,t)$, donde $U(x,t) = P(x,t) * f$, siendo $P(x,t) = \dfrac{t}{\pi(x^2+t^2)}$ el núcleo de Poisson y $V(x,t) = Q(x,t) * f$, con $Q(x,t) = \dfrac{y}{\pi(x^2+t^2)}$ el núcleo conjugado de Poisson. Entonces se sabe que $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+it)|^p\,dx \leq A_p \|f\|^p_{L^p}$, $\forall\, t > 0$, lo que sugiere en general definir

$$H^p(R) = \{ F(x+it) \text{ analítica} \,/\, \|f\|_{H^p} = \Big(\sup_{t>0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+it)|^p\, dx \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \}.$$

Asi tenemos la aplicación inyectiva bicontinua $L^p \to H^p$, $f \to F(x+it)$, en donde se tiene además $\|f\|_{L^p} \leq A\, \|f\|_{L^p}$ $\|F\|_{H^p} \leq$. Aún mas, tal aplicación es sobreyectiva, esto es, si $F \in H^p$, $1 < p < \infty$, $\exists$ $f \in L^p(R)$ tal que F es la correspondiente función analítica asociada a f.

En síntesis: si $1 < p < \infty$, L^p es isomorfo (topológicamente) con H^p. En el caso $p = 1$ se verifica que la aplicación $H^1 \to L^1(R)$, $F(x+it) \to f(x) = \lim_{t \to 0} U(x,t)$, es inyectiva y continua pero no sobre (la imagen de H^1 es la clase de las funciones en L^1 cuyas transformadas de Hilbert están también en L^1). El caso n-dimensional exige condiciones extras para definir $H^p(R^n)$. Así, sean $x \in R^n$, $t \in R_+$ y $F(x,t) = (u_0(x,t), \dots, u_n(x,t))$, donde las componentes son funciones armónicas en R^{n+1}_+ y la correspondiente matriz jacobiana J tiene traza cero. Bajo ciertas condiciones (" condiciones de Cauchy-Riemann generalizadas ") se define

$H^p(R^n) = \{ F(x,t) \,/\, \|F\|_{H^p} = \Big(\sup_{t>0} \int_{R^n} |F(x,t)|^p\, dx \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \}$, $1 < p < \infty$. Remarcamos que esta definición tiene sentido para $0 < p \leq \infty$; el rango $0 < p < 1$ es mas delicado y será tratado después.

a. Caracterización de los Espacios H^p . [7] , [4] . Los espacios H^p son caracterizados en términos de la función maximal no-tangencial . Veamos. Sea $u(x,t)$ una función armónica definida sobre R^{n+1}_+ a la que se le asocia la función maximal $u^*(x) = \sup_{|x-y|<t} |u(y,t)|$, llamada función mximal no-tangencial de $u(x,t)$ ó de f si $u(x,t)$ es la integral de Poisson de f . En particular si

$n = 1$ y $F(x,t) = u(x,t) + v(x,t) \in H^p(R)$, se verifica que la función $F^*(x) = \sup_{|x-y|<t} |F(y+it)|$ está en $L^p(R)$ y $\|F^*\|_{L^p} \simeq \|F\|_{H^p}$. Además se tiene que $\|u^*\|_{L^p} \simeq \|F\|_{H^p}$. Recíprocamente, si u es una función armónica en R^2_+, tal que $u^* \in L^p$, entonces u es la parte real de un elemento en H^p.

En conclusión, se tiene el fundamental resultado de Burkholder-Gundy-Silverstein (1971) : " los elementos de H^p se identifican con las funciones armónicas cuyas funciones maximales no-tangenciales están en $L^p(R)$ ". Un argumento similar vale en R^n, lo que permite dar la definición :

$$H^p(R^n) = \{ u(x,t) \text{ armónica} \,/\, u^*(x) \in L^p(R^n) \}, \text{ donde } \|u\|_{H^p(R^n)} \simeq \|u^*\|_{L^p},\ 1 < p < \infty .$$

El estudio de los espacios de Hardy y de BMO fueron estimulados por el fundamental trabajo de Fefferman- Stein [7] , donde se estudian condiciones equivalentes que permiten dar otra caracterización para $H^p(R^n)$ .Si $u(x,t) \in H^p(R^n)$, se tiene que existe $\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x)$ c.t.p. y $\lim_{t\to 0}\int_{R^n} | u(x,t) - f(x)|^p dx = 0, p > 0$. Asi L^p es un espacio traza de H^p , el que tiene significado para $p \geq 1$. Así , para incluir el caso $0 < p < 1$, en [7] se considera el uso de las distribuciones. Si $u(x,t) \in H^p$ y $\phi \in S$ entonces $\lim_{t\to 0}\int u(x,t)\,\phi(x)\,dx$ existe y es finito . Así , para cada $u \in H^p$ existe $f \in S'$ tal que $\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x)$ en S'. Aún mas, se tiene la caracterización de Fefferman-Stein :

Sea $\phi \in S$ y su dilatación $\phi_t(x) = t^{-n}\phi(xt^{-1})$. Si $f \in S'$ y $p > 0$, son equivalentes :

(1). $f(x) = \lim_{t\to 0} u(x,t)$ en S', donde $u \in H^p(R^n)$;

(2) . para algún $\phi \in S$, $\int\phi = 1$, $f^+(x) = \sup_{t>0} |(f*\phi_t)(x)| \in L^p(R^n)$;

(3) . para algún $\phi \in S$, $\int\phi = 1$, $f^*(x) = \sup_{|x-y|<t} |(f*\phi_t)(x)| \in L^p(R^n)$;

(4) . si $\|\phi\|_N = \{\int_{R^n}(1+|x|)^N \sum_{|\alpha|\leq N}[D^\alpha\phi(x)]^2 dx\}$, donde $N = N(p)$ es un número suficientemente grande , entonces

$$f^{**}(x) = \sup_{\|\phi\|_N\leq 1} [\sup_{|x-y|<t} |(f*\phi_t)(y)|] \in L^p(R^n).$$

Además se tiene , $\|u\|_{H^p} \simeq \|f^+\|_{L^p} \simeq \|f^*\|_{L^p} \simeq \|f^{**}\|_{L^p}$.

Asi se tiene otra definición de H^p , la que no depende de las funciones analíticas ó armónicas :

H^p = { $f \in S'$ / se satisface (2), (3) ó (4) } ; en otras palabras :

H^p = { distribuciones frontera de funciones en $H^p(R^n)$ } . Este enfoque de los espacios H^p permite obtener resultados que con los espacios de Hardy clásicos no es posible ; tal es el caso de la idea de átomo debido a Coifman [4] , quien construye una representación explícita para los elementos $f \in H^p$ en la recta, $0 < p \leq 1$.

b. H^p - Atómicos . [4] . De un modo general , para R^n , $n \geq 1$, se tiene la definición :

" sea $0 < p \leq 1$; la función a (x) es llamada un p-átomo si

i . sopp $a(x) \subset Q$, para algún cubo Q de lados paralelos a los ejes coordenados ;

ii . $|a(x)| \leq |Q|^{-\frac{1}{p}}$;

iii . $\int a(x)\, x^\alpha\, dx = 0$, $\forall\, \alpha$ tal que $|\alpha| \leq N = [\,n(\frac{1}{p} - 1)\,]$, donde [ ] = parte entera .

Nota . Si $n = 1$, el cubo Q es entendido ser el intervalo I .

Teorema. (Coifman, [4]). Descomposición atómica de elementos de $H^p(R)$. " Sea $f \in S'$. entonces, $f \in H^p(R)$, $0 < p \leq 1$, si y solo si existe $\{\lambda_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ de números reales tal que $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p < \infty$ y una sucesión de p-átomos $\{a_i\}$ tal que $f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i$ en el sentido de las distribuciones temperadas. Además, $\|f\|_{H^p} = \inf\{\sum_i |\lambda_i|^p / f = \sum_i \lambda_i a_i\}$ ".

Este teorema, de gran significado analítico, ha sido objeto de importantes extensiones. para la prueba de la condición suficiente ver [17], pag. 51. La prueba del teorema hace uso de significativos argumentos geométricos y de la descomposición de Calderón-Zygmund para elementos de $H^p(R)$, argumentos que son fundamentales en este tipo de análisis. Las ideas usadas en la prueba de la parte " y solo si " pueden exterderse a R^n, lo que no ocurre con " si ", ya que en R^n, $n > 1$, existe la dificultad topológica de descomponer todo abierto en una sucesión disjunta de cubos, como ocurre en la recta (y que es la base de la prueba de Coifman). La parte crucial para tal extensión es para el rango $0 < p < 1$, ya que el caso $p = 1$ es extendido a R^n vía dualidad. Este problema fue resuelto por Latter, [12], quien usó argumentos geométricos del tipo descomposición – Whitney. El problema de la descomposición atómica de elementos en un espacio de Hardy ha sido ocupación de las analistas en décadas pasadas. Muchas otras descomposiciones se han logrado en diferentes contextos de los espacios H^p (parabólicos, homogéneos,martingalas, ...).

6. Espacios BMO y su Relación con Operadores Maximales. [7], [20].

En la sección anterior ya hemos visto como los espacios H^p pueden ser definidos en términos de ciertas condiciones maximales ; en esta oportunidad veremos la relación entre los operadores maximales de Hardy – Littlewood y los espacios BMO. Tales operadores juegan además un papel fundamental en el desarrollo del análisis armónico moderno. La idea básica moderna se remonta al teorema fundamental del cálculo integral y a su extensión según el teorema clásico de diferenciación de Lebesgue : " si $f \in L^1_{loc}(R^n)$, entonces

$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} f(t)\, dt = f(x)$ c.t.p. , donde $Q(x,r)$ es un cubo de centro x y lado de longitud r ". De alguna manera, esto sugiere considerar el operador maximal de Hardy – Littlewood definido vía : " si $f : R^n \to R$ es medible – L,

$\Lambda f(x) = \sup_r \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |f(t)|\, dt$. Observamos que el papel de los cubos $Q(x,r)$ puede ser hecho por las esferas $S(x,r)$, de centro x y radio r (en general en análisis tal sustitución no siempre es factible). Un dato esencial es que $\Lambda : L^p \to L^p$, $1 < p \leq \infty$, es un operador continuo y que Λ es de tipo débil (1 , 1). Este resultado y el teorema de diferenciación de Lebesgue implican que si $1 < p \leq \infty$, $f \in L^p$ si y solo si $\Lambda f \in L^p$. Miremos ahora a la definición de BMO dada. Si $f \in L^1_{loc}$ se considera ahora un análogo operador maximal :

$\Lambda^{\#} f(x) = \sup_r \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |f(t) - f_Q|\, dt$; (el hecho de que el cubo esté centrado en x no es esencial ; podría Q solo contener a x). Hemos dicho que $f \in L^{\infty}$ si y solo si $\Lambda f \in L^{\infty}$; en el caso

$\Lambda^{\#}$ solo se tiene que $f \in L^{\infty}$ implica que $\Lambda^{\#} f \in L^{\infty}$. La otra implicancia es lo que caracteriza a BMO. Así, si $f \in L^1_{loc}$ y $\Lambda^{\#} f \in L^{\infty}$ entonces $f \in$ BMO. Si $1 \leq p_0 \leq p$, $1 < p < \infty$ y $f \in L^{p_0}$ entonces $f \in L^p$ si y solo si $\Lambda^{\#} f \in L^p$. Estas consideraciones fueron expuestas y estudiadas significativamente por Fefferman – Stein [7] y también se encuentran en el libro de C.Sadosky [20].

7. Espacios BMO Pesados. [15]. Muckenhoupt - Wheeden (1976) han considerado los espacios pesados BMO_w, donde el peso w es una función positiva en $L^1_{loc}(R^n)$. Por definición : " $f \in BMO_w$ si $f \in L^1_{loc}(R^n)$ y existe una constante $M < \infty$ tal que

$$\sup_Q \frac{1}{\int_Q w(x)\,dx} \int_Q |f(x) - f_Q|\,dx \leq M,$$

donde f_Q es el promedio $\frac{1}{|Q|}\int_Q f\,dx$. Observamos que si $w = 1$, $BMO_w \simeq$ BMO de John – Nirenberg. Algunas veces BMO_w es definido por la condición

$$\sup_Q \frac{1}{\int_Q w(x)\,dx} \int_Q |f(x) - c_Q|\, w(x)\,dx \leq M,$$

donde

$$c_Q = \frac{\int_Q f(x)\,w(x)\,dx}{\int_Q w(x)\,dx}.$$

Si $w \equiv 1$, $c_Q = f_Q$ y BMO_w = BMO. De un modo general, la consideración de espacios de funciones pesados es una actitud natural de generalizar los espacios clásicos ; la cuestión es determinar las propiedades de la función w a fin de que ciertos hechos esenciales sigan valiendo, como lo es (por ejemplo) caracterizar w para ciertos operadores usuales sean continuos sobre espacios pesados. Fue Benjamín Muckenhoupt quién descubrió las condiciones esenciales para que la teoría de estos espacios pesados sean compatibles con los hechos conocidos en el caso no pesado. En esta dirección, se dice que : " $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, si existe una constante c tal que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} \leq c \quad , \forall\, Q \subset R^n .$$

$w \in A_1$ si existe una constante c tal que $\Lambda w(x) \leq c\, w(x)$, donde Λ es el operador maximal de Hardy – Littlewood.

$w \in A_{\infty}$ si existen constantes α y β tal que $0 < \alpha, \beta < 1$, y para todo cubo Q y todo subconjunto medible E de Q, si $|E| < \alpha |Q|$, entonces

$$\int_E w\,dx < \beta \int_Q w\,dx$$

(equivalentemente, $w \in A_{\infty}$ si y solo si $w \in A_p$, para algún p).

A manera de ejemplo veamos una generalización, al caso pesado, de un teorema esencial en la teoría de los espacios BMO debido a John – Nirenberg. Se trata de la estimación de la función distribución de elementos de BMO vía una exponencial. Concretamente, " si $f \in$ BMO y $\alpha > 0$

entonces $|\{x\in Q \,/\, |f(x) - f_Q| > \alpha\}| \leq B\, e^{-b\alpha\|f\|^{-1}_{BMO}}\, |Q|$, $Q \subset R^n$, donde B y b son apropiadas constantes que dependen solo de n ".

El recíproco de este resultado es inmediato ,obteniéndose así una generalización de BMO vía la naturaleza exponencial de la función distribución de sus elementos . La generalización al caso pesado , debido a Muckenhoupt - Wheeden [15] , establece : si $f\in BMO_w$, $\alpha > 0$ y $w \in A_1$,

entonces existen constantes B y b tal que

$$\int_{\{x\in Q \,/\, |f - f_Q| > \alpha w(x)\}} w(x)\, dx \leq B\, e^{-b\alpha\|f\|^{-1}_{BMO_w}} \int_Q w(x)\, dx \ , \ Q \subset R^n.$$

Obsérvese que si $w \equiv 1$ se recupera el teorema de John – Nirenberg .

8 . Espacios BMO y H^p en Espacios Homogéneos . [5] , [13] , [14] , [23] , [1] . Sectores importantes del análisis armónico han sido llevados al contexto de los espacios homogéneos por , entre otros , R.Coifman – G.Weiss , R.Macías – Segovia , D.Stegenga , A.P.Calderón . Veamos la definición de estos espacios . Sea X un espacio topológico asociado de una medida positiva de Borel μ y de una casi-distancia $d : X \times X \longrightarrow R^+$ tal que

i . $d(x,x) = 0$; ii . $d(x,y) = d(y,x) > 0$ si $x \neq y$;

iii . existe una constante k tal que $d(x,z) \leq k[d(x,y) + d(y,z)]$, $\forall\, x,y,z \in X$;

iv . las esferas $B_r(x) = \{ y\in X \,/\, d(x,y) < r \}$ forman una base de vecindades de X , esto es , dada una vecindad N de x existe una esfera $B_r(x)$ tal que $B_r(x) \subset N$;

v . las esferas $B_r(x)$ son subconjuntos medibles de X , $\mu(B_r(x)) > 0$ si $r > 0$; además , existe $a > 1$ tal que $\mu(B_{2r}(x)) \leq a\, \mu(B_r(x)) < \infty$.

<u>Definición</u> . (X, μ, d) es llamado un espacio homogéneo .

En este universo el BMO homogéneo es el espacio de las funciones medibles $f\in L^1_{loc}(X)$ tal que

$$[f]_{BMO(X)} = \sup \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(x) - f_B|\, d\mu(x) \leq M < \infty \ , \ 1 < p < \infty, \ \text{con } f_B = \frac{1}{\mu(B)}\int_B f\, d\mu.$$

Si $\mu(X) = \infty$, se considera $\|f\|_{BMO(X)} = [f]_{BMO(X)}$ y si μ es finito ,

$\|f\|_{BMO(X)} = \left| \int_X f(x)\, d\mu(x) \right| + [f]_{BMO(X)}$. Con las identificaciones del caso , $f \sim g$ si $f - g$ es constante , entonces $BMO_{(X)}$ es un espacio de Banach.

R^n con la usual distancia euclideana y con una medida de Borel , es un espacio homogéneo. Así mismo lo es la esfera $\Sigma_{n-1} = \{ x\in R^n \,/\, |x| = 1 \}$ con la medida μ Invariante por rotaciones y con la casi –distancia $d(x,y) = |1 - \langle x,\bar{y}\rangle|^{\alpha}$, donde $\alpha > 0$, $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Muchos resultados clásicos han sido llevados al lenguaje de los espacios homogéneos ; así se tiene , por ejemplo, que el operador maximal de Hardy – Littlewood

$\Lambda f(x) = \sup_{r} \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)|\, d\mu(y)$ es un operador de tipo débil $-(1,1)$. Así mismo se obtiene el apropiado teorema de Lebesgue sobre diferenciación de integrales. Stegenga ha probado la versión homogénea del teorema de caracterización, exponencial, de John – Nirenberg haciendo uso del apropiado lema de descomposición de Calderón – Zygmund.

A fin de comprender la versión homogénea del teorema de dualidad de Ch. Fefferman, y que es probado en Macías [13] y en Coifman – Weiss [5.a], veamos la idea de (p,q) –átomo la que servirá parq definir a los espacios de Hardy $H^p(X)$. Sean $0 < p < q$ con $p \leq 1 \leq q \leq \infty$. La función a (x) es un (p,q) –átomo si :

i . sopp $a(x) \subset B_r(x_0)$ para alguna esfera $B_r(x_0)$;

ii . $\left\{ \frac{1}{\mu(B_r(x_0))} \int |a(x)|^q \, d\mu(x) \right\}^{\frac{1}{q}} \leq \{\mu(B_r(x_0))\}^{-\frac{1}{p}}$;

iii . $\int a(x)\, d\mu(x) = 0$.

Observemos que en iii . no tiene sentido la expresión $a(x)\, x^{\alpha}$ pues X no posee necesariamente una estructura algebraica .

Consideremos ahora a los espacios de Lipschitz homogéneos Λ_α, con $\alpha > 0$ pequeño , $0 < \alpha \leq 1$. Por definición

$\Lambda_\alpha \equiv \Lambda_\alpha(X) = \{$ funcionales f sobre X / $[f]_{\Lambda_\alpha} = \sup_{x,y} \frac{|f(x) - f(y)|}{(\mu(B))^{\alpha}} \leq M < \infty \}$,con B cualquier esfera conteniendo x e y ; $M = M(f)$.

Sea a(x) un (p,q) – átomo , $0 < p < 1$ y $\alpha = \frac{1}{p} - 1$, entonces la aplicación

$h : \Lambda_\alpha \to R$, $f \to \int_X a(x) f(x)\, d\mu$ pertenece al espacio $\Lambda_\alpha^{\#}$ dual de Λ_α , ya que

$$\left| \int_X a(x) f(x)\, d\mu \right| = \left| \int_{B_r(x_0)} a(x) f(x)\, d\mu \right| = \left| \int_{B_r(x_0)} a(x)\, [f(x) - f(x_0)]\, d\mu \right|$$

$\leq$ (poniendo $\|f\|_{\Lambda_\alpha} = [f]_{\Lambda_\alpha}$ si $\mu(X) = \infty$; $\|f\|_{\Lambda_\alpha} = \left|\int_X f(x)\, d\mu\right| + [f]_{\Lambda_\alpha}$ si $\mu(X) < \infty$)

$$\leq \|f\|_{\Lambda_\alpha} [\mu(B_r(x_0))]^{\frac{1}{p}-1} \int_{B_r(x_0)} |a(x)|\, d\mu \leq \|f\|_{\Lambda_\alpha} .$$

<u>Los Espacios</u> <u>$H^{p,q}$</u>. Sea $0 < p < 1 \leq q$; por definición

$H^{p,q} \equiv H^{p,q}(X) = \{ h \in \Lambda_\alpha^{\#}, \alpha = \frac{1}{p} - 1 \ / \ h = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j$, descomposición atómica donde a_j es un (p,q) – átomo y $\sum |\lambda_j|^p < \infty \}$.

La condición $\sum |\lambda_j|^p < \infty$ garantiza la convergencia de la serie $\sum \lambda_j a_j$, lo que hace consistente a la definición ; si $\|h\|_{H^{p,q}} = \inf \{ \sum |\lambda_j|^p / h = \sum \lambda_j a_j \}$, ello no es una norma pero

$d(f,g) = \| f - g \|_{H^{p,q}}$ es una métrica y $H^{p,q}$ es un espacio métrico completo. Un resultado esencial en la teoría de estos espacios es que si $p < q < \infty$, entonces $H^{p,q} = H^{p,\infty}$, con métricas equivalentes. Este hecho permite definir a los espacios de Hardy homogéneos vía :

si $p \leq 1$ entonces $H^p \equiv H^p(X)$ es cualquiera de los espacios $H^{p,q}$, $p < q \leq \infty$, $1 \leq q$.

Teorema de la Dualidad .

" Una particular y elegante aplicación de la teoría de ondículas (wavelets) es el estudio del espacio de Hardy (real) $H^1(R^n)$ y su espacio dual $BMO(R^n)$.

Yves Meyer

$$\text{Tesis : } (H^p(X))^* = \begin{cases} \Lambda_\alpha(X) & \text{si } p < 1, \alpha = \frac{1}{p} - 1 \quad \dots \text{(i)} \\ BMO(X) & \text{si } p = 1. \quad \dots \text{(ii)} \end{cases}$$

En otras palabras , por (i) cada funcional lineal continua sobre H^p es una aplicación de la forma $h \to \sum \lambda_j \int a_j f \, d\mu$, donde $f \in \Lambda_\alpha$ y $h = \sum \lambda_j a_j \in H^p$. Por (ii), si $h = \sum \lambda_j a_j \in H^1$ entonces $\lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \int f a_j \, d\mu$ es una funcional lineal continua $h \longrightarrow \langle h, f \rangle$ bien definida para cada $f \in BMO$, con norma equivalente a $\| f \|_{BMO}$. Además , cada elemento de $(H^1)^*$ tiene esa forma .

9 . Funciones Armónicas con Trazas en Espacios de Funciones . [3.a,b,c] , [21] , [22] .

Los espacios BMO están contenidos en un interesante espacio de funciones , los espacios $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ estudiados por Campanato , Spanne , Stampacchia , entre otros (ver los citados trabajos). Por definición: sea, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n + p$ y $f \in L^1_{loc}(R^n)$. Entonces, $f \in \mathcal{L}^{p,\lambda}$ si

$$\| f \|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} = \| f \|_{L^1_{loc}} + \sup_{Q} \{ \frac{1}{r^\lambda} \int_Q | f(x) - f_Q |^p dx \}^{\frac{1}{p}} \leq M < \infty$$

donde r es la longitud del lado del cubo Q . Formalmente , $\mathcal{L}^{1,n} \simeq BMO$. La importancia de los espacios $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ está en que ellos globalizan ciertos espacios de funciones clásicos , como son los espacios L^p, $L^{p,\lambda}$ (Morrey) , Λ_α y a los propios espacios BMO . Es sabido la gran utilidad de esos espacios en problemas de EDP de tipo elípticos y parabólicos , lo que estimula su estudio en problemas concretos. Un problema fundamental en la evolución del análisis fue el problema de Dirichlet . Veamos. Sea $R^{n+1}_+ = \{ (x,t), x \in R^n, t \in R^+ \}$. $u(x,t)$ es una función armónica si $u \in C^2(R^{n+1}_+)$ y $\Delta u = 0$, donde $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$. Dado f definida sobre R^n, el Problema de Dirichlet consiste en encontrar $u(x,t)$ tal que $\Delta u = 0$ sobre R^{n+1}_+ y $\lim u(x,t) = f(x)$ cuando

$t \to 0$ sobre R^n. Es claro que para tenerse un problema bien puesto es necesario dar ciertas condiciones extras a f. Informalmente, sabemos que la solución de este problema está dado por la integral de Poisson de f, $u(x,t) = (P_t * f)(x)$, donde $P_t(x) = c_n \dfrac{1}{[t^2 + |x|^2]^{\frac{n+1}{2}}}$

es el núcleo de Poisson. En esta orientación se tienen las siguientes caracterizaciones, según la ubicación de las trazas de las funciones armónicas. Si $1 < p \leq \infty$, H^p es el espacio de Hardy ya considerado. Se tiene $H^p = P_t * L^p$, con equivalencia de las normas. Si $\mathcal{B}$ es la clase de las medidas de Borel finitas, $H_{\mathcal{B}}$ es el espacio de las funciones armónicas u(x,t) tal que

$\sup_{t>0} \| u(\cdot, t) \| < \infty$. Se tiene $H_{\mathcal{B}} = P_t * \mathcal{B}$, con equivalencia de las normas. Este tipo de ecuaciones sugerió considerar otras nuevas con f en nuevos espacios trazas; ¿ qué sucede si

$f \in BMO$? . Esta cuestión está relacionada con el trabajo de Fefferman – Stein [7]. Si $f \in BMO$, entonces $\displaystyle\int_{R^n} \frac{|f(x)|}{1+|x|^{n+1}} dx < \infty$, lo que da consistencia a la integral de Poisson

$u(x,t) = (P_t * f)(x)$ de una función en BMO. Además se verifica que ~~que~~ para todo $f \in BMO$ y todo cubo Q de lado $d > 0$ se tiene que existe una constante $A > 0$ tal que

$\displaystyle\frac{1}{|Q|}\int_0^d\int_Q |\nabla u(x,t)|^2 t \, dx\, dt \leq A [f]^2_{BMO}$, donde $|\nabla u(x,t)|^2 = (\frac{\partial u}{\partial x_1})^2 + \dots (\frac{\partial u}{\partial x_n})^2 + (\frac{\partial u}{\partial t})^2$ y $u(x,t) = (P_t * f)(x)$. Tal implicancia dio lugar a una nueva caracterización en la dirección señalada antes. . Así Fabes-Johnson-Neri [6] consideran al espacio

$$HMO = \{ u(x,t) \text{ armónica } / \ [u]_{HMO} = \sup_Q \Big[\frac{1}{|Q|}\int_Q\int_0^d |\nabla u(x,t)|^2 t \, dx\, dt \ \Big]^{\frac{1}{2}} < \infty \ \}.$$

Corolario inmediato es que si $f \in BMO$ entonces su integral de Poisson $u(x,t) = (P_t * f)(x)$ está en

HMO. La caracterización de Fabes-Johnson-Neri es $HMO = P_t * BMO$, con equivalencias de las normas.

Dado que BMO está inmerso en $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ surge la cuestión de llevar esta última ecuación a espacios con trazas en $\mathcal{L}^{p,\lambda}$. Este problema fue también resuelto por Fabes-Johnson-Neri [6]. El siguiente resultado permite hacer un cambio de variables y poner $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ en otro lenguaje de notación. *Si* $p_1 \leq p_2$ *y* $\dfrac{\lambda_2 - n}{p_2} = \dfrac{\lambda_1 - n}{p_1}$, *entonces* $\mathcal{L}^{p_2,\lambda_2} \subset \mathcal{L}^{p_1,\lambda_1}$.

Poniendo $\alpha = \dfrac{\lambda - n}{p}$ se tendrá $\mathcal{L}^{p,\lambda} = \mathcal{E}^{\alpha,p}$, $1 \leq p < \infty$, $-\dfrac{n}{p} \leq \alpha < 1$. Obsérvese que $BMO = \mathcal{L}^{p,n} = \mathcal{E}^{0,p}$. Así $\mathcal{E}^{\alpha,p}$ es una extensión de BMO ; ¿ cúal es la extensión de HMO ? ... son los espacios $H^{\alpha,p}$ definidos vía :

$$H^{\alpha,p} = \{ u(x,t) \text{ armónicos sobre } R^{n+1}_+ \ / \ \sup_Q \Big[\frac{1}{|Q|^{\frac{\alpha p}{n}+1}}\int_Q \Big(\int_0^d |\nabla u(x,t)|^2 t \, dt\Big)^{\frac{p}{2}} dx \Big]^{\frac{1}{p}} \leq M < \infty \Big\}.$$

Obsérvese que $H^{0,2} = HMO$. El teorema de caracterización es :

" si $0<\alpha<1$, $1<p<\infty$, entonces $H^{\alpha,p} = P_t * \mathcal{E}^{\alpha,p}$, con equivalencia de las normas ".

Una Visión de las Ecuaciones de Tipo Parabólico. [2] . El estudio de ecuaciones de tipo parabólico $\Delta_x u - u_t = 0$ llevan a caracterizaciones análogas . Llamando temperatura a una solución de tal ecuación , se considera al espacio

$$TMO = \{ u(x,t) \text{ temperatura } / \sup_Q \left[\frac{1}{|Q|} \int_Q \int_0^d |\nabla_x u(x,t)|^2 \, dt \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq M < \infty \}.$$

Entonces , si Γ_t es el núcleo de Gauss – Weierstrass ,

$$\Gamma_t(x) = c_n \, t^{-\frac{n}{2}} \, e^{-\frac{|x|^2}{4t}} ,$$

Fabes-Neri han obtenido la ecuación $TMO = \Gamma_t * BMO$. Por otro lado , aspectos del análisis armónico has sido estudiados en el contexto del grupo $\{A_t\}_{t>0}$ de transformaciones de R^n y asociados de una métrica parábolica $\rho(x)$; ver Calderón – Torchinsky [2] ([18] , [19]) . En este lenguaje , el resultado de Fabes – Johnson –Neri ha sido extendido en [19.a] . Así mismo , dado que

$$\mathcal{L}^{p,\lambda}_{\varphi} = \{ f \in L^p_{loc}(R^n) \; / \; \sup_Q \left[\frac{1}{\varphi(|Q|)} \frac{1}{|Q|^{\lambda/n}} \int_Q |f(x) - f_Q|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq M < \infty \} ,$$

con φ positiva , no-decreciente y definida sobre $(0,\infty)$, este expacio extiende a los espacios $\mathcal{L}^{p,\lambda}$. La cuestión es determinar la caracterización análoga respectiva. En [19] se dan otros detalles.

10 . Algunos Clásicos Espacios de Funciones . Una Breve Visión . [19].

Ver también " History of Banach Spaces and Linear Operators " . Albrecht Pietsch .

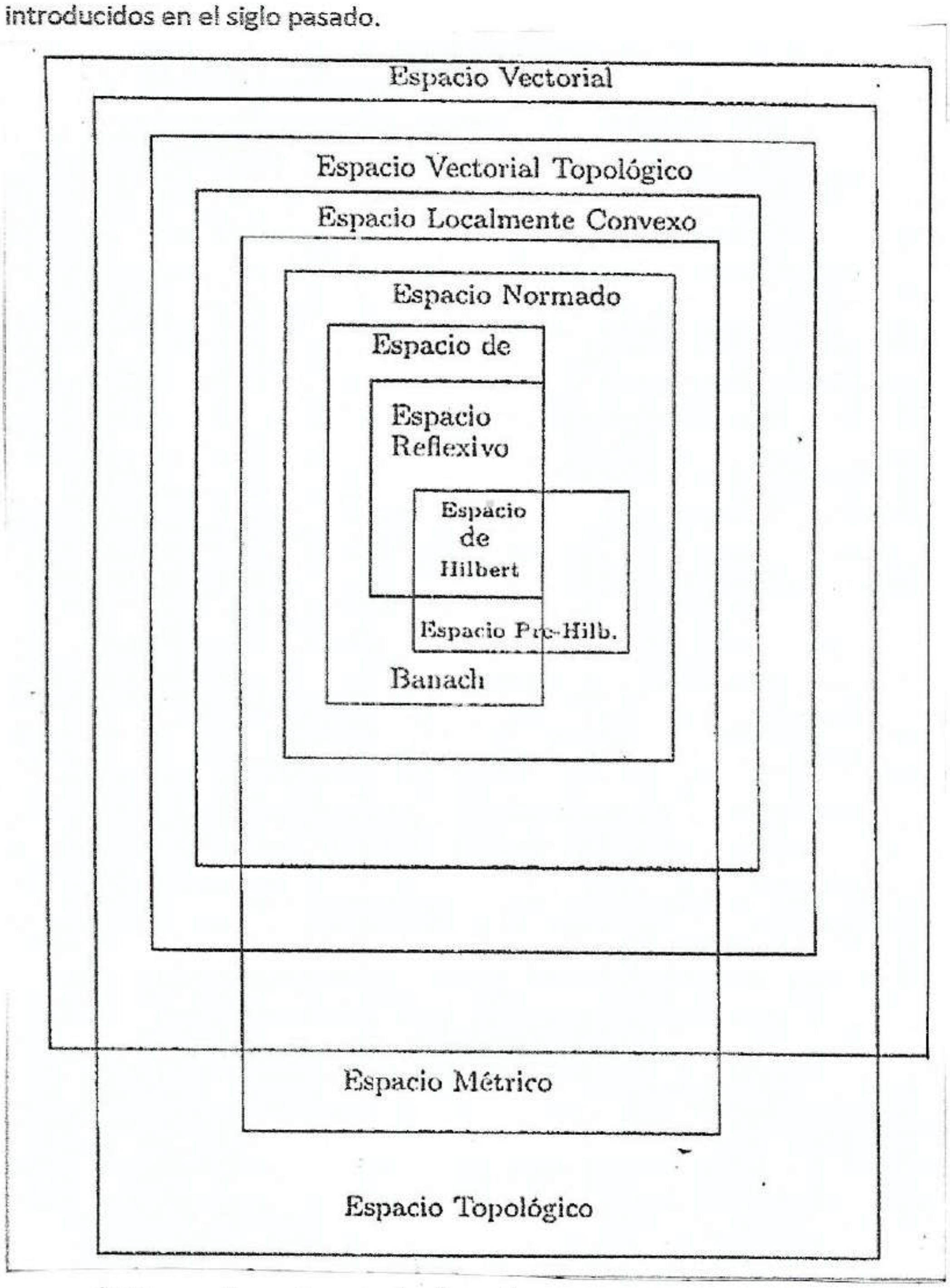
En esta sección damos un breve panorama del surgimiento de algunos clásicos espacios de funciones a fines del siglo XIX e inicios del XX . Veamos . en 1888 G. Peano introdujo el concepto de espacio vectorial asi como introdujo la aplicaciones lineales sobre estos espacios . En 1896 H. Minkowski introdujo los espacios vectoriales normados de dimensión finita y fueron llamados los " espacios de Minkowski " , quien dio importantes ejemplos de normas definidas sobre R^n.

Por otro lado , H.Lebesgue , en 1902, hace una gran contribución al progreso del análisis matemático y que sería la base , el fundamento de la introducción de nuevas y mas generales ideas, en particular a la introducción de nuevos espacios de funciones . Asi, J. Hadamard , en 1903, considera por primera vez al espacio $C[a,b]$, que es el conjunto de todas funciones reales continuas sobre el intervalo [a,b] , que se probaría que es un espacio de Banach posteriormente.La estructura de este espacio motivó la introducción del espacio de las funcionales lineales continuas sobre [a,b] . G. Hamel ,en 1905, observa que R puede ser visto como un espacio vectorial sobre los números racionales y prueba que R tiene una base , prueba que fue extendida a los espacios vectoriales reales y complejos por F. Hausdorff en 1932.

En 1906 fueron introducidos los espacios métricos por el matemático francés M. Fréchet y desarrollada por Hausdorff contribuyendo así con una teoría importante en el desarrollo de la *topología general* ,la *topología conjuntista*, asi como en los espacios de funciones. Este mismo año , D.Hilbert introduce los espacios ℓ^2, que es definido vía:

$\ell^2 = \{ x = (x_i), i = 1 , 2, \dots \ / \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \}$, que posteriormente se llamaría un " espacio de Hilbert

y así va surgiendo el análisis funcional . El cuadro adjunto nos dá una visión de los distintos espacios abstractos introducidos en el siglo pasado.



Ubicación de los distintos clásicos espacios.

Como observamos , los primeros años del siglo pasado fueron de gran actividad en el campo del análisis matemático y nuevas teorías habrían de surgir . Así Fréchet también investigó ,en 1905, problemas donde el espacio C[a,b] es reemplazado por otro espacio de funciones pues considera al espacio B[a,b] de todas las funciones limitadas e integrables en [a,b] , donde las funciones pueden ser continuas ó no; además , se considera la topología de la convergencia uniforme . Por otro lado, motivado por los trabajos de Hilbert, Fréchet en 1908 y F.Riesz , en forma independiente , probaron que " toda funcional lineal continua sobre el espacio ℓ^2, con la topología fuerte, puede ser escrita en forma única como $x \longrightarrow (x,a)$, donde $a \in \ell^2$.

(Ver : J. Dieudonné , "History of Functional Analysis " 1983. Cap. VI .) Posteriormente , en 1909, Riesz mejora su resultado estableciendo : " si U es una functional lineal continua,

$U : C[a,b] \longrightarrow R$, entonces se tiene $U(f) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$, donde $\alpha(x)$ es una función de variación limitada sobre [a,b] , que tiene ciertas condiciones extras.

E.Fischer y F. Riesz , en 1907, crearon el espacio $L^2[a,b]$, posteriormente Riesz considera a los espacios $L^p[a,b]$, $1 < p < \infty$,en donde aún no se considera una norma . En 1908 , Schmidt estudia las propiedades geométricas del espacio ℓ^2, establece que $(e_i)_{i\in I}$ es ortogonal y prueba la desigualdad de Bessel $\sum_i |<x, e_i>|^2 \leq \|x\|^2, \forall x \in \ell^2$. Años mas tarde , en 1927 , J.von Neumann formula la teoría axiomática de los espacios de Hilbert con *dimensión infinita y separables.; en 1932 prueba la desigualdad de Cauchy – Schwarz* . En 1934 , Lowig investiga a los espacios de Hilbert no-separables; prueba a la igualdad de Parseval :

$$\sum_{i\in I} |<x, e_i>|^2 = \|x\|^2.$$

<u>Los Espacios de Banach</u> . Remarcamos que la gran contribución de H. Lebesgue con su teoría de la medida y de la integral influyó mucho en el desarrollo de la matemática en general y del análisis en particular ; la evolución de los espacios de funciones recibió tal influencia y mas todavía con el punto de vista abstracto que formuló Fréchet en 1915. En este ambiente surge un gran matemático polaco , Stefan Banach quien nació en 1892 , se graduó a los 22 años y pronto estalló la Primera Guerra Mundial y durante este conflicto Banach continúa con sus investigaciones matemáticas ; tuvo amistad con Hugo Steinhaus con quien publica su primer trabajo sobre series de Fourier. Se inicia su brillante trayectoria científica. Junto con otros notables matemáticos polacos convierte a Polonia en el centro mundial del análisis funcional . Fue hecho prisionero durante la Segunda Guerra Mundial ; salió en libertad en 1944 pero con su salud muy maltratada , falleciendo en 1945 a la edad de 53 años cuando aún podía contribuir al desarrollo de la matemática !

En 1932 salió publicado el libro " Théorie des Opérations Linéaires " de Banach el cual contiene sus investigaciones sobre el análisis funcional y fue el inicio de la edad madura de los espacios normados , siendo C[a,b] , $L^p[a,b]$, ℓ^p , ..., los clásicos espacios de Banach.

Posteriormente , por los años 1930´s , Bourbaki investiga la teoría de la integral en los espacios localmente compactos desde un punto de vista abstracto ; por ese tiempo,1938, N. Dunford investiga a los espacios de Banach $L^p(M, A, \mu)$ y mas tarde M.Stone , motivado por el trabajo de P.J.Daniell (1918) estudia a los espacios de Banach de funciones (1948-49) . Si M es un espacio topológico se investiga al espacio de Banach C(M) de las funciones continuas sobre M. Por esa época , Dunford , Grothendieck y otros investigan el puntos de vista abstracto de los espacios de funciones.

11 . Algunos Espacios de Funciones . [19] . Veamos , brevemente, algunos espacios de funciones surgidos en el siglo pasado, con énfasis en la segunda mitad.

i . Espacios $L^p(X, B)$, $1 \leq p \leq \infty$. Sea (X, A, μ) un espacio medida y B un espacio de Banach. Por definición , $L^p(X,B) = \{ f : X \to B$ medible $/ \int_X \|f(x)\|_B^p d\mu(x) < \infty \}$, $1 \leq p < \infty$, donde se considere la norma $\|f\|_{L^p(X,B)} = [\int_X \|f(x)\|_B^p d\mu(x)]^{\frac{1}{p}}$ con la cual $L^p(X,B)$ es un espacio de Banach. Si $p = \infty$, se define $L^\infty(X,B) = \{ f : X \to B$ medible $/ \exists\, C > 0$ tal que $\|f(x)\|_B \leq C$ c.t.p. $\}$ donde se considera la norma $\|f\|_{L^\infty} = \inf\{ C / \|f(x)\|_B \leq C \}$, con la cual $L^\infty(X,B)$ es un espacio de Banach. Se tiene que $f \in L^\infty(X,B)$ si existe una constante C tal que $\mu(x \in X / \|f(x)\|_B > C) = 0$.

ii . Espacios de Lorentz . Sea (X, A, μ) un espacio medida ; $\lambda > 0$ real y $f : X \to R$ una función medible. Pongamos $E_\lambda = \{ x \in X / |f(x)| > \lambda \}$. Se define la función distribución de f vía $w_f : R^+ \to R^+$, $w_f(\lambda) = \mu(E_\lambda)$. Con ella se define la función reordenada no-creciente f^* vía $f^* : R^+ \to R^+$, $f^*(t) = \inf\{ \lambda / w_f(\lambda) \leq t \}$. Si $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, $\|f\|_{L^p} = \|f^*\|_{L^p}$. Se tiene $\|f\|_{L^p} = (\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^*(t)]^p \frac{dt}{t})^{\frac{1}{p}}$. Ahora consideramos a los espacios de Lorentz $L^{p,q}$, $0 < p < \infty$, $0 < q < \infty$, donde

$$L^{p,q}(X, A, \mu) \equiv L^{p,q} = \{ f, \mu\text{-medible} / \|f\|_{p,q} = [\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^q \frac{dt}{t}]^{\frac{1}{q}} < \infty \}.$$

Si $q = \infty$, $\sup_{t > 0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < \infty$.

Veamos algunas propiedades de w_f :

I . si $|f(x)| \leq |g(x)|$, entonces $w_f(\lambda) \leq w_g(\lambda)$, $\forall \lambda > 0$;

II . desigualdad de Chebyshev : si $0 < p < \infty$, $\lambda > 0$, entonces $w_f(\lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} \int_{E_\lambda} |f(x)|^p d\mu$;

III . si $g : [0, \infty] \to R$ es continuamente diferenciable tal que $g(0) = 0$, entonces

$$\int_X g(|f(x) - c|)\, d\mu = \int_0^\infty w_f(\lambda)\, dg(\lambda)$$, donde c es una constante y f está definida sobre X .

Si $g(t) = t^p$, $1 < p < \infty$, $c = 0$, entonces $\int_X \|f(x)\|^p \, d\mu = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} w_f(\lambda) \, d\lambda$.

El espacio $L^{p,\infty}$ es conocido también como un espacio L^p - débil ó espacio de Marcinkiewicz. También se tiene $L^{p,p} = L^p$ con $\|f\|_{p,p} = \|f\|_p$. Por definición, $\|f\|_\infty = \sup\text{ess} |f| = \lim_{t \to 0} f^*(t)$. Además, con la norma $\|f\|_{p,q}$, $L^{p,q}$ es un espacio de Banach. Estos espacios $L^{p,q}$ fueron introducidos por G.G. Lorentz en 1950 y aparecieron relacionados con la teoría de interpolación, un área que tuvo como precursores en los trabajos de M.Riesz, G.O.Thorin, J.Marcinkiewicz, entre otros.

iii. La Función Promediada $f^{**}(t)$. En los años 1963-64-66 A.P.Calderón publicó tres trabajos donde estudia cuestiones sobre la teoría de interpolación y se ocupa de los espacios de Lorentz, usando un lenguaje compatible a sus estudios, En el primer año señalado considera al espacio de Lorentz $\Lambda_{p,\Omega}$ y prueba resultados de interpolación para tales espacios. En el segundo trabajo (1964) Calderón considera a la función promediada f^{**} asociada a la función μ - medible f definida para $t \in (0, \infty)$ vía $f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\, ds$.

Si $E \subset X$ [(X, A, μ) un espacio medida) tal que $\mu(E) = t$, entonces $f^{**}(t) = \frac{1}{t} \sup_{\mu(E)=t} \int_E |f(x)| \, dx$.

Sea X un espacio de Banach y por definición sea $X^* = \{ f \text{ medible sobre } A \ / \ f^{**} \in X \}$; también, por definición $\|f\|_{X^*} = \|f^{**}\|_X$, entonces X^* es un espacio de Banach. Calderón establece que X^* es una extensión de $L^{p,q}$.

Por otro lado, en 1966, Calderón prueba la siguiente caracterización :

Sea M un espacio medida σ - finito, $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, y define

$$L^{p,q}(M) = \left\{ f \text{ medibles sobre } M \ / \ \|f\|_{p,q} = \left[\frac{p-1}{p^2} \int_0^\infty \left(f^{**}(t)\, t^{\frac{1}{p}} \right)^q \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}.$$

Entonces $f \in L^{p,q}(M)$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, si y solo si $\int_0^\infty \left(f^*(t)\, t^{\frac{1}{p}} \right)^q \frac{dt}{t} < \infty$.

Se tienen los casos particulares : $L^{1,1}(M) = L^1(M)$, $L^{\infty,\infty}(M) = L^\infty(M)$; los espacios $L^{p,q}(M)$ son espacios completos con las normas mencionadas . Además, Calderón observa que

$L^{p,q}(M) \subset L^1(M) + L^\infty(M)$ con inclusión continua.

iv . Espacios de Lipschitz . La idea de " espacio de Lipschitz " fue introducida por Rudolf Lipschitz en 1864 en relación con las series trigonométricas y también en relación con las ecuaciones diferenciales ordinarias . También, en 1882, O.Hölder consideró tal idea pero en relación con la teoría del potencial . Por definición, sea el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < 1$;

$f \in \Lambda_\alpha$ si f es acotada y si existe $c > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$, $x, y \in \Omega$.

Posteriormente, en 1934, Schauder considera la norma

$\|f\|_\alpha = \sup_{x\in\Omega} |f(x)| + \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}$, donde α es real arbitrario, $\alpha = [\alpha] + \alpha_0$, siendo [ ] la parte entera, $0 < \alpha_0 < 1$. Se tiene el espacio

$$\Lambda_\alpha = \{ f\in C^{[\alpha]} \,/\, \|f\|_\alpha = \|f\|_{C^{|\alpha|}} + \sum_{|\delta|=[\alpha]} \sup_{x\neq y} \frac{|D^\delta f(x) - D^\delta f(y)|}{|x-y|^{\alpha_0}} < \infty ,\ x, y \in R^n \}.$$

Nota. El lector interesado en estos espacios de Lipschitz puede consultar " Trigonometric Series ", Antoni Zygmund , cap. VII.Vol.1 .

v . Espacios de Sobolev . Estos espacios son conocidos cuando se estudia un curso de EDP , pues ellos permiten estudiar los clásicos problemas de Dirichlet y de Neumann. Veamos algunos argumentos colaterales . En 1920 S. Banach en su tesis y en el caso uni-dimensional introduce la idea de lo que sería los " espacios de Sobolev " . En efecto, veamos : << el conjunto de las funciones teniendo $(p-1)^{\text{ísima}}$ derivada absolutamente continua y la p – ésima derivada integrable (L) con la $r^{\text{ísima}}$ potencia , la norma siendo dada por

$$\|f(x)\| = \max |f(x)| + \sqrt[r]{\int_a^b \left| \frac{d^p f(x)}{dx^p} \right|^r} \ , \quad a \leq x \leq b .$$

Ciertas dificultades llevaron a la necesidad de introducir una nueva definición de diferenciación sobre dominios en R^n. Esta búsqueda retardó la introducción de unos nuevos espacios.... Este problema fue clarificado por el matemático ruso S.L. Sobolev en 1938 en su trabajo : " On a Theorem of Functional Analysis " , en donde introduce la noción de función generalizada , más amplia que la noción de distribución , la que fue motivada por los métodos variacionales en problemas de valor de contorno ellípticos. Se observa que Sobolev no usó la idea de espacio de Banach. Para otros detalles , ver [19].

Veamos, sucintamente, otro punto de vista de estos espacios de Sobolev debido a A.P.Calderón quien en 1961 publica su trabajo : " Lebesgue Spaces of Differentiable Functions and Distributions " , en donde estudia a los espacios L^p cuyos elementos tienen derivadas en L^p ; con tal objetivo Calderón considera un operador potencial , de orde z (un número complejo) actuando sobre distribuciones temperadas f . Así , por definición

$$\text{Si } f\in S' , \quad (J^z f)^\wedge(x) = (1 + 4\pi^2 |x|^2)^{-\frac{z}{2}} \hat{f}(x) .$$

Si k es real ,$1 < p < \infty$, Calderón define $L^p_k = J^k(L^p)$. Se tiene , si $f\in L^p_k$ entonces existe $g\in L^p(R^n)$ tal que $f = J^k g$ y $\|f\|_{p,k} = \|g\|_p$. Además se tienen las propiedades ,

i . L^p_k es isomorfo a L^p ;

ii . si $k < k'$, entonces $L^p_{k'} \subset L^p_k$; si $f\in L^p_{k'}$, $\|f\|_{p,k} \leq \|f\|_{p,k'}$;

iii . L^p_k es un espacio de Banach ;

iv . $\frac{\partial}{\partial x_i} : L^p_k \longrightarrow L^p_{k-1}$ continuamente .

v. $f \in L^p_k$ si y solo si f tiene derivadas en el sentido S', de ordenes $\leq k$ en L^p.

Si k es un entero no-negativo, $1 < p < \infty$, $f \in L^p_k$ si y solo si $f = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha g_\alpha$, $g_\alpha \in L^p$.

Existen otros espacios de funciones que han contribuido con el progreso del análisis matemático a nivel avanzado. Para algunos detalles de los espacios a mencionar, ver [19]. *Asi tenemos a* I. los espacios de Besov (homogéneos), $B_p^{\alpha,q}(R^n)$, $0 < \alpha < 1$, $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, los que están relacionados con los espacios de Sobolev y de Lipschitz; estos espacios fueron introducidos por Oleg V. Besov y fueron aplicados a las EDP, entre otras cuestiones. II. También, en 1972 P.i. Lizorkin y en 1973 Hans Triebel construyeron, aún, espacios mas generales: los espacios de Lizorkin-Triebel $F_p^{\alpha,q}$, $0 < p, q < \infty$, $0 < \alpha < 1$, cuyos elementos son distribuciones temperadas. Se tienen los casos particulares – identificaciones : (i) si $1 < p < \infty$, $F_p^{0,2} = L^p$; (ii) si $0 < p < 1$, $F_p^{0,2} = H^p$ (espacio de Hardy) ; (iii) $F_\infty^{0,2} =$ BMO ; (iv) si $\alpha > 0$, $1 < p < \infty$, $F_p^{\alpha,2} = L^p_\alpha$; (v) $\alpha > 0$, $F_\infty^{\alpha,\infty} = \Lambda_\alpha$; (vi) si $\alpha > 0$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $B_p^{\alpha,q} \equiv \Lambda_\alpha^{p,q}$ espacio de Lipschitz de Taibleson. III. Los espacios de Orlicz L^θ que fueron introducidos por el matemático polaco Wladyslaw Orlicz, alumno de Banach, en 1932 y que generalizan a los espacios L^p. Veamos. sea $g : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ una función monótona, no-decreciente; si $x \in [0, \infty)$, se define la función de Young $\theta(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ (se tiene $\lim_{x \to 0} \theta(x) = 0$). Sea ahora f una función medible *sobre un espacio medida* (X, μ) *y* θ *una función de Young, entonces por definición el espacio de* Orlicz es: $L^\theta(X, \mu) \equiv L^\theta = \{ f / \|f\|_\theta \leq 1 \}$, donde

$\|f\|_\theta = \inf \{ K > 0 \,/\, \int_X \theta(\frac{|f(x)|}{K})\, d\mu(x) \leq 1 \}$. L^θ es un espacio de Banach con esta norma.

vi. Los Espacios $L^{p(x)}(\Omega)$, con Exponentes Variables. [19] para algunos detalles. Hace relativamente poco tiempo surgió un interés en estudiar a los espacios de Lebesgue $L^{p(x)}(R^n)$ y a sus derivadas, espacios de Sobolev, en un contexto mas general respecto a su exponente p, se trata de remplazarlo por una función p(x). Esta idea ya había sido considerado por Orlicz en 1931, vistos anteriormente. Con esta motivación, y otras, se ha considerado al espacio $L^{p(x)}$: sea $\Omega \subset R^n$ un dominio, $n > 1$ y $p : \Omega \to [1, \infty)$ una función, entonces

$L^{p(x)}(\Omega) \equiv L^{p(x)} = \{ f$ medible sobre $\Omega \,/\, I_p(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx < \infty \}$, donde se considera la norma $\|f\|_{p(x)} = \inf \{ \lambda > 0 \,/\, I_p(\frac{f}{\lambda}) \leq 1 \} + \|f\|_{L^\infty(E_\alpha)}$, donde $E_\alpha = \{ x \in \Omega / p(x) = \infty \}$.

Si $\Omega = R^n$ y $p(x) = p$ constante entonces $L^{p(x)}$ es isomorfo e isométrico con $L^p(R^n)$. En esta dirección, se consideró a los espacios de Sobolev generalizados $L^{p(x)}_m(R^n) = W^{m,p(x)}(R^n)$ probándose que $C_0^\infty(R^n)$ *es denso en estos espacios generalizados bajo la condición de que* p(x) satisfaga una condición de Lipschitz (-Dini). Entre otros, Stefan Samko ha contribuido al progreso de esta teoría relativamente nueva. Ver sus trabajos : " Denseness of $C_0^\infty(R^n)$ in the Generalized Sobolev Spaces $W^{m,p(x)}(R^n)$ (2000) " y " On a Progress in the Theory of Lebesgue Spaces with Variables Exponent : Maximal and Singular Operators (2005) ".

vii . Los Espacios $H^{\alpha,p}$ Parabólicos . [2] . La génesis de estos espacios parabólicos está, de alguna forma, en observar el núcleo de una integral singular según Calderón-Zygmund . Al respecto, E.Fabes – N.Riviere , en " Singular Integral with Mixed Homogeneity ".1966. , sugieren la transformación $A_t : R^n \to R^n$, donde $A_t(x_1, \dots, x_n) = (t^{\alpha_1}x_1, \dots, t^{\alpha_n}x_n)$, $t > 0$. Esto motivó considerar transformaciones lineales mas generales de R^n tales que aún conserven la continuidad de los operadores integrales singulares cuando actúan sobre los espacios $L^p(R^n)$ u otros espacios . Así , en los años 1960´s va surgiendo la generalización de la teoría de Calderón-Zygmund através del llamado grupo $\{A_t\}$. En esta dirección se tienen trabajos de M. de Guzmán, N.Riviere y A. Torchinsky . Para otros detalles ver [19] , pag. 199 .

Motivación . El clásico Problema de Dirichlet condujo , en su evolución , a estudiar de un modo sistemático a la ecuación $X = P_t * Y$, donde X e Y son apropiados espacios de funciones y P_t es el núcleo de Poisson. Se probó que HMO = $P_t *$ BMO , donde HMO es el espacio de funciones , introducido por Fabes-Johnson-Neri [6] ,

$$HMO\,(R^{n+1}_+) = \{ u(x,t) \text{ armónica } / \|u\|_{HMO} = \sup \, [\frac{1}{|Q|}\int_Q \int_0^r |\nabla u(x,t)|^2 \, t \, dt\, dx \,]^{\frac{1}{2}} < \infty \}.$$

Identificando u con u + c , HMO es un espacio normado completo. Además ,

$\|u\|_{HMO} \propto \|f\|_{BMO}$ Esta ecuación sugirió extender los espacios HMO y BMO a otros mas amplios y que se tenga aún la ecuación mencionada. Así, el problema de Dirichlet estaría establecido en contextos mas generales.

Bien , se sabe que BMO está inmerso en en el espacio $\mathcal{L}^{p,\lambda}$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda \leq n+p$, y que si $\frac{\lambda - n}{p} = \frac{\lambda_1 - n}{p_1}$ entonces se tiene la inclusión $\mathcal{L}^{p,\lambda} \subset \mathcal{L}^{p_1,\lambda}$; lo que sugiere el cambio de variables (Peetre) $\alpha = \frac{\lambda - n}{p}$ y poner $E^{\alpha,p} \equiv \mathcal{L}^{p,\lambda}$ y por la condición sobre λ , se tiene $-\frac{n}{p} \leq \alpha < 1$. Se observa que BMO $= \mathcal{L}^{p,n} = E^{0,p}$. ¿ Cuál es la extensión de HMO ? ... Fabes-Johnson-Neri ,en 1976, [6] , responden a esta pregunta y consideran el espacio de funciones , $0 \leq \alpha < 1$, $1 \leq p < \infty$,

$$H^{\alpha,p} = \{ u(x,t) \text{ armónica sobre } R^{n+1}_+ / \|u\|_{H^{\alpha,p}} = \sup \, [\frac{1}{|Q|^{\frac{\alpha p}{n}+1}} \int_Q [\int_0^r |\nabla u(x,t)|^2 t \, dt \,]^{\frac{p}{2}} dx \,]^{\frac{1}{p}} < \infty \},$$

donde Q es un cubo en R^n de centro x_0 y lado de longitud r . Identificando funciones que difieren en una constante, $H^{\alpha,p}$ es un espacio completo con tal norma. Además , $H^{0,2}$ = HMO . El teorema de caracterización de Fabes-Johnson-Neri es : si $0 < \alpha < 1$, $1 < p < \infty$, entonces $H^{\alpha,p} = P_t \times E^{\alpha,p}$. Además , $\|u\|_{H^{\alpha,p}} = \|f\|_{E^{\alpha,p}}$ Con esta motivación pasamos a ver el caso parabólico motivado por el hecho de que en algunos problemas concretos ,las funciones u(x,t) pueden ser no armónicas , es decir no satisfacen a la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$, pero si satisfacen ecuaciones de tipo parabólico, por ejemplo. Para mayores detalles de este enfoque ver Calderón,A. Torchinsky,A. [2] , Calderón,A. [1] ,Torchinsky,A. [26] ; Stromberg ,J.O- Torchinsky ,A. [25].

Bien , sea $\{A_t\}$ un grupo de transformaciones de R^n tal que :

(1) $A_s A_t = A_{st}$; (2) la aplicación $\Pi : (0,\infty) \to L(R^n, R^n)$, $t \to A_t$

es continua con respecto a la topología uniforme de operadores (topología del espacio normado $L(R^n, R^n)$; (3) el grupo satisface $\| A_t x \| \leq t \|x\|$, para $0 < t \leq 1$, $x \in R^n$; así

$\|A_t\| \leq t$. Ciertos argumentos llevan a la notación : $\{A_t\} = \{\exp P \log t\} = \{t^P\}, t > 0$. donde P es el operador infinitesimal (una matriz n x n) . Ver mas detalles en [2] .

Sea P la matrix infinitesimal de $\{A_t\}$ y $u(x,t) = (\varphi_t * f)(x)$, donde φ_t es la dilatación $\varphi_t(x) = t^{-\gamma}(A_t^{-1} x)$, con γ = traza de P y $\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2 t}$. Se observa que $u(x,t)$ no es una función armónica. Bien , el objetivo ahora es ver una extensión de los espacios $H^{\alpha,p}$ considerador por Fabes-Johnson-Neri en términos del grupo $\{A_t\}$. Así , sea $0 < \alpha$, $k = [\alpha]$ (mayor entero) ; $1 \leq p < \infty$; entonces decimos que $f \in E^{\alpha,p}(R^n) \equiv E^{\alpha,p}$ si

$$\|f\|_{E^{\alpha,p}} = \sup_Q \left\{ \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\alpha p}{\gamma}}} \inf_P \int_Q |f(y) - P(y,x_0,r)|^p \, dy \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty \}$$

donde Q es un cubo parabólico $(\rho(x - x_0) \leq r))$ de centro x_0 y lado de longitud r ; $P(y,x_0,r)$ es un polinomio de grado $\leq k$.

Cuando la matrix P es la identidad se tiene el caso Fabes-Johnson-Neri.

En este contexto parabólico , la función $\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2}$ juega un papel importante desde que ella satisface la ecuación $\mathcal{A}\varphi_t(x) = 0$, donde $\mathcal{A} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2\pi t}(P^* A_t^* \partial, A_t^* \partial) =$

$\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{t}(L A_t^* \partial, L A_t^* \partial)$, donde φ_t es la dilatación de φ ; $L^2 = \frac{P + P^*}{4\pi}$; $*$ indica el adjunto.

Si P es la matrix identidad entonces $\mathcal{A} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2\pi} t \Delta$. Sea $u(x,t) = (f * \varphi_t)(x)$, donde

$f \in S'(R^n)$, entonces $\mathcal{A} u(x,t) = 0$. Se pone $p(t,\partial) = L A_t^* \partial$. Entonces , por definición ,

$H^{\alpha,p}(R_+^{n+1}) \equiv H^{\alpha,p} = \{ u(x,t) \in C^\infty(R_+^{n+1}) \,/\, \mathcal{A} u(x,t) = 0$ y

$$\|u\|_{H^{\alpha,p}} = \sup_Q \left[\frac{1}{|Q|^{\frac{\alpha p}{\gamma}+1}} \int_Q \left(\int_0^r |p(t,\partial)\, u(y,s)|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{p}{2}} dy \right]^{\frac{1}{p}} < \infty \} .$$

Entonces se tiene , [19.a] , :

$(*)$. Sea $f \in E^{\alpha,p}$, $0 \leq \alpha$; entonces $u(x,t) = (f * \varphi_t)(x) \in H^{\alpha,p}$ y $\|u\|_{H^{\alpha,p}} \leq c \|f\|_{E^{\alpha,p}}$.

$(**)$. Sea $u \in H^{0,2}$, entonces $\lim_{t \to 0} u(x,t) = f(x)$ existe , $f \in E^{0,2}$, $u(x,t) = (f * \varphi_t)(x)$ y

$\|f\|_{E^{0,2}} \leq c \|u\|_{H^{0,2}}$.

Referencias.

[7]. Fefferman, Ch.- Stein, E. : H^p spaces of several variables. Acta Math. 137-193. 1972

[27]. Zhu, Kehe : Operator theory in function spaces. Marcel Dekker, Inc. N.Y. 1990.

[24]. Stein, Elías M. : Harmonic analysis: Real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton University Press. Princeton, N.J. 1993.

[26]. Torchinsky, Alberto : "Real-Variable Methods in Harmonic Analysis" Academic Press, INC. N.Y. 1986

[9]. García-Cuerva, José - Rubio de Francia, José : Weighted norm inequalities and related topics. North-Holland. N.Y. 1985.

[18]. Ortiz, Alejandro : Tópicos sobre análisis armónico. Notas de Matemática Nº4. UNT. Trujillo 1988

[16]. Neri, Umberto : Fractional integration on the space H^1 and its dual. Studia Math. 1975.

[21]. Spanne, S. : Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes. Ann. Sup. Pisa. 1965.

[11]. John, F. - Nirenberg, L. : On functions of bounded mean oscillation. Comm. P. Appl. Math. 415-426. 1961.

[8]. Fefferman, Charles : Harmonic analysis and H^p spaces. Studies in Harmonic Analysis, MAA Studies, 13. 1976.

[10]. Janson, S : (a). On functions with conditions on the mean oscillation. Arkiv. for. Math. 189-196. 1976. (b). Mean oscillation and commutators of singular integral operators. Archiv der Math. 16. 263-270. 1978.

[4]. Coifman, R : Real variable characterization of H^p. Studia Math. 269-274. 1974.

[17]. Ortiz, Alejandro : Espacios de oscilación media acotada. IV ELAM. 2da Edición 1978.

[12]. Latter, R : A descomposition of $H^p(\mathbb{R}^n)$ in terms of atoms. Studia Math. 92-101. 1977.

[20]. Sadosky, Cora : Interpolation of operators and singular integrals. Marcel Dekker. 1979.

[15]. Muckenhoupt, B.- Weeden, R. : Weighted bounded mean oscillation and the Hilbert transform. Studia Math. 221-237. 1976.

[5]. Coifman, R.- Weiss, G. : (a). Extension of Hardy spaces and their use in analysis. Bull. Am. Math. S. 569-645. 1977. (b). Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogenes. Springer-Verlag. Vol. 242. 1971.

[13]. Macias, Roberto : Interpolation theorems on generalized Hardy spaces. Ph.D. Thesis. Washington Univ. 1974.

[14]. Macias, R.- Segovia, C. : (a). Algunos aspectos da teoría dos espaços de Hardy. Univ. Federal de Pernambuco. 1978. (b). Lipschitz functions on spaces of homogeneous type. Adv. in Math. 1979. (c). A maximal theory for general Hardy spaces. Proc. of Symp. in Pure Math. 1979.

[23]. Stegenga D. A. Bounded mean oscillation on pseudometric space.

[1]. Calderón, Alberto P. : Inequalities for the maximal function relative to a metric. Studia Math. 297-306. 1976.

[3]. Campanato, S : (a). Proprietá di una famiglia di spazi funcionali. Ann. S. Pisa. 1964. (b). Proprietá di hölderianitá di alcune classi di funzioni. Ann. S. Pisa. 1963. (c). Equazioni ellipticke del II° ordine e spazi $\mathcal{L}^{(2,\lambda)}$. Ann. Mat. P. App. 1965.

[22]. Stampacchia, G : The $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ spaces and application to the theory of partial differential equations. Proc. Cong. Diff. Eq. and Appli. 1969.

[6]. Fabes, E.- Johnson, R.- Neri, U. : Spaces of harmonic functions representable by Poisson integrals of functions in BMO and $\mathcal{L}^{p,\lambda}$. Ind. Univ. Math. J. 1976.

[2]. Calderón, A. P. - Torchinsky : Parabolical maximal functions associated with a distribution. Adv. in Math. 1-63. 1975. II. Adv. in Math. 24. 101-171. 1977.

[25]. Strömberg, J-O. - Torchinsky, A. : Weighted Hardy Spaces. Springer-Verlag. 1989.

[19]. Ortiz, Alejandro : φ-Espacios de funciones. PUCP. 2010.

[19.a]. Ortiz, A. - Torchinsky, A. : On a mean value inequality. Indiana U. Math. J. Vol. 26. 1977.