

ECONOMÍA DINÁMICA, ECONOMÍA APLICADA Y TEORÍA DE JUEGOS

Ensayos en homenaje a Ramón García-Cobián

César Martinelli / Loretta Gasco
Editores



**FONDO
EDITORIAL**

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ. 90 AÑOS

ECONOMÍA DINÁMICA, ECONOMÍA APLICADA
Y TEORÍA DE JUEGOS
Ensayos en homenaje a Ramón García-Cobián

ECONOMÍA DINÁMICA, ECONOMÍA APLICADA Y TEORÍA DE JUEGOS

Ensayos en homenaje a Ramón García-Cobián

César Martinelli / Loretta Gasco
Editores



**FONDO
EDITORIAL**

Economía dinámica, economía aplicada y teoría de juegos
Ensayos en homenaje a Ramón García-Cobián

Primera edición, junio de 2007

© César Martinelli y Loretta Gasco, 2007

De esta edición:

© Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú, 2007

Plaza Francia 1164, Lima 1 - Perú

Teléfono: (51 1) 626-6140

Fax: (51 1) 626-6156

feditor@pucp.edu.pe

www.pucp.edu.pe/publicaciones

Diseño de cubierta: Juan Carlos García Miguel.

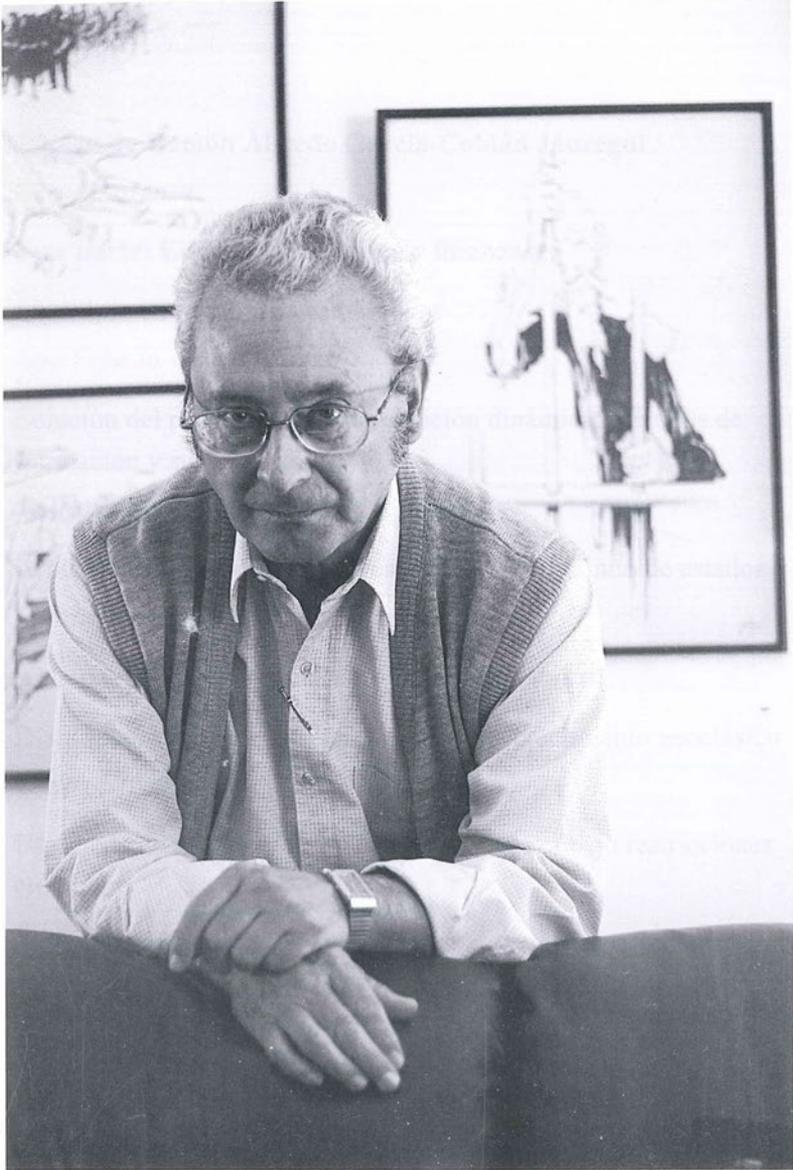
Diagramación de interiores: Loretta Gasco y José Flores

*Prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio,
total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores.*

ISBN 9972-42-812-8

Hecho el Depósito Legal 2007-05197 en la Biblioteca Nacional del Perú

Impreso en el Perú – Printed in Peru



Índice

Presentación	11
Semblanza de Ramón Alfredo García-Cobián Jáuregui	15
<i>César Carranza</i>	
Primera parte: Economía dinámica y finanzas	
1. Equilibrio en economías estocásticas	25
<i>José Fajardo</i>	
2. Solución del problema de programación dinámica: métodos de estimación y sus precisiones	59
<i>Wilfredo Leiva</i>	
3. Arbitraje en mercados de activos DC con un continuo de estados	77
<i>Jaime Orrillo</i>	
Segunda parte: Macroeconomía y economía laboral	
4. Distribución de la riqueza en el modelo de crecimiento neoclásico	93
<i>Carlos Urrutia</i>	
5. Búsqueda de empleo y acumulación de riqueza bajo restricciones crediticias	111
<i>Silvio Rendón</i>	
6. Orígenes del colapso del crédito bancario en México	129
<i>Pablo Cotler</i>	
7. Brecha salarial por género en el Perú durante 1986-2000. Evidencia a partir del método de comparaciones emparejadas	151
<i>Hugo Ñopo</i>	

Tercera parte: Juegos y elección colectiva

- | | |
|---|-----|
| 8. La topología de las correspondencias y el Equilibrio de Nash | 181 |
| <i>Elvio Accinelli</i> | |
| 9. Utilidad y altruismo | 199 |
| <i>Alejandro Ligon</i> | |
| 10. ¿Saben lo que quieren los votantes? | 211 |
| <i>César Martinelli</i> | |

Presentación

Este volumen reúne contribuciones en diversas áreas de la Economía, con un énfasis variable en el uso de herramientas matemáticas, de antiguos estudiantes (y, en un caso excepcional, de un colega) de Ramón García-Cobián. Contiene además una semblanza de Ramón escrita por su antiguo maestro y colega de muchos años, César Carranza. Con esta recopilación, queremos rendir homenaje a quien amplió de manera fundamental el horizonte intelectual de muchos estudiantes, incluyendo los autores de este libro, enseñando e ilustrando en cada clase el poder del lenguaje matemático al servicio de la ciencia económica. Deseamos hacerlo, precisamente, poniendo al alcance del público interesado en la ciencia económica en el Perú una mirada al estado actual de la investigación en las diversas áreas de trabajo de los autores. Esta tarea parece más útil en cuanto la mayoría de los autores ejercen su actividad profesional fuera de nuestro país. Aspiramos a ampliar, en alguna medida, el horizonte intelectual de generaciones más jóvenes de economistas peruanos, tal y como lo hizo por nosotros, con dedicación e inteligencia difíciles de igualar, Ramón García-Cobián.

Un primer grupo de contribuciones se concentran en métodos de economía dinámica. En particular, José Fajardo estudia el equilibrio general en una economía en tiempo continuo y con mercados completos o incompletos —la innovación, con respecto a los modelos usuales de equilibrio de texto, consiste precisamente en considerar de manera realista que los mercados pueden no estar completos y que las transacciones no tienen por qué ocurrir solo en intervalos predeterminados en el tiempo—. Wilfredo Leiva Maldonado presenta los resultados conocidos acerca del tema de programación dinámica estocástica; este no es sino el problema de asignación intertemporal óptima de recursos (por

ejemplo, el problema de un individuo que quiere programar sus decisiones de consumo, empleo e inversión a lo largo del tiempo, como en las contribuciones de Urrutia y Rendón a este volumen) estudiado de manera abstracta. Jaime Orrillo presenta un modelo de determinación de los precios de activos DC (es decir, activos que están protegidos por alguna garantía que se ejecuta en caso de morosidad de los deudores) en un contexto en el cual la incertidumbre no puede representarse mediante el supuesto usual de un número finito de posibles eventos. Esta primera parte del libro es la que utiliza de manera más intensa herramientas matemáticas, entre las que los procesos estocásticos y el análisis funcional gozan de mayor privilegio.

La segunda parte del libro reúne contribuciones en las áreas de macroeconomía y economía laboral. Carlos Urrutia presenta resultados de su investigación acerca de la evolución de la distribución de la riqueza en el contexto del modelo neoclásico de crecimiento —el modelo de crecimiento más influyente en la macroeconomía moderna—. Silvio Rendón estudia la dinámica del empleo y la acumulación de riqueza en el contexto de un modelo con mercados imperfectos de crédito, y estima los parámetros del modelo teórico con el objeto de realizar predicciones acerca del impacto de diversas políticas sobre empleo y salarios. Las contribuciones de Urrutia y Rendón emplean modelos dinámicos semejantes en espíritu a los de la primera parte del volumen. Las dos contribuciones siguientes tienen un cariz más aplicado. Pablo Cotler estudia un fenómeno (desafortunadamente) recurrente en América Latina: los colapsos bancarios, ejemplificados en su artículo por el famoso episodio de México en 1994. Hugo Ñopo utiliza el método estadístico de las comparaciones emparejadas (*matching*) para intentar estimar la discriminación por género en el mercado laboral peruano. La segunda parte del libro, entonces, exhibe una pluralidad de enfoques a temas macroeconómicos y laborales; las herramientas utilizadas incluyen la programación dinámica y métodos numéricos y estadísticos.

La tercera parte del libro recoge contribuciones en las áreas de teoría de la decisión y de los juegos. Elvio Accinelli presenta una demostración de existencia del Equilibrio de Nash en juegos en forma normal (por ejemplo, aquellos estudiados en las contribuciones de Lugon y Martinelli a este volumen) bajo condiciones bastante generales. Alejandro Lugon desarrolla un modelo sencillo para estudiar las implicaciones del altruismo, una desviación del supuesto habitual en una economía en la que los agentes son estrictamente egoístas y que es objeto de interés creciente en la literatura económica. César Martinelli, finalmente, presenta un modelo económico de la conducta de los votantes desde un enfoque que privilegia la agregación de información y no, como ha sido habitual en la teoría de la elección social, el conflicto de preferencias. En esta tercera parte, las herramientas provienen de la topología, las correspondencias y la teoría de probabilidad.

En conjunto, las contribuciones en este volumen muestran un abanico grande de áreas de la Economía y de herramientas matemáticas. Esto tal vez es apropiado, dada la gran diversidad de intereses de nuestro antiguo profesor y maestro. No esperamos, por supuesto, que todas las contribuciones sean del mismo interés para todos los posibles lectores, pero sí esperamos que haya algo de interés para cada quien, o, mejor aún, despertar ese interés.

Debemos agregar que los profesores Víctor Agapito y José Flores brindaron una ayuda indispensable y especializada en el proceso de edición en \LaTeX del libro. Queremos agradecerles el tiempo dedicado a esta labor de homenaje.

Los editores

Semblanza de Ramón Alfredo García-Cobián Jáuregui

César Carranza

Ramón Alfredo García-Cobián Jáuregui nació en 1940, en La Oroya, y realizó sus primeros estudios en el Colegio La Salle, en Lima. En 1959 ingresó a la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI), a la carrera de Ingeniería Civil, donde obtuvo el título correspondiente en 1963.

En 1967 ya funcionaba en la UNI el Instituto de Matemática (IMUNI), creado en 1962 por el Doctor en Matemáticas e ingeniero civil José Tola Pasquel y un pequeño grupo de discípulos sanmarquinos, algunos de ellos también egresados de las carreras de Ingeniería Civil y Mecánica de la UNI. Fue en esa época que Holger Valqui, miembro del IMUNI, especialista en detectar jóvenes ingenieros interesados en seguir estudios de matemática, nos presentó a Ramón, quien mostraba un enorme interés por la Matemática y un talento especial para aprenderla. En esa época, Tola, quien estaba muy influido por la Escuela Alemana, nos contagió esa corriente y, cuando Ramón nos pidió consejo para iniciarse en el estudio serio de la matemática, no dudamos en recomendarle que iniciara la lectura del célebre libro de Edmond Landau, *Zahlen Theorie*, el cual estudió sin dificultad alguna. Luego lo perdimos de vista y, cuando preguntamos por él, nos enteramos de que había viajado a Bélgica, país donde permaneció, desde comienzos de 1968 hasta julio de 1969, estudiando un Postgrado en Ingeniería en Matemáticas Aplicadas en la Universidad Católica de Lovaina.

A su retorno al Perú, se desempeñó como ingeniero calculista de la División de Estructuras en la Dirección de Edificación del Ministerio de Vivienda hasta 1970. Durante ese mismo año, un amigo de Ramón, el ingeniero Luis Vargas, quien laboraba en la oficina privada de los ingenieros civiles José Tola y Abel Fernández, informa al primero que Ramón había regresado al Perú. Tola, quien en esa época era pro-rector de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) y recordaba a Ramón con aprecio, lo hace llamar y le ofrece dos posibilidades de trabajo: una como ingeniero calculista bajo la dirección de Julio Vargas con una remuneración bastante atractiva, equivalente a la que percibía en el Ministerio de Vivienda; y la otra como profesor de Matemáticas en la PUCP con la mitad de la remuneración anterior, pero con la condición de que estudiara Matemáticas. Ramón no piensa mucho y opta por la segunda opción. Tola acepta encantado y lo envía a hablar conmigo, que entonces desempeñaba la Coordinación de Matemáticas del Departamento de Ciencias de la PUCP. Me encuentra en la universidad y me confirma su decisión. Un poco incrédulo, vuelvo a preguntarle y le explico que su decisión implica, además del bajo sueldo, más horas de trabajo, ya que tenía que estudiar el Bachillerato en Matemáticas y encargarse de la coordinación y el dictado de tres secciones del curso de Matemáticas Básicas 3, que se ofrecía a los estudiantes del primer ciclo de Estudios Generales del Programa de Ciencias e Ingeniería.

Ramón insiste y de esta manera ingresa a trabajar en la PUCP en el primer ciclo de 1970 como profesor auxiliar a tiempo completo. Inició de inmediato sus estudios de Matemáticas y obtuvo el grado de Bachiller en Ciencias con mención en Matemáticas en octubre de 1972, con la tesis titulada *Teoremas Ergódicos: una exposición detallada*, la cual me cupo la satisfacción de asesorar. En 1973 inicia sus estudios de maestría con gran éxito y de manera tal que, antes de concluirlos, viaja a Inglaterra en agosto de 1974 e ingresa a la Universidad de Southampton, en la cual termina sus estudios y se gradúa, en 1975, de Master of Science al presentar la tesis *Catastrophe Theory and Operational Research Models*. Tres años después, en 1978, obtiene el Philosophical Doctor (Ph.D.) of Mathematics, con la tesis *Stochastic Elements in Catastrophe Theory*, bajo la asesoría de los destacados matemáticos Arjan Shahani, indio, y David Shillingworth, inglés.

En 1978 regresa a la PUCP a ocupar su plaza de profesor a tiempo completo del Departamento de Ciencias, donde alcanza sucesivamente la categoría de Profesor Asociado y luego la de Principal. En esa misma época, el suscrito es destacado por el Consejo Nacional de la Universidad Peruana (CONUP) como Presidente de la Comisión Organizadora encargada de fundar la Universidad Nacional de Áncash, y es Ramón quien se encarga de reemplazarme en la Coordinación de la Maestría en Matemática, gestión que realiza con gran éxito durante el período 1978-1982. Así el continuó la política del entonces Rector de la PUCP, José Tola, que era promover la formación de jóvenes matemáticos provincianos quienes se encargarían, una vez terminadas sus maestrías en la PUCP, de volver a sus universidades de origen como profesores para elevar el nivel de la enseñanza de la Matemática. Cabe recordar que en esta etapa se firmó un convenio entre la PUCP y la Universidad Nacional de Tacna, en la que laboraba como cabeza de grupo un brillante matemático suizo, Eugen Blum, quien más tarde vino a las universidades de la PUCP y UNI en Lima, y quien se convirtió en el líder de la optimización, una de las ramas de las Matemáticas en la cual se ha avanzado con éxito en el Perú.

En 1980, Ramón, cada vez más interesado en ampliar sus conocimientos, inicia los estudios de Maestría en Economía en la PUCP, y obtuvo, en 1983, el grado de Magíster en Economía con la tesis titulada *Crítica a la teoría de producción de Piero Sraffa*, trabajo que fue muy comentado en los medios económicos y matemáticos del país. Durante los años siguientes, se dedica a promover las aplicaciones de las matemáticas a la Economía, y logra formar un grupo destacado de jóvenes que, más tarde, seguirían con éxito estudios de doctorado en esta especialidad. Sin embargo, ahí no terminaría su afán de aprender, y así lo tenemos nuevamente estudiando, de 1991 a 1995, la Maestría y el Doctorado en Filosofía de la Ciencia en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, tras lo cual desarrolló un Seminario de Investigación de Lógica Matemática y Filosofía de la Ciencia, conducido conjuntamente con Oscar Trelles, en la PUCP, desde 1995 hasta la fecha. En la actualidad, se encuentra elaborando su tesis doctoral *Teorías de la verdad a partir de Tarski y Kripke*.

Presentamos, a continuación, algunos aspectos del currículo de Ramón García-Cobián.

Ha dictado los siguientes cursos avanzados en la PUCP:

- En la Licenciatura en Matemáticas: Lógica Matemática y Teoría de Conjuntos; Álgebra 2; Álgebra Lineal y Multilineal; Tópicos de Geometría; Procesos de Decisión y Teoría de Juegos; Probabilidades y Estadística 1 y Aplicaciones de la Matemática a la Economía.
- En la Licenciatura en Economía: Teoría del Crecimiento; el Capital y la Distribución; Tópicos de Teoría Económica; Economía Política 2; Economía Matemática; Tópicos de Economía Matemática y Computacional; Investigación de Operaciones 2; Investigación de Operaciones; Matemáticas para Economistas 1; Matemáticas para Economistas 2 y Matemáticas para Economistas 3.
- En la Maestría en Matemáticas: Análisis Real; Álgebra; Análisis Funcional; Topología; Ecuaciones Diferenciales Ordinarias; Ecuaciones Diferenciales Parciales; Topología Diferencial; Fundamentos de la Matemática; Economía Matemática; Probabilidades y Estadística; Procesos Estocásticos; Teoría de Juegos; Investigación Operativa; Programación Matemática y Seminario de Tesis.
- En la Maestría en Matemáticas Aplicadas: Análisis Real; Medida e Integración; Teoría de Juegos; Microeconomía y Finanzas; Concavidad y Optimización.

Ha asesorado las siguientes tesis en la Maestría de Matemáticas de la PUCP:

1. HOYLE, María (PUCP)
1979 «Propiedades genéricas de los sistemas económicos de Pareto y sus óptimos».
2. MUÑOZ, David (UNALM)
1980 «Los sistemas dinámicos en el marco de la teoría general de sistemas».
3. CALSÍN, Celso (UNPUNO)
1980 «Formalismos matemáticos de la agregación colectiva del bienestar individual».
4. MAMANI, Francisco (UNTACNA)
1981 «Fundamentos matemáticos de los procesos estocásticos de segundo orden».
5. CORAHUA, Leonardo (UNSAAC)
1985 «El teorema de Kupka—Smale en sistemas dinámicos».
6. PASQUEL, Francisco (PUCP)
1985 «Modelos geométricos en medicina intensiva».
7. BEDOYA, Norman (UNPUNO)
1985 «Algunos teoremas de imposibilidad en la teoría del bienestar».
8. ROSALES, Omar (UNICA)
1986 «Reformulación matemática de los modelos de Gauss—Markov».
9. LEIVA, Wilfredo (PUCP)
1992 «Sistemas semidinámicos con flujos conjuntistas. Aplicaciones a la economía».
10. ORRILLO, Jaime (UNPRG)
1993 «Proceso de suavización de relaciones de preferencias».
11. MOZO, José (UNSAAC)
1994 «Juegos diferenciales lineal cuadráticos».
12. ESCALANTE, Sonia (UNSAAC)
1995 «Teorema de Borsuk—Ulam».

-
13. SÁNCHEZ, Roy (UNSAAC)
1995 «Atractores extraños».
 14. JORDÁN, Abelardo (UNPRG)
1996 «Enfoque diferenciable de la teoría de producción económica».
 15. RISCO, Eugenio (UNMSM)
2003 «Instrumentos topológico-diferenciales en la teoría del equilibrio económico general».

De sus quince asesorados, tres han obtenido el grado de doctor en prestigiosas universidades del exterior.

Ha participado en los siguientes eventos científicos internacionales:

- IV Escuela Latinoamericana, Lima, 1978.
- IV Simposio Latinoamericano de Lógica Matemática, Santiago de Chile, Chile, 1978.
- XII Coloquio Brasileño de Matemáticas, Pocos de Caldas, Brasil, 1979.
- Primer Ciclo de Cursos de Matemáticas en la Universidad Central del Ecuador, Quito, Ecuador, 1979.
- II Coloquio de la Sociedad Matemática Peruana, 1984.
- Coloquio sobre Teoría de Representación de Grupos de Lie, The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italia, 1985.
- IV Coloquio de la Sociedad Matemática Peruana, 1986.
- V Jornadas Latinoamericanas de Teoría Económica, Santiago de Chile, Chile, 2003.
- X Congreso Boliviano de Matemática, La Paz, Bolivia, 2003.
- IX Encuentro de Matemáticas y sus Aplicaciones, Quito, Ecuador, 2004.

Ha realizado las siguientes publicaciones:

GARCÍA-COBIÁN, Ramón

- 1980 «Investigación de Operaciones 1». Texto para el curso del mismo nombre para las especialidades de Matemática y Estadística. Lima. Pontificia Universidad Católica del Perú.
- 1981 «Investigación de Operaciones 2». Texto para el curso del mismo nombre para las especialidades de Matemática y Estadística. Lima. Pontificia Universidad Católica del Perú.
- 1982 «Elementos Estocásticos en Teoría de Catástrofes». Actas del Primer Coloquio de la Sociedad Matemática Peruana. Lima.
- 1983 «Una Revisión Crítica de la Teoría de Producción Disjunta de Sraffa». Revista Economía, PUCP, Vol. VI, n° 11-12.
- 1984 «Concepto de Núcleo en la Teoría de Juegos», Actas del II Coloquio de la Sociedad Matemática Peruana, Lima.
- 1985 «Una Versión Didáctica del Teorema de Imposibilidad de Arrow». Revista Economía, PUCP, Vol. VIII, n° 15.
- 1986 «Notas sobre Medida y Probabilidad». Actas del IV Coloquio de la Sociedad Matemática Peruana, Arequipa.
- 1988 «La Teoría de Producción Conjunta de Sraffa: Un Análisis Crítico». Revista Economía, PUCP, Vol. XI, n° 21.
- 1993 «El Concepto de “Genericidad” en Economía Política». Revista Apuntes, Universidad del Pacífico, n° 33.
- 1996 «La Incorrecta “Ley de Walras” y Una Posible Corrección». Revista Apuntes, Universidad del Pacífico, n° 38.
- 2003 «Compleción del Modelo del *Overshooting* de Dornbusch». Revista de la Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, n° 22.

-
- 2004 «Detección de Incongruencias con su Consiguiente Corrección en la Teoría del “Overshooting” de Dornbusch». Actas del IX Encuentro de Matemáticas y sus Aplicaciones, por la Escuela Politécnica Nacional del Ecuador, Quito.
 - 2004 «El Principio de Correspondencia de Samuelson». Departamento de Economía, PUCP, Documento de Trabajo n° 235, Lima.

Finalmente, después de esta apretada síntesis del currículo de Ramón, permítanme decirles que lo considero como uno de los más brillantes alumnos que he tenido en mis 51 años como docente universitario. Hombre culto por excelencia, profundo conocedor de su lengua materna, además de hablar con fluidez el francés, el inglés, el alemán y el italiano, y también un poco de ruso, ferviente admirador de la música medieval y barroca, gran jugador de ajedrez; en fin, siempre es un placer conversar con él. Compartir con Ramón, durante 35 años de labor docente, todas estas cualidades ha constituido un gran privilegio para mí y para todos los colegas de la PUCP.

Muchas gracias, Ramón

Primera parte

Economía dinámica y finanzas

1. Equilibrio en economías estocásticas

*José Fajardo*¹

1.1. Introducción

Los primeros modelos de equilibrio general son debidos a Walras (1874) y Pareto (1896). Otros modelos más abstractos y axiomáticos fueron desarrollados por Arrow (1951), Debreu (1952) y McKenzie (1955). Básicamente, estos modelos discutían la existencia de los equilibrios, su determinación y su optimalidad. Para tal efecto, dos axiomas fueron utilizados: el primero nos dice que todos los agentes son racionalmente limitados, pues tiempo y esfuerzo son necesarios para obtener y procesar toda la información, crear todos los posibles escenarios futuros y hacer los cálculos que permitan resolver los problemas de decisión; el segundo nos dice que todos los agentes actúan por interés propio. Para lidiar con estas limitaciones, varias teorías han sido desarrolladas: por ejemplo, la teoría de asimetría de información, la teoría de contratos incompletos y la teoría de juegos.

¹ Profesor Asociado, IBMEC Business School, Av. Rio Branco 108, Río de Janeiro, Brasil. Correo electrónico: pepe@ibmecrj.br.

Agradezco al Consejo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (CNPq) de Brasil por todo su apoyo financiero, y a los profesores Ramón García-Cobián y Uldarico Malaspina por haberme mostrado los caminos de la Economía Matemática.

Las demás hipótesis del modelo de Arrow-Debreu consideran que en la Economía la incertidumbre es exógena y que los mercados son completos; esto significa que todas las incertidumbres futuras pueden ser cubiertas usando contratos disponibles en el mercado financiero. Además de esto, no hay fricciones en la Economía: no hay costos de transacción ni restricciones en las ventas al descubierto, y los agentes cumplen con sus promesas futuras; es decir, no existe incumplimiento de contratos. Estas hipótesis implican que otros costos no son incluidos, como, por ejemplo, los costos de tiempo y esfuerzo para definir los contratos y detallarlos; tampoco existen costos legales por incumplimiento de los contratos. Cuando se trata de un modelo con más de dos períodos, es necesario hacer suposiciones sobre la función de descuento usada para traer los valores a valor presente. En los modelos clásicos, se supone que la función es de tipo exponencial.

Es claro que estas hipótesis son irrealistas, pero cumplieron un papel muy importante en los inicios, pues permitieron simplificar y entender que era posible desarrollar modelos que explicasen el comportamiento de los agentes económicos. A partir de estos modelos, muchas extensiones fueron realizadas. Por ejemplo, los modelos que poseen un factor altruista permiten que los agentes consideren en su problema de maximización las utilidades de los demás agentes, así como sucede en aquellos modelos en los que los padres se preocupan por los hijos. En los modelos más recientes, varios relajamientos de las hipótesis han sido realizados, se han incluido diversos tipos de fricciones y, como consecuencia, varios costos han aparecido de forma natural. La incompletitud del mercado también ha sido considerada.

Más recientemente, un área llamada Economía Comportamental ha querido humanizar más los modelos teniendo en cuenta aspectos psicológicos de los agentes. Así, por ejemplo, varios experimentos han mostrado que los agentes no realizan descuentos exponenciales, sino que aplican tasas de descuento altas en períodos cortos y tasas de descuento bajas en períodos largos; a este tipo de descuento se le ha llamado *descuento hiperbólico*. El problema del consumo y la inversión óptima, en ese contexto, fue analizado por Laibson (1997, 1998).

Otra línea de extensión ha sido considerar economías en tiempo continuo. En este sentido, los primeros modelos que estudian los problemas de equilibrio dinámico en economías estocásticas con mercados completos son debidos a Huang (1987), Dumas (1989) y Karatzas, Lehoczky y Shreve (1990), mientras que Cox, Ingersoll y Ross (1985) estudiaron el caso con mercados incompletos.

En el caso de mercados completos, se construye un agente representativo que tiene una utilidad construida como una combinación lineal de las funciones de utilidad individuales usando pesos constantes. Cuando el mercado es completo o la asignación de equilibrio es Pareto-Eficiente, Negishi (1960), Constantinides (1982) y Huang (1987) mostraron que este tipo de agregación es posible.

Cuando los mercados son incompletos, Cuoco y He (1994) probaron que, en una economía con dos agentes, esta agregación también es posible y la utilidad del agente representativo es dada endógenamente. Ellos construyeron esta utilidad como una combinación lineal de las funciones de utilidad individual, pero usaron pesos representados por procesos estocásticos. Ellos transformaron el problema de equilibrio en una caracterización del proceso de pesos. De aquí pueden ser obtenidas las políticas óptimas.² Por último, Fajardo (2002) mostró que esta agregación también puede ser realizada cuando existen más de dos agentes en la economía.

El trabajo está organizado de la siguiente forma: en la sección 1.2 presentamos la economía estocástica; en la sección 1.3 presentamos el problema del consumo y definimos el equilibrio de expectativas racionales; en la sección 1.4 caracterizamos las políticas óptimas; en la sección 1.5 presentamos los principales resultados de estas últimas; en la sección 1.6 analizamos la existencia de equilibrios; y en las dos últimas secciones presentamos las conclusiones y un apéndice.

² El problema de encontrar las políticas óptimas en mercados incompletos puede ser muy difícil cuando se consideran procesos de precios más realistas y complejos. Véase Fajardo (2000 y 2003).

1.2. La economía

Consideramos una economía en tiempo continuo en el intervalo $[0, T]$, con $T < \infty$, donde existe un único bien de consumo perecible (numerario) y un mercado financiero \mathfrak{M} que consiste de $n + 1$ activos. El primero será llamado de *bono* ‘activo sin riesgo’ y los n restantes serán llamados de *stocks* ‘activos con riesgo’. El precio del *bono* y los precios de los *stocks* serán denotados por $B(t)$ y $P_i(t)$ ($1 \leq i \leq n$), respectivamente. Las ecuaciones que determinan la evolución de los precios de los activos son

$$dB(t) = r(t)B(t)dt, \quad B(0) = 1 \quad (1.1)$$

$$dP_i(t) = P_i(t)[b_i(t)dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} dW_j(t)], \quad P_i(0) \in (0, \infty), \forall i = 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

Estos dos procesos están denominados en unidades del bien de consumo. En esta economía los recursos de riesgo son modelados por las componentes independientes del *movimiento browniano* d -dimensional

$$W(t) = (W_1, \dots, W_d)', \quad 0 \leq t \leq T,$$

cada W_i es un *movimiento browniano*.³ Con esta interpretación, σ_{ij} modela la intensidad instantánea con la cual el recurso de riesgo j —imagine, por ejemplo, el clima— influye en el precio del stock i -ésimo en el instante de tiempo t . El *movimiento browniano* W es definido en un espacio de probabilidad completo dado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$; denotaremos por $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}(t), 0 \leq t \leq T\}$ la compleción⁴ de la filtración natural generada por W

$$\mathcal{F}_W(t) = \sigma(W(s), 0 \leq s \leq t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

³ Véase Apéndice.

⁴ La filtración browniana completa \mathbf{F} es definida por $\mathcal{F}(t) = \sigma(\mathcal{F}_w(t) \cup \mathcal{N})$, donde $\mathcal{N} = \{E \subset \Omega : \exists G \in \mathcal{F} \text{ con } E \subseteq G, P(G) = 0\}$ denota el conjunto de eventos \mathbf{P} -nulos. Es sabido que la filtración completa es continua y W es todavía un movimiento browniano con respecto a ella (Karatzas y Shreve (1988), Corolario 2.7.8 y Proposición 2.7.9).

El proceso de *tasa de interés* es denotado por $\{r(t) : 0 \leq t \leq T\}$, el proceso vectorial de *tasas de apreciación* denotado por $\{b(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t))', 0 \leq t \leq T\}$, el proceso matricial de *volatilidades* denotado por

$$\sigma(t) = \{(\sigma_{ij}(t))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d}, 0 \leq t \leq T\}$$

serán referidos como los *coeficientes* del mercado financiero \mathfrak{M} . Asumiremos que estos procesos son progresivamente medibles⁵ con relación a \mathbf{F} y ellos satisfacen la siguiente relación:

$$\int_0^T (|r(t)| + \|b(t)\| + \|\sigma(t)\|^2) dt < \infty,$$

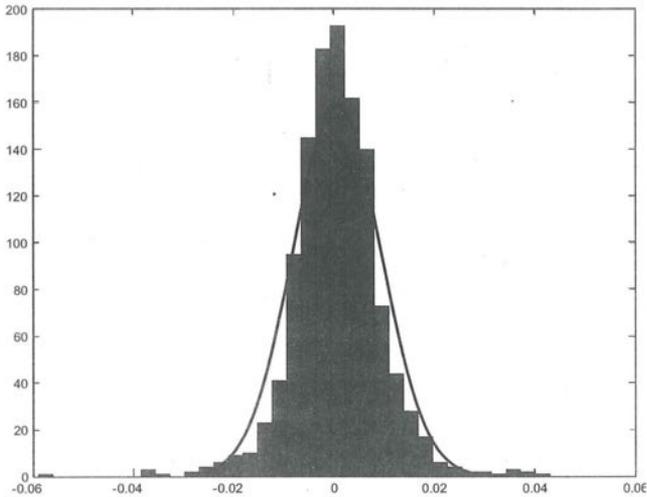
siendo $\|\cdot\|$ la norma euclidiana.

El requerimiento de que $r(t), b(t)$ y $\sigma(t)$ sean progresivamente medibles con relación a \mathbf{F} , esencialmente los hace funcionales del *camino browniano* $\{W(s), 0 \leq s \leq t\}$ hasta el instante t , $\forall t \in [0, T]$. Esta hipótesis evita anticipación del futuro y permite dependencia con el pasado del *movimiento browniano* subyacente o de los precios de los activos de *stock*.

Ahora, ¿será que este modelo de precios es aceptable? Una implicación es que los retornos de estos precios $\ln(P_t/P_{t-1})$ tienen una distribución normal. Es sabido que los datos reales de varios activos no cumplen esta hipótesis. Para ver esto, utilicemos el Índice General de la Bolsa de Valores de Lima (IGBVL), escojamos una muestra de dos años y construyamos el histograma de los retornos (véase figura 1.1).

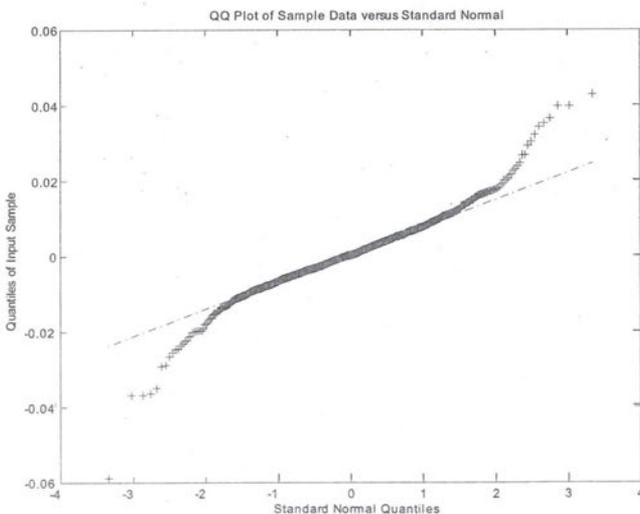
⁵ Véase Apéndice.

Figura 1.1: Histograma de retornos del Índice General de la Bolsa de Valores de Lima (IGBVL) y distribución normal que tiene la misma media y varianza



Está claro que los retornos son más leptocúrticos que la distribución normal; esto también puede ser visto en el gráfico cuantil-cuantil (véase figura 1.2). Sin embargo, este modelo de precios es usado por varios autores, pues permite muchas simplificaciones.

Figura 1.2: Cuantil-Cuantil del IGBVL



Ahora bien, en esta economía todos los agentes tienen la misma información representada por \mathbf{F}_t y tienen las mismas creencias representadas por \mathbf{P} . Estos agentes son considerados pequeños inversores (sus decisiones no afectan los precios del mercado) y cada uno de ellos va a decidir en cada momento $t \in [0, T]$:

- (i) cuánto dinero (α, θ) quiere invertir, donde $\alpha(t)$ y $\theta(t) = (\theta_1(t), \dots, \theta_n(t))'$ denotan el número de unidades de *bonos* y *stocks* respectivamente;
- (ii) cuál deberá ser su consumo acumulado $C(t)$.

Claro está que estas decisiones son tomadas de forma no-anticipativa; luego C y (α, θ) serán procesos adaptados.⁶ Para saber las posibles decisiones de los agentes, caractericemos el conjunto de consumo \mathcal{C} por el conjunto de procesos tasa de consumo adaptados c con $\int_0^t (|c(s)| ds) < \infty$ para todo $t \in [0, T]$. Los conjuntos de consumo individuales serán subconjuntos del octante no-negativo $\mathcal{C}_+ = \{c \in \mathcal{C} : c(t) \geq 0 \forall t\}$. En los procesos de precios de los activos, σ es exógenamente dado; el proceso tasa de interés y el vector n -dimensional de tasas de apreciación serán determinados endógenamente en equilibrio. Para evitar la presencia de activos redundantes; i.e. pueden ser replicados por activos más básicos. Hagamos la siguiente hipótesis:

Hipótesis 1.1. La matriz difusión $\sigma(t, w)$ es continua en su primer argumento y tiene rango fila total para casi todo $t \in [0, T]$.

Ahora una estrategia de negocio admisible para este inversionista debe satisfacer para todo $t \in [0, T]$ la siguiente ecuación:

$$\int_0^t (|\alpha(s)r(s)| + \|\theta'(s)b(s)\| + |\theta'(s)\sigma(s)|^2) ds < \infty.$$

⁶ Decimos que un proceso $\{X_t\}$ es adaptado con respecto a \mathbf{F} si para todo $t \in [0, T]$, X_t es una variable aleatoria $\mathcal{F}(t)$ -medible.

El conjunto de estrategias admisibles será denotado por Θ . Consideramos que en nuestra economía existirán un número finito $K \geq 2$ de inversionistas. La preferencia de cada inversionista es caracterizada por la función de utilidad aditiva en el tiempo e independiente de los estados

$$U_k(c) = E \left[\int_0^T u_k(c(t), t) dt \right], \quad k \in \{1, \dots, K\}.$$

Para resolver el problema de la maximización de la utilidad esperada del consumo, consideraremos que para todo agente k el conjunto \mathcal{C}_k de procesos de consumo satisface

$$E \left[\int_0^T u_k(c(t), t)^- dt \right] < \infty,$$

donde $x^- = \max(0, -x)$; y, para resolver el problema de optimización individual, necesitamos imponer propiedades de suavidad en las preferencias, como la siguiente:

Hipótesis 1.2. Las funciones $u_k(\cdot, t)$ son estrictamente crecientes, estrictamente cóncavas y tres veces continuamente diferenciables en $(0, \infty)$ para todo $t \in [0, T]$. Más aún, estas funciones satisfacen la condición de Inada

$$\lim_{c \downarrow 0} u_{kc}(c, t) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{c \rightarrow \infty} u_{kc}(c, t) = 0, \quad (1.3)$$

y existen constantes $\delta_k \in (0, 1)$ y $\gamma_k \in (0, \infty)$ tales que

$$\delta_k u_{kc}(c, t) \geq u_{kc}(\gamma_k c, t), \quad \forall (c, t) \in (0, \infty) \times [0, T]. \quad (1.4)$$

Finalmente, $u_k(c, \cdot)$ es continuamente diferenciable en $[0, T]$ con

$$\int_0^T |u_k(c, t)| dt < \infty \quad (1.5)$$

para todo $c \in (0, \infty)$.

La condición 1.3 implica que la función derivada $u_{kc}(\cdot, t)$ tiene una inversa continua y estrictamente decreciente $f_k(\cdot, t)$ mapeando $(0, \infty)$ en sí mismo.

1.3. Consumo individual

La condición 1.4 es técnica y será usada para garantizar que cierta funcional integral puede ser diferenciada dentro de la integral. Es fácil comprobar que funciones de utilidad del tipo $u(c, t) = \varrho(t) \log(c)$ y $u(c, t) = \varrho(t) \frac{c^{1-b}}{1-b}$ con $b > 0$, $b \neq 1$ satisfacen esta condición.

Cada inversionista k está dotado de un proceso ingreso $e_k \in \mathcal{C}_+$, con $e_k \neq 0$. Denotemos el proceso ingreso agregado por e , i.e.

$$e = \sum_{k=1}^K e_k.$$

Tenemos la siguiente hipótesis:

Hipótesis 1.3. El proceso e es un proceso de Ito,

$$de(t) = \mu(t)dt + \rho(t)dW_t,$$

para algunas funciones continuas, adaptadas y limitadas μ, ρ . Más aún, existen constantes $0 < e' \leq e''$ tales que

$$e' \leq e(t) \leq e'', \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.6)$$

En lo que sigue, denotaremos por $\mathcal{E} = \left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P}, \sigma, \{u_k, e_k\}_{k=1}^K \right)$ las primitivas de la economía descrita anteriormente, y por $\mathcal{P} = (r, b)$ los parámetros que definen los procesos de precios de los activos. Nos referiremos a \mathcal{E} como la economía y a \mathcal{P} como el sistema de precios.

1.3. Consumo individual

Dado el sistema de precios \mathcal{P} , cada inversionista k escoge su proceso de consumo $c_k \in \mathcal{C}_k$ y una estrategia admisible $(\alpha_k, \theta_k) \in \Theta$, tal que $\alpha_k(0) = 0$, $\theta_k(0) = 0$,

$$X_k(t) \equiv \alpha_k(t)B(t) + \theta_k' P(t) = \int_0^t \alpha_k(s)dB(s) + \int_0^t \theta_k'(s)dP(s) - \int_0^t (c_k(s) - e_k(s))ds, \quad (1.7)$$

$$X_k(t) \geq -\mathcal{K}B(t), \quad (1.8)$$

$$X_k(T) \geq 0, \quad (1.9)$$

para toda $t \in [0, T]$ y algún $\mathcal{K} \in \mathbb{R}_+$, donde $\{X_k(t), 0 \leq t \leq T\}$ denota el proceso riqueza.

La ecuación 1.7 es la bien conocida *restricción presupuestaria dinámica*: riqueza actual es igual a los beneficios por propiedad de empresas, más el ingreso acumulado, menos el consumo acumulado. Ahora, como permitimos que los inversionistas se presten dinero teniendo como garantía el ingreso futuro, necesitamos una restricción de liquidez (ecuación 1.9) para evitar las posibilidades de quiebra. Y para evitar las estrategias de arbitraje, tales como las estrategias dobles, necesitamos una condición tal como 1.8. La suficiencia de esta ecuación para evitar *free lunches* fue probada por Dybvig y Huang (1989).

Definición 1.1. Dado el sistema de precios \mathcal{P} , un proceso de consumo $c_k \in \mathcal{C}$ es factible con el ingreso e_k si existe una estrategia de negocios admisible $(\alpha_k, \theta_k) \in \Theta$ tal que 1.7-1.9 son satisfechas. Entonces decimos que (α_k, θ_k) financia c_k .

Denotaremos el conjunto de procesos de consumo factibles, para el ingreso e_k dado \mathcal{P} , por $\mathcal{B}(e_k, \mathcal{P})$. Ahora, para cualquier sistema de precios \mathcal{P} dado definamos *el proceso premio por riesgo estandarizado*⁷

$$\eta_0 = -\sigma'(t) (\sigma(t)\sigma'(t))^{-1} (b(t) - r(t)\mathbf{1}) \tag{1.10}$$

y el proceso exponencial

$$Z_0(t) = \exp \left(\int_0^t \eta_0'(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t |\eta_0(s)|^2 ds \right) \tag{1.11}$$

con los cuales tenemos el sistema de precios admisible.

Definición 1.2. Un sistema de precios $\mathcal{P} = (r, b)$ es admisible si:

- a) la tasa de interés satisface

$$\int_0^t |r(s)| ds < \infty \tag{1.12}$$

para todo $t \in [0, T]$ y existe una constante $K_1 > 0$ tal que

$$\int_0^T r(t)^- dt < K_1; \tag{1.13}$$

⁷ $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$.

1.3. Consumo individual

b) el proceso premio por riesgo estandarizado η_0 de 1.10 satisface la condición de Novikov

$$E \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T |\eta_0(t)|^2 dt \right) \right] < \infty; \quad (1.14)$$

c) existe una única solución fuerte para la ecuación integral estocástica 1.2.

La condición (a) asegura que el precio del bono esté bien definido y limitado. La condición (b) es necesaria para garantizar la existencia de una medida martingala equivalente⁸ y así evitamos oportunidades de arbitraje.

Con esta definición procedemos a definir el equilibrio.

Definición 1.3. Un *equilibrio de expectativas racionales* para la economía \mathcal{E} es un sistema de precios admisible \mathcal{P} y un conjunto $\{c_k, (\alpha_k, \theta_k)\}$ de consumo admisible y estrategias de negocios tales que

- (i) c_k maximiza U_k en $\mathcal{B}(e_k, \mathcal{P}) \cap \mathcal{C}_k$;
- (ii) (α_k, θ_k) financia c_k ;
- (iii) los mercados están equilibrados, i.e.

$$\sum_{k=1}^K \alpha_k = 0, \quad \sum_{k=1}^K \theta_k = 0, \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^K c_k = e.$$

⁸ Una medida martingala equivalente es una probabilidad Q , la cual es equivalente a la medida original \mathbf{P} ; i.e. ellas tienen los mismos conjuntos de medida nula y tal que el proceso de precios descontados: $\{e^{-\int_0^t r(s)ds} P_t\}_{t \geq 0}$ es una martingala. Un proceso $\{X_t\}$ es una $\{\mathcal{F}_t\}$ -martingala (submartingala, supermartingala) si las siguientes condiciones son satisfechas:

- i) $E|X_t| < \infty$,
- ii) $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ c.t.p. $\forall s \leq t$ (\geq, \leq respectivamente).

1.4. Políticas óptimas

La caracterización de las políticas óptimas, sin utilizar programación dinámica, usando técnicas martingalas son debidas a Karatzas, Lehoczky y Shreve (1987) y Cox y Huang (1989,1991) en el caso de mercados completos; y a Karatzas, Lehoczky, Shreve y Xu (1991) y Cuoco (1997) en el caso de mercados incompletos. En seguida presentamos algunos de estos resultados que serán empleados más tarde.

Primero, supongamos que los mercados son completos, lo que significa imponer ($n = d$).⁹ En este caso, el problema de maximizar la utilidad esperada sujeta a la restricción presupuestaria dinámica 1.7-1.9 es equivalente al problema de maximizar la utilidad esperada sujeta a la restricción presupuestaria tipo Arrow-Debreu:

$$E \left[\int_0^T \gamma(t) Z_0(t) (c(t) - e_k(t)) dt \right] \leq 0, \quad (1.15)$$

donde Z_0 es la densidad de la única *medida martingala equivalente* o también conocida como *probabilidad neutra al riesgo*. Esta es única debido a que los mercados son completos; su expresión es dada por la ecuación 1.11 y el proceso $H_0(\cdot) = \gamma(\cdot) Z_0(\cdot)$ es la única densidad de precios de estado para la economía, en el sentido de que el valor en el tiempo cero (hoy) de cualquier proceso de consumo c es dado por $E \left[\int_0^T H_0(t) c(t) dt \right]$.

Ahora, usando lagrangianos, sabemos que si la solución óptima para el problema de optimización individual k es c_{k0} , entonces esta satisface la condición de primer orden

$$u_{kc}(c_{k0}(t), t) = \psi_k H_0(t) \quad (1.16)$$

para algún multiplicador de Lagrange ψ_k , tal que 1.15 es satisfecha como igualdad.

Para obtener una caracterización similar, en el caso de mercados incompletos, necesitamos extender la definición de medida martingala equivalente.

⁹ Véase Karatzas y Shreve (1998).

Definición 1.4. Una medida de probabilidad Q en (Ω, \mathcal{F}) es «localmente equivalente» a \mathbf{P} si la restricción de Q a \mathcal{F}_t es equivalente a la restricción de \mathbf{P} a \mathcal{F}_t para todo $t \in [0, T]$. Una medida de probabilidad Q localmente equivalente es una medida martingala localmente equivalente si Q es absolutamente continua respecto de \mathbf{P} y el proceso de precios descontados es una martingala local¹⁰ sobre Q .

El conjunto de medidas martingalas localmente equivalentes tiene una estructura explícita. Denotemos por \mathcal{L}^2 el conjunto de procesos adaptados n -dimensionales ξ tales que

$$\int_0^t |\xi(s)|^2 ds < \infty$$

para todo $t \in [0, T]$, y descompongamos \mathcal{L}^2 en dos subconjuntos

$$\begin{aligned} K(\sigma) &= \{ \xi \in \mathcal{L}^2 : \sigma \xi = 0 \quad (P \times l) - c.t.p. \} \\ S(\sigma) &= \{ \xi \in \mathcal{L}^2 : \xi \in R(\sigma')(P \times l) - c.t.p. \}, \end{aligned}$$

donde l denota la medida de Lebesgue en $[0, T]$ y R denota la imagen. Ahora para cada $\nu \in K(\sigma)$ definamos $\eta_\nu(t) = \eta_0 + \nu(t)$; entonces, el proceso exponencial

$$Z_\nu(t) = \exp \left(\int_0^t \eta'_\nu(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t |\eta_\nu(s)|^2 ds \right) \quad (1.17)$$

está bien definido y es una martingala local, continuo y estrictamente positivo.¹¹

¹⁰ Un proceso $\{X_t\}$ es una martingala local si existe una secuencia $\{\mathcal{F}_t\}$ –tiempos de parada τ_n tales que

- i) $\tau_n \rightarrow \infty \quad c.t.p.$;
- ii) $\forall n \quad \{X_{t \wedge \tau_n}\}$ es un $\{\mathcal{F}_t\}$ –martingala.

¹¹ Véase Jacod y Shirjaev (1987). teorema I.4.61.

Ahora denotemos por \mathcal{N} el conjunto de $\nu \in K(\sigma)$, para los cuales el proceso Z_ν es una martingala uniformemente integrable.¹² Observe que el conjunto \mathcal{N} es no-vacío para cualquier sistema de precios admisible \mathcal{P} , porque 1.14 implica que $0 \in \mathcal{N}$. Este conjunto será muy útil, porque la medida martingala equivalente cambia cuando los mercados son incompletos, como nos muestra la siguiente proposición:

Proposición 1.1. Una medida de probabilidad Q es una medida martingala localmente equivalente si y solamente si $\frac{dQ_t}{dP_t} = Z_\nu(t)$ para algún $\nu \in \mathcal{N}$ y todo $t \in [0, T]$, donde $\mathbf{P}_t(Q_t)$ denota la restricción de $\mathbf{P}(Q)$ a \mathcal{F}_t .

Demostración: véase Cuoco y He (1994).

De aquí es fácil ver que cuando los mercados son completos ($n = d$) y $\nu = 0$ debe suceder ($\mathbf{P} \times l$), y entonces existe una única medida martingala localmente equivalente con densidad Z_0 .

El siguiente lema caracteriza la densidad de precios de estado usando las medidas martingala localmente equivalentes.

Lema 1.1. Si c_k es factible para el ingreso e_k , entonces

$$E \left[\int_0^T H_\nu(t)(c_k(t) - e_k(t))dt \right] \leq 0 \quad (1.18)$$

se cumple para todo $\nu \in \mathcal{N}$, donde $H_\nu(\cdot) = \gamma(\cdot)Z_\nu(\cdot)$. Recíprocamente, sea $c_k \in \mathcal{C}_k$ y suponga que existe un proceso $\nu_k \in \mathcal{N}$ tal que

$$E \left[\int_0^T H_\nu(t)(c_k(t) - e_k(t))dt \right] \leq E \left[\int_0^T H_{\nu_k}(t)(c_k(t) - e_k(t))dt \right] = 0 \quad (1.19)$$

para todo $\nu \in \mathcal{N}$. Entonces c_k es factible para el ingreso e_k .

¹² Una martingala $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es uniformemente integrable

$$\sup_t \int_{|X_t| > c} |X_t| dP \rightarrow 0 \text{ cuando } c \rightarrow \infty.$$

Demostración: la primera parte es consecuencia del Lema de Ito¹³ y de la ecuación 1.7. Luego se tiene que usar el hecho de que la esperanza de una integral estocástica con relación al movimiento browniano es cero. Finalmente, usando 1.9, el resultado sigue. Para la recíproca véase, Teorema 1 en Cuoco (1997).

Nos referiremos a 1.18 como *restricción presupuestaria estática*. El lema 1.1 implica que nuestro problema de optimización puede ser reformulado como la maximización de la utilidad esperada sujeta a la secuencia de restricciones presupuestarias asociadas a las densidades H_ν con $\nu \in \mathcal{N}$. Entonces, podemos esperar que los gradientes de las utilidades evaluadas en las políticas óptimas sean una combinación lineal positiva de tales H_ν . Ahora, por el Lema de Ito tenemos que el conjunto $\{H_\nu : \nu \in \mathcal{N}\}$ es un conjunto convexo; entonces, el gradiente de la utilidad del agente k evaluada en la política óptima es proporcional a la densidad de precios de estado H_{ν_k} con $\nu_k \in \mathcal{N}$; esto implica que la solución del problema de consumo individual para el agente k coincide con la solución del problema de maximización de la utilidad esperada del proceso de consumo $c \in \mathcal{C}_k$, lo cual satisfacería la restricción presupuestaria:

$$E \left[\int_0^T H_{\nu_k}(t)(c_k(t) - e_k(t))dt \right] \leq 0. \quad (1.20)$$

El proceso ν_k , satisfaciendo las condiciones de arriba, es necesariamente único, como $H_\nu(0) = 1, \forall \nu \in \mathcal{N}$; el proceso correspondiente H_{ν_k} ha sido definido como *la densidad de precios de estado minimax* por He y Pearson (1991), ya que puede ser caracterizado como la solución de un problema dual de minimización (vea teorema 2). Karatzas, Lehoczky, Shreve y Xu (1991) interpretan la densidad de precios de estado minimax como la única densidad de precios de estado que seguirá prevaleciendo en un mercado artificial obtenido mediante la adición de activos adicionales tales que los agentes no querrán invertir en ellos.

¹³ Véase Apéndice.

Observación

Observe que, en general, la densidad de precios de estado minimax para los K agentes serán diferentes, a menos que los mercados sean completos o la asignación sea Pareto-Eficiente.

En analogía con 1.16, nuestra solución es dada por

$$c_{\nu_k}(t) = f_k(\psi_k H_{\nu_k}(t), t), \quad (1.21)$$

donde ψ_k es el multiplicador de Lagrange, tal que la restricción 1.20 es satisfecha como igualdad. Podemos formalizar la intuición con el siguiente resultado.

Teorema 1.1. Suponga que el proceso de consumo c_{ν_k} de 1.21 satisface la restricción presupuestaria 1.20 como igualdad para algún $\psi_k > 0$, $\nu_k \in \mathcal{N}$. Si existe estrategia financiando c_{ν_k} , entonces H_{ν_k} es la densidad de precio de estados minimax, c_{ν_k} es la política de consumo óptimo para el agente k , y el correspondiente proceso de riqueza es dado por

$$X_{\nu_k}(t) = H_{\nu_k}^{-1}(t) E \left[\int_t^T H_{\nu_k}(s) (c_{\nu_k}(s) - e_k(s)) ds / \mathcal{F}_t \right]. \quad (1.22)$$

Demostración: de la definición de c_{ν_k} y la continuidad de f_k y H_{ν_k} , tenemos $\int_0^t c_{\nu_k}(s) ds < \infty$, $\forall t \in [0, T]$; y, de la desigualdad

$$u_k(1, t) - y \leq \max_{c>0} [u_k(c, t) - yc] = u_k(f_k(y, t), t) - y f_k(y, t),$$

obtenemos

$$E \left[\int_0^T u_k(c_{\nu_k}(t), t) dt \right] \leq \int_0^T u_k(1, t) dt + \psi_k E \left[\int_0^T \gamma(t) Z_{\nu_k}(t) dt \right] < \infty.$$

La última desigualdad viene de 1.5, 1.13 y la propiedad martingala de Z_{ν_k} . De aquí $c_{\nu_k} \in \mathcal{C}_k$.

Ahora tome un $c \in \mathcal{B}(e_k, \mathcal{P})$ arbitrario. Por la concavidad

$$u_k(f_k(x, t), t) - u_k(y, t) \geq x [f_k(x, t) - y] \quad \forall x > 0, y > 0, \quad (1.23)$$

tomando esperanza y escogiendo $x = \psi_k H_{\nu_k}$, tenemos

$$U_k(c_{\nu_k}) - U(c) \geq E \left[\int_0^T \psi_k H_{\nu_k}(t)(c_{\nu_k}(t) - c(t))dt \right] \geq 0; \quad (1.24)$$

por la definición de ψ_k , tenemos

$$E \left[\int_0^T H_{\nu_k}(s)c_{\nu_k}(s)ds \right] = E \left[\int_0^T H_{\nu_k}(s)e_k(s)ds \right]. \quad (1.25)$$

Por el lema 1.1., sabemos que c satisface 1.18. Entonces, obtenemos la última desigualdad 1.24; i.e. c_{ν_k} es óptima. Para probar la última parte, sea (α_k, θ_k) la estrategia de negocios financiando c_{ν_k} , y encontremos la expresión de la riqueza óptima asociada a esta política óptima.

Sea $X_k(t) = \alpha_k(t)B(t) + \theta_k'(t)P(t)$. Ahora de 1.7 y aplicando el Lema de Ito tenemos

$$\begin{aligned} H_{\nu_k}(t)X_k(t) &= \int_0^t H_{\nu_k}(s)(e_{\nu_k}(s) - c_k(s))ds \\ &+ \int_0^t H_{\nu_k}(s)(\theta_k'(s)\sigma(s) + X_k(s)\eta_{\nu_k}'(s))dW(s). \end{aligned} \quad (1.26)$$

De aquí obtenemos

$$\begin{aligned} M(t) &\equiv H_{\nu_k}(t)X_k(t) + \int_0^t H_{\nu_k}(s)(c_{\nu_k}(s) - e_k(s))ds \\ &= \int_0^t H_{\nu_k}(s)(\theta_k'(s)\sigma(s) + X_k(s)\eta_{\nu_k}'(s))dW(s). \end{aligned} \quad (1.27)$$

De 1.13, 1.8 y el hecho de que $\nu_k \in \mathcal{N}$, tenemos que $M(t)$ es uniformemente integrable por abajo; y, de su representación como una integral estocástica, tenemos que es una martingala local. Entonces, según el Lema de Fatou, $M(t)$ es una supermartingala, lo que implica

$$EM(T) \leq EM(t) \leq M(0) = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

También de 1.25 y 1.9, tenemos

$$EM(T) = E[H_{\nu_k}(T)X_k(T)] \geq 0; \quad (1.28)$$

entonces, $EM(T) = EM(t) = M(0) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$, lo que significa que es una martingala.¹⁴ Ahora de 1.9 y $E[H_{\nu_k}(T)X_k(T)] = 0$, obtenemos $X_k(T) = 0$, lo que implica

$$\begin{aligned} H_{\nu_k}(t)X_k(t) + \int_0^t H_{\nu_k}(s)(c_{\nu_k}(s) - e_k(s))ds &= M(t) \\ &= E[M(T) | \mathcal{F}_t] = E \left[\int_0^T H_{\nu_k}(s)(c_{\nu_k}(s) - e_k(s))ds / \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

Finalmente, del hecho que $\int_0^t H_{\nu_k}(s)(c_{\nu_k}(s) - e_k(s))ds$ es \mathcal{F}_t -medible, obtenemos 1.22.

Acabamos de ver en el teorema 1.1. implicaciones de la existencia de la densidad de precios de estado minimax para el agente k ; i.e. la existencia de un proceso $\nu_k \in \mathcal{N}$ tal que la política asociada c_{ν_k} es consumida. El problema de la existencia de densidad de precios de estado minimax es discutida en el Apéndice.

Los resultados anteriores motivan la siguiente definición:

Definición 1.5. Un equilibrio $(\mathcal{P}, c_1, \dots, c_K)$ es regular si existe una densidad de precios minimax H_{ν_k} para cada agente k .

Con esta definición en mente, pasaremos a construir en la siguiente sección un agente representativo.

¹⁴ Véase Karatzas y Shreve (1988: 1.3.25).

1.5. Agente representativo

Pasemos a construir un agente representativo que soporte el equilibrio regular $(\mathcal{P}, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_k)$ para nuestra economía \mathcal{E} ; i.e. construiremos una función de utilidad U tal que (\mathcal{P}, e) es un equilibrio sin negocios para la economía de un solo agente $((\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P}), \sigma, U, e)$.

Defina la función $u(c, \lambda, t) : (0, \infty) \times (0, \infty)^K \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$u(c, \lambda, t) = \max_{\sum_{k=1}^K c_k = c} \left[\sum_{k=1}^K \lambda_k u_k(c_k, t) \right]. \quad (1.29)$$

Sabemos que, para cada $\lambda \in (0, \infty)^K$ fijo, la función u es estrictamente creciente, cóncava y continuamente diferenciable en su primer argumento, y satisface la condición de Inada 1.3 para todo $\lambda \in (0, \infty)^K$ y $t \in [0, T]$; estas propiedades son fáciles de verificar, ya que son heredadas de las funciones de utilidad individuales u_k . La solución del problema de asignación 1.29 es

$$c_k = f_k \left(\frac{u_c(c, \lambda, t)}{\lambda_k}, t \right), \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}. \quad (1.30)$$

Sumando 1.30 para todo k , obtenemos

$$\sum_{k=1}^K f_k \left(\frac{u_c(c, \lambda, t)}{\lambda_k}, t \right) = c;$$

luego, la función

$$f(x, \lambda, t) = \sum_{k=1}^K f_k \left(\frac{x}{\lambda_k}, t \right) \quad (1.31)$$

y u_c son inversas; i.e.

$$f(u_c(c, \lambda, t), \lambda, t) = c. \quad (1.32)$$

De esta última ecuación y usando el Teorema de la Función Implícita, tenemos que u_c es dos veces continuamente diferenciable con respecto a λ .

Ahora mostremos que cualquier equilibrio regular de nuestra economía siempre puede ser soportado por un agente representativo con la siguiente función de utilidad dependiente del estado:

$$U(c, \lambda) = E \left[\int_0^T u(c(t), \lambda(t), t) dt \right]$$

con u dada por 1.29 y λ siendo un proceso adaptado.

Proposición 1.2. Suponga que $(\mathcal{P}, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_k)$ es un equilibrio regular para la economía \mathcal{E} . Entonces existe un proceso continuo y adaptado λ , tal que el proceso de ingreso agregado e maximiza $U(c, \lambda)$ sobre $\mathcal{B} \left(\sum_{k=1}^K e_k, \mathcal{P} \right)$ y las políticas de equilibrio $(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_k)$ resuelven el problema de asignación del agente representativo en 1.29 con $c = e(t)$ y $\lambda = \lambda(t)$ para todo $t \in [0, T]$. Con

$$\lambda_k(t) = \frac{\psi_1 H_{\nu_1}(t)}{\psi_k H_{\nu_k}(t)}, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, \quad (1.33)$$

donde H_{ν_k} denota la densidad de precios de estado minimax para el agente k .

Demostración: primero verifiquemos la factibilidad de e ; tomemos $\alpha = \theta = 0$ en 1.7-1.9. Entonces, tenemos $e \in \mathcal{B} \left(\sum_{k=1}^K e_k, \mathcal{P} \right)$.

Ahora la optimalidad de e , sea c_1, \dots, c_K un proceso no-negativo arbitrario y $c = \sum_{k=1}^K c_k \in \mathcal{B} \left(\sum_{k=1}^K e_k, \mathcal{P} \right)$. Por el lema 1.1., tenemos

$$E \left[\int_0^T H_{\nu_1}(t) \left(\sum_{k=1}^K c_k(t) - \sum_{k=1}^K e_k(t) \right) dt \right] \leq 0. \quad (1.34)$$

Entonces, tomando λ como en 1.33, tenemos:

$$\begin{aligned} & U(e, \lambda) - E \left[\int_0^T \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k u_k(c_k(t), t) \right) dt \right] \\ & \geq E \left[\int_0^T \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k(t) u_k(\bar{c}_k(t), t) \right) dt \right] - E \left[\int_0^T \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k(t) u_k(c_k(t), t) \right) dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq E \left[\int_0^T \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k(t) \psi_k H_{\nu_k}(t) (\bar{c}_k(t) - c_k(t)) \right) dt \right] \\ &= \psi_1 E \left[\int_0^T H_{\nu_1}(t) \sum_{k=1}^K (\bar{c}_k(t) - c_k(t)) dt \right] \geq 0. \end{aligned}$$

La primera desigualdad es obtenida de la definición de U y de la condición de mercados equilibrados, i.e. $\sum_{k=1}^K \bar{c}_k = e$; la segunda sigue de la optimalidad de \bar{c}_k y 1.23 y la última de 1.34 y de la condición de mercados equilibrados. Como (c_1, c_2, \dots, c_K) son arbitrarios, tenemos

$$U(e, \lambda) \geq U(c, \lambda), \quad \forall c \in \mathcal{B} \left(\sum_{k=1}^K e_k, \mathcal{P} \right).$$

De aquí surge la optimalidad de e . Ahora, como en nuestro modelo las condiciones de primer orden son suficientes y necesarias, y debido a la concavidad estricta, tenemos una solución única.

El siguiente resultado muestra cómo los coeficientes de tolerancia al riesgo están relacionados en equilibrio.

Corolario 1.1. El coeficiente de tolerancia al riesgo absoluto del agente representativo evaluado en el consumo agregado es la suma de los coeficientes de tolerancia al riesgo de cada agente evaluados en sus políticas óptimas de consumo:

$$-\frac{u_c(e(t), \lambda(t), t)}{u_{cc}(e(t), \lambda(t), t)} = -\sum_{k=1}^K \frac{u_c(\bar{c}_k(t), t)}{u_{cc}(\bar{c}_k(t), t)}. \quad (1.35)$$

Demostración: primero, tenemos que derivar 1.32 con respecto a c y usar 1.31. Finalmente, usando la segunda afirmación de la última proposición, tenemos que $(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_K)$ resuelve el problema de asignación del agente representativo; luego usando las condiciones de primer orden obtenemos el resultado.

1.6. Equilibrio

En la última sección hemos construido un agente representativo para nuestra economía \mathcal{E} usando un proceso adaptado λ ; ahora usaremos este proceso para caracterizar el equilibrio de \mathcal{E} . Por último, analizaremos las condiciones para las cuales los procesos con esta caracterización sean equilibrios.

Por 1.17 y la definición de H_{ν_k} tenemos

$$dH_{\nu_k}(t) = H_{\nu_k}(t) (-r(t)dt + \eta'_{\nu_k}(t)dW(t)). \quad (1.36)$$

Usando el Lema de Ito, tenemos que el proceso λ_k definido en 1.33 resuelve la siguiente ecuación diferencial estocástica para todo $k \in \{1, \dots, K\}$

$$d\lambda_k(t) = -\nu'_k(t)(\nu_1(t) - \nu_k(t))\lambda_k(t)dt + (\nu_1(t) - \nu_k(t))'\lambda_k(t)dW(t). \quad (1.37)$$

Y, para facilitar la notación, denotemos por \mathcal{G} el siguiente operador:

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}u)(c, \lambda, t) &= \mu(t)u_c(c, \lambda, t) - \sum_{k=1}^K \nu'_k(t)(\nu_1(t) - \nu_k(t))\lambda_k(t)u_{\lambda_k}(c, \lambda, t) \\ &+ \frac{1}{2}u_{cc}(c, \lambda, t) |b(t)|^2 + \sum_{k=1}^K b(t)(\nu_1(t) - \nu_k(t))'\lambda_k u_{c\lambda_k}(c, \lambda, t) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^K (\nu_1 - \nu_k)'(\nu_1 - \nu_j)\lambda_k \lambda_j u_{\lambda_k \lambda_j}(c, \lambda, t). \end{aligned}$$

Luego, tenemos la siguiente caracterización:

Teorema 1.2. Suponga que $(\mathcal{P}, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_K)$ es un equilibrio regular para la economía \mathcal{E} . Defina la utilidad del agente representativo y el proceso λ como en la proposición 1.2. Entonces, el sistema de precios de equilibrio $\mathcal{P} = (r, b)$ y políticas de consumo es dado en términos de λ por

$$r(t) = -\frac{\mathcal{G}u_c(e(t), \lambda(t), t) + u_{ct}(e(t), \lambda(t), t)}{u_c(e(t), \lambda(t), t)} \quad (1.38)$$

$$b(t) = r(t)\mathbf{1} - \frac{u_{cc}(e(t), \lambda(t), t)}{u_c(e(t), \lambda(t), t)}\sigma(t)\rho(t) \quad (1.39)$$

$$\bar{c}_k(t) = f_k \left(\frac{u_c(e(t), \lambda(t), t)}{\lambda_k(t)}, t \right) \quad (1.40)$$

Y la densidad de precios de estado minimax de los K agentes están relacionados en equilibrio por

$$\sum_{k=2}^K (\nu_1(t) - \nu_k(t)) \lambda_k(t) u_{c\lambda_k}(t) = u_c(t) \nu_1(t) - u_{cc}(t) L(t) \rho(t), \quad (1.41)$$

donde $L(t) = I - \sigma'(t)(\sigma(t)\sigma'(t))^{-1}\sigma(t)$ e I denota la matriz identidad $n \times n$.

Demostración: primero, es fácil ver que 1.40 sigue de la proposición 1.2 y 1.30. Ahora como $\lambda_1(t) = 1$, tenemos

$$u_c(e(t), \lambda(t), t) = u_{1c}(\bar{c}_1(t), t) = \psi_1 H_{\nu_1}(t);$$

entonces, por 1.36, obtenemos

$$du_c(t) = -r(t)u_c(t)dt + u_c(t)\eta'_{\nu_1}(t)dW(t),$$

donde colocamos $u_c(t)$ en el lugar de $u_c(e(t), \lambda(t), t)$ y lo mismo se repite luego. Por la Hipótesis 1.3 y 1.37 sabemos que $e(t)$ y $\lambda(t)$ procesos de Ito. Aplicando el Lema de Ito, tenemos

$$du_c(t) = (\mathcal{G}u_c(t) + u_{ct}(t)) dt + \left(u_{cc}(t)\rho(t) + \sum_{k=1}^K (\nu_1(t) - \nu_k(t)) \lambda_k(t) u_{c\lambda_k}(t) \right)' dW(t).$$

Igualando los respectivos términos, obtenemos

$$-r(t)u_c(t) = \mathcal{G}u_c(t) + u_{ct}(t)$$

$$u_c(t)\eta_{\nu_1}(t) = u_{cc}(t)\rho(t) + \sum_{k=1}^K (\nu_1(t) - \nu_k(t)) \lambda_k(t) u_{c\lambda_k}(t).$$

Luego, 1.38 sigue de la primera igualdad y, descomponiendo la segunda, tenemos la siguiente relación:

$$u_c(t)\eta_0(t) + u_c(t)\nu_1(t) = u_{cc}(t)\Gamma(t)\rho(t) + \left[u_{cc}(t)L(t)\rho(t) + \sum_{k=1}^K (\nu_1(t) - \nu_k(t)) \lambda_k(t) u_{c\lambda_k}(t) \right], \quad (1.42)$$

donde $\Gamma(t) = \sigma'(t) (\sigma(t)\sigma'(t))^{-1} \sigma(t)$.

Por la definición de \mathcal{N} y L , tenemos que los segundos términos en cada miembro de la ecuación 1.42 pertenecen a $K(\sigma)$ y, por 1.10, tenemos que los primeros términos pertenecen a $S(\sigma)$. Agrupando términos y usando la definición de η_0 , obtenemos

$$-u_c(t) (b(t) - r(t)\mathbf{1}) = u_{cc}(t)\sigma(t)\rho(t)$$

$$u_c(t)\nu_1(t) = u_{cc}(t)L(t)\rho(t) + \sum_{k=1}^K (\nu_1(t) - \nu_k(t))\lambda_k(t)u_{c\lambda_k}(t).$$

Estas dos ecuaciones nos dan 1.39 y 1.41.

Acabamos de ver que la tasa de interés real es igual a menos la tasa esperada de crecimiento de la utilidad marginal de consumo del agente representativo; y el exceso de tasa de retorno de equilibrio en los activos con riesgo es proporcional a la covarianza condicional instantánea entre cambios de consumo y retornos de los activos. Estas relaciones establecen el *Consumption based Capital Asset Pricing Model* (CCAPM) de Breeden (1979) para nuestra economía. Sin embargo, el resultado de Breeden asume que el equilibrio es markoviano, así como la existencia de soluciones suaves para la ecuación de Bellman. Duffie y Zame (1989) y Karatzas, Lehoczky y Shreve (1990) obtuvieron este CCAPM para mercados completos y los resultados con mercados incompletos fueron obtenidos por Grossman y Shiller (1982) y Back (1991).

Ahora, planteemos la siguiente pregunta: dado que el proceso λ satisface 1.37 y 1.41 para algún $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k) \in (\mathcal{L}^2)^K$ y para condiciones iniciales apropiadas $\lambda(0)$, ¿cuándo tal proceso 1.38-1.40 será un equilibrio para nuestra economía \mathcal{E} ?

Para responder esta pregunta, hagamos un cambio de variables: $\lambda_k(t) = e^{\beta_k(t)}$. Con esto, garantizamos $\lambda_k(t) \in (0, \infty)$. Aplicando el Lema de Ito, obtenemos

$$d\beta_k(t) = -\frac{1}{2}(|\nu_1(t)|^2 - |\nu_k(t)|^2)dt + (\nu_1(t) - \nu_k(t))'dW(t).$$

Para un proceso dado $\nu_1 \in \mathcal{N}$, defina el sistema de precios \mathcal{P}_{ν_1} por 1.38-1.39. Ahora, haciendo $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_K)$, podemos escribir la ecuación diferencial estocástica de $\mathcal{S} = (P, \beta)$ como sigue:

$$d\mathcal{S}(t) = b_{\nu_1}(P(t), \beta(t), t, w)dt + \sigma_{\nu_1}(P(t), \beta(t), t, w)dW(t). \quad (1.43)$$

Como los coeficientes b_{ν_1} y σ_{ν_1} son continuos en sus dos primeros argumentos sabemos, por un teorema de ecuaciones diferenciales estocásticas,¹⁵ que la solución de 1.43 es única y existe a menos de una explosión en el tiempo que depende de la condición inicial $\beta(0)$.

Ahora respondamos la pregunta anterior.

Teorema 1.3. Suponga que existe $\beta(0) \in \mathbb{R}^K$, $\nu_1 \in \mathcal{N}$, y λ satisfaciendo 1.37 y 1.41 para algún $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k) \in (\mathcal{L}^2)^K$ tal que

(a) la ecuación 1.43 tiene una solución fuerte en $[0, T]$ y

$$E \left[\int_0^T u_c(e(t), \lambda(t), t) (f_1(u_c(e(t), \lambda(t), t), t) - e_1(t)) dt \right] = 0; \quad (1.44)$$

(b) para todo k , la política de consumo \bar{c}_k de 1.40 es negociado para el sistema de precios \mathcal{P}_{ν_1} ;

(c) la tasa de interés satisface 1.13.

Si $\forall k \in \{2, \dots, K\}$, $E[Z_{\nu_k}(T)] = 1$ y $\sigma(t)\nu_k(t) \geq 0$, $\forall t \in [0, T]$, entonces $\nu_k \in \mathcal{N}$, $\forall k \in \{2, \dots, K\}$ y el sistema de precios \mathcal{P}_{ν_1} con la política de consumo en 1.40 define un equilibrio regular para la economía \mathcal{E} .

Demostración: véase Fajardo (2002).

1.7. Conclusiones

Hemos mostrado cómo se construyen agentes representativos en economías en tiempo continuo, tanto con mercados incompletos como con completos, con K agentes; con este agente representativo, hemos caracterizado el equilibrio y analizado su existencia. Muchas extensiones de este modelo pueden ser realizadas: por ejemplo, pueden introducirse más hechos estilizados de los retornos de los activos financieros o saltos en la difusión de los precios.

¹⁵ Véase Protter (1990), teorema 7.38.

Otra extensión de interés, sería considerar restricciones a la participación de los agentes en el mercado financiero como es considerado por Bařak y Cuoco (1998); ellos solo consideran dos agentes. Para hacer nuestro modelo más realista, también deberíamos introducir fricciones en el mercado, como por ejemplo, restricciones en las ventas al descubierto, costos de transacción, etcétera, como consideran Shreve y Xu (1992a,b) y Cvitanić y Karatzas (1996) para resolver el problema de consumo e inversión óptima.

Una extensión más difícil sería permitir que los agentes no cumplan con sus compromisos. Dos posibles formas de lidiar con este problema son los modelos con penalidades en la utilidad, como en Araujo, Monteiro y Páscoa (1998); o los modelos con garantías, como en Araujo, Fajardo y Páscoa (2005). Ambos modelos son en tiempo discreto.

1.8. Apéndice

1.8.1. Movimiento browniano

$\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento browniano estándar si:

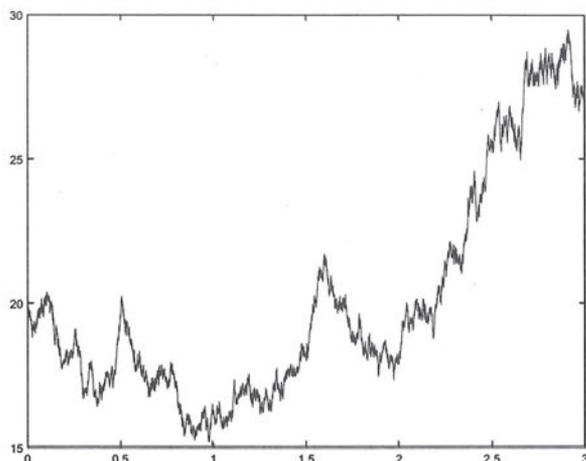
- W_t es continuo en t ;
- para todo t y $s > t$, $W_s - W_t \sim N(0, s - t)$;
- para cualesquiera t_0, t_1, \dots, t_n tales que $t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$, las variables aleatorias $W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ son independientes.

Simulemos la ecuación b) para $d = 1$, $P(0) = 20$, $b = 14\%$, $\sigma = 20\%$ y $\Delta t = 0,01$; entonces,

$$\Delta P = 0,0014P + 0,02P\varepsilon \quad \text{donde } \varepsilon \sim N(0, 1).^{16}$$

¹⁶ Véase figura 1.3.

Figura 1.3: Simulación del Movimiento Browniano Geométrico



Ahora decimos que un proceso con valores en \mathbb{R}^n , $X = \{X(t) : t \in [0, T]\}$ es progresivamente medible con relación a la filtración $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ si para cada $t \in [0, T]$ el mapeamiento $(s, w) \mapsto X(s, w)$ de $([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}(t))$ en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ es medible, donde $\mathcal{B}[0, t] \otimes \mathcal{F}(t)$ denota el producto de la σ -álgebra de Borel en $[0, T]$ y $\mathcal{F}(t)$.

1.8.2. Lema de Ito

Suponga que $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es movimiento browniano standard y X un proceso de Ito, i.e. $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$, y sea $f : (0, \infty) \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f \in C^{2,1}((0, \infty) \times [0, T])$. Entonces, el proceso $Y_t = f(X_t, t)$, es un proceso de Ito con

$$dY_t = \left[f_x(X_t, t)\mu_t + f_t(X_t, t) + \frac{1}{2}f_{xx}(X_t, t)\sigma_t^2 \right] dt + f_x(X_t, t)\sigma_t dW_t.$$

Esta expresión es conocida como *Fórmula de Ito*.

1.8.3. Densidad de precios de estado minimax

Los siguientes resultados, que son debidos a He y Pearson (1991) y Karatzas, Lehoczky, Shreve y Xu (1991), nos da la caracterización de esta densidad. Denote

el conjugado convexo de u_k por $\hat{u}_k(y, t)$, i.e.

$$\hat{u}_k(y, t) \equiv \max_{c>0} [u_k(c, t) - yc] = u_k(f_k(y, t), t) - yf_k(y, t);$$

y para cualquier $(\psi, \nu) \in (0, \infty) \times \mathcal{N}$ define

$$J_k(\psi, \nu) = E \left[\int_0^T \hat{u}_k(\psi H_\nu(t), t) dt + \psi \int_0^T H_\nu(t) e_k(t) dt \right].$$

Arriba, la esperanza está bien definida, ya que tenemos de 1.4

$$E \left[\int_0^T \hat{u}_k(\psi H_\nu(t), t)^- dt \right] \leq \int_0^T u_k(1, t)^- dt + \psi E \left[\int_0^T H_\nu(t) dt \right] < \infty.$$

Teorema 1.4. Si $(\psi_k, \nu_k) \in (0, \infty) \times \mathcal{N}$ resuelve el problema

$$\inf_{\psi \in (0, \infty)} \inf_{\nu \in \mathcal{N}} J_k(\psi, \nu), \quad (1.45)$$

y

$$E \left[\int_0^T H_{\nu_k}(t) (f_k(\psi_k H_{\nu_k}(t), t) - e_k(t)) dt \right] < \infty; \quad (1.46)$$

entonces, c_{ν_k} es óptima para el agente k y el proceso de riqueza óptima es dado por X_{ν_k} . En particular H_{ν_k} identifica la densidad de precios de estado minimax para el agente k .

El próximo resultado es debido a Cuoco y He (1994) y brinda condiciones suficientes para que se cumplan las hipótesis del anterior teorema.

Teorema 1.5. Asuma que

- a) $u_k(\infty, t) = \infty$ para todo $t \in [0, T]$ y $u_k(c, t)^- \leq k(1 + c^{1-b})$ en $(0, \infty) \times [0, T]$ para algún $k \geq 0, b \geq 1$;

1.8. Apéndice

b) $y/B > \epsilon$ ($l \times \mathbf{P}$) – c.t.p. para algún $\epsilon > 0$;

c) $\forall \psi \in (0, \infty), \exists \nu \in \mathcal{N}$ tal que $J_k(\psi, \nu) < \infty$.

Entonces, el mínimo en 1.45 es alcanzado y la densidad de precios de estado minimax para el agente k existe. Si adicionalmente

d) $cu_{kc}(c, t) \leq a + (1 - b)u_k(c, t)$ en

$$(0, \infty) \times [0, T]$$

para algún $a \geq 0, b > 0$,

entonces, la condición 1.46 también es satisfecha y por ello existe una política óptima de consumo e inversión para el agente k .

Referencias bibliográficas

- [1] Arrow, K. (1951), An Extension of the Basic Theorems of Classical Welfare Economics, en *Proceedings of Second Berkeley Symposium*.
- [2] Araujo, A., Fajardo, J., y Páscoa, M. (2005), Endogenous Collateral, *Journal of Mathematical Economics* 41, 439-462.
- [3] Araujo, A., Monteiro, P., y Páscoa, M. (1998), Incomplete Markets, Continuum of states and Default, *Economic Theory* 11, 205-213.
- [4] Back, K. (1991), Asset Pricing for General Processes, *Journal of Mathematical Economics* 20, 371-395.
- [5] Başak, S. y Cuoco, D. (1998), An Equilibrium Model with Restricted Stock Market Participation, *Review of Financial Studies* 11, 309-341.
- [6] Breeden, D.T (1979), An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities, *Journal of Financial Economics* 7, 265-296.
- [7] Constantinides, G.M. (1982), Intertemporal Asset Pricing with Heterogeneous Consumers and without Demand Aggregation, *Journal of Business* 55, 253-267.
- [8] Cox, J.C. y Huang, C.-F. (1989), Optimal Consumption and Portfolio Policies when Asset Prices Follow a Diffusion Process, *Journal of Economic Theory* 49, 33-83.
- [9] Cox, J.C. y Huang, C.-F. (1991), A Variational Problem Arising in Financial Economics, *Journal of Mathematical Economics* 20, 465-487.

- [10] Cox, J.C., Ingersoll, J.E. y Ross, S.A. (1985), An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices, *Econometrica* 53, 363-384.
- [11] Cuoco, D. (1997), Optimal Consumption and Equilibrium Prices with Portfolio Constraints and Stochastic Income, *Journal of Economic Theory* 72, 33-73.
- [12] Cuoco, D. y He, H. (1994), Dynamic Equilibrium in Infinite-Dimensional Economies with Incomplete Financial Markets. Documento de trabajo, Wharton School, University of Pennsylvania.
- [13] Cvitanić, J. y Karatzas, I. (1996), Hedging and Portfolio Optimization under Transaction Costs: A Martingale Approach, *Mathematical Finance* 6, 133-165.
- [14] Debreu, G. (1952), A social equilibrium existence theorem, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 38, 886-893.
- [15] Duffie, D. y Zame, W. (1989), Consumption-Based Capital Asset Pricing Model, *Econometrica* 57, 1279-1297.
- [16] Dumas, B. (1989), Two-Person Dynamic Equilibrium in the Capital Market, *Review of Financial Studies* 2, 157-188.
- [17] Dybvig, P.H. y Huang, C.-F. (1989), Nonnegative Wealth, Absence of Arbitrage and Feasible Consumption Plans, *Review of Financial Studies* 1, 377-401.
- [18] Fajardo, J. (2000), Optimal Consumption and Investment with Hyperbolic Lévy Motion, *Brazilian Review of Econometrics* 20, 27-54.
- [19] Fajardo, J. (2002), Equilibrium in Stochastic Economies with Incomplete Financial Markets, *Brazilian Review of Econometrics* 22, 67-102.
- [20] Fajardo, J. (2003), Optimal Consumption and Investment with Lévy Processes, *Revista Brasileira de Economia* 57, 825-848.
- [21] Grossman, S.J. y Shiller, R.J. (1982), Consumption Correlatedness and Risk Measurement in Economies with Non-Traded Assets and Heterogeneous Information, *Journal of Financial Economics* 10, 195-210.

- [22] He, H. y Pearson, H.D. (1991), Consumption and Portfolio Policies with Incomplete Markets and Short-Sale Constraints: The Infinite Dimensional Case, *Journal of Economic Theory* 54, 259-304.
- [23] Huang, C.-F. (1987), An Intertemporal General Equilibrium Asset Pricing Model: The Case of Diffusion Information, *Econometrica* 55, 117-142.
- [24] Jacka, S.D. (1992), A Martingale Representation Result and an Application to Incomplete Financial Markets, *Mathematical Finance* 2, 239-250.
- [25] Jacod, J. y Shiryaev, A.N. (1987), *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer-Verlag, New York.
- [26] Karatzas, I., Lehoczky, J.P. y Shreve, S.E. (1987), Optimal Consumption and Portfolio Decisions for a "Small Investor" on a Finite Horizon, *SIAM Journal of Control and Optimization* 25, 1557-1586.
- [27] Karatzas, I., Lehoczky, J.P. y Shreve, S.E. (1990), Existence and Uniqueness of Multi-Agent Equilibrium in a Stochastic Economy, Dynamic Consumption/Investment Model, *Mathematics of Operations Research* 15, 80-128.
- [28] Karatzas, I., Lehoczky, J.P., Shreve, S.E. y Xu, G.-L. (1991), Martingale and Duality Methods for Utility Maximization in Incomplete Markets, *SIAM Journal of Control and Optimization* 29, 702-730.
- [29] Karatzas, I. y Shreve, S.E. (1988), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag: Nueva York.
- [30] Karatzas, I. y Shreve, S.E. (1998), *Methods of Mathematical Finance. Applications of Mathematics* 39, Springer-Verlag: Nueva York.
- [31] Laibson, D. (1998), Life-cycle Consumption and Hyperbolic Discount Functions, *European Economic Review Papers and Proceedings* 42, 861-871.
- [32] Laibson, D. (1997), Golden Eggs and Hyperbolic Discounting, *Quarterly Journal of Economics* 62, 443-477.

- [33] Mackenzie, L. (1955), Competitive equilibrium with dependent consumer preferences, *Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming*, 277-294. Washington DC.
- [34] Negishi, T. (1960), Welfare Economics and Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, *Metroeconomica* 12, 92-97.
- [35] Pareto, W. (1896). *Cours d'économie politique*. Rouge: Lausanne.
- [36] Protter, P. (1990), *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer-Verlag: Nueva York.
- [37] Shreve, S.H. y Xu, G.-L. (1992a), A Duality Method for Optimal Consumption and Investment under Short-Selling Prohibition. I. General Market Coefficients, *Annals of Applied Probability* 2, 87-112.
- [38] Shreve, S.H. y Xu, G.-L. (1992b), A Duality Method for Optimal Consumption and Investment under Short-Selling Prohibition. II. Constant Market Coefficients, *Annals of Applied Probability* 2, 314-328.
- [39] Walras, L. (1874). *Elements d'économie politique pure*. L. Corbaz: Lausanne.

2. Solución del problema de programación dinámica: métodos de estimación y sus precisiones

*Wilfredo Leiva*¹

2.1. Introducción

Uno de los problemas más frecuentes en Economía es el de asignación intertemporal óptima de recursos. Tanto en macroeconomía cuanto en microeconomía, este problema se presenta de diversas formas. En macroeconomía, los problemas de asignación óptima de capital (físico, financiero o humano), mano de obra y consumo son ejemplos típicos. En microeconomía, la elección de consumo-inversión óptimos, procesos de aprendizaje y acumulación de capital humano y decisiones de producción e inversión de empresas también se encuadran en la misma estructura del problema.

¹ Profesor, Pós-Graduação em Economia da Universidade Católica de Brasília, SGAN 916, Módulo B, CEP 70790-160, Brasília DF, Brasil. Correo electrónico: wilfredo@pos.ucb.br.

Agradezco al Conselho Nacional de Pesquisa de Brasil por la ayuda financiera otorgada, número 305317/2003-2.

El Problema de Programación Dinámica Estocástica (PPDE) coloca de manera explícita todos los elementos relevantes en problemas como los descritos anteriormente. Como en todo problema de optimización, el PPDE tiene una función objetivo, un conjunto de valores que la variable puede asumir y un conjunto de restricciones sobre ella. Como la variable de elección es, con seguridad, una secuencia de valores, el problema es de dimensión infinita y, por lo tanto, los métodos para resolverlo son muy diferentes de aquellos utilizados en dimensión finita.

Dos son los tratamientos clásicos para resolver el PPDE: el tratamiento recursivo (también conocido como el método de Bellman) y el tratamiento diferenciable (a través de las Ecuaciones de Euler y condición de transversalidad). El primer método utiliza fuertemente el carácter recursivo que el propio PPDE posee, y es utilizado principalmente en situaciones en que una solución explícita puede ser hallada o cuando quiere utilizarse algún método numérico para aproximar la solución globalmente. El segundo método es utilizado cuando la función objetivo es diferenciable y se quiere encontrar soluciones locales. Ambos métodos son presentados de manera clara en Stokey y Lucas (1989), y sus implementaciones numéricas son descritas en Taylor y Uhlig (1990) y más ampliamente en Judd (1998).

Este artículo tiene por finalidad la presentación y discusión de los resultados más recientes relativos a los métodos de solución del PPDE y sus precisiones. Primero, presentaré de manera formal el PPDE; mostraré cómo su carácter recursivo es utilizado para escribirlo en la forma de una ecuación funcional, cuya solución es el valor máximo alcanzado en la maximización; luego, presentaré los principales métodos utilizados para encontrar el máximo (o solución) del problema para, finalmente, mostrar sus precisiones a través del control de los errores al hacer las respectivas aproximaciones.

2.2. Programación dinámica estocástica

En esta sección defino formalmente el PPDE y su solución. Además utilizaré la característica recursiva inherente a él para relacionarlo con su ecuación funcional asociada.

El PPDE está definido a partir de los siguientes elementos: $X \subset \mathbb{R}^l$, el conjunto de valores para la variable endógena (supondremos que es un conjunto Boreliano convexo); $Z \subset \mathbb{R}^k$, el conjunto de valores para los choques estocásticos exógenos (supondremos que es un conjunto compacto). Denotaré las σ -álgebras de esos conjuntos por \mathcal{X} y \mathcal{Z} respectivamente. Los choques estocásticos en general pueden evolucionar de manera que guarden alguna memoria de realizaciones pasadas. Por simplicidad, supondremos que la dinámica de estos choques es determinada por una función de transición $Q : Z \times \mathcal{Z} \rightarrow [0, 1]$, de manera que $Q(z, A)$ representa la probabilidad de que en el siguiente período el choque aleatorio tome valores en A , dado que en el período actual toma el valor z . La función de transición Q también define transiciones para más de un período adelante. Por ejemplo, $Q^2(z, A, B) = \int_Z Q(z', B) Q(z, dz')$ y por inducción se define Q^t para $t \geq 3$. Supondremos que Q posee la propiedad de Feller (o sea, que la integral en relación con la medida de probabilidad $Q(z, dz)$ de una función continua es una función continua en la variable z).

Las restricciones intertemporales que las variables endógenas del PPDE puedan tener están definidas a través del conjunto $\Omega \subset X \times X \times Z$, el cual describe la factibilidad de las decisiones futuras (o sea, si $(x, z) \in X \times Z$ son los valores actuales de la variable de estado y del choque aleatorio, entonces $y \in X$ es un valor factible para la variable de estado del próximo período si y solamente si $(x, y, z) \in \Omega$). En algunos análisis, es más útil considerar la correspondencia de factibilidad $\Gamma : X \times Z \rightarrow \mathbb{R}^l$; ella es definida a partir del conjunto Ω como $\Gamma(x, z) = \{y \in X / (x, y, z) \in \Omega\}$.

La función objetivo del PPDE es definida a partir de la función retorno en un período $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, en donde $F(x, y, z)$ representa el retorno actual si y es escogida para el siguiente período a partir de (x, z) , y del factor de descuento $\beta \in (0, 1)$. Con todos estos elementos, el PPDE consiste en encontrar una secuencia de planes contingentes $(\hat{x}_t)_{t \geq 1}$ (en donde, para cada $t \geq 1$, $\hat{x}_t : Z^t \rightarrow X$ es una función medible), tal que resuelva la siguiente maximización:

$$v(x_0, z_0) = \text{Maximizar } \sum_{t=0}^{\infty} \int_{Z^t} \beta^t F(x_t, x_{t+1}, z_t) Q^t(z_0, dz^t) \quad (2.1)$$

sujeto a $(x_t, x_{t+1}, z_t) \in \Omega$ para todo $t \geq 0$
 $(x_0, z_0) \in X \times Z$ dado.

La función $v : X \times Z \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada *función valor* del PPDE y su significado es simple: si los valores actuales de la variable de estado y del choque aleatorio son (x_0, z_0) , entonces el máximo beneficio que puede ser alcanzado es $v(x_0, z_0)$. Esta interpretación simple nos permitirá, más adelante, relacionar el PPDE con una ecuación funcional adecuada.

Las siguientes hipótesis son usualmente asumidas en este tipo de problemas:

Hipótesis 2.1. La correspondencia Γ es no-vacía, de valores compactos, continua y para todo $x, x' \in X$, $z \in Z$ y $t \in [0, 1]$ satisface

$$t\Gamma(x, z) + (1 - t)\Gamma(x', z) \subset \Gamma(tx + (1 - t)x', z).$$

Hipótesis 2.2. La función F es limitada, continua y estrictamente cóncava.

Con estas hipótesis y utilizando el Teorema del Máximo (véase Stokey y Lucas (1989)), se prueba que el operador T , definido en el espacio de las funciones continuas y limitadas con dominio $X \times Z$ (y que denotamos por $C(X \times Z)$):

$$Tf(x, z) = \text{Max } F(x, y, z) + \beta \int_Z f(y, z') Q(z, dz') \quad (2.2)$$

sujeto a $y \in \Gamma(x, z)$,

es una contracción con módulo β ; es decir, dadas dos funciones $f, g \in C(X \times Z)$ tenemos que $\|Tf - Tg\| \leq \beta \|f - g\|$.² Como toda contracción en un espacio de Banach, este operador tiene un único punto fijo que, con las hipótesis 2.1 y 2.2, resulta ser exactamente la función valor del PPDE (véase Stokey y Lucas (1989)). Por lo tanto, la función valor debe cumplir

$$v(x, z) = \text{Max } F(x, y, z) + \beta \int_Z v(y, z') Q(z, dz') \quad (2.3)$$

sujeto a $y \in \Gamma(x, z)$.

La ecuación 2.3, llamada *Ecuación de Bellman*, es una cuya incógnita es la función valor v . Observemos que esta ecuación es bastante intuitiva. Si $v(y, z')$ es el valor máximo que puede ser alcanzado a partir del próximo

²La norma que estamos considerando aquí es la norma del supremo, o sea, $\|f\| = \text{Sup } \{|f(x)| / x \in X\}$.

2.2. Programación estocástica

período cuando la variable de estado es y y el choque es z' , entonces $F(x, y, z) + \beta \int_Z v(y, z') Q(z, dz')$ será el beneficio a partir del período actual si tenemos el estado x y el choque z , y escogemos para el próximo período el estado $y \in \Gamma(x, z)$. De esta manera, al buscar el valor de y que maximice el beneficio a partir del período actual, deberíamos de encontrar como valor máximo exactamente $v(x, z)$.

La ecuación 2.3 puede ser resuelta iterativamente utilizando el hecho de que el operador T definido en 2.2 es una contracción. Con seguridad, si $v_0 \in C(X \times Z)$ y definimos la secuencia de funciones $v_n = T v_{n-1}$, entonces

$$\|v_n - v\| = \|T v_{n-1} - T v\| \leq \beta \|v_{n-1} - v\| \leq \dots \leq \beta^n \|v_0 - v\|. \quad (2.4)$$

A partir de la definición de v dada en 2.1, podemos concluir que $\|v\| \leq (1 - \beta)^{-1} \|F\|$. Usando esto y tomando $v_0 \equiv 0$, la relación 2.4 resulta

$$\|v_n - v\| \leq \frac{\beta^n}{1 - \beta} \|F\|; \quad (2.5)$$

de esta manera, podemos aproximar la función valor utilizando las aproximaciones v_n y teniendo un buen control de los errores de la aproximación.

El método descrito anteriormente permite que aproximemos la función valor de un PPDE de manera bastante precisa; pero ¿cómo calcular la secuencia de planes contingentes (trayectoria) óptima del PPDE? Para poder construir la trayectoria óptima utilizamos el llamado *Principio de Optimalidad de Bellman* que describimos a continuación. Debido a la concavidad estricta de F , podemos probar que v también es estrictamente cóncava y, por lo tanto, para cada (x, z) tendremos una única solución para la maximización en 2.3 (llamado argumento maximizador), o sea

$$g(x, z) = \text{ArgMax } F(x, y, z) + \beta \int_Z v(y, z') Q(z, dz') \quad (2.6)$$

sujeto a $y \in \Gamma(x, z)$.

Así, el Principio de Optimalidad de Bellman afirma que, con la función $g : X \times Z \rightarrow X$ definida en 2.6 (llamada *función política óptima*), se genera la trayectoria óptima de la siguiente manera:

$$x_t = g(x_0, z_0); \quad x_{t+1} = g(x_t, z_t), \quad \forall t \geq 1. \quad (2.7)$$

Es importante notar que la secuencia generada por la relación 2.7 es una secuencia de variables aleatorias (puesto que z_1, z_2, \dots son choques aleatorios que en el instante inicial son desconocidos).

2.3. Métodos de estimación de la función política óptima y sus precisiones

En la sección anterior vimos cómo aproximar la función valor por medio de la secuencia $(v_n)_n$ y que esto puede ser realizado, teniendo un buen control del error máximo que pueda estar cometándose, utilizando la ecuación 2.5. Sin embargo, para encontrar la solución (función política) del PPDE, existen otros métodos para los cuales no siempre puede tenerse un control del error que está siendo cometido. En esta sección presentaré los métodos más utilizados en la literatura y discutiré sus ventajas y desventajas.

Antes de comenzar con la descripción de tales métodos, me gustaría destacar la importancia de poder estimar (o de aproximar) la función política óptima. Recordemos que esta función sirve para poder construir la secuencia óptima que maximiza el objetivo del PPDE. Esta construcción se realiza a través de iteraciones de la función política tal como fue descrito en la ecuación 2.7. De esta manera, pequeños errores en la estimación de g pueden ser amplificadas sensiblemente después de algunas iteraciones (por ejemplo, si la función g exhibe sensibilidad a las condiciones iniciales). En contraposición, situaciones en donde la función política óptima tenga un punto atractor global, pequeños errores en su aproximación podrán mantenerse controlados en el largo plazo.

2.3.1. Estimación de la política óptima utilizando la aproximación de la función valor

La primera forma de estimar la función política óptima es la más intuitiva y parte de la estimación de la función valor. Así, si v_n es una aproximación de la función valor, entonces definimos

$$g_n(x, z) = \text{ArgMax } F(x, y, z) + \beta \int_Z v_n(y, z') Q(z, dz') \quad (2.8)$$

sujeto a $y \in \Gamma(x, z)$.

De esta manera tenemos definida la secuencia de funciones $(g_n)_n$. El teorema 9.9 de Stokey y Lucas (1989) prueba que esta secuencia converge puntualmente a la función política óptima y, si el dominio es un conjunto compacto, entonces la convergencia es uniforme. Aunque este resultado afirma la estabilidad de las iteraciones $(g_n)_n$, nada dice en relación con error que pueda estar cometándose al hacer una de estas aproximaciones.

En el artículo de Maldonado y Svaiter (2001), presentamos un límite al error cometido a través de esa forma de aproximar la política óptima. Utilizamos una hipótesis adicional, ligeramente más fuerte que la concavidad estricta de la función F , usualmente considerada.

Teorema 2.1. Si además de las hipótesis 2.1 y 2.2 tenemos que la función retorno es fuertemente cóncava en la variable x , o sea, existe un $\eta > 0$ tal que para todo $z \in Z$, $F(x, y, z) + (\eta/2)\|x\|^2$ es una función cóncava, entonces

$$\|g - g_n\| \leq \left(\frac{2}{(1 - \beta)\eta} \|F\| \right)^{1/2} \beta^{n/2}. \quad (2.9)$$

Es importante notar que el error en la estimación de la política óptima dado por el segundo miembro de la desigualdad 2.9 depende solamente de los *primitivos* del PPDE y, por lo tanto, podemos usar esta fórmula para calcular primero el número de iteraciones necesarias (n) para conseguir una precisión deseada. En el artículo de Santos y Vigo-Aguiar (1998), se proporciona también una fórmula de error de aproximación semejante a la propuesta por Maldonado y Svaiter (2001); sin embargo, es importante destacar que la fórmula del error que ellos proponen es con relación a la versión discretizada del PPDE original y, por lo tanto, aún cabría la estimación del error de la aproximación de la verdadera política óptima por medio de la política óptima de su versión discretizada.

Para concluir esta subsección, me gustaría mencionar que las estimaciones de la política óptima no necesitan que la estimación de la función valor sea realizada utilizando las iteraciones del operador contractivo T dado en la ecuación 2.2. La aproximación de la función valor puede ser llevada a cabo a través de otros métodos y, solamente haciendo una iteración de esta aproximación, así como utilizando el operador T , obtendremos nuestra estimación de la política óptima.

2.3.2. Estimación de la política óptima utilizando las Ecuaciones de Euler

La otra manera de aproximar la función política óptima del PPDE es usando metodologías que partan de las condiciones de optimalidad de primer orden del mismo problema. Sea x_0^*, x_1^*, \dots la trayectoria óptima del PPDE e imaginemos que ella es interior (o sea, que pequeñas perturbaciones de esta trayectoria aún continúan siendo factibles). Supongamos que conocemos la historia de choques aleatorios hasta el instante t como siendo z_0, z_1, \dots, z_t . Consideremos la siguiente función definida en una vecindad de cero:

$$M(\lambda) = \dots + \beta^{t-1} F(x_{t-1}^*, x_t^* + \lambda, z_t) + \beta^t \int_t F(x_t^* + \lambda, x_{t+1}^*, z_{t+1}) Q(z_t, dz_{t+1}) + \dots$$

Observemos que esta función representa una perturbación del valor óptimo del PPDE en la variable x_t y tiene un máximo en $\lambda = 0$. Por lo tanto, si F es una función diferenciable, debe cumplirse $M'(0) = 0$, o sea,³

$$F_2(x_{t-1}^*, x_t^*, z_t) + \beta \int_Z F_1(x_t^*, x_{t+1}^*, z_{t+1}) Q(z_t, dz_{t+1}) = 0. \quad (2.10)$$

Al variar t , tendremos un sistema (infinito) de ecuaciones estocásticas de orden 2 definido por 2.10. Este sistema es llamado *Ecuaciones de Euler*, asociadas al PPDE. De esta manera, el sistema 2.1 es una condición necesaria para la optimalidad de una trayectoria en el PPDE. Si, además de diferenciable, la función F es cóncava, entonces tenemos una condición adicional para la optimalidad

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \beta^T \int_Z F_1(x_T^*, x_{T+1}^*, z_{T+1}) Q(z_T, dz_{T+1}) = 0. \quad (2.11)$$

³ Como la función F depende de (x, y, z) , estoy denotando por $F_1 = \frac{\partial F}{\partial x}$ y $F_2 = \frac{\partial F}{\partial y}$.

2.3. Política óptima

Puede demostrarse que las condiciones 2.10 y 2.11 son necesarias y suficientes para que una trayectoria interior $(x_t^*)_{t \geq 0}$ sea óptima. En casos en que las derivadas de F son limitadas a lo largo de trayectorias interiores, la condición 2.11 es satisfecha y, por lo tanto, la optimalidad es únicamente caracterizada por las Ecuaciones de Euler. Por ejemplo, en algunos modelos de macroeconomía es conveniente asumir una forma cuadrática para la función retorno F (o su aproximación de Taylor de segundo grado). En tal caso, la Ecuación de Euler resulta lineal y fácilmente resoluble.

Pese a la limitación que el uso de las Ecuaciones de Euler tienen por causa de la necesidad de diferenciabilidad de la función objetivo (pues problemas con tasas de impuesto lineales por tramos o con funciones de producción de Leontief no cumplen esa condición) y de la interioridad de las soluciones, los métodos utilizados para resolver el PPDE basados en ellas han sido exitosos. En primer lugar, por causa de la amplitud de problemas que pueden resolver. Observemos que, esencialmente, lo que queremos resolver es una ecuación (posiblemente no-lineal) estocástica de segundo orden; o sea, podemos usar las Ecuaciones de Euler aun en problemas que no sean PPDE. A esa clase de problemas pertenecen aquellos en donde no existe *agente representativo*; es decir, el problema no consiste solamente en una única maximización. En segundo lugar, algunos métodos basados en la Ecuación de Euler se muestran numéricamente más veloces que aquellos basados en la ecuación de Bellman.

Podemos escribir las Ecuaciones de Euler en función de la política óptima. De esta manera, la función política óptima (en este caso llamada *solución estacionaria* de las Ecuaciones de Euler) debe cumplir

$$F_2(x, g(x, z), z) + \beta \int_Z F_1(g(x, z), g(g(x, z), z'), z') Q(z, dz'). \quad (2.12)$$

A continuación, describiré algunos de los métodos más utilizados para resolver las Ecuaciones de Euler.

2.3.2.1. Método iterativo en el espacio de funciones políticas

Este método consiste en definir un operador S cuyo dominio y rango estén contenidos en el conjunto $\mathcal{C} = \{h : X \times Z \rightarrow X / h(x, z) \in \Gamma(x, z)\}$ y que

cumpla

$$F_2(x, Sh(x, z), z) + \beta \int_Z F_1(Sh(x, z), h(Sh(x, z), z'), z') Q(z, dz'). \quad (2.13)$$

Así, podemos observar que la función política óptima es un punto fijo del operador $S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$.⁴ La manera usual de encontrar estos puntos fijos es la siguiente: sea $g_0 \in \mathcal{C}$ (por ejemplo, una función constante) y defina sucesivamente $g_n = Sg_{n-1}$. Reemplazando en la ecuación 2.13, obtendremos

$$F_2(x, g_n(x, z), z) + \beta \int_Z F_1(g_n(x, z), g_{n-1}(g_n(x, z), z'), z') Q(z, dz'). \quad (2.14)$$

Teorema 2.2. La secuencia $(g_n)_n$ definida por 2.14 converge en la norma supremo a la función política óptima g .

La demostración del teorema anterior resulta de diversas consideraciones: en primer lugar, recordemos que la ecuación 2.8 afirmaba

$$g_n(x, z) = \text{ArgMax } F(x, y, z) + \beta \int_Z v_n(y, z') Q(z, dz') \\ \text{sujeto a } y \in \Gamma(x, z).$$

Aplicando las condiciones de primer orden para máximos interiores, tendremos

$$F_2(x, g_n(x, z), z) + \beta \int_Z v'_n(g_n(x, z), z') Q(z, dz') = 0. \quad (2.15)$$

Por otro lado, la secuencia $(v_n)_n$ era definida por la ecuación 2.2, o sea

$$v_n(x, z) = \text{Max } F(x, y, z) + \beta \int_Z v_{n-1}(y, z') Q(z, dz') \\ \text{sujeto a } y \in \Gamma(x, z). \quad (2.16)$$

Aplicando el Teorema del *Envelope* a la maximización 2.16, resulta

$$v'_n(x, z) = F_1(x, g_{n-1}(x, z), z) \quad (2.17)$$

⁴ Por simplicidad de notación, colocaré \mathcal{C} como dominio de S .

Reemplazando 2.17 en 2.15, resulta exactamente la ecuación 2.14. Por lo tanto, las iteraciones dadas por el operador S coinciden con aquellas que resultan de las iteraciones del operador de Bellman sobre las funciones valor y , como vimos en la sección 2.1, ellas convergen a la política óptima.

Por lo tanto, con este método, las iteraciones sobre el espacio de funciones políticas coincide con aquellas que resultan de las iteraciones del operador de Bellman. Métodos numéricos implementados con base en estas iteraciones fueron aplicados por Baxter *et al.* (1990) y Coleman (1990, 1991).

2.3.2.2. Método C^0 —contractivo en el espacio de funciones políticas

Este método, desarrollado por Li (1998), propone la construcción de un operador en el espacio \mathcal{C} que resulte una contracción cuando consideramos, en ese espacio, la norma supremo de funciones continuas. El método es analizado para el caso determinista (ausencia de choques aleatorios) y, por lo tanto, la Ecuación de Euler toma la forma

$$E(x_{t-1}, x_t, x_{t+1}) = 0. \tag{2.18}$$

En esta la función E es resultado de condiciones de optimalidad y equilibrio en el modelo monetario considerado por ella. En ese trabajo, la variable x_t representa precio unitario del bien de consumo y la función E tiene como parámetros coeficientes de aversión al riesgo y factores de descuento intertemporal. Enunciaré el resultado utilizado en ese trabajo de la manera más general posible. Para cada $h \in \mathcal{C}$, defina $\Phi(h) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Phi(h)(x) = h(x) - E(x, h(x), h(h(x))).$$

Teorema 2.3. Si la función Φ definida en un subconjunto cerrado de \mathcal{C} es una contracción con respecto a la norma supremo del espacio de las funciones continuas y limitadas, entonces el único punto fijo de Φ es la solución estacionaria de la Ecuación de Euler 2.18.

Nuevamente, la importancia de tener la solución estacionaria como punto fijo de una aplicación contractiva es que el error de aproximación puede ser

controlado, tal y como fue hecho para la función valor en las ecuaciones 2.4 y 2.5. Hablando específicamente, si Φ es una contracción de módulo $\alpha \in (0, 1)$, definimos la secuencia $h_n = \Phi(h_{n-1})$ a partir de alguna función inicial $h_0 \in \mathcal{C}$. De esta forma,

$$\begin{aligned} \|h_n - g\| &= \|\Phi(h_{n-1}) - \Phi(g)\| \leq \alpha \|h_{n-1} - g\| \\ &\Rightarrow \|h_n - g\| \leq \alpha^n \|h_0 - g\|. \end{aligned}$$

Entonces, el control del error en la aproximación puede ser calculado a través de

$$\begin{aligned} \|h_n - g\| &\leq \|h_n - h_{n+1}\| + \|h_{n+1} - g\| \leq \|h_n - h_{n+1}\| + \alpha \|h_n - g\| \\ &\Rightarrow \|h_n - g\| \leq \frac{1}{1 - \alpha} \|h_n - h_{n+1}\|. \end{aligned} \quad (2.19)$$

El segundo miembro de la desigualdad 2.19 es el error en la aproximación de la política óptima por h_n . En el trabajo de Li (1998), se prueba que la aplicación Φ es de hecho una contracción para un conjunto de valores razonables de los parámetros del modelo.

2.3.2.3. Método C^1 -contractivo en el espacio de funciones políticas

En el artículo de Maldonado y Moreira (2003), se construye otro operador definido en el espacio de funciones políticas que resulta nuevamente una contracción, pero esta vez referida a la topología de las funciones continuamente diferenciables. Nuevamente el método es construido para el caso determinista. A continuación describo cómo opera este método.

Un *estado estacionario interior* para la Ecuación de Euler 2.18 es un $\bar{x} \in X$ interior y tal que $E(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}) = 0$. Intuitivamente, un estado estacionario es un valor del estado inicial del problema, de manera que la trayectoria óptima consiste en mantenerse permanentemente en ese estado. Asumiremos la siguiente hipótesis:

Hipótesis 2.3. Existe un estado estacionario interior \bar{x} tal que

$$(i) \quad \|(E_2)^{-1}E_1\| + \|(E_2)^{-1}E_3\| < 1; y$$

$$(ii) \quad \|(E_2)^{-1}E_3\| < 1/2,$$

en donde todas las derivadas están evaluadas en $(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x})$.

En el caso $l = 1$, se puede demostrar que (i) implica (ii). La hipótesis 2.3 implica la estabilidad del estado estacionario con relación a la política óptima de un problema de programación dinámica determinista, pues esta hipótesis implica la condición de diagonal dominante dada en Araujo y Scheinkman (1977).

La idea para la construcción del operador contractivo, en este caso, es como sigue: sea $h \in \mathcal{C}$ y resuelva la siguiente ecuación en la variable y :

$$E(x, y, h(h(x))) = 0. \quad (2.20)$$

Si para cada x existe una solución, llamaremos a la ecuación 2.20 $\varphi(h)(x)$. De esta manera, definimos el operador φ con dominio en algún subconjunto de \mathcal{C} . La hipótesis 2.3 garantiza que ese subconjunto existe y que φ es una contracción.

Teorema 2.4. Si la hipótesis 2.3 es satisfecha, entonces existe un subconjunto, $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$, con la propiedad de que el único operador, $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, que cumple

$$E(x, \varphi(h)(x), h(h(x))) = 0, \quad \forall x \text{ en una vecindad de } \bar{x},$$

es una contracción con respecto a $\|\cdot\|_1$, la norma de las funciones continuamente diferenciables.⁵

La idea de la demostración del teorema anterior se basa en escoger adecuadamente un dominio de estabilidad (\mathcal{D}) para el operador φ . Notemos que, como sabemos que el estado estacionario \bar{x} es estable (o sea, la derivada de la solución estacionaria g tiene módulo menor que 1), el candidato natural será el conjunto de funciones que pasen por ese estado y que tengan derivada menor que 1. Luego de refinar un poco tal subconjunto, encontraremos uno para el cual la aplicación φ sea una contracción. De esta manera, iterando sucesivamente la aplicación φ , convergiremos a la solución estacionaria g .

⁵ $\|f\|_1 = \text{Sup} \{|f(x)| + |f'(x)| / x \in X\}$.

Nuevamente el hecho que las iteraciones están basadas en una contracción nos permite controlar el error de aproximación de la misma manera como lo hacíamos en la relación 2.19, con la diferencia de que, en este caso, estamos controlando el error de la aproximación no solo de los valores de la función, sino también de sus derivadas.

En el artículo de Maldonado y Moreira (2003), se calculan algunos ejemplos numéricos relacionados con modelos de la literatura. Un hecho interesante en estos ejemplos es que se observa una rápida convergencia a la solución estacionaria y, más aún, en todo el dominio; esto propone investigaciones futuras en busca de la extensión del resultado del teorema 2.4. para dominios mayores. También son comparados los resultados de este método con aquellos del trabajo de Li (1998) y se obtiene que el primero es más eficiente en dos sentidos: primero, garantiza la convergencia hasta la primera derivada de las aproximaciones; y, segundo, el conjunto de parámetros para los cuales este método funciona es estrictamente mayor que el propuesto en el trabajo de Li.

2.3.2.4. Métodos proyectivos

Finalmente, presentaré los llamados métodos proyectivos para resolver ecuaciones del tipo 2.18 o sus versiones estocásticas. Estos consisten en aproximar la solución estacionaria por familias de funciones de dimensión finita. Específicamente, supongamos que la solución estacionaria g está definida en un dominio compacto $[m, M]$ y es aproximada por un polinomio

$$g(x, a) = \sum_{i=0}^n a_i \psi_i(x),$$

en donde $\psi_i(x) = T_{i-1}(2[(x-m)/(M-m)] - 1)$ y los T_i son los polinomios de Chebyshev⁶ definidos recursivamente en $[0, 1]$ por $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$. De esta manera, calculamos el vector $a = (a_1, \dots, a_n)$ de forma que minimice los residuos

$$R(x; a) = E(x, g(x; a), g(g(x; a); a)). \quad (2.21)$$

⁶ En análisis numérico, los Polinomios de Chebyshev son utilizados para aproximar funciones de clase C^r .

2.4. Consideraciones finales

Existen al menos tres maneras de minimizar los residuos dados en 2.21. La primera consiste en seleccionar algunos puntos (x_1, \dots, x_n) en $[m, M]$ y resolver el sistema no-lineal de ecuaciones

$$R(x_i; a) = E(x_i, g(x_i; a), g(g(x_i; a); a)) = 0.$$

La segunda consiste en minimizar la norma L^2 de estos residuos, es decir,

$$\text{minimizar } \left\{ \int_m^M R^2(x; a) dx; a \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Por último, el siguiente sistema no-lineal de ecuaciones podría ser resuelto:

$$\sum_{j=0}^m R(x_j; a) \psi_j(x_j) = 0,$$

en donde x_1, \dots, x_m son las m raíces de ψ_{m+1} . En Judd (1992) se prueba que estos métodos proporcionan aproximaciones que convergen uniformemente a la solución estacionaria, cuando el orden de los polinomios va hacia infinito. Además se ofrecen varios ejemplos numéricos.

Marcet (1988) y Marcet y Lorenzoni (1998) desarrollaron extensiones de esta metodología para modelos estocásticos.

2.4. Consideraciones finales

En los últimos años, la demanda por métodos numéricos rápidos y precisos para la resolución de problemas en economía aplicada ha ido creciendo notablemente. La exactitud de la solución propuesta tiene gran importancia en los procesos iterativos, pues pequeños errores pueden amplificarse en la medida que el orden de iteración aumenta.

En este artículo presento una reseña de los métodos más utilizados en economía dinámica, específicamente en problemas de programación dinámica y en problemas en los que la solución es caracterizada por las ecuaciones de Euler, que son ecuaciones en diferencias finitas de segundo orden. Para los PPDE mostramos que el método de Bellman permite encontrar aproximaciones precisas (del orden de precisión que se desee) de la función política óptima.

Para que esto sea posible, además de las hipótesis de continuidad y compacidad usuales, basta que la función retorno sea fuertemente cóncava. A este respecto, es importante destacar dos cosas: el problema puede no ser diferenciable; o sea, la función retorno o las restricciones pueden tener puntos de no-diferenciabilidad (como en el caso de estar usando tecnologías de Leontief o algún sistema de tasas de impuestos lineales por tramos). En segundo lugar, la concavidad fuerte puede ser intercambiada entre las variables de estado; es decir, en el teorema 2.1. se requería que la función $F(x, y, z)$ sea fuertemente cóncava en x ; sin embargo, un resultado similar puede ser obtenido si la concavidad fuerte es en y .

Los otros métodos presentados en este trabajo están basados en las Ecuaciones de Euler. Estas representan las condiciones de primer orden necesarias para la optimalidad de una trayectoria en el PPDE. Sin embargo, ellas pueden también aparecer en otro tipo de problemas de economía dinámica, representando condiciones de optimalidad y equilibrio del modelo considerado. En este sentido, las ecuaciones de Euler tienen un conjunto de modelos más amplio para su aplicación. La desventaja de ellas es que su aplicación es válida solo para modelos en los cuales las funciones consideradas son diferenciables y cuando la solución es interior. Pese a estas desventajas, los métodos basados en las Ecuaciones de Euler han resultado más veloces que aquellos basados en las iteraciones de Bellman. Entre los métodos de aproximación de la solución estacionaria de las Ecuaciones de Euler, tenemos los contractivos en la norma supremo y en la norma de las funciones continuamente diferenciables, así como los proyectivos.

Dependiendo del tipo de problema económico estudiado, pueden proponerse nuevos métodos de solución, que luego pueden extenderse a otro tipo de situaciones. Teoremas de punto fijo como el de Banach, Brouwer y Schauder pueden y vienen siendo utilizados tanto para encontrar métodos de aproximación cuanto para estimar sus errores. De todos modos, en la actualidad, contribuciones científicas en esta línea son pautas de estudio para muchos investigadores.

Referencias bibliográficas

- [1] Araujo, A. y Scheinkman, J. (1977), Smoothness, Comparative Dynamics and the Turnpike Theorem, *Econometrica* 45-3, 601-620.
- [2] Baxter, M., Crucini, M.J. y Rouwenhorst, K.G. (1990), Solving the Stochastic Growth Model by a Discrete-State-Space, Euler-Equation Approach, *Journal of Business & Economic Statistics* 8, 19-21.
- [3] Coleman, W.J. (1990), Solving the Stochastic Growth Model by Policy-Function Iteration, *Journal of Business & Economic Statistics* 8, 27-29.
- [4] Coleman, W.J. (1991), Equilibrium in a Production Economy with an Income Tax, *Econometrica* 59, 1091-1104.
- [5] Judd, K.L. (1992), Projection Methods for Solving Aggregate Growth Models, *Journal of Economic Theory* 58, 410-52.
- [6] Judd, K.L. (1998), *Numerical Methods in Economics*, MIT Press: Cambridge, Massachusetts.
- [7] Li, X.J. (1998), Numerical Analysis of a Nonlinear Operator Equation Arising from a Monetary Model, *Journal of Economic Dynamics and Control* 22, 1335-51.
- [8] Maldonado, W. y Moreira, H. (2003), A Contractive Method for Computing the Stationary Solution of the Euler Equation, *Economics Bulletin* 3, 1-14.
- [9] Maldonado, W. y Svaiter, B. (2001), On the Accuracy of the Estimated Policy Function Using the Bellman Contraction Method, *Economics Bulletin* 3, 1-8.

- [10] Marcet, A. (1988), Solving Non-Linear Stochastic Models by Parameterized Expectations, Documento de Investigación, Carnegie Mellon University.
- [11] Marcet, A. y Lorenzoni, G. (1998), Parameterized Expectations Approach: Some Practical Issues, Documento de Investigación.
- [12] Santos, M.S. y Vigo-Aguiar, J. (1998), Analysis of a Numerical Dynamic Programming Algorithm Applied to Economic Models, *Econometrica* 66, 409-26.
- [13] Stokey, N.L. y Lucas Jr, R.E. (con Prescott, E.) (1989), *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press: Cambridge, Mass. y Londres.
- [14] Taylor, J.B. y Uhlig, H. (1990), Solving Nonlinear Stochastic Growth Models: A Comparison of Alternative Solution Methods, *Journal of Business & Economic Statistics* 8, 1-17.

3. Arbitraje en mercados de activos DC con un continuo de estados

*Jaime Orrillo*¹

3.1. Introducción

Hoy en día, cualquier inversionista con un computador apropiado podría simular todos los escenarios que especifiquen todos los posibles eventos que podrían suceder en el futuro, digamos para los próximos veinte años, si estos fueran finitos. El interés por describir tales escenarios surge porque ellos afectarían las decisiones financieras (compra y venta de activos así como de las mercancías). En realidad, como dijo Geanakoplos: «[...] there is an infinity of potential scenarios, so no matter how many the investor sees, he has at best anecdotal information about what might happen to his investment» (1997). Aunque Geanakoplos, en su artículo «Promises Promises», publicado en 1997, admita la existencia de una cantidad infinita de estados de la naturaleza, él y muchos autores asumen un número finito.

¹ Profesor, Pós-Graduação em Economia da Universidade Católica de Brasília, SGAN 916-Módulo B, Asa Norte 70790-000, Brasília - DF, Brasil. Correo electrónico: orrillo@pos.ucb.br.

Agradezco al CNPq del Brasil por el soporte financiero 301218/2004-8.

En un sentido riguroso, la incertidumbre que afecta las variables de la economía, en particular los precios de los activos, debería ser modelada por un continuo de estados. Este artículo trata con esta clase de incertidumbre y su principal objetivo es caracterizar los precios de los activos DC vía no arbitraje.

Recientemente, Araujo *et al.* (2005) han caracterizado, vía no arbitraje, los precios de los activos DC para el caso en que la incertidumbre se representa por un número finito de estados de la naturaleza. El resultado de estos autores depende del Teorema de *Separación de Conos Convexos en Dimensión Finita*. En nuestro caso continuo de estados la aplicación de tal teorema se torna un poco difícil por la naturaleza del conjunto al que pertenecen los retornos de los portafolios.² En realidad, el problema es la cerradura del conjunto de los retornos súper replicables, que en el caso finito no es problema. Sin embargo, en el caso continuo de estados, la cerradura de los retornos súper replicables es un resultado crucial que tiene que ser verificado para que el *Teorema de Yan* pueda ser aplicado. Cuando la incertidumbre se representa por un conjunto infinito, pero enumerable, Zhang (1996) ha proporcionado una generalización del *Lema de Stiemke*, el cual le permitió caracterizar los precios de los activos dentro de un marco clásico donde los deudores no son morosos ni existe garantía para estos activos.

El propósito de este trabajo es, en realidad, proporcionar un resultado similar al de Dalang, Morton y Willinger (1990) para el caso de activos DC. En términos más precisos, nuestro objetivo es demostrar una versión del *Teorema Fundamental de Valoración de Activos DC*. Nos restringiremos al caso en que la actividad económica dura solamente dos períodos, desde que nuestro mayor interés, en este artículo, es ver el impacto que causa cuando un continuo de estados es considerado. Cuando la actividad económica se extiende para más de dos períodos, la situación se complica desde el punto de vista técnico, pero los resultados son similares al de este artículo.³

Para llegar a nuestro objetivo, en primer lugar tenemos que definir de manera conveniente el concepto de no arbitraje en el mercado de activos DC. Esto se consigue colocando los activos DC en el marco de un modelo *bid-ask* (véase

² Ellos son elementos del espacio vectorial topológico de variables aleatorias dotado de la topología de la convergencia en medida.

³ Véase Alvarez y Orrillo (2005).

subsección 3.2.1. para más detalle), en el que el concepto de no arbitraje es bien entendido.⁴ Trabajos relacionados al concepto de no arbitraje en mercados de activos con fricciones son los de Garman and Ohlson (1981), Prisman (1986), Schachermayer (2002) y Napp (2003).

La estructura de este artículo es como sigue: en la sección 3.2. describimos el modelo del mercado financiero, definimos la condición de no arbitraje y enunciarnos nuestro principal resultado; en la sección 3.3. reescribimos el concepto de no arbitraje en términos más matemáticos y demostramos el Lema Clave que nos permite ver cómo la versión abstracta de la condición de no arbitraje implica nuestro resultado principal; la sección 3.4. ofrece algunas consideraciones finales; finalmente, en el apéndice enunciarnos el Teorema de Yan, el cual es usado en la demostración del lema 3.1.

3.2. El modelo

En esta sección describimos el modelo de un mercado donde se negocian activos DC. La actividad económica dura dos períodos. La incertidumbre es acerca del estado de la naturaleza que ocurrirá en el segundo período. Modelamos esta incertidumbre especificando una medida de probabilidad μ (regular y de Borel) sobre el espacio $\Omega = [0, 1]$ de los estados de la naturaleza. Así que, el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ y los períodos $t = 0$ y $t = 1$ son fijos.

Se asume la existencia de J activos DC a ser negociados en $t = 1$. Cada activo tiene una garantía real que lo respalda, es decir, un vector $C_j \in \mathbb{R}_+^L$ no-nulo de mercancías. Se asume también que las mercancías que sirven como garantías se deprecian linealmente⁵ en el siguiente sentido: para cada estado de la naturaleza, $s \in \Omega$, $Y(s)C_j \sum_l Y_l(s)C_{jl}$ es la garantía depreciada disponible para ser negociada en $t = 1$; $Y \in L_+^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu; R^L)$ es la estructura de depreciación que se asume ser limitada. Desde que la única consecuencia de la morosidad de los deudores es el embargo de las garantías (las cuales serán

⁴ Véase, por ejemplo, Leroy y Werner (2000).

⁵ Podríamos haber tomado una estructura de depreciación más general como la de Geanakoplos y Zame (2002), pero por amor a la simplicidad la hemos tomado lineal.

repartidas entre los acreedores), el retorno de cada activo DC se define como $D_s^j = \min\{p(s)A^j(s), p(s)Y(s)C_j\}$, el cual es el mínimo entre la obligación y el valor de la garantía depreciada.

A continuación, definamos coordenada a coordenada dos variables aleatorias R^J -valoradas:

$$D : \Omega \rightarrow R^J \text{ y } R : \Omega \rightarrow R^J \text{ como } D^j(s) := D_s^j \text{ y } R_s^j = p(s)Y(s)C_j - D^j(s).$$

Denotemos por V la variable aleatoria R^{2J} -valorada, la cual se define para cada s como $V(s) = (D(s), R(s))$. Definamos también el vector $q \in R^{2J}$ como el par (π, ρ) , con $\rho = \sum_{j \in J} (p_0 C_j - \pi_j) e_j$, donde e_j es el j -ésimo vector de la base canónica ordenada de \mathbb{R}^J .

3.2.1. Arbitraje con un continuo de estados

A continuación, definimos el concepto de no arbitraje que intuitivamente quiere decir que es imposible hacer dinero de la nada. Nuestro modelo puede ser interpretado como si fuera un modelo con un *spread* entre precios de venta y compra de activos. Nos referimos a este modelo como un modelo *bid-ask*. Cualquier portafolio $z \in R^J$ puede ser descompuesto en dos portafolios $\theta \in R_+^J$ y $\varphi \in R_+^J$. El primero representa la compra de activos y el segundo la venta. Luego, cualquier portafolio $z \in R^J$ puede ser considerado como un par de portafolios no-negativos $(\theta, \varphi) \in R_+^{2J}$. El vector de precios y el retorno del portafolio de venta son $\pi \in R^J$ y $D \in L_+^0(\Omega, \mathcal{F}, \mu; R^J)$ respectivamente; y el vector de precios y retorno del portafolio de compra son $-\rho \in R^J$ y $-R \in L_+^0(\Omega, \mathcal{F}, \mu; R^J)$ respectivamente. La no-negatividad impuesta previamente es conocida en la literatura de finanzas como una clase de restricción de factibilidad sobre la posesión de los activos. En nuestro modelo, el sistema de precios, tanto de compra como de venta, es el precio común base $\pi \in R^J$ y el precio neto de venta $-\rho = \pi - p_0 C \in R^J$ respectivamente.

El concepto de arbitraje utilizado en el modelo *bid-ask* es el de arbitraje ilimitado. Para mayores detalles, nos referimos a Leroy y Werner (2000). Para mantener las cosas simples, nos referiremos a este tipo de arbitraje ilimitado, simplemente, como *arbitraje*.

Para definir arbitraje en nuestro modelo, necesitamos, en primer lugar, definir la función $Vz : \Omega \mapsto R$, que representa el retorno total del portafolio z y su coste $qz \in R$. Lo hacemos de la siguiente manera:

$$Vz(s) := V(s)z = D(s)\theta + R(s)\varphi, \text{ y } qz = \pi\theta + \rho\varphi, \forall z = (\theta, \varphi) \in R_+^{2J}.$$

Entonces, tenemos que

$$(-qz, Vz) \in R \times L^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R),$$

donde $L^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu; R)$ es el espacio de todas las clases de equivalencia de las variables aleatorias con valores reales, el cual es un espacio vectorial topológico completo dotado de la topología de la convergencia en medida. Denotemos por $L_+^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu; R)$ el cono no-negativo del espacio $L^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu; R)$.

Definición 3.1. Decimos que el proceso (q, V) satisface la condición de no arbitraje (de aquí en adelante, NAC) si no existe ninguna estrategia $z(\theta, \varphi) \in R_+^{2J}$ tal que,

$$(-qz, Vz) \in R_+ \times L_+^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu; R) \text{ y } (-qz, Vz) \neq (0, 0).$$

De manera equivalente, podemos decir que NAC es satisfecha si lo siguiente es válido:

$$\forall z = (\theta, \varphi) \in R_+^{2J}, (-qz, Vz) \in R_+ \times L_+^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu; R) \Rightarrow qz = 0, Vz = 0 \text{ a.e.}$$

Antes de establecer nuestro resultado principal, definimos cuándo el precio de un activo es una martingala, submartingala, y súper martingala respectivamente. En el contexto de este artículo, los precios de los activos serán comparados con sus retornos contingentes a ser pagos en el segundo período. Para ser más precisos, supongamos que x sea el precio de un determinado activo e $y : \Omega \rightarrow R$, la variable aleatoria que representa su retorno contingente. Entonces, se dice que x es una γ -martingala si existe un número estrictamente positivo $\gamma > 0$ y

una medida de probabilidad equivalente Q , tal que el precio del activo x es igual al valor esperado de retorno contingente y multiplicado por el número γ . Formalmente, esto se escribe como

$$x = E^Q[y] = \gamma \int_{\Omega} dQ(s), \text{ para algún } \gamma > 0.$$

Si la igualdad anterior vale con \leq (respectivamente con \geq), decimos que el precio del activo x es una submartingala (respectivamente una súper martingala). Se dice que las sub y súper martingalas son estrictas si las desigualdades anteriores también son estrictas.

3.2.1.1. Una condición suficiente bastante obvia

Es obvio ver que, si existe una medida de probabilidad equivalente Q que transforma el proceso bi-dimensional (q, V) previamente definido a una γ -súper martingala, entonces tal proceso debe satisfacer NAC. En efecto, supongamos que

$$\gamma \int_{\Omega} V^k(s) dQ(s) \leq q^k, \forall k = 1, \dots, 2J, \text{ y } \gamma > 0.$$

Notemos que las primeras J coordenadas de V son iguales a D y las últimas J coordenadas son iguales a R . De manera similar, las primeras J coordenadas de q son iguales a π y las últimas J coordenadas son iguales a ρ . Por tanto, multiplicando la j -ésima coordenada en la anterior desigualdad por θ^j , para $j = 1, \dots, J$ y luego por φ^j para $j = J + 1, \dots, 2J$, y finalmente sumándolas, obtenemos

$$\gamma E_Q[D\theta + R\varphi] \leq \pi\theta + \rho\varphi, \forall (\theta, \varphi) \in R_+^{2J} \text{ con } \gamma > 0. \quad (3.1)$$

Si además tuviésemos

$$(-\pi\theta - \rho\varphi, D\theta + R\varphi) \in R_+ \times L_+^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu; R),$$

entonces tendríamos

$$0 \leq \gamma E_Q[D\theta + R\varphi] \leq \pi\theta + \rho\varphi \leq 0.$$

Podemos concluir entonces que

$$(qz, Vz) = (-\pi\theta - \rho\varphi, D\theta + R\varphi) = 0 \quad Q - \text{casi ciertamente,}$$

y por lo tanto μ -casi ciertamente. Esto muestra que el proceso (q, V) satisface NAC.

Nuestro objetivo principal es el recíproco del resultado anterior.

Teorema 3.1. (Resultado principal)

Si el proceso (q, V) satisface NAC, entonces, (q, V) es una γ -súper martingala según nuestra definición antes presentada. Esto es, existe un número estrictamente positivo $\gamma > 0$ y una medida de probabilidad equivalente Q tal que

$$\gamma \int_{\Omega} V^j dQ(s) \leq q^j, \forall j = 1, \dots, 2J.$$

Este teorema se obtiene fácilmente del siguiente resultado:

Lema 3.1. Si el proceso (q, V) satisface NAC, entonces existe un número estrictamente positivo $\gamma > 0$ y una medida de probabilidad equivalente Q , tal que

$$\gamma \int_S V(s) z dQ(s) \leq qz, \forall z \geq 0$$

o, de manera equivalente,

$$\gamma \int_S (D(s)\theta + R(s)\varphi) dQ(s) \leq (\phi\theta + \rho\varphi), \forall (\theta, \varphi) \geq 0. \quad (3.2)$$

Prueba del teorema 3.1.: la desigualdad 3.2 vale para todo $(\theta, \varphi) \in R_+^{2J}$, en particular para $\theta = e_j$ y $\varphi = 0$. Por lo tanto, 3.2 llega a ser

$$\gamma \int_S R_s^j dQ(s) \leq \rho_j, \forall j.$$

De manera similar, obtenemos

$$\gamma \int_S D_s^j dQ(s) \leq \pi_j, \forall j,$$

después de reemplazar $\theta = e_j$ y $\varphi = 0$ en 3.2. Así, de la definición del proceso (q, V) , y a partir de las desigualdades previas, el teorema queda demostrado.

Observación 3.1. Una consecuencia inmediata de este teorema es que el precio de compra π y el precio de venta neto $-\rho$ son súper y submartingalas respectivamente.

3.3. La versión abstracta de NAC

Daremos ahora una caracterización en términos más matemáticos de NAC. Para eso, fijemos (q, V) y definamos el siguiente como convexo

$$K = \{(-qz, Vz) \in R \times L^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R) : z \geq 0\}.$$

Note que K es un subconjunto del producto cartesiano $R \times L^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu; R)$.

Lema 3.2. (q, V) satisface NAC si y solamente si

$$K \cap (R_+ \times L_+^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R)) = \{(0, 0)\}. \quad (3.3)$$

Demostración: (Condición necesaria). Supongamos que (3.3) no sea verdad. Luego, si existiese algún elemento en $K \cap (R_+ \times L_+^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R))$, este debería ser no-nulo. Pero esto contradice el hecho de que (q, V) satisface NAC.

(Condición suficiente) Si (q, V) no satisface NAC, entonces, por definición, $\exists (\theta, \varphi) \in R_+^{2J}$, tal que $(-\pi\theta - \rho\varphi, D\theta + R\varphi) \in R_+ \times L_+^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R)$ y $(-\pi\theta - \rho\varphi, D\theta + R\varphi) \neq (0, 0)$. Así que (3.3) no es verdad, puesto que $(-\pi\theta - \rho\varphi, D\theta + R\varphi) \in K$. Esto termina la prueba del lema 3.2.

Para demostrar el lema 3.1., antes tenemos que resolver un problema técnico que estaba ausente en el caso en que la incertidumbre era finita: la cerradura del conjunto $K - R_+ \times L_+^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R) \subset R \times L^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R)$ con respecto a la topología de la convergencia en medida. Este resultado es consecuencia de la ausencia de oportunidades de arbitraje. Nos referiremos a este resultado como el Lema Clave. A continuación, enunciaremos y demostraremos este lema y luego veremos como este implica el teorema 3.1.

Lema 3.3. (Lema Clave)

Si $K \cap (R_+ \times L_+^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R)) = \{(0, 0)\}$, entonces $K - R_+ \times L_+^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R)$ es cerrado en $R \times L^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R)$ con respecto a la topología de la convergencia en medida.

Demostración: sin pérdida de generalidad podemos asumir que V en la definición del conjunto K , es acotado. En caso contrario definimos

$$h(s) = \min \{\|V(s)\|^{-1}, 1\}.$$

3.3. La versión abstracta de NAC

Por otro lado, el operador de multiplicación

$$M_h : L^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R) \rightarrow L^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R),$$

definido por $M_h(g)(s) = h(s)g(s)$ para cada $g \in L^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R)$, es un isomorfismo que preserva el orden sobre el espacio vectorial topológico $L^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R)$. Por lo tanto,

$$(id_R, M_h)(K) \cap (R_+ \times L_+^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R)) = \{(0, 0)\}$$

$$\Leftrightarrow K \cap (R_+ \times L_+^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R)) = \{(0, 0)\}$$

y $K - R_+ \times L_+^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R)$ es cerrado si y solamente si $(id_R, M_g)(K - R_+ \times L_+^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R)) = (id_R, M_h)(K) - R_+ \times L_+^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R)$. Pero

$$(id_R, M_g)(K) = \{(-qz, gVz) \in R \times L^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R) : z \in R_+^{2J}\}$$

y la función \tilde{V} definida por $\tilde{V}(s) = g(s)V(s)$ pertenecen a $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R^{2J})$.

El conjunto $K - R_+ \times L_+^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R)$ se define como

$$\{(\alpha, f) \in R \times L^o(\Omega, \mathcal{F}, R) : (-qz, Vz) \geq (\alpha, f) \text{ para algún } z \in R_+^{2J}\}.$$

Para simplificar la notación, este conjunto será denotado por \tilde{K} . Sea

$$\{(\alpha_n, f_n)\} \subset \tilde{K}$$

una sucesión que converge en medida para algún elemento de $R \times L^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R)$, digamos a (α, f) . Así, tenemos que demostrar que (α, f) pertenece al conjunto \tilde{K} ; i.e., que existe $z \in R_+^{2J}$, tal que

$$-qz \geq \alpha \text{ y } V(s)z \geq f(s) \quad \mu - c.c. \quad (3.7)$$

Pasando a una subsucesión, podemos suponer que la previa sucesión converge casi ciertamente. i.e.,

$$\alpha_n \rightarrow \alpha \text{ y } f_n(s) \rightarrow f(s) \quad \mu - c.c.$$

Esto implica que ambas sucesiones $\{\alpha_n\}$ y $\{f_n(s)\}$ permanecen limitadas. Notemos que la segunda sucesión es limitada casi ciertamente.

Por otro lado, a partir de $\{\alpha_n, f_n\} \subset \tilde{K}$, se sigue que existe una sucesión $\{z_n\}_n \subset R_+^{2J}$, tal que

$$-qz_n \geq \alpha_n \text{ y } V(s)z_n \geq f_n(s) \quad \mu - c.c. \quad (3.8)$$

Si $\{z_n\}_n$ converge en R_+^{2J} , entonces podríamos claramente escoger $z \in R_+^{2J}$ como límite. El problema es que, en general, no existe razón alguna por la cual la sucesión $\{z_n\}_n$ debería convergir. La única cosa que podemos afirmar es que la sucesión $\{z_n\}_n$ es limitada inferiormente. Para resolver este problema, descomponemos R^{2J} como una suma directa de dos subespacios N y N^\perp , los cuales dependen del proceso (q, V) . Estos subespacios son definidos como

$$N = \{z \in R^{2J} : -qz = 0 \text{ y } V(s)z = 0 \quad \mu - c.c.\}$$

y

$$N^\perp = \{v \in R^{2J} : vz = 0, \forall z \in N\}.$$

Existe una proyección sobreyectiva y continua $\Pi : R^{2J} \mapsto N^\perp$ con $Ker(\Pi) = N$. Por lo tanto,

$$R^{2J} = N \oplus N^\perp.$$

Luego, para cada $z \in R^{2J}$, tenemos que

$$(-qz, V(s)z) = (-q(\Pi(z)), V(s)(\Pi(z))) \quad \mu - c.c. \quad (3.9)$$

En particular 3.9 es también verdadera para $z \in R_+^{2J}$. En virtud de 3.9 sin pérdida de generalidad, siempre podemos suponer que la sucesión $\{z_n\}_n$ pertenece a N^\perp . Afirmamos que esta sucesión debe estar limitada. Si no está (pasando a una subsucesión denotada nuevamente por $\{z_n\}$), entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n\|_\Sigma = +\infty$. La sucesión $\{\tilde{z}_n\}$, definida como $\tilde{z}_n = \frac{z_n}{\|z_n\|_\Sigma}$, pertenece a la intersección del simplex no-negativo de R^{2J} - denotado por Δ_+^{2J} - y N^\perp . Por lo tanto, existe una subsucesión $\{\tilde{z}_{n_k}\}$ que converge a $\tilde{z} \in \Delta_+^{2J} \cap N^\perp$. Multiplicando por $\frac{1}{\|z_{n_k}\|_\Sigma}$ a ambos miembros, en (3.8) tenemos

$$(-q\tilde{z}_{n_k}, V(s)\tilde{z}_{n_k}) \geq \frac{1}{\|z_{n_k}\|_\Sigma} (\alpha_{n_k}, f_{n_k}(s)) \quad \mu - c.c. \quad (3.10)$$

Tomando límite en 3.10, obtenemos

$$(-q\tilde{z}, V(s)\tilde{z}) \geq (0, 0) \quad \mu - c.c. \quad (3.11)$$

De la condición de no arbitraje, se sigue que $(-q\tilde{z}, V(s)\tilde{z}) = 0$, lo cual implica que $\tilde{z} \in N$. Luego \tilde{z} es zero porque $N \cap N^\perp = \{0\}$, lo que contradiría el hecho de que $\tilde{z} \in \Delta_+^{2J}$. Por lo tanto, la sucesión $\{\Pi(z_n)\}_n$ en N^\perp debe estar limitada, la cual, pasando a una subsucesión, converge casi ciertamente. Finalmente, de 3.9 se sigue el resultado.

3.3.1. Demostración del Lema 3.1

De la hipótesis del teorema principal, se sigue que (q, V) satisface NAC. Luego, la cerradura del subconjunto

$$K - R_+ \times L_+^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R)$$

de $R \times L^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R)$ con respecto a la topología de la convergencia en medida es implicado por el Lema Clave. Usando V , definimos la función $Y : \Omega \rightarrow R^J$ como

$$Y(s) = \frac{(D(s), R(s))}{w(s)}, \text{ donde } w(s) = \max\{\|D(s)\|_J, \|R(s)\|_J, 1\}.$$

Note que, para todo $z = (\theta, \varphi) \in R_+^{2J}$, $Yz \in L_+^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R)$. Puesto que la convergencia en L^1 implica la convergencia en medida, tenemos que el conjunto $C = (K - R_+ \times L_+^o(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R)) \cap (R \times L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R))$ es cerrado en el espacio $R \times L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R)$ con respecto a la L^1 -norma y es disjunto de $R_+ \times L_+^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R) - \{(0, 0)\}$. De esta manera, C tiene las siguientes propiedades: C es un cono convexo cerrado en $R \times L^1$, $L_-^1 \subset C$ y $C \cap R_+ \times L_+^1 = \{(0, 0)\}$. Por lo tanto, las hipótesis del teorema de Yan (véase apéndice) son satisfechas. Así, existe $(k, g) \in (R \times L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R))' = R \times L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu, R)$, tal que $(k, g) > 0$ c.c. y es menor o igual que 0 sobre el cono convexo C . En particular, para cada $z = (\theta, \varphi) \in R_+^{2J}$ tenemos,

$$\int_S (-qz, \frac{V(s)z}{w(s)}) \cdot (k, g(s)) d\mu(s) \leq 0$$

\Leftrightarrow

$$\int_S (-\pi\theta - \rho\varphi, \frac{D_s\theta + R_s\varphi}{w(s)}) \cdot (k, g(s)) d\mu(s) \leq 0$$

⇔

$$\int_S (D_s \theta + R_s \varphi) dQ(s) \leq \gamma(\pi \theta + \rho \varphi), \quad (3.4)$$

donde $\gamma = ck$ y Q es la medida sobre \mathcal{F} con función de densidad $\frac{cg(s)}{w(s)}$ donde el factor $c > 0$ es escogido tal que $Q(\Omega) = 1$. Por lo tanto, Q es una medida de probabilidad equivalente a P .

3.4. Conclusiones

En este trabajo, hemos definido la condición de no arbitraje para activos DC (aquellos sujetos a *default* y protegidos por alguna garantía). La noción de no arbitraje es similar a la de un modelo *bid-ask* en el que el concepto de no arbitraje es bien entendido. Hemos demostrado también que los precios de compra y venta neta de activos son súper y sub martingalas respectivamente.

Este resultado podría ser considerado como una extensión de los resultados obtenidos por Araujo *et al.* (2005). La extensión es con respecto al tamaño de la incertidumbre y no a la elección de la garantía. Este trabajo ha considerado solamente dos períodos. Para el caso de más de dos períodos, pero aún con horizonte finito, la validez del Lema Clave depende fuertemente de resultados de análisis funcional (véase Álvarez y Orrillo (2005)).

Finalmente, sería útil estudiar este problema en un escenario de horizonte infinito y verificar si el teorema 3.1. aún permanece válido, o si falla como en el modelo de Dalan, Morton y Willinger (1990).

3.5. Apéndice

Teorema 3.2. (Teorema de Yan)

Sea C un cono convexo cerrado en $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ que contiene a $L^1_-(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y tal que $C \cap L^1_+\{0\}$. Entonces, existe un $g \in L^\infty$ con $g > 0$ casi ciertamente y $g(c) \leq 0, \forall c \in C$.

Demostración: el resultado se sigue de una combinación del Teorema de Hahn-Banach y de un argumento de exhaustividad (véase J.A. Yan (1981), o W. Schachemayer (1992)).

Referencias bibliográficas

- [1] Álvarez, B. y J. Orrillo (2005), The Fundamental Theorem of Asset Pricing under Default and Collateral in Finite Discrete Time, por aparecer en *Journal of Mathematical Analysis and Applications*.
- [2] Araújo, A., Fajardo, J. y Páscoa, M.R. (2005), Endogenous Collateral, *Journal of Mathematical Economics* 41, 439-462.
- [3] Dalang, R.C., Morton, A. y Willinger, W. (1990), Equivalent Martingale Measure and No Arbitrage in Stochastic Securities Market Models, *Stochastics and Stochastic Reports* 29, 185-201.
- [4] Geanakoplos, J. (1997), Promises Promises. En Arthur, W.B., Durlauf, S. y Lane, D. (editores), *The Economy as an Evolving Complex System, II*. Reading MA: Addison-Wesley.
- [5] Garman, M. y Ohlson, J. (1981), Valuation of risky assets in arbitrage-free economies with transactions, *Journal of Financial Economics* 9, 271-280.
- [6] Prisman, E.Z. (1986), Valuation of Risky Asset in Arbitrage Free Economies with Frictions, *The Journal of Finance* 41, 545-560.
- [7] Schachermayer, W. (1992), A Hilbert Space Proof of The Fundamental Theorem of Asset Pricing in Finite Discrete Time, *Insurance: Math. Econ.* 11, 1-9.
- [8] Schachermayer, W. (2002), The Fundamental Theorem of Asset Pricing under Proportional Transaction Costs in Finite Discrete Time, *Mathematical Finance* 14, 19-48.

- [9] Stephen, F. Leroy y Werner, J. (2000), *Principles of Financial Economics*, Cambridge University Press.
- [10] Stricker, C. (1990), Arbitrage et Lois de Martingale, *Ann. Inst. H. Poincaré* 26, 451-460.
- [11] Yan, J.A. (1980), Caractérisation d'une classe d'ensembles convexes de L^1 ou H^1 , *Seminaire de Probabilites XIV, Lect. Notes Mathematics* 784, 220-222.
- [12] Zhang, S.M. (1996), Extension of Stiemke's Lemma and Equilibrium in Economies with Infinite-Dimensional Commodity Space and Incomplete Financial Markets, *Journal of Mathematical Economics* 26, 249-268.

Segunda parte

Macroeconomía y economía laboral

4. Distribución de la riqueza en el modelo de crecimiento neoclásico

*Carlos Urrutia*¹

4.1. Introducción

Mi primera clase con Ramón García-Cobián como profesor fue en un curso de Estadística, cuando recién iniciaba mis estudios de facultad. No exagero al describir esa clase como una de las más fascinantes que me ha tocado oír. En ella, Ramón nos introdujo a la Teoría Moderna de Probabilidades, ligándola con otras ciencias como la Física (ahí escuché por primera vez lo que era la Mecánica Cuántica) y, claro está, la Economía.

Desde ese momento, quedó claro que Ramón no era un profesor más, sino uno de esos maestros que marcan la experiencia universitaria de algunos alumnos afortunados. Su rigor intelectual, su interés por continuar aprendiendo permanentemente, su sencillez y calidez humana, todas esas características fueron

¹ Profesor Investigador, Centro de Investigación Económica, Instituto Tecnológico Autónomo de México. Correo electrónico: currutia@itam.mx.

Quiero agradecer a Francesc Obiols-Homs por permitirme utilizar parte de nuestro trabajo conjunto en este artículo. Agradezco también la invitación de César Martinelli para participar en este volumen. Como es natural, cualquier error es de mi exclusiva responsabilidad.

el modelo para una generación completa de estudiantes de Economía. Nuestra deuda con Ramón es enorme. Su ejemplo nos llevó a estudiar más allá de la licenciatura, a dejar el Perú (aunque adivino su decepción ante que algunos de nosotros no volviéramos, al menos de momento) y a intentar una carrera académica productiva que contribuya de alguna manera al *pozo* de la ciencia.

Gracias a él, tuve también un contacto temprano con ciertas herramientas del análisis económico moderno, que son ahora parte fundamental de mi trabajo como investigador. En su curso de Investigación de Operaciones y en alguno de los grupos de lectura que Ramón organizaba en su afán permanente por estar actualizado, tuvimos nuestra primera introducción a la Teoría de Juegos y a la Programación Dinámica. Junto con lo que aprendí de Equilibrio General en los cursos de Mario Tello, esas herramientas me acompañaron en mis estudios de doctorado en Minnesota. Ahora me parece imposible pensar en el análisis macroeconómico sin ellas.

Una de esas herramientas es el modelo de Crecimiento Neoclásico (o de Ramsey o incluso conocido como el modelo de Cass-Koopmans). En este modelo, un agente representativo toma decisiones de consumo e inversión en un horizonte intertemporal, considerando el efecto de sus decisiones presentes sobre la acumulación de capital y, por lo tanto, sobre el estado de la economía en el futuro.² Este modelo es la piedra angular de la macroeconomía moderna, en el sentido que proporciona un marco sencillo pero verdaderamente dinámico, con fundamentos microeconómicos y libre de la *Crítica de Lucas*. La extensión del modelo básico en múltiples direcciones ha generado contribuciones importantes en temas tan variados como el Crecimiento, los Ciclos Económicos, la Política Impositiva, el Comercio Internacional, entre otros.³

² Una introducción al Modelo de Crecimiento Neoclásico, con algunas extensiones básicas, puede encontrarse en mis notas de clase publicadas en Urrutia (1996).

³ Cooley (1995) contiene una revisión de estas aplicaciones recientes del modelo de Crecimiento Neoclásico en su versión estocástica. Sobre el tema de Crecimiento en particular, Barro y Sala-i-Martin (1995) sigue siendo la referencia introductoria más completa, aunque el uso de tiempo continuo lo distancia un poco del resto de modelos macroeconómicos.

4.1. Introducción

Con Ramón estudiamos este modelo, en particular su dinámica, partiendo de un nivel de capital por debajo del estado estacionario. Vimos cómo, en el corto plazo, la economía acumulaba capital, pero en el largo plazo (o en el estado estacionario) los rendimientos decrecientes en el capital agotaban el crecimiento. De esa manera, el modelo captura ciertas características de la experiencia de economías como Japón y Europa luego de la Segunda Guerra Mundial, o en general de economías que vienen saliendo de períodos de crisis agudos y prolongados. Menos claro es que el modelo permita entender el crecimiento sostenido de Estados Unidos en las últimas décadas o el estancamiento permanente de América Latina.

Una de las limitaciones del modelo básico es que no permite hablar de distribución (de ingreso, de la riqueza, etcétera), dado que asume la existencia de un único individuo representativo. Ya Ramón nos había alertado acerca de los problemas de agregación que subyacen al modelo y por los cuales este no resulta apropiado para hablar de temas en los cuales la heterogeneidad entre individuos es importante (como Impuestos Redistributivos, Seguridad Social, Educación, etcétera). Por ello, y dado mi interés en los temas mencionados, mi investigación posterior se ha enfocado en modelos con agentes heterogéneos, cuya dinámica agregada no puede, en general, ser descrita por el modelo del agente representativo.⁴

Existe, sin embargo, una excepción. Se trata de una clase de modelos que asume, entre otras cosas, *preferencias cuasi-homotéticas* e idénticas entre individuos. En esos casos, la distribución de la riqueza no afecta los precios ni las cantidades totales, por lo que podemos recuperar la dinámica agregada de la economía a partir de la solución del problema con un agente representativo. Si bien la distribución de la riqueza no afecta esa dinámica, lo opuesto no es correcto: la trayectoria mediante la cual la economía converge al estado estacionario tiene implicaciones fuertes sobre la evolución de la distribución de la riqueza. En algunos casos, la distribución se hará más igual o desigual a lo largo del tiempo, mientras que, en otros, la distribución se mantendrá incluso constante.

⁴ Algunos ejemplos de mi trabajo reciente sobre estos temas son Restuccia y Urrutia (2004) y Rojas y Urrutia (2005).

Este artículo presenta brevemente algunos resultados de Obiols-Homs y Urrutia (2005) que constituyen un primer intento por caracterizar analíticamente la evolución de la riqueza en un modelo con algunas de las características mencionadas anteriormente (seré más preciso dentro de un momento). Creo que los resultados, aunque solo sean aplicables a una clase particular de modelos, son interesantes, en particular la posibilidad de una Curva de Kuznets, en la cual la desigualdad aumenta en etapas tempranas del desarrollo y luego disminuye. Me atrevo a pensar que este es un tipo de no-linealidad que a Ramón le hubiera gustado estudiar.

4.2. El problema

Consideren una economía habitada por un continuo de individuos indexados por $i \in [0, 1]$. El tiempo es discreto. Cada uno de estos individuos maximiza su utilidad intertemporal, descrita por la función

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(c_t^i - \bar{c}),$$

en donde $\beta \in (0, 1)$ es el factor de descuento y \bar{c} es un nivel mínimo de consumo, comunes entre individuos. Esta función de utilidad (un caso especial de la Función Stone-Geary logarítmica) es separable en el tiempo, cóncava en cada período y cuasi-homotética. Los individuos difieren únicamente en su dotación inicial de riqueza (o capital), que denotamos a_0^i . Adicionalmente, cada individuo posee una unidad de tiempo en cada período, que ofrece de manera inelástica como trabajo.

Por el lado de la producción, asumimos una única empresa representativa. Esta produce el único bien de consumo/inversión combinando capital y trabajo según una tecnología de tipo Cobb-Douglas

$$Y_t = K_t^\alpha N_t^{1-\alpha} + (1 - \delta)K_t$$

con $\alpha \in (0, 1)$. Las cantidades agregadas Y_t , K_t y N_t representan el nivel de producto (neto de depreciación), capital y trabajo totales de la economía en el período t , y $\delta \in (0, 1)$ es la tasa de depreciación que asumimos constante.

4.2. El problema

La empresa escoge capital y trabajo para maximizar beneficios en cada período:

$$Y_t - R_t K_t - w_t N_t,$$

en donde R_t y w_t representan la tasa de interés (neta de depreciación) y el salario real, respectivamente.

Asumimos que los mercados para el producto, capital y trabajo son competitivos. Dados los elementos anteriores, definimos a continuación un Equilibrio Competitivo para esta economía.

Definición 4.1. Un Equilibrio Competitivo para esta economía es un conjunto de secuencias $\{c_t^i, a_t^i\}$ y para los precios $\{R_t, w_t\}$ tales que

(i) para cada individuo, las secuencias $\{c_t^i, a_t^i\}$ resuelven el problema

$$\begin{aligned} & \text{máx}_{\{c_t^i, a_{t+1}^i\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(c_t^i - \bar{c}) \\ & \text{sujeto a} \quad c_t^i + a_{t+1}^i = w_t + R_t a_t^i, \\ & \quad \quad \quad c_t^i \geq \bar{c}, \forall t \geq 0, \text{ dado } a_0^i. \end{aligned}$$

tomando las secuencias de precios $\{R_t, w_t\}$ como dadas;

(ii) los precios de los factores satisfacen las condiciones marginales de maximización de beneficios de la empresa representativa: $R_t = \alpha K_t^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha} + (1 - \delta)$ y $w_t = (1 - \alpha) K_t^\alpha N_t^{-\alpha}$; y

(iii) los mercados se vacían: $K_t = \int_0^1 a_t^i di$ y $N_t = 1$.

Este modelo es similar al estudiado por Chatterjee (1994). Este autor muestra cómo, en el modelo, la existencia de Curvas de Engel lineales nos permite usar un resultado de agregación. Por lo tanto, los precios de equilibrio dependen solamente del *stock* de capital agregado, no de su distribución entre agentes. Esta observación es útil, pues permite, junto con una aplicación inmediata de los Teoremas del Bienestar, recuperar las cantidades agregadas de equilibrio a partir de la solución del problema del planificador social:

$$\begin{aligned} & \text{máx}_{\{c_t, k_{t+1}\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(c_t - \bar{c}) \\ & \text{sujeto a} \quad c_t + k_{t+1} = k_t^\alpha + (1 - \delta) k_t \\ & \quad \quad \quad c_t \geq \bar{c}, k_{t+1} \geq 0, \forall t \geq 0, \text{ dado } k_0, \end{aligned}$$

en donde la dotación inicial de capital $k_0 = \int_0^1 a_0^i di$ corresponde con el capital inicial agregado (o promedio) en el Equilibrio Competitivo. Sabemos que la solución de este problema existe, que es única y que la secuencia de valores para el capital $\{k_t\}$ converge monotónicamente a un valor de estado estacionario k^* .⁵

Una vez resuelto el problema del planificador, podemos recuperar los precios de equilibrio combinando las condiciones marginales de la empresa con las de vaciado de mercados:

$$R_t = \alpha k_t^{\alpha-1} + (1 - \delta) \quad \text{y} \quad w_t = (1 - \alpha)k_t^\alpha.$$

Para terminar de resolver el Equilibrio Competitivo, queda pendiente caracterizar la evolución de la riqueza de cada individuo. Para ello, volvemos al problema de maximización de un individuo i . Las condiciones de primer orden implican

$$\frac{c_{t+1}^i - \bar{c}}{c_t^i - \bar{c}} = \beta R_{t+1}$$

junto con la restricción presupuestaria

$$a_{t+1}^i = w_t + R_t a_t^i - c_t^i$$

y la condición de transversalidad habitual. Combinando estas ecuaciones (véase el Apéndice para una descripción detallada de este paso), obtenemos la función consumo

$$c_t^i = (1 - \beta)\omega_t^i + \bar{c} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta R_{t+1+j} - 1}{\prod_{s=0}^j R_{t+1+s}},$$

que nos describe el consumo individual como una función lineal del *ingreso permanente*

$$\omega_t^i \equiv R_t \left[a_t^i + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w_{t+j}}{\prod_{s=0}^j R_{t+s}} \right],$$

es decir, de la riqueza inicial más el valor presente del flujo de ingreso laboral que el individuo posee. Reemplazando en la restricción presupuestaria, obtenemos

⁵ La demostración de estos resultados es una aplicación inmediata de los Teoremas en Stokey y Lucas (1989) y Harris (1987), que a su vez requieren cierta familiaridad con Programación Dinámica. El caso no habitual de $\bar{c} > 0$ requiere algo de cuidado, por lo que lo revisamos en detalle en un apéndice de Obiols-Homs y Urrutia (2005).

4.2. El problema

$$\begin{aligned}
 a_{t+1}^i &= w_t + R_t a_t^i - c_t^i \\
 &= w_t + R_t a_t^i - (1 - \beta) \omega_t^i - \bar{c} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta R_{t+1+j} - 1}{\prod_{s=0}^j R_{t+1+s}} \\
 &= w_t + R_t a_t^i - (1 - \beta) R_t \left[a_t^i + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w_{t+j}}{\prod_{s=0}^j R_{t+s}} \right] - \bar{c} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta R_{t+1+j} - 1}{\prod_{s=0}^j R_{t+1+s}},
 \end{aligned}$$

que reescribimos como

$$a_{t+1}^i = \beta R_t a_t^i + D_t \quad (4.1)$$

con

$$D_t \equiv w_t - (1 - \beta) R_t \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w_{t+j}}{\prod_{s=0}^j R_{t+s}} - \bar{c} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta R_{t+1+j} - 1}{\prod_{s=0}^j R_{t+1+s}}.$$

Nótese que el término D_t es independiente del individuo i . Dados los precios de equilibrios obtenidos del problema del planificador social, la ecuación 4.1 nos permite construir la secuencia de capital (o riqueza) para cada individuo i , partiendo del a_0^i dado.

La pregunta que nos interesa es ¿qué podemos decir acerca de la evolución de la distribución de la riqueza en este modelo durante la transición al estado estacionario? De manera más rigurosa, supongamos que la economía empieza en el período 0 con un nivel de capital inicial total $k_0 < k^*$. Este capital se encuentra distribuido de manera arbitraria entre individuos, de manera tal que cada uno de ellos posee una riqueza a_0^i dada, con $k_0 = \int_0^1 a_0^i di$. Vamos a describir la desigualdad en la distribución de la riqueza en el período t como el coeficiente de variación

$$CV_t \equiv \frac{SD(a_t^i)}{k_t},$$

es decir, la desviación estándar de la riqueza entre individuos sobre su media.⁶ La desigualdad inicial descrita por CV_0 se encuentra dada, pero conforme la economía acumula capital en su transición al estado estacionario, la desigualdad en la riqueza CV_t puede aumentar, disminuir, o permanecer constante. Queremos saber cuál(es) de estas posibilidades ocurre efectivamente en el modelo.

⁶Otras medidas de desigualdad son el Coeficiente de Gini y la Curva de Lorenz. Creemos que nuestros resultados son robustos a la medida de desigualdad usada. Escogimos el coeficiente de variación por su tratabilidad analítica.

4.3. Resultados

La ecuación 4.1 nos da nuevamente la clave para entender la evolución en la distribución de la riqueza. Tomando la desviación estándar entre individuos a ambos lados de la ecuación (nótese nuevamente que D_t es independiente de i), tenemos

$$SD(a_{t+1}^i) = \beta R_t SD(a_t^i),$$

luego

$$\frac{S.D.(a_{t+1}^i)/k_{t+1}}{S.D.(a_t^i)/k_t} = \left(\frac{k_t}{k_{t+1}} \right) \beta R_t;$$

es decir,

$$CV_{t+1} = \left(\frac{k_t}{k_{t+1}} \right) \beta R_t CV_t.$$

Por lo tanto, la desigualdad en la distribución de la riqueza aumentará (disminuirá) en la medida en que la tasa de crecimiento del capital k_{t+1}/k_t sea menor (mayor) al producto βR_t , o usando los precios de equilibrio

$$CV_{t+1} \leq CV_t \Leftrightarrow \beta [\alpha k_t^{\alpha-1} + (1 - \delta)] \leq k_{t+1}/k_t. \quad (4.2)$$

El problema del planificador social descrito anteriormente ha sido analizado desde hace ya tanto tiempo que uno esperaría que no hubiera nada nuevo que decir al respecto. Sabemos que existe una única secuencia $\{k_t\}$ que lo resuelve y que, si partimos de un nivel de capital agregado k_0 menor al capital de estado estacionario, la secuencia óptima $\{k_t\}$ converge monótonamente a k^* , con $k_{t+1} > k_t, \forall t$. Sin embargo, no encontramos resultado analítico alguno, en la literatura, que nos diga si el lado derecho de la condición 4.2 se cumple o no en el modelo, ni siquiera en el caso habitual en el cual el consumo mínimo es cero.⁷ Esta es la contribución que realizamos en Obiols-Homs y Urrutia (2005).

⁷ Una excepción es el caso en que $\bar{c} = 0$ y $\delta = 1$. Sabemos que, en este caso especial, el modelo tiene una solución analítica, caracterizada por la función de ahorro $k_{t+1} = \alpha \beta k_t^\alpha$. Por lo tanto, la condición del lado derecho se cumple con igualdad y la desigualdad en la distribución de la riqueza permanece constante ($CV_{t+1} = CV_t$).

4.3.1. El caso con $\bar{c} = 0$

Si no existe un nivel de consumo mínimo, el modelo se reduce al caso de libro de texto con función de utilidad logarítmica y función de producción tipo Cobb-Douglas. Aún así, como hemos visto, la evolución en la desigualdad de la riqueza no es trivial. El siguiente teorema nos dice que, en este caso, la distribución de la riqueza se hace más igualitaria conforme la economía transita hacia el estado estacionario.

Teorema 4.1. Asuma que $\bar{c} = 0$. Para todo $0 < k_0 < k^*$, la secuencia óptima $\{k_t\}$ que resuelve el problema del planificador social satisface

$$\beta [\alpha k_t^{\alpha-1} + (1 - \delta)] < k_{t+1}/k_t;$$

luego, la desigualdad en la distribución de la riqueza decrece monótonamente a lo largo del tiempo ($CV_{t+1} < CV_t$).

La demostración de este resultado puede verse en Obiols-Homs y Urrutia (2005). Nótese que, en dicho artículo y por motivos de espacio, no tratamos por separado los distintos casos respecto de \bar{c} , sino que los presentamos en un resultado general.

La intuición detrás del resultado es la siguiente: en equilibrio, todos los individuos tienen la misma tasa marginal de sustitución intertemporal; por lo tanto, sin consumo mínimo, desean también la misma tasa de crecimiento en su consumo y de su ingreso permanente (recordemos que el consumo es una función lineal del ingreso permanente). Dicho ingreso es un promedio ponderado del rendimiento del capital de cada individuo y el valor presente del ingreso laboral. Este último crece, en promedio, a una tasa menor que el capital agregado. En el caso de individuos pobres (es decir, con menos capital o riqueza inicial), la proporción correspondiente al ingreso laboral es mayor, por lo que deben ahorrar más con el fin de alcanzar la tasa de crecimiento del ingreso permanente deseada.

4.3.2. El caso con $\bar{c} > 0$

Si añadimos a la intuición anterior el efecto de un consumo mínimo, que obliga a los agentes más pobres a reducir su tasa de ahorro (incluso endeudarse) para mantener un consumo presente por encima del nivel de subsistencia, podemos entender una posible posible fuente de no-monotonicidad en la evolución de la desigualdad. Para niveles de desarrollo muy bajos, el efecto del consumo mínimo domina al del cambio en los precios de los factores, y la desigualdad aumenta. Pero, una vez que la economía alcanza un nivel de riqueza tal que el individuo promedio se aleja lo suficiente del consumo mínimo, el argumento para el caso de $\bar{c} = 0$ se aplica y la desigualdad disminuye. De esta manera, obtenemos una Curva de Kuznets (en forma de U-invertida) para la evolución en la desigualdad de la riqueza.

Antes de formalizar este resultado, debemos ser un poco cuidadosos con las restricciones impuestas por el consumo mínimo. Por ejemplo, este tipo de consumo no puede ser tan alto que sea imposible de sostener en estado estacionario (es fácil demostrar que el capital de estado estacionario es independiente del consumo mínimo; por lo tanto, estamos hablando de una restricción sobre los parámetros del modelo). Definimos entonces $\bar{c}_{max} \equiv (k^*)^\alpha - \delta k^*$ como el máximo nivel de consumo sostenible en estado estacionario. De manera similar, dado $0 < \bar{c} < \bar{c}_{max}$, el nivel inicial de capital no puede ser tan pequeño que no permita producir lo necesario para satisfacer el consumo mínimo de la población. Definimos entonces k_{min} como la solución a $\bar{c} - k^\alpha + \delta k = 0$.

Ahora sí podemos presentar el siguiente resultado, también demostrado en Obiols-Homs y Urrutia (2005).

Teorema 4.2. Asuma que $0 < \bar{c} < \bar{c}_{max}$ y $k_{min} < k_0 \leq k^*$. Existe un \hat{k} , con $k_{min} < \hat{k} \leq k^*$, tal que para todo $\hat{k} < k_0 < k^*$, la secuencia óptima $\{k_t\}$ que resuelve el problema del planificador social satisface

$$\beta [\alpha k_t^{\alpha-1} + (1 - \delta)] < k_{t+1}/k_t;$$

luego, la desigualdad en la distribución de la riqueza decrece monótonamente a lo largo del tiempo ($CV_{t+1} < CV_t$).

4.4. Relación con la literatura

Lo que el teorema 4.2. dice es que, si la economía es lo suficientemente desarrollada (en el sentido de estar lo suficientemente cerca del estado estacionario), la desigualdad en la distribución de la riqueza disminuirá monótonamente. Pero el teorema 4.2. no nos dice qué ocurre en economías con niveles iniciales de capital por debajo del nivel crítico \hat{k} . En tales economías, la desigualdad de la riqueza *puede* aumentar hasta que el proceso de acumulación de capital haga que se cruce el nivel crítico; a partir de ese momento, la desigualdad disminuirá de manera monótona.

4.4. Relación con la literatura

Nuestro trabajo parte del artículo de Chatterjee (1994), que ya he mencionado anteriormente. Chatterjee utiliza un modelo similar al nuestro para analizar la dinámica de la distribución del ingreso permanente. El autor muestra que la desigualdad en el ingreso permanente aumenta en una transición al estado estacionario cuando el consumo mínimo es positivo y que permanece constante sin consumo mínimo. Nosotros nos concentramos en la distribución del capital, que es una medida empíricamente más relevante de la riqueza individual. Nótese que nuestros resultados muestran que la desigualdad en estas dos medidas de riqueza (capital o ingreso permanente) puede evolucionar de manera opuesta. Por ejemplo, si el consumo mínimo es positivo pero no muy alto y el capital inicial es suficientemente alto, encontramos que la desigualdad en el capital disminuye, mientras que, siguiendo a Chatterjee (1994), la desigualdad en el ingreso permanente aumenta.

En otro artículo relacionado, Chatterjee y Ravikumar (1999) caracterizan la evolución de la distribución de la riqueza, entendida como capital, en un modelo de Crecimiento Endógeno con tecnología de tipo Ak . Los autores muestran que, durante la transición a la senda de crecimiento balanceado, la distribución de la riqueza se torna siempre más desigual con un consumo mínimo positivo. Estos resultados dependen crucialmente de que en su modelo (i) no hay ingreso laboral; y (ii) los precios de los factores son constantes. Nosotros relajamos estos supuestos y obtenemos conclusiones diferentes.

Caselli y Ventura (2000) emplean un modelo en tiempo continuo para estudiar la dinámica de la distribución del consumo, capital e ingreso total. Los autores muestran una variedad de ejemplos con dinámicas monótonas y no-monótonas para la desigualdad en la distribución de la riqueza, a partir de la inspección de los diagramas de fase del modelo.⁸ Nuestro punto es similar, pero lo demostramos en un modelo con tiempo discreto usando un conjunto de técnicas completamente diferentes. También extendemos el resultado al caso con un consumo mínimo positivo.

Finalmente, Álvarez y Díaz (2005) resuelven numéricamente la evolución de la distribución de la riqueza en un modelo similar al nuestro, pero con una función de utilidad más general del tipo CRRA. Encuentran que la desigualdad disminuye si la elasticidad de sustitución intertemporal es alta (lo cual incluye nuestro caso logarítmico) y el consumo mínimo es bajo. Para otros casos, Álvarez y Díaz simulan numéricamente ejemplos interesantes de trayectorias no-monótonas, del tipo curva de Kuznets, para la desigualdad. Además, calibran el modelo para reproducir la evolución de la desigualdad de la riqueza para la economía de Estados Unidos. Algunos de sus resultados son similares a los nuestros, pero nosotros los probamos analíticamente en vez de basarnos en simulaciones numéricas.

4.5. Comentarios finales

Cuando escribimos el artículo en Obiols-Homs y Urrutia (2005), no pensamos en construir una teoría sobre la desigualdad de la riqueza, ni mucho menos aplicarla a economías como la peruana. Esta teoría es necesaria, pero requiere de modelos mucho más complejos, en los cuales la transmisión de la riqueza entre generaciones incluya factores como la educación y el capital Humano. Exige también un mejor entendimiento acerca de cómo funciona el mercado laboral, por ejemplo. Y, por supuesto, necesita de modelos cuantitativos que puedan ser

⁸ En un artículo bastante anterior, Stiglitz (1969) también presenta condiciones suficientes para una dinámica no-monótona en la distribución de capital, usando una versión en tiempo continuo del modelo de Solow con distintas funciones de ahorro *ad-hoc*.

llevados a los datos.

Nuestro objetivo fue mucho más modesto: tratamos de llenar un vacío en la teoría existente, explorando algunas implicaciones nuevas de un modelo viejo que, sin embargo, es la base sobre la cual una teoría como la descrita anteriormente debe construirse. Quisimos, con una modesta contribución, ayudar a que los cimientos de esa teoría sean un poco más sólidos. Así me enseñó Ramón García-Cobián a entender el trabajo científico.

4.6. Apéndice

4.6.1. Derivación de la función consumo

Partimos de las condiciones de primer orden para la maximización del individuo i . Estas están dadas por la Ecuación de Euler

$$\frac{c_{t+1}^i - \bar{c}}{c_t^i - \bar{c}} = \beta R_{t+1},$$

la restricción presupuestaria

$$a_{t+1}^i = w_t + R_t a_t^i - c_t^i$$

y la condición de transversalidad

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a_{t+1}^i}{\prod_{s=1}^t R_s} = 0.$$

Iterando la restricción presupuestaria un período hacia atrás, tenemos

$$\begin{aligned} a_{t+1}^i &= w_t + R_t a_t^i - c_t^i \\ &= w_t + R_t [w_{t-1} + R_{t-1} a_{t-1}^i - c_{t-1}^i] - c_t^i \\ &= (w_t + R_t w_{t-1}) + R_t R_{t-1} a_{t-1}^i - R_t c_{t-1}^i - c_t^i; \end{aligned}$$

pero, usando la Ecuación de Euler,

$$\begin{aligned} a_{t+1}^i &= (w_t + R_t w_{t-1}) + R_t R_{t-1} a_{t-1}^i - R_t c_{t-1}^i - [\beta R_t c_{t-1}^i - \beta R_t \bar{c} + \bar{c}] \\ &= (w_t + R_t w_{t-1}) + R_t R_{t-1} a_{t-1}^i - (1 + \beta) R_t c_{t-1}^i + (\beta R_t - 1) \bar{c}. \end{aligned}$$

De la misma manera, iterando la restricción presupuestaria otro período hacia atrás, tenemos

$$\begin{aligned}
 a_{t+1}^i &= (w_t + R_t w_{t-1}) + R_t R_{t-1} [w_{t-2} + R_{t-2} a_{t-2}^i - c_{t-2}^i] - (1 + \beta) R_t c_{t-1}^i \\
 &\quad + (\beta R_t - 1) \bar{c} \\
 &= (w_t + R_t w_{t-1} + R_t R_{t-1} w_{t-2}) + R_t R_{t-1} R_{t-2} a_{t-2}^i - R_t R_{t-1} c_{t-2}^i \\
 &\quad - (1 + \beta) R_t c_{t-1}^i + (\beta R_t - 1) \bar{c} \\
 &= (w_t + R_t w_{t-1} + R_t R_{t-1} w_{t-2}) + R_t R_{t-1} R_{t-2} a_{t-2}^i - R_t R_{t-1} c_{t-2}^i \\
 &\quad - (1 + \beta) R_t [\beta R_{t-1} c_{t-2}^i - \beta R_{t-1} \bar{c} + \bar{c}] + (\beta R_t - 1) \bar{c} \\
 &= (w_t + R_t w_{t-1} + R_t R_{t-1} w_{t-2}) + R_t R_{t-1} R_{t-2} a_{t-2}^i \\
 &\quad - (1 + \beta + \beta^2) R_t R_{t-1} c_{t-2}^i + (1 + \beta) R_t (\beta R_{t-1} - 1) \bar{c} + (\beta R_t - 1) \bar{c}.
 \end{aligned}$$

Podemos continuar iterando algunos períodos más hacia atrás. Entonces, vemos por inducción que

$$\begin{aligned}
 a_{t+1}^i &= \sum_{j=0}^t \left(\prod_{s=j+1}^t R_s \right) w_j + \left(\prod_{s=0}^t R_s \right) a_0^i - \left(\sum_{s=0}^t \beta^s \right) \left(\prod_{s=1}^t R_s \right) c_0^i \\
 &\quad + \sum_{j=1}^t \left(\sum_{s=0}^{t-j} \beta^s \right) \left(\prod_{s=j+1}^t R_s \right) (\beta R_j - 1) \bar{c}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{a_{t+1}^i}{\prod_{s=1}^t R_s} = R_0 \left[\sum_{j=0}^t \frac{w_j}{\prod_{s=0}^j R_s} + a_0^i \right] - \left(\sum_{s=0}^t \beta^s \right) c_0^i + \bar{c} \sum_{j=0}^t \left(\sum_{s=0}^{t-j} \beta^s \right) \frac{\beta R_{j+1} - 1}{\prod_{s=0}^j R_{s+1}}$$

y, tomando límites a ambos lados,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a_{t+1}^i}{\prod_{s=1}^t R_s} = R_0 \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{w_j}{\prod_{s=0}^j R_s} + a_0^i \right] - \frac{c_0^i}{1 - \beta} + \frac{\bar{c}}{1 - \beta} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta R_{j+1} - 1}{\prod_{s=0}^j R_{s+1}}.$$

4.6. Apéndice

La condición de transversalidad implica, entonces,

$$c_0^i = (1 - \beta) R_0 \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{w_j}{\prod_{s=0}^j R_s} + a_0^i \right] + \bar{c} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta R_{j+1} - 1}{\prod_{s=0}^j R_{s+1}},$$

lo que nos da el consumo óptimo inicial como una función lineal del ingreso permanente del período cero. Un razonamiento similar se puede seguir para obtener el consumo en cada período t .

Referencias bibliográficas

- [1] Álvarez, M.J. y Díaz, A. (2005), Minimum Consumption and Transitional Dynamics in Wealth Distribution, *Journal of Monetary Economics* 52.
- [2] Caselli, F. y Ventura, J. (2000), A Representative Consumer Theory of Distribution, *American Economic Review* 90, 909-926.
- [3] Cooley, T. F, ed. (1995), *Frontiers of Business Cycle Research*. Princeton University Press: Princeton.
- [4] Chatterjee, S. (1994), Transitional Dynamics and the Distribution of Wealth in a Neoclassical Growth Model, *Journal of Public Economics* 54, 97-119.
- [5] Chatterjee, S. y Ravikumar, B. (1999), Minimum Consumption Requirements: Theoretical and Quantitative Implications for Growth and Distribution, *Macroeconomic Dynamics* 3, 482-505.
- [6] Harris, M. (1987), *Dynamic Economic Analysis*. Oxford: Oxford University Press.
- [7] Obiols-Homs, F. y Urrutia, C. (2005), Transitional Dynamics and the Distribution of Assets, *Economic Theory* 25, 381-400.
- [8] Restuccia, D. y Urrutia, C. (2004), Intergenerational Persistence of Earnings: The Role of Early and College Education, *American Economic Review* 94, 1354-78.
- [9] Rojas, J. y Urrutia, C. (2005), Social Security Reform with Uninsurable Income Risk and Endogenous Borrowing Constraints, Manuscrito, ITAM.

Referencias bibliográficas

- [10] Stiglitz, J.E. (1969), Distribution of Income and Wealth among Individuals, *Econometrica* 37, 382-397.
- [11] Stokey, N.L. y Lucas Jr, R.E. (con Prescott, E.) (1989), *Recursive Methods in Economic Dynamics*. Harvard University Press: Cambridge, Mass. y Londres.
- [12] Urrutia, C. (1996), Notas sobre Crecimiento y Ciclos Económicos, Documento de Docencia, Ilades/Georgetown University.

5. Búsqueda de empleo y acumulación de riqueza bajo restricciones crediticias

*Silvio Rendón*¹

5.1. Unas palabras previas

Ramón García-Cobián merece una mención especial como parte de la vital experiencia de haber estudiado Economía en la Universidad Católica del Perú. En mi caso, tuve el privilegio de tenerlo como profesor en los cursos de Teoría del Capital, Crecimiento y la Distribución y Economía Política II, donde aprendería el uso de herramientas muy útiles, como diagramas de fase en modelos dinámicos, análisis de descomponibilidad y productividad de matrices, producción conjunta, o generalizaciones de la teoría de la explotación. También asesoró mi memoria de bachillerato, que trató sobre temas de economía urbana.

Ramón fue, además de un excelente profesor, una persona en permanente formación. Lo veíamos siempre aprendiendo algún idioma, como alemán o ruso,

¹ Profesor Investigador, Centro de Investigación Económica, Instituto Tecnológico Autónomo de México, Camino Santa Teresa 930, 10700 México D.F., México. Correo electrónico: srendon@itam.mx.

Quisiera expresar mi agradecimiento a César Martinelli. La responsabilidad por cualquier error es solo mía.

convirtiendo en sus disciplinas como la Economía o la Filosofía, alentando a los matemáticos a trabajar en temas de economía u organizando grupos de estudio paralelos a los cursos regulares. Gracias a su empeño, pude familiarizarme con los artículos de Robert Lucas (su famosa crítica a la evaluación econométrica de política y su artículo sobre la neutralidad del dinero), el ciclo de Goodwin como una aplicación del modelo depredador-presa de Lotka y Volterra, el modelo de Ramsey a partir del libro de Blanchard y Fischer, o algunos de los modelos del libro de Thomas Sargent. En realidad, Ramón contribuyó decisivamente a la formación y motivación en los temas que posteriormente vería con más amplitud en los estudios de doctorado.

Posteriormente, muchos años después, tendría la oportunidad de recibirlo en Barcelona, en una visita que realizó a la Universitat Pompeu Fabra, donde me desenvolvía como profesor. Tuvimos la ocasión de departir con colegas como Albert Marcet, Sjaak Hurkens o Esther Hauk. A su vez, tuve la gran oportunidad de venir a la Universidad Católica, a la Sección de Matemáticas, a compartir con él el dictado de un curso en la Maestría de Matemáticas con aplicaciones a la Economía, fundada por Ramón. Me tocaría dar la parte de aplicaciones econométricas de la programación dinámica, curso dictado en su mayor parte por Ramón.

Uno de los conceptos esenciales aportados por Ramón en mi formación es la importancia y la utilidad de la formalización en el entendimiento de una economía. A pesar de que la labor del economista requiere la utilización de modelos, es evidente y paradójica la distancia de muchos colegas economistas de los enfoques formalizados y rigurosos, como si la formalización y la rigurosidad estuvieran reñidas con el análisis aplicado y el diseño de políticas destinadas a resolver problemas prácticos. Ramón, con su amplitud de pensamiento y de criterio, motivó y proporcionó herramientas teóricas que resultaron ser sumamente prácticas para diversas generaciones de estudiantes peruanos que hoy están tanto en el Perú como en el extranjero.

El presente trabajo es una versión resumida de un artículo de próxima aparición (Rendón 2006). El lector interesado encontrará los detalles que aquí se omiten en el artículo original. En este trabajo se propone un modelo que

es caracterizado y estimado recuperando los parámetros de comportamiento subyacentes. Posteriormente, se evalúa el ajuste del modelo a los datos y se estudian los resultados de dos simulaciones de política. Se trata de una confluencia de teoría y aplicación que dedico con todo cariño y aprecio a mi profesor y maestro.

5.2. Introducción

Este artículo estudia la relación entre la acumulación de riqueza en mercados de capitales imperfectos y la dinámica laboral. Se desarrolla y estima un modelo de búsqueda de empleo y ahorro que se muestra capaz de replicar las tendencias observadas en riqueza, transiciones ocupacionales y salarios. Se encuentra que los individuos más ricos pueden ser más selectivos y esperar por más tiempo ofertas de trabajo con mayores salarios. Así, un aumento en la riqueza inicial de \$5.000 eleva los salarios trimestrales aceptados en \$800 en el primer trimestre de actividad laboral y extiende la duración de desempleo por más de dos trimestres. Se evidencia la existencia de restricciones crediticias ajustadas; los agentes se pueden prestar solo hasta por 14% del valor presente del ingreso que recibirán sin riesgo. Los resultados de las simulaciones basadas en el modelo estimado muestran que aliviar las restricciones crediticias tiene un efecto importante en los resultados laborales. Aumentar el acceso al crédito de un individuo hasta por la mitad del valor presente de su ingreso seguro induce un aumento de sus salarios en el primer trimestre de vida laboral de \$750, manteniéndose a un nivel más alto en los períodos subsiguientes.

En el modelo expuesto en este trabajo, los agentes deciden en cada período sobre su nivel de consumo y una política de aceptación de trabajos, dada su riqueza y sujetos a una restricción crediticia parametrizada como una fracción del monto que pueden pagar con certeza. Adicionalmente, los agentes empleados experimentan crecimiento de sus salarios mientras trabajan para el mismo empleador. Este modelo tiene las siguientes implicaciones: i) los salarios de reserva aumentan ante aumentos de la riqueza; ii) en períodos de desempleo, los agentes reducen su nivel de riqueza y, por lo tanto, sus aspiraciones salariales; iii) en períodos de empleo, los agentes ahorran para protegerse de futuros períodos

de desempleo; y iv) la acumulación de riqueza en períodos de empleo explica las renunciaciones de los empleados para quedarse desempleados. Por tanto, las decisiones de ahorro están íntimamente relacionadas con cambios en la dinámica laboral observada, en particular, las renunciaciones de los empleados para buscar mejores trabajos estando desempleados, tasas de riesgo crecientes durante el desempleo y menores salarios aceptados cuanto más largo es el período de desempleo.

Cuadro 5.1: Ahorros Trimestrales según Transición Ocupacional

Situación Laboral t	$t + \Delta$			Total
	Desempleo	Mismo Empleo	Nuevo Empleo	
Desempleo	-1,597	0	1,005	123
Empleo	-6095	1542	332	773
Total	-4387	1542	565	696

Fuente: NLSY.

Nota: la riqueza, al igual que la situación ocupacional, es observada en el período t y en el período $t + \Delta$.

El cuadro 5.1 muestra la relación entre el ahorro y las transiciones ocupacionales. Los que se mantienen o se convierten en desempleados reducen su riqueza, mientras que los que se mantienen o se convierten en empleados aumentan su riqueza. Los que permanecen desempleados entre dos trimestres reducen su riqueza en \$1.600, mientras aquellos que se quedan trabajando para el mismo empleador aumentan sus ingresos en \$1.500 por trimestre.

Danforth (1979), usando un modelo de búsqueda de empleo maximizadora de utilidad, analizó en detalle el papel de las dotaciones de riqueza en la estrategia óptima de búsqueda de empleo de un individuo. En su modelo, solo los desempleados buscan un empleo, no así los empleados. Un resultado de su análisis es que los salarios de reserva son crecientes en la riqueza, de manera que «los ricos se vuelven más ricos». Desde el seminal trabajo de Danforth, se han venido proponiendo diversos modelos de búsqueda de empleo maximizadora de utilidad, básicamente para evaluar el efecto de los seguros de desempleo en la búsqueda de empleo, y el consumo y el comportamiento de la búsqueda de empleo durante el ciclo económico.

El modelo propuesto en este trabajo generaliza el modelo canónico de Danforth y permite buscar empleo, no solo estando desempleado, sino también estando empleado, además de crecimiento del salario, jubilación y una restricción crediticia paramétrica que es estimada. Al incorporar estos rasgos adicionales en el modelo, se generan transiciones ocupacionales y trayectorias y distribuciones de riqueza, y salarios realistas durante el ciclo de vida.

Para estimar los parámetros de comportamiento del modelo teórico, se aplica el método explicado por Rust (1988) y Eckstein y Wolpin (1989). Usando la solución numérica para el problema de programación dinámica como un insumo, se construyen enunciados de probabilidad para riqueza, salarios y transiciones ocupacionales observadas, y se las integra en un procedimiento de estimación por máxima verosimilitud. Tomando en cuenta las diferencias en riqueza inicial y suponiendo específicas funciones de utilidad, de distribución de salarios y de crecimiento de salarios, se recuperan los parámetros del modelo de búsqueda y se los usa para evaluar dos cambios de régimen: un desplazamiento de la distribución de riqueza inicial y un alivio de la restricción crediticia.

5.3. El modelo

Consideremos a un individuo con una función de utilidad $U(\cdot)$ sobre el consumo, que busca maximizar su utilidad esperada durante toda su vida sin dejar herencias. Este agente vive T_F períodos y trabaja durante T períodos trimestrales después de los cuales se jubila y vive de sus ahorros. Durante su vida laboral, puede estar desempleado, en cuyo caso, con probabilidad λ^e , recibe una oferta salarial x proveniente de una función de distribución de salarios $F(\cdot)$, $x \in [\underline{w}, \bar{w}]$, $0 < \underline{w} < \bar{w} < \infty$; o puede estar empleado y ser despedido con probabilidad θ y recibir una oferta salarial con probabilidad λ^e , proveniente de la misma función de distribución $F(\cdot)$. Cuando está desempleado, puede ser empleado si recibe y acepta una oferta; en caso contrario, se mantiene desempleado. Cuando está empleado, puede sufrir las siguientes transiciones:

- Si no es despedido y recibe una oferta, puede aceptarla y cambiar de empleador, rechazarla y quedarse en su empleo, o rechazarla para renunciar y pasar al desempleo.

- Si no es despedido y no recibe una oferta, tiene que decidir entre conservar su empleo y renunciar para pasar al desempleo.
- Si es despedido y recibe una oferta, puede aceptarla y cambiar de empleador, o rechazarla para pasar al desempleo.
- Si es despedido y no recibe ofertas, su única opción es pasar al desempleo.

Durante los períodos de desempleo, el individuo recibe transferencias b , que incluyen ingreso no laboral, como transferencias familiares, y compensaciones por desempleo netas de costos de búsqueda. Cuando está empleado, el agente experimenta crecimiento de sus salarios debido a la acumulación de capital humano específico. Su salario $w(\omega, k_t)$ depende así del salario inicial ω y del número de períodos en que ha trabajado para el mismo empleador k_t . El capital humano específico evoluciona en forma determinística hasta llegar a un techo: $k_{t+1} = \min(k_t + 1, \bar{k})$.

En cada período, dado su estado ocupacional y su riqueza A_t , el agente determina su consumo C_t^u y C_t^e o, equivalentemente, su riqueza en el siguiente período A_{t+1}^u y A_{t+1}^e . La riqueza inicial A_0 es heredada y, por tanto, no es el resultado de acumulación previa alguna. El tipo de interés r es el mismo para ahorros y préstamos, y es constante. El factor de descuento subjetivo es $\beta \in (0, 1)$. No hay restricciones para los ahorros; sin embargo, la riqueza no puede ser menor que cierto nivel B_t . En mercados de capitales perfectos, el individuo puede pedir prestado tanto como pueda devolver con probabilidad uno, lo que constituye el límite de préstamo *natural* (Ljungqvist y Sargent 2000). En este modelo, el nivel más bajo de ingreso durante la vida laboral es b ; los jubilados no reciben transferencia alguna, por lo que su ingreso más bajo es cero. Esto fija el límite de préstamo *natural* en $\tilde{B}_t = -\sum_{s=t}^T b/(1+r)^{T-s}$. Con una función de utilidad que cumple la condición de Inada $\lim_{C \rightarrow 0} U(C) = \infty$ el agente no tendrá riqueza menor que \tilde{B}_t , debido a que $\tilde{B}_t + b - \tilde{B}_{t+1}/(1+r) = 0$, de manera que cualquier restricción $B_t < \tilde{B}_t$ será redundante. El individuo enfrenta restricciones de crédito si solo puede pedir prestada una cantidad menor de la que puede devolver con seguridad $B_t > \tilde{B}_t$. Un parámetro s mide el ajuste de la restricción crediticia como una fracción del límite *natural*, esto es, $B_t = s\tilde{B}_t$, $s \in [0, 1]$.

5.3. El modelo

La utilidad presente de un jubilado V_t^R , $t = T + 1, \dots, T_F$, depende de su riqueza A_t

$$V_t^R(A_t) = \max_{\{A\}_{s=t+1}^{T_F}} \sum_{s=t}^{T_F} \beta^{s-t} U \left(A_s - \frac{A_{s+1}}{1+r} \right),$$

donde, al no haber herencias, $A_{T_F+1} = 0$. Como los agentes ahorran voluntariamente para su jubilación con total control sobre sus fondos de pensiones, el problema dinámico es en realidad un problema de *comer un pastel*.²

La utilidad presente esperada de un individuo desempleado en el período t , V_t^u , está caracterizada por su riqueza A_t :

$$\begin{aligned} V_t^u(A_t) = & \\ & \max_{A_{t+1}^u \geq B_{t+1}} \left\{ U \left(A_t + b - \frac{A_{t+1}^u}{1+r} \right) \right. \\ & \left. + \beta \left[\lambda^u \int \max [V_{t+1}^e(A_{t+1}^u, x, 0), V_{t+1}^u(A_{t+1}^u)] dF(x) + (1 - \lambda^u) V_{t+1}^u(A_{t+1}^u) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Para un individuo empleado, la utilidad presente esperada V_t^e en el período t depende de su riqueza A_t , salario ω y duración con el empleador, k_t :

$$\begin{aligned} V_t^e(A_t, \omega, k_t) = & \\ & \max_{A_{t+1}^e \geq B_{t+1}} \left\{ U \left(A_t + w(\omega, k_t) - \frac{A_{t+1}^e}{1+r} \right) \right. \\ & + \beta \left[(1 - \theta)(\lambda^e \int \max [V_{t+1}^e(A_{t+1}^e, x, 0), V_{t+1}^e(A_{t+1}^e, \omega, k_{t+1}), V_{t+1}^u(A_{t+1}^e)] dF(x) \right. \\ & \left. + (1 - \lambda^e) \max [V_{t+1}^e(A_{t+1}^e, \omega, k_{t+1}), V_{t+1}^u(A_{t+1}^e)]) \right] \\ & \left. + \theta (\lambda^e \int \max [V_{t+1}^e(A_{t+1}^e, x, 0), V_{t+1}^u(A_{t+1}^e)] dF(x) + (1 - \lambda^e) V_{t+1}^u(A_{t+1}^e)) \right\}. \end{aligned}$$

Tenemos así un problema dinámico con un horizonte finito T y un valor final, que es la utilidad descontada de los jubilados:

$$\begin{aligned} V_t^u(A_t) &= V_t^R(A_t), \\ V_t^e(A_t, \omega, k_t) &= V_t^R(A_t), \end{aligned}$$

en $t = T + 1$. Dos funciones de política $A_{t+1}^u(A_t)$ y $A_{t+1}^e(A_t, \omega, k_t)$ resuelven este problema. Está el individuo empleado o desempleado, existe un salario de reserva

² Los mecanismos institucionales de un sistema de pensiones (caracterizado por esquemas de contribuciones durante la vida laboral y pensiones en la jubilación) escapan al objetivo de este artículo. En este análisis tan estilizado, sin embargo, se generan ahorros por motivos de ciclo vital.

que indica el menor salario aceptable para comenzar a trabajar para un nuevo empleador; es decir, $\omega_t^*(A_t) = \{\omega \mid V_t^u(A_t) = V_t^e(A_t, \omega, 0)\}$. Como tenemos búsqueda en el trabajo y crecimiento de salarios, hay un segundo salario de reserva que surge de la comparación entre el valor de cambiarse de empleador y el valor de quedarse en el empleo acumulando capital humano: $v_t(A_t, \omega, k_t) = \{v \mid V_t^e(A_t, v, 0) = V_t^e(A_t, \omega, k_t)\}$.

Como la solución óptima al problema de programación dinámica no admite una expresión analítica, se calcula una aproximación numérica a las funciones de valor como a las funciones de política. El procedimiento consiste en discretizar las variables continuas en una malla de puntos y asumir formas funcionales específicas: una función de utilidad de aversión relativa al riesgo constante (CRRA) $U(C) = (C^{1-\gamma} - 1)/(1 - \gamma)$, donde γ es el coeficiente de aversión al riesgo; una función de distribución de ofertas salariales lognormal truncada $\ln x \sim N(\mu, \sigma^2 \mid \ln \underline{w}, \ln \bar{w})$; y una función de salarios $w(\omega, k_t) = \omega \exp(\alpha_1 k_t + \alpha_2 k_t^2)$.

En este modelo, los agentes desempleados reducen su riqueza y sus aspiraciones salariales de manera que aumentan las probabilidades de una transición al empleo. Los agentes empleados, en cambio, ahorran para poder afrontar futuros períodos de desempleo. Este ahorro eleva también sus salarios de reserva, que pueden llegar a exceder a sus salarios, con lo que estos agentes renunciarán a su empleo para buscar mejores trabajos estando desempleados.

5.4. Datos

Los datos provienen de la National Longitudinal Survey of Labor Market Experience-Youth Cohort (NLSY) de los Estados Unidos. Es una muestra nacional estratificada de 12.686 individuos entre 14 y 21 años de edad en enero desde 1979, y que han sido entrevistados anualmente de 1979 en adelante. Contiene datos sobre características personales, composición del hogar, educación, experiencia militar, actividad laboral, transiciones ocupacionales, una historia laboral detallada semana a semana, ingresos y activos. Por lo tanto, es posible construir un historial individual completo por semana desde 1978 en adelante.

5.4. Datos

Se selecciona una muestra de individuos que son representados por el modelo teórico, que se aplica mejor a una fuerza laboral masculina y no incluye la decisión de asistir a la universidad o de enrolarse en el ejército. Por tanto, del número total de encuestados, se ha seleccionado a los hombres blancos, el grupo modal de la NLSY, que se graduaron de la *high school* y nacieron después del 31 de diciembre de 1960, que nunca fueron a la universidad o tuvieron experiencia militar alguna, y para los que los datos de riqueza se encuentran disponibles. La muestra final seleccionada por estos criterios es de 212 individuos. En esta muestra, para cada individuo se tienen cuarenta observaciones trimestrales para riqueza, salarios, estatus ocupacional y la razón para dejar al empleador. La riqueza es observada solo anualmente y desde 1985.

Cuadro 5.2: Estadísticas descriptivas

Variable	
Duración promedio el primer período de desempleo (trimestres)	2,52
Porcentaje de desempleados obteniendo empleo	41,92
Porcentaje de empleados dejando su empleo	6,31
renuncias (en porcentaje)	32,32
despidos (en porcentaje)	45,46
Porcentaje de empleados cambiando de empleador	8,53
renuncias (en porcentaje)	61,85
despidos (en porcentaje)	26,29
Crecimiento promedio del salario (en porcentaje)	
trimestral	2,20
al cambiar de empleador	14,52
Crecimiento promedio de la riqueza (en porcentaje)	
trimestral	3,25

Fuente: NLSY.

Nota: la razón de pérdida de empleo no está disponible para todas las transiciones, por lo cual las transiciones voluntarias e involuntarias no suman cien.

En el cuadro 5.2, se presentan estadísticas descriptivas para la duración del primer período de desempleo, transiciones ocupacionales, renunciaciones, salarios y riqueza. Se puede apreciar que el primer período de desempleo dura, en promedio, 2,52 trimestres. Mientras 42 % de los desempleados encuentran empleo, 6 % de

los empleados pierden o dejan su empleo, y alrededor de 9% de los empleados cambian de empleador en cada trimestre. Es evidente también que una importante proporción de los individuos deja su empleo voluntariamente para trabajar para otro empleador o pasar al desempleo. Por lo menos 32% de los empleados que pasan a ser desempleados lo hacen voluntariamente. Los salarios crecen en promedio 2,2% por trimestre; sin embargo, cuando se producen cambios de empleador, los salarios aumentan en promedio 15%. Se aprecia también que la acumulación de riqueza es relativamente rápida: 3,25% por trimestre.

5.5. Estimación

La estrategia de estimación se orienta a recuperar los parámetros de comportamiento del modelo teórico. Este procedimiento consiste en usar las reglas de política del problema de programación dinámica en la construcción de enunciados de probabilidad para cada transición individual en estatus ocupacional, salarios y riqueza. Se calcula una función de verosimilitud en cada iteración de los parámetros, de manera que los maximizadores de esta función son los parámetros estimados.

La estimación comienza en el período correspondiente a la primera observación de la riqueza t_0 , por lo que los datos entre 1978 y 1985 no son utilizados en la estimación. El logaritmo de la función de verosimilitud es la suma del logaritmo de las contribuciones de verosimilitud individuales, consistente en la densidad de la secuencia de observables condicionada a la observación en t_0 y los parámetros Θ :

$$\ln \mathcal{L}(\Theta) = \sum_{i=1}^N \ln \mathcal{L}_i(\{Z_{it}\}_{t=t_0+1}^{T_i} | Z_{it_0} \Theta).$$

Las variables observadas son $Z_{it} = \{A_{it}^{obs}, w_{it}^{obs}, d_{it}, h_{it}, l_{it}\}$; es decir, riqueza, salarios, estatus ocupacional (desempleado o empleado: $d = \{u, e\}$), empleador ($z = 1$, cambio de empleador; o $z = 0$, en otro caso), y la razón para dejar al empleador ($l = 1$, despidos; o $l = 0$, renunciadas). La experiencia laboral k depende solamente de d y z . Los salarios netos de experiencia laboral son ω^{obs} , de manera que $w^{obs} = w(\omega^{obs}, k)$; esto es, $\ln \omega^{obs} = \ln w^{obs} - \alpha_1 k - \alpha_2 k^2$. La

5.5. Estimación

contribución individual de verosimilitud puede ser descompuesta en un producto de densidades condicionales y marginales para cada una de las cinco posibles transiciones denotadas por $g_t(A_{t+1}, \omega_{t+1} | A_t, \omega_t)$.

Para hacer posible la estimación, se consideran los errores de medida como fuentes adicionales de aleatoriedad. En tal sentido, los valores observados son los valores verdaderos más un error de medida; esto es, $A_t^{obs} = A_t + \varepsilon_A$ y $\ln \omega_t^{obs} = \ln \omega_t + \varepsilon_w$, donde ε_A y ε_w presentan una distribución normal con media cero y desviación típica σ_A y σ_w respectivamente.

La densidad conjunta de una secuencia dada de observables se obtiene integrando sobre todas las secuencias posibles de riqueza y salarios, expresadas como el producto de densidades condicionales sobre todas las transiciones, condicionadas en la primera observación en el período t_0 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\{Z_t\}_{t=t_0+1}^T | Z_{t_0}, \Theta) = \\ \int \dots \int \prod_{t=t_0}^T g_t(A_t, \omega_t | A_{t-1}, \omega_{t-1}) \frac{1}{\sigma_A} \phi\left(\frac{A_t^{obs} - A_t}{\sigma_A}\right) \\ \frac{1}{\sigma_w} \phi\left(\frac{\ln \omega_t^{obs} - \ln \omega_t}{\sigma_w}\right) dA_t d\omega_t, \end{aligned}$$

donde $g_0(A_{t_0}, \omega_{t_0} | A_{t_0-1}, \omega_{t_0-1}) = 1$. Calcular esta función requiere una aproximación numérica que se calcula, a su vez, aprovechando la discretización practicada para resolver el problema de programación dinámica. Los parámetros que se estiman son

$$\Theta = \{b, \lambda^u, \lambda^e, \theta, \mu, \sigma, \alpha_1, \alpha_2, \gamma, s, \sigma_A, \sigma_w\}.$$

El tipo de interés r y el factor de descuento β se fijan en 0,015 y 0,98 respectivamente. El algoritmo de iteración usado para maximizar esta función de verosimilitud es el Algoritmo Powell (véase Press *et al.* 1992), que solo requiere calcular el valor de la función, mas no gradientes.

Después de recuperar los parámetros de comportamiento del modelo, se pueden usar los datos del período 1 al período t_0 para recuperar la función de distribución de la riqueza inicial. Se deriva la distribución posterior de la riqueza inicial condicionada en los observables posteriores ($\{Z_t\}_{t=1}^{t_0}$) bajo el supuesto

de una distribución a priori uniforme de la riqueza (una función a priori no-informativa). La verosimilitud de observar estos datos condicionada en el nivel de riqueza A_0 , o $Z_0 = \{A_0, 0, 0, 0, 0\}$, es $\mathcal{L}(\{Z_t\}_{t=1}^{t_0} | Z_0, \Theta)$. La función de densidad de activos iniciales es entonces

$$p(A_0 | \{Z_t\}_{t=1}^{t_0}, \Theta) = \frac{\mathcal{L}(\{Z_t\}_{t=1}^{t_0} | Z_0, \Theta)}{\int \mathcal{L}(\{Z_t\}_{t=1}^{t_0} | Z_0, \Theta) dA_0}.$$

Esta distribución es necesaria para simular el modelo desde el comienzo de la carrera ocupacional de cada individuo.

5.6. Resultados

Los estimados de máxima verosimilitud y sus correspondientes errores estándar asintóticos se presentan en el cuadro 5.3.

Cuadro 5.3: Parámetros estimados		
Θ	estimado	(error asintótico)
b	656,87	(39,01)
λ_u	0,938092	(0,051156)
λ_e	0,158281	(0,021573)
θ	0,046283	(0,009304)
μ	6,877250	(0,085290)
σ	0,894435	(0,094311)
α_1	0.002969	(0.000755)
α_2	-0,000622	(0,000014)
γ	1,483435	(0,093012)
s	0,135897	(0,012541)
σ_A	19818,69	(812,12)
σ_w	0,578638	(0,011378)
$-\ln \mathcal{L}$	5632,20	

Fuente: NLSY.

Los parámetros correspondientes al mercado laboral son similares a los estimados por Wolpin (1992). El coeficiente de aversión al riesgo estimado

es 1,48, comparable con estimaciones previas, mientras que el parámetro s , estimado en 0,14, revela un contexto de estrechez crediticia. Los errores de medida son lamentablemente altos. Como indican Bound y Krueger (1991), los errores de medida altos son usuales en la investigación aplicada. Como se evidencia en Rendón (2006), donde se presentan comparaciones gráficas y numéricas de las trayectorias observadas y predichas de la riqueza, salarios y estados ocupacionales, así como las tasas de salida del desempleo estimadas y la distribución inicial de riqueza, estos parámetros tienen capacidad para replicar los rasgos esenciales de los datos.

5.7. Políticas

Una vez recuperados los parámetros subyacentes del modelo teórico y tras haber evaluado su capacidad de replicar los datos, podemos evaluar dos cambios de régimen. Estos experimentos, reportados en el cuadro 5.4, miden las variaciones en diversas variables observables resultantes de aumentar la riqueza inicial y aliviar las restricciones crediticias. El primer experimento consiste en desplazar la distribución inicial de activos a la derecha en \$5.000. Enriqueciendo a los agentes por este monto, incrementa la duración del primer período de desempleo en 0,84 trimestres, al igual que eleva la tasa de desempleo en 14 puntos porcentuales. Así también, aumenta el primer salario aceptado en alrededor de \$450 y los salarios promedio en el primer trimestre en alrededor de \$800. El incremento en la tasa de desempleo y en los salarios es persistente y meridianamente notorio veinte trimestres después de haber comenzado la vida laboral, pero decae en el trimestre cuarenta.

El aumento en riqueza inicial produce incrementos en riqueza y consumo en los períodos posteriores; incluso cuarenta períodos después de haber comenzado la vida laboral, cuando el incremento de salarios ha prácticamente desaparecido, el incremento es aún significativo: \$490. Esta elevación persistente en el nivel de riqueza socava la necesidad de ahorrar y, en consecuencia, la tasa de ahorro declina. Por supuesto, este cambio de régimen aumenta el bienestar.

Cuadro 5.4: Resumen de dos experimentos de política

	Base	Desplazar: $p(A_0)$	Más crédito: s
Primer períodos de desempleo			
Duración del desempleo	2,74	0,84	0,80
Primer salario aceptado	3450	449	436
Tasa de desempleo:			
Trimestre 1	62,41	13,67	13,06
Trimestre 40	15,80	0,05	0,76
Salarios			
Trimestre 1	3477	788	743
Trimestre 40	4609	12	39
Riqueza			
Trimestre 1	1470	4596	0
Trimestre 40	11014	489	-3599
Consumo			
Trimestre 1	2290	785	646
Trimestre 40	3803	44	-55
Bienestar	54,98	0,05	0,05

Fuente: NLSY.

El segundo experimento consiste en aliviar las restricciones crediticias colocándolas a la mitad del límite natural de préstamo; es decir, $s = 0,5$. Esta variación produce un incremento de 0,8 trimestres en la duración del primer período de desempleo y en la tasa de desempleo en más de 13 puntos porcentuales. Los individuos con acceso a un mayor crédito, al ser más selectivos, buscan un trabajo durante más tiempo y acaban con salarios más altos: el primer sueldo aceptado aumenta en \$440. Igualmente, los montos aceptados muestran también un incremento importante y persistente: \$740 en el primer trimestre y \$40 en el trimestre cuarenta. Dado que el alivio en la restricción crediticia representa un cambio permanente, no debe sorprender que los efectos sean más persistentes que en el experimento anterior.

Debido a que los agentes con restricciones pueden recurrir al endeudamiento para financiar su consumo y su búsqueda de empleo, su necesidad para crear una

reserva financiera es menos urgente. En este experimento, aliviar las restricciones crediticias significa una caída en los activos de \$3.600. Consecuentemente, en el comienzo de sus carreras, los agentes con menos restricciones consumen menos que los que presentan restricciones más ajustadas. Sin embargo, a medida que el diferencial salarial entre estos dos agentes se va cerrando, los que tienen menos restricciones presentan menor riqueza, menor consumo y una tasa de ahorro mayor. Como se esperaría, aliviar las restricciones de liquidez aumenta el bienestar y, curiosamente, lo hace en la misma medida que en el cambio del régimen anterior.

5.8. Conclusiones

El modelo propuesto en este artículo generaliza el Modelo de Danforth (1979), lo cual permite búsqueda en el empleo, crecimiento de salarios, jubilación y un límite crediticio paramétrico. Incorporando estas extensiones, el modelo es capaz de replicar los rasgos esenciales de los datos como la caída de la riqueza en períodos de desempleo para mantener el consumo, y la acumulación de riqueza en períodos de empleo para construir una reserva financiera que permita enfrentar períodos de desempleo en el futuro. En particular, este modelo genera renunciaciones del empleo para pasar voluntariamente al desempleo, motivadas por la aspiración del individuo de buscar mejores trabajos.

Mediante un procedimiento de máxima verosimilitud, se estima este modelo usando datos de Estados Unidos (pertenecientes a la NLSY), y se recuperan los parámetros de comportamiento del modelo teórico y la distribución inicial de riqueza. El modelo demuestra capacidad de replicar adecuadamente las variables observadas, la tasa de riesgo durante el primer período de desempleo, y las distribuciones de corte transversal de riqueza, salarios y las transiciones ocupacionales a lo largo del tiempo.

Los estimados muestran que la restricción de crédito es relativamente fuerte: 14% del límite natural de préstamos. Más aún, las restricciones de crédito refuerzan la influencia de la riqueza en las decisiones del individuo de aceptar empleos. Un incremento de \$5.000 en la riqueza inicial aumenta los salarios

aceptados en \$800 en el primer trimestre de vida laboral y por montos menores varios períodos después. Un alivio en las restricciones de liquidez aumenta los salarios muchos períodos después de haber comenzado la vida laboral; si las restricciones crediticias fueran la mitad del límite natural, los salarios en el primer trimestre de vida laboral aumentarían en \$750 y seguirían siendo más altos varios períodos después.

Estos resultados son alentadores para continuar con la investigación basada en modelos de búsqueda maximizadores de utilidad. Este marco teórico puede ser fácilmente extendido hacia otros análisis de economía laboral, tales como búsqueda de empleo y ahorro en la etapa inmediatamente previa a la jubilación o el efecto de las transferencias de desempleo en las decisiones de ahorro.

Referencias bibliográficas

- [1] Bound, J. y Krueger, A. B. (1991), The Extent of Measurement Error in Longitudinal Earnings Data: Do Two Wrongs Make a Right?, *Journal of Labor Economics* 9, 1-24.
- [2] Danforth, J. P. (1979), On the Role of Consumption and Decreasing Absolute Risk Aversion in the Theory of Job Search, en Lippman, S. A. y McCall, J., eds, *Studies in the Economics of Search*, pp. 109-131, North-Holland: Nueva York.
- [3] Eckstein, Z. y Wolpin, K. (1989), The Specification and Estimation of Dynamic Stochastic Discrete Choice Models, *Journal of Human Resources* 24, 562-598.
- [4] Ljungqvist, L. y Sargent, T. J. (2000), *Recursive Macroeconomics*, The MIT Press: Cambridge, Massachusetts.
- [5] Press, W. H., Teutolsky, S. A., Vetterling, W. T. y Flannery, B. P. (1992), *Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press: Nueva York.
- [6] Rendon, S. (2006), Job Search and Asset Accumulation Under Borrowing Constraints. *International Economic Review*, en prensa.
- [7] Rust, J. (1988), Maximum Likelihood Estimation of Discrete control Processes, *SIAM Control and Optimization* 26, 1006-1024.
- [8] Wolpin, K. (1992), The Determinants of Black-White Differences in Early Employment Careers: Search, Layoffs, Quits, and Endogeneous Wages, *Journal of Political Economy* 100, 535-560.

6. Orígenes del colapso del crédito bancario en México

*Pablo Cotler*¹

6.1. Introducción

Existe una amplia literatura acerca de los posibles factores que desataron la crisis cambiaria mexicana de 1994-1995 y acerca de su secuela sobre el sistema bancario. De manera muy general, autores como Gil Díaz y Cartens (1996), Krueger y Tornell (1999), Krugman (1996), y McKinnon y Pill (1996) han sugerido que la crisis cambiaria se originó por un tipo de cambio artificialmente bajo, expectativas erróneas de un ingreso permanente mayor, un gasto público excesivo no contabilizado por las autoridades y choques políticos internos que derrumbaron la confianza que se tenía sobre la economía.

No es la primera vez que México pasa por un severo ajuste cambiario, pero la magnitud de la crisis desatada a fines de 1994 ha sido muy superior a las anteriores. Uno de los motivos para ello ha sido el impacto que tal ajuste tuvo sobre la salud del sistema bancario. En efecto, a la par que se daba una devaluación nominal del 90% y la tasa anualizada de inflación pasaba del 7% al 30%

¹ Profesor Investigador, Departamento de Economía de la Universidad Iberoamericana, México. Correo electrónico: pablo.cotler@uia.mx.

entre noviembre de 1994 y abril de 1995, la tasa líder de interés anual pasó, en este mismo lapso, de 13,7% a 74,8%. Estos incrementos y el deterioro en las expectativas económicas coadyuvaron a que en 1995 la cartera vencida no reservada de la banca comercial fuera equivalente a su capital.

Una vez desatada la crisis bancaria de 1995, las autoridades mexicanas implementaron un conjunto de programas que tenían por objetivo final asegurar que el costo del rescate fuera el menor posible y que su impacto sobre el nivel de actividad económica fuera lo más pequeño y transitorio posible.² Como explican Mancera (1996) y Del Villar *et al.* (1997), fueron tres los programas básicos que puso en marcha el gobierno mexicano para detener los problemas de liquidez y solvencia de la banca.³ El primero consistió en el otorgamiento a la banca de una línea de crédito en dólares con el fin de detener y revertir el pánico que tenían los acreedores internacionales de la banca mexicana. El segundo fue el establecimiento de un programa de capitalización temporal con el fin de dotar a las instituciones necesitadas de un nivel de capitalización adecuado. Y, en tercer lugar, el gobierno mexicano ofreció adquirir dos pesos de la cartera crediticia por cada peso de capital nuevo que pusieran los accionistas.

Para el año 2000, la salud financiera de la banca comercial mexicana se ha restablecido (véase cuadro 6.1). Sin embargo, la mejoría de la banca se ha dado a un alto costo fiscal⁴ y ha venido acompañada de una importante reconversión del negocio bancario: la cartera crediticia pasó de representar el 80% de sus recursos en 1992 a tan solo 15% en el año 2002. Así, aun cuando la economía mexicana creció a una tasa anual promedio de 5,5% durante el período 1996-2001, dicho crecimiento vino acompañado de una menor intermediación bancaria.

² Aun cuando se discutió la posibilidad de dejar que las entidades bancarias quebraran, se consideró que su impacto sobre el nivel de actividad económica sería muy superior al costo de rescatarlas. Sobre este tema, véase los trabajos de Diamond (2001, 2003) y Hausman y Rojas (1997).

³ Además de estos, el gobierno implementó programas para ayudar a los deudores de la banca e intervino entidades (cuyos activos representaban menos del 10% de los activos del sistema) que habían incurrido en prácticas no acordes con el marco jurídico.

⁴ Se calcula en alrededor del 12% del PBI o equivalente al 60% del gasto público anual.

6.1. Introducción

Cuadro 6.1: Indicadores básicos de la banca comercial

	1994	1996	1998	2000
Índice de Cobertura ^{1/}	20,8	56,1	66,4	94,6
Índice de Morosidad ^{2/}	17,1	11,8	10,1	7,4
Índice de Solvencia ^{3/}	151,4	45,0	25,8	2,3
Índice de Capitalización ^{4/}	10,4	12,6	14,8	15,4
^{1/} Provisiones respecto cartera vencida, ^{2/} cartera vencida a cartera total, ^{3/} cartera vencida no reservada respecto a cartera total, ^{4/} capital neto a activos en riesgo. Fuente: Zedillo (2000)				

El bajo dinamismo del financiamiento bancario al sector privado —que entre 1995 y el 2000 decayó en prácticamente 50 %—, en un contexto de crecimiento económico, tiende a relacionarse —entre otros factores— con la aparición de activos no-comerciables en la hoja de balance de los bancos, que surgen de la forma en que el Gobierno Federal financió parte del rescate bancario: la emisión de bonos públicos no comerciables de largo plazo. Estos bonos —que en su punto más alto llegaron a constituir el 23 % del total de recursos de la banca—, se cree, pudieron haber afectado la oferta crediticia.

A este respecto, el objetivo del presente trabajo consiste en presentar un modelo teórico que permita evaluar la hipótesis antes descrita. En este sentido, el modelo describe cómo la composición de los activos bancarios se ve alterada una vez que el banco adquiere bonos no-comerciables. Para tal fin, el trabajo está compuesto de cinco secciones adicionales. La primera describe los factores que dieron pie a la crisis del sistema bancario mexicano y se presentan las características generales que tomó el rescate implementado por la autoridad. Luego, en la segunda sección, se construye un modelo que describe la composición de los activos bancarios y se analiza cómo esta se ve alterada por la presencia de activos no comerciables. Una vez hecho ello, en la tercera sección, se muestra el impacto que dicha iliquidez pudo tener sobre las tasas de interés y el producto. Con el fin de validar el modelo, en la cuarta sección,

se realiza una simulación numérica del modelo para evaluar qué tanto puede replicar los resultados de 1995. Finalmente, en la quinta sección, se presentan las conclusiones.

6.2. La crisis cambiaria de 1995

Lo acontecido en México durante 1995 es reflejo típico de la anatomía de una crisis financiera. Como explica Aninat (1996), esta tiene tres fases: un auge especulativo, seguido por una pérdida de confianza y, finalmente, la quiebra y el colapso del sistema. La primera fase se inicia cuando un número significativo de participantes clave del mercado financiero mejoran sus expectativas de manera radical y adoptan una perspectiva demasiado optimista del rumbo económico.

Gavito, Silva y Zamarripa (1997), Gruben y McComb (1997), Hausman y Rojas (1997), y Hernández y Villagómez (2000) detallan algunos de los factores que dieron pie a esta primera fase. En efecto, gracias a los recursos provenientes de las privatizaciones implementadas durante los años 1991-1993 y a un manejo más adecuado del presupuesto público, el Gobierno Federal pudo reducir sus requerimientos financieros, con lo que una mayor fracción de los recursos bancarios se destinó al sector privado. Además de la mayor oferta de fondos prestables, la demanda por ellos también aumentó como consecuencia de unas expectativas de mayor crecimiento económico generadas a partir de la firma del Tratado de Libre Comercio de Norteamérica.

Sin embargo, este incremento crediticio —que entre 1992 y 1994 fue de 30 %— vino acompañado de una toma innecesaria de riesgos por parte de los nuevos banqueros⁵ debido a la existencia de un seguro de depósitos de cobertura ilimitada y a un discurso político que proclamaba los beneficios sociales que depararía dicha privatización.⁶ Además, como mencionan Gruben y McComb (1997), los elevados

⁵ En 1992 la banca comercial mexicana fue reprivatizada y, en ese sentido, los hechos que luego acontecieron coinciden con lo predicho por Kaminsky y Schmukler (2002).

⁶ El discurso político de esos años permitía predecir que el Gobierno no estaría dispuesto a mostrar que la privatización bancaria podría generar resultados adversos, por lo que los incentivos a conductas proclives al riesgo por parte de algunos nuevos banqueros se veían apuntalada.

6.2. La crisis cambiaria de 1995

precios que se pagaron por los bancos generaron una creciente competencia por incrementar la participación de mercado con el fin de recuperar la inversión lo antes posible⁷ y asegurar un espacio, en el mercado, previo a la entrada de la banca extranjera. Siguiendo a Hellman, Murdock y Stiglitz (2000), tal contexto era propicio para generar una conducta de riesgo moral entre los nuevos banqueros. En tercer lugar, tal auge —como detallan Hernández y Villagómez (2000)— no estuvo acompañado de un adecuado análisis de riesgo⁸ ni de un marco regulador que supliera tal deficiencia.⁹

En este contexto, la existencia de un déficit en cuenta corriente del orden del 7% del PBI, que estaba financiado por flujos de capital de corto plazo, una importante revalorización en el precio de la tierra¹⁰ y un régimen cambiario de bandas eran elementos que permitían presagiar la vulnerabilidad de la economía a choques externos o políticos y, de esta manera, dar entrada a la segunda fase descrita por Aninat (1996). En efecto, la inestabilidad política de 1994, el alza en las tasas internacionales de interés y la negativa de la autoridad a elevar —de una manera eficaz— el deslizamiento cambiario propiciaron una crisis cambiaria que se reflejó inicialmente en una pérdida de divisas y, posteriormente, en una devaluación superior al 100%.

Si bien desde 1993 ya se empezaba a presentar un cierto deterioro de la cartera crediticia de la banca, no fue sino hasta principios de 1995 que estalló la crisis bancaria. Así, en razón del súbito incremento en la tasa de devaluación,

⁷ El promedio simple del precio de compra fue de 3,53 veces el valor en libros.

⁸ La evolución del negocio bancario depende, de manera central, de la información que dichas instituciones puedan tener de sus potenciales deudores y de la función objetivo que persigan sus administradores y accionistas. Aun cuando podría haberse desatado, entre los nuevos banqueros, una competencia por alcanzar una mayor participación de mercado y ello se hubiera hecho a costa de enfrentar mayores riesgos, no debe de desdeñarse el hecho de que las alteraciones sufridas por la nacionalización en 1982 y su posterior privatización en 1993 pudieran haber debilitado los procesos utilizados para conocer las verdaderas características de los deudores potenciales.

⁹ Respecto de esto es importante destacar la importancia que cobraron los créditos relacionados. Según La Porta *et al.* (2002), para 1995, estos constituían el 20% de la cartera crediticia de la banca.

¹⁰ Según Del Villar *et al.* (1997), el índice de precios de terrenos para la ciudad de México aumentó en 1,218% entre 1988 y 1994. Durante ese período, el índice de precios al consumidor aumentó en 214%.

desencadenó una situación de inestabilidad¹¹ que colapsó la actividad económica y coadyuvó al deterioro del negocio bancario: para diciembre de 1994, la cartera vencida de los bancos crecía a una tasa anual del 36 % y representaba el 17 % de la cartera crediticia.

Buscando enfrentar la crisis bancaria, el Gobierno implementó un conjunto de medidas que tenían por finalidad detener la rápida disminución que venían presentando los coeficientes de capitalización como consecuencia del aumento en la morosidad de los créditos. Fueron tres los programas públicos que pusieron en marcha para evitar una crisis generalizada de la banca.¹² El primero fue un paquete en dólares americanos que ofreció la autoridad monetaria a los bancos como mecanismo para tranquilizar a los acreedores de la banca comercial y, de esta manera, evitar mayores fugas de capital. El segundo fue el establecimiento de un programa de capitalización temporal por medio del cual la autoridad compraba instrumentos de deuda emitidos por la banca —y que pagaban una tasa por encima de la interbancaria— que podían convertirse en capital luego de cinco años en caso que el deterioro continuara. De esta manera, los bancos lograban mantener una capitalización mínima de 8 % y contaban con un plazo para captar capital y pagar su deuda con la autoridad.

Finalmente, el Gobierno suavizó las restricciones que tenían tanto el capital nacional como el internacional para participar en el capital de la banca¹³ y, de manera paralela, ofreció —como tercer programa— comprar dos pesos de la cartera crediticia por cada peso adicional de capital que pusieran los accionistas. Para tal fin, los bancos seleccionaron —bajo ciertas restricciones impuestas por la autoridad— la cartera que deseaban venderle al Gobierno. Esta fue vendida a un precio equivalente al valor contable de esta (valor del crédito, neto de reservas) y, a cambio, recibieron un pagaré a 10 años que devengaba un interés de Cetes a 91 días más 2 puntos porcentuales. En particular

¹¹ La volatilidad fue de tal magnitud que la tasa líder de interés, por ejemplo, pasó de 13,7 % en noviembre de 1994 a una tasa anual del 74,8 % en abril de 1995. En igual período de tiempo, el tipo de cambio aumentó en 90 % y la tasa anualizada de inflación pasó del 7 % a 30 %.

¹² Para una exposición detallada de los distintos programas, véase Del Villar *et al.* (1997). Como mencionamos antes, además de estos tres programas, el Gobierno comprometió recursos para ayudar a los deudores de la banca e intervino aquellas entidades bancarias que estaban en situación precaria.

¹³ A nivel sistema bancario, el límite de la participación extranjera en las acciones de control aumentó de 6 % a 25 %; a nivel banco, de 30 % a 49 %; y, a nivel accionista individual, de 1.5 % a 6 %.

6.2. La crisis cambiaria de 1995

La cartera vendida se traspasa a una fideicomiso del banco comercial, el cual mantiene la responsabilidad de administración y cobro de dicha cartera. La totalidad de los ingresos de la cobranza se destina a la amortización de pagaré. Si al vencimiento de la operación no se ha amortizado el total del pagaré, el Fobaproa¹⁴ cubre entre el 70 % y el 80 %, y el banco el porcentaje restante. En tanto no se amortice el pagaré, el banco solo recibe un beneficio de entre 20 y 30 centavos por peso que cobre de esta cartera (Del Villar 1997: 74).

De los tres programas descritos, en la actualidad solo el último —denominado Programa de Capitalización y Compra de Cartera (PCC)— implica recursos públicos comprometidos, pues los dos primeros programas fueron pagados por la banca en septiembre de 1995 y en julio de 1997 respectivamente. Para fines de diciembre de 2001, la deuda relacionada con el rescate e intervención de los bancos y el apoyo a sus deudores ascendía de manera aproximada a 78 mil millones de dólares americanos. El 25 % de dicho saldo corresponde a los pagarés del programa de capitalización y compra de cartera (PCC).

A fin de visualizar la trascendencia de este programa, el cuadro 6.2 presenta —para sus cuatro bancos beneficiarios— indicadores que sugieren la importancia de dichos pagarés en la estructura de sus ingresos.

Aun cuando el rescate parece haber sido un éxito (como sugieren las cifras del cuadro 6.1), paralelo al mismo se dio (como puede observarse en el cuadro 6.3) una importante reestructuración del negocio bancario que se ha traducido en una drástica reducción de la cartera crediticia. En este sentido, la pregunta clave es ¿qué suscitó tan importante cambio en la cartera de recursos de la banca?

La caída en la cartera crediticia y su menor importancia en el negocio bancario no pueden explicarse por una menor demanda por sus productos como consecuencia de un menor nivel de actividad económica. Tal como se muestra en el cuadro 6.4, entre 1996 y el año 2000, la economía mexicana creció de manera estable y a tasas que no se registraban desde 1970.

¹⁴ Fondo Bancario de Protección al Ahorro.

Cuadro 6.2: Algunos indicadores de la importancia relativa del Programa de Capitalización y Compra de Cartera (PCC)
Datos a diciembre de 2001

	Banamex*	BBVA Bancomer	Banorte	Bital*
PCC como % de :				
Activos del banco	19,5	20,8	11,2	19,7
La cartera crediticia vigente del banco	36,2	36,0	14,4	44,5
Los depósitos a plazo y de exigibilidad inmediata del banco	27,9	26,5	14,9	23,7
Cartera crediticia como % del total del Sistema Bancario	22,9	27,5	8,9	6,9
* En 2001, Banamex fue adquirido por Citibank y, un año después, Bital fue adquirido por HSBC.				
Fuente: Comisión Nacional Bancaria y de Valores				

Cuadro 6.3: Distribución de los recursos de la Banca Comercial (en %)

	Disponibilidad	Cartera, títulos y valores			Cartera crédito	Otros ¹
		Total	Negociable	No negociable		
1992	3,2	13,3	13,3	0,0	78,1	5,4
1994	2,7	12,1	12,1	0,0	78,9	6,2
1995	3,2	13,2	12,3	0,9	55,1	28,5
1996	3,2	28,7	9,3	19,4	40,3	27,8
1998	5,2	34,2	11,4	22,8	31,3	29,3
2000	5,7	33,2	15,6	17,6	26,6	34,6
2002	5,9	29,5	22,1	7,4	14,8	49,8
¹ Son básicamente operaciones con futuros y préstamos para reportos.						
Fuente: Banco de México						

6.2. La crisis cambiaria de 1995

Cuadro 6.4: Tasa anualizada del crecimiento del PBI trimestral

	Tasa promedio	Coefficiente de variación	Mínimo	Máximo
1990-I a 1994-IV	+ 3,8 %	40 %	+ 0,8 %	+ 7,3 %
1995-I a 1996-I	- 6,2 %	63 %	- 9,2 %	- 0,4 %
1996-II a 2000-IV	+ 5,8 %	31 %	+ 2,2 %	+ 8,4 %
2001-I a 2004-IV	+ 1,6 %	133 %	- 2,2 %	+ 4,9 %
Fuente: Banco de México				

Tres son los factores que se presentan en la literatura para explicar —en un contexto de crecimiento económico— la caída en la cartera crediticia de la banca. El primero es la existencia de un marco jurídico poco propicio para la recuperación de las garantías. Si bien el marco no era el más propicio para que este pudiera explicar la caída en la cartera crediticia de la banca, tendría que haber ocurrido que los cambios regulatorios puestos en vigor luego de 1995 hubieran hecho más costoso el otorgamiento de préstamos. Si bien la regulación acarrea costos, difícilmente pueden estos explicar caídas en la cartera crediticia como las experimentadas de manera anual entre 1995 y el año 2000.

Un segundo factor explicativo del comportamiento de la cartera crediticia es el incremento en la oferta de bonos públicos derivado en parte del financiamiento del rescate bancario. Según Gonzales-Anaya (2003), no existe razón alguna para que los bancos presten al sector privado, dado que es más rentable comprar los bonos comerciables que emite el Instituto para la Protección del Ahorro Bancario (IPAB) —institución que reemplazó a Fobaproa— pues estos carecen de riesgo de pago y, por ende, no requieren de ninguna provisión ni monitoreo. Sin embargo, las propiedades de los bonos emitidos por el IPAB son similares a las de otros papeles emitidos por el Gobierno Federal, y no por ello, en el pasado, se vio mermada la oferta crediticia de la banca hacia el sector privado no-financiero.

Finalmente, un tercer factor que se cita en la literatura es la existencia de un proceso de selección adversa, fruto de la aparición de fuentes alternativas de financiamiento. Como mencionan Krueger y Tornell (1999), el crédito proveniente de proveedores y de instituciones financieras privadas internacionales dejaron a la

banca local con un grupo potencial de deudores mucho más riesgosos. Producto de lo anterior, la oferta crediticia se contrajo como resultado del riesgo moral. Sin embargo, en caso ello fuera cierto, queda la interrogante de qué originó la aparición de estas nuevas fuentes de financiamiento. O, dicho de otra manera, ¿qué motivó la inicial reducción del crédito bancario que dio entrada a estas nuevas fuentes de financiamiento?

Respecto de esto, consideramos que existe un factor que podría explicar la inicial caída observada en la cartera crediticia de la banca: los bonos no-comerciables utilizados para la compra de cartera por parte del Gobierno Federal. Con el fin de probar tanto teóricamente como numéricamente la importancia de estos bonos en el comportamiento de la cartera crediticia, en la siguiente sección se presenta un modelo que busca explicar qué impactos pudo haber tenido el intercambio de préstamos por bonos no-comerciables sobre el portafolio de la banca y, en especial, sobre la cartera crediticia.

6.3. El modelo

Supongamos una entidad bancaria que tiene dos tipos de pasivos. El primero lo constituye la captación del ahorro del sector privado. Estos depósitos (D) pagan una tasa de interés de mercado (r^d) más una sobretasa en caso el banco cuente con una capitalización (K/L) —siendo K el capital del banco y L la cartera crediticia— menor a la exigida (k_o) por la autoridad.

Si la suficiencia de capital es un mecanismo que puede desincentivar a los administradores de la banca a tomar acciones de riesgo moral, entonces una institución que presente una capitalización inferior a la exigida será percibida por los depositantes como una entidad propensa a una sobreexposición al riesgo. Aun cuando existiera un seguro de depósitos, ante la percepción de que dicho seguro fuera parcial o de que se pague con bonos cuyo valor, en valor presente, fuera percibido como inferior a la suma garantizada, los depositantes exigirán —en caso se percibiera una subcapitalización— una sobretasa por sus depósitos.

Así pues, se asumirá que esta sobretasa aumenta conforme la diferencia entre

6.3. El modelo

la capitalización exigida y la mantenida sea mayor. En este sentido, el costo para la banca de captar depósitos (D) es equivalente a $\alpha r^d D$, donde $\alpha = \alpha(Lk_o/K)$, y $\alpha(1) = 1$, $\alpha'(\cdot) > 0$ y $\alpha''(\cdot) > 0$.

El segundo tipo de pasivos de las instituciones bancarias proviene del costo de capitalizarse. Así, supongamos que, para captar capital (K), los bancos deben pagar una tasa de interés de mercado (r^k) —que representa el costo de oportunidad de los accionistas— más una sobretasa en caso el banco esté en una situación de iliquidez. Esta sobretasa aparece en virtud de que, al estar ilíquidos, las instituciones financieras se encontrarán más vulnerables a choques externos y, además, tendrán menor oportunidad de aprovechar nuevos negocios que pudieran surgir. En este sentido, el costo de captar capital (K) es equivalente a $\beta r^k K$, donde $\beta = \beta(F/D)$, siendo F los activos no-comerciables que mantiene la banca como resultado del rescate bancario anteriormente descrito y D el nivel de depósitos. Las propiedades de la función β son $\beta(0) = 1$ y $\beta'(\cdot) > 0$ y $\beta''(\cdot) > 0$.

Sobre la base de estos pasivos ($D + K$), la banca mantiene tres tipos de activos: préstamos al sector privado (L) que pagan, con probabilidad exógena p , una tasa de interés (r^L); bonos comerciables (B) que pagan una tasa de interés (r^b); y bonos no-comerciables (F) que pagan una tasa de interés (r^F). Así, de modo similar a Diamond (2003), asumiremos que la iliquidez —que proviene de contar con bonos no comerciables— está en el lado de los activos y no en los pasivos como, por lo general, se asume en la literatura.

Tomando en consideración lo antes expuesto, las ganancias esperadas (π) de la banca pueden describirse como

$$\pi = pr^L L + r^b B + r^F F - \alpha r^d D - \beta r^k K.$$

Asumiendo que el objetivo del banco consiste en maximizar ganancias, el problema a resolver consiste en maximizar dichas ganancias con respecto a L , D y K sujeto a la restricción presupuestaria $L + B + F = K + D(1 - \varepsilon)$, donde ε representa la fracción de los depósitos que los bancos desean (o deben) mantener en efectivo. Se asumirá que F es constante y está determinado por la autoridad. En este contexto, una vez obtenidos los óptimos valores de L , D y K que el banco desea mantener, la restricción nos dirá cuántos bonos comerciables

(B) demandará la banca.

Las soluciones al problema antes planteado son dadas por las siguientes condiciones de primer orden. Así, el nivel óptimo de capital (K^*) que buscará mantener la banca se describe por

$$r^b + r^d(D/K)(Lk_o/K)\alpha' = \beta r^k, \quad (6.1)$$

donde los primeros dos términos describen el ingreso marginal que se obtiene de aumentar el capital del banco y el término de la derecha describe el costo marginal del fondeo. Como puede observarse, el óptimo nivel de capital K^* es tal que $K^* = K(r^k, r^b, r^d, k_o, F)$, y presenta las siguientes propiedades: $K_1 < 0$, $K_2 > 0$, $K_3 > 0$, $K_4 > 0$ y $K_5 < 0$, siendo K_i la derivada parcial de K con respecto al i -ésimo término.

Por otro lado, la condición que describe el óptimo nivel de depósitos (D^*) que desea mantener la banca esta dado por

$$r^b(1 - \varepsilon) = \alpha r^d - (F/D)(K/D)\beta' r^k. \quad (6.2)$$

Esta segunda condición de primer orden sugiere que

$$D^* = D(r^d, r^b, r^k, k_o, F),$$

y donde las derivadas parciales presentan los siguientes signos: $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 > 0$, $D_4 < 0$, $D_5 > 0$. Además, la elasticidad de los depósitos deseados por la banca ante una variación en F es inferior a la unidad. Para probar ello, de la ecuación 6.2 se desprende que

$$(\partial D/\partial F) = (D/F)[\beta' + (F/D)\beta''][\beta' + (F/D)]^{-1}.$$

Por tanto,

$$(F/D)(\partial D/\partial F) = [\beta' + (F/D)\beta''][\beta' + (F/D)]^{-1}.$$

Asumiendo que $0 < \beta'' < 1$, entonces la elasticidad de los depósitos deseados ante un cambio en F será menor a la unidad.

Finalmente, la ecuación 6.3 describe el óptimo nivel de préstamos L^* que desea ofrecer la banca:

$$pr^L = r^b + (D/L)(Lk_o/K)\alpha' r^d. \quad (6.3)$$

6.3. El modelo

De la ecuación 6.3 se desprende que la cantidad ofrecida de préstamos L^* será tal que $L^* = L(r^L, r^b, r^d, p, k_0)$, donde $L_1 > 0$, $L_2 < 0$, $L_3 < 0$, $L_4 > 0$ y $L_5 < 0$. Mas aún, a medida que la capitalización exigida (k_0) sea mayor, la sensibilidad de L^* a cambios en r^L será menor. Esto es, la oferta de préstamos se vuelve más inelástica. Para ver ello, de la ecuación 6.3 se desprende que

$$\frac{\partial L}{\partial r^L} = \frac{p}{\alpha''} \left(\frac{K}{k_0} \right)^2 r^d D$$

y, entonces,

$$\text{signo} \left[\frac{\partial}{\partial k_0} \left(\frac{\partial L}{\partial r^L} \right) \right] = -\text{signo} [2\alpha''(K/k_0)^2 + \alpha'''(K/k_0)L].$$

Asumiendo que α''' no es negativo, se desprende que

$$\left[\frac{\partial}{\partial k_0} \left(\frac{\partial L}{\partial r^L} \right) \right] < 0.$$

Por otro lado, a medida que el capital (K) con que cuenta la institución es mayor, la sensibilidad de L^* a cambios en r^L será también mayor. Esto es, la oferta de préstamos se vuelve más elástica.

Estas condiciones de primer orden sugieren que un aumento en la tenencia de bonos no-comerciables (F) traerá consigo un aumento menos que proporcional en la demanda por depósitos que hace la banca, una reducción en el capital que desea mantener y una cantidad constante de préstamos a ofrecer. Dado que el aumento en F conlleva, en el mejor de los casos, un aumento —pero menos que proporcional— en $(D+K)$ y un mismo nivel de L , la restricción presupuestaria — $L + B + F + \varepsilon D = K + D$ — implica que la cantidad demandada de bonos comerciables (B) tiende a disminuir. Dicho de otra manera, un aumento en la tenencia de bonos no-comerciables (F) induce a la banca a vender parte de sus bonos comerciables (y a aumentar sus disponibilidades de efectivo) con el fin de neutralizar los costos asociados a la mayor iliquidez que resulta del aumento en F .

Aun cuando la reducción de los bonos transables (B) es compatible con lo acontecido entre 1995 y 1996 (véase cuadro 6.3), el modelo no está completo, pues falta describir las decisiones que toma el sector privado no financiero con respecto

a cuántos depósitos bancarios desea mantener y cuántos préstamos bancarios demanda.

Para entender cuánto ahorrará el sector privado, supondremos que el ahorro (A) del sector privado depende del ingreso y de la tasa de interés que pagan los bonos. Más concretamente, $A = A(y, r^b)$ con ambas derivadas parciales positivas. Por otro lado, la inversión (I) se financia con bonos o con préstamos bancarios, siendo estos sustitutos imperfectos, de manera que $I = I(r^b, r^L)$ con derivadas parciales negativas. De esta manera, el equilibrio ahorro-inversión puede describirse en un plano con ejes (y, r^b) por una curva IS de pendiente negativa.

Además de contar con pendiente negativa, dicha curva se desplaza y rota ante cambios en la capitalización exigida (k_o). Así, por ejemplo, un aumento en el valor de k_o implicará una contracción en la cantidad ofrecida de préstamos (véase ecuación 6.3), que llevará a las empresas a emitir bonos para financiar sus operaciones. Pero, teniendo estas un mayor costo, obligará a las empresas a realizar un menor nivel de inversión. En este sentido, exigir una mayor capitalización a la banca acarrea una contracción de la curva IS. Mas aún, puede probarse que tal aumento en el valor de k_o ¹⁵ también conduce a que la curva IS se vuelva más inelástica. Esta variación en la elasticidad de la curva obedece a que la sensibilidad de la oferta de préstamos, con respecto a de su tasa de interés será menor conforme la capitalización exigida aumente. Por otro lado, en caso se diera un aumento en el capital de la banca, los impactos sobre la IS serían exactamente los contrarios: la curva se desplaza hacia fuera y se vuelve más elástica.

Para describir la composición que toma el ahorro del sector privado, bastará con describir el mercado de depósitos. Asumiremos que la cantidad de depósitos bancarios (D) que desea mantener el sector privado no financiero es tal que $D = D(y, r^b - r^d)$, donde el primer término representa el ingreso y el segundo el costo de oportunidad de mantener los ahorros en la forma de depósitos bancarios. Aun cuando la cantidad de depósitos quedará determinada por la oferta

¹⁵ Dado que esto no es central para demostrar la veracidad o falsedad de la hipótesis que subyace a este trabajo, se decidió no incluir la demostración matemática de esta aseveración.

que haga el sector privado, en equilibrio deberá satisfacer la ecuación 6.2 que indica cuántos depósitos desea mantener la banca. Por lo tanto, a partir de dicha ecuación, podemos describir el costo de oportunidad de mantener depósitos como

$$r^b - r^d = \varepsilon r^b + (\alpha - 1)r^d - (F/D)(K/D)\beta' r^k. \quad (6.4)$$

Dado que $D = D(y, r^b - r^d)$, el equilibrio del mercado de depósitos en un plano con ejes (y, r^b) puede describirse por medio de una curva de pendiente positiva. Dicha curva, que denotaremos por DD, se puede desplazar ante variaciones en los valores de F y k_o , pues estos parámetros alteran —como muestra la expresión 6.4— el costo de oportunidad de mantener depósitos.

En particular, un aumento en F conduce —como sugieren las ecuaciones 6.1 y 6.2— a que los bancos deseen reducir sus niveles de capital y aumentar los depósitos que mantienen. Sin embargo, dichas operaciones son de tal magnitud que, en el mejor de los casos, la suma de $(K + D)$ aumenta, aunque menos de lo que aumentó F . Tomando en consideración que la cantidad ofrecida de préstamos no varía (L), la restricción presupuestaria conduce a que los bancos vean óptimo reducir la cantidad de bonos que mantienen. Puesto de otra manera, en la busca de reducir los costos asociados a la mayor iliquidez, la banca mantiene una mayor proporción de sus recursos en efectivo. Esta venta de bonos se generará en mayores tasas de interés, por lo que, de manera gráfica, un aumento en la tenencia del activo no-comerciable genera un desplazamiento —en el plano (y, r^b) — hacia la izquierda de la curva DD.

En sentido contrario, un aumento en la capitalización exigida (k_o) induce a la banca a reducir su oferta de préstamos (véase ecuación 6.3) y a que busque mantener un menor nivel de depósitos (véase ecuación 6.2), todo lo cual se traduce en un desplazamiento hacia la derecha a la curva DD. Finalmente, en caso se diera una situación que propiciara una elevación endógena del capital de la banca, ello le permitiría ofrecer más préstamos y demandar más depósitos, por lo que la curva DD se contraería.

6.4. Los impactos del rescate bancario

Como decíamos en la introducción, a diez años del rescate bancario la cartera crediticia aún no se recupera. Esta caída tiende a relacionarse, entre otros factores, con la forma en que se financió el rescate bancario: bonos públicos no-comerciables de largo plazo. Esta iliquidez (que en su punto más alto alcanzó el 23 % del total de los recursos de la banca), se cree, pudo haber generado una contracción de la oferta crediticia y, por ello, afectado las tasas de interés y el crecimiento económico. Con el modelo antes desarrollado, podemos evaluar la coherencia de tal afirmación.

El programa de compra de cartera por capital que puso en marcha la autoridad monetaria tenía por característica que este último compraba cartera crediticia con bonos no-comerciables siempre que los dueños de los bancos se comprometieran a captar más capital. En términos de nuestro modelo, esto supone aumentos tanto en K como en F . Ahora bien, dado que nuestro modelo considera el valor del capital como endógeno, supondremos que, al hacerse público el nivel de subcapitalización en que se encontraba la banca, aumentó el costo de estar en tal situación. Así, el rescate gubernamental generó un desplazamiento hacia arriba en el valor de la función α que condujo —como sugiere la ecuación 6.1— a la banca a buscar un mayor nivel de capital.

Tomando en consideración el plano (y, r^b) , al aumentar F se elevan los costos bancarios —fruto de la sobretasa que debe pagar por la iliquidez—, por lo que, como sugieren las ecuaciones 6.1, 6.2 y 6.3, la banca se ve incentivada a reducir su tenencia de bonos comerciables (B). Aun cuando la oferta de crédito no se contrae, la caída en el financiamiento de la inversión —por el menor valor demandado de (B)— reduce la cantidad demandada de depósitos, lo cual se describe por el desplazamiento a la izquierda de la curva DD. Mientras tanto, el aumento en K permite a la banca aumentar su oferta crediticia —con lo que cae la oferta de bonos— y volverla más sensible a cambios en la tasa de interés que pagan dichos activos. Puesto de otra manera, el aumento en K acarrea un desplazamiento a la derecha de la función IS y la vuelve más horizontal.

6.5. Una simulación numérica

De esta manera, el modelo predice que el programa implementado por la autoridad trajo como consecuencia un aumento en las tasas de interés. Estos resultados explican, en parte, la contracción observada de la cartera crediticia: el aumento en las tasas de interés contrajo la cantidad demandada por préstamos bancarios y, dado que la tasa de interés de los bonos se elevó, se hizo más rentable para la banca dedicar sus recursos a la compra de estos activos.¹⁶

6.5. Una simulación numérica

Con el fin de evaluar las bondades del modelo para replicar el comportamiento seguido por la cartera crediticia de la banca inmediatamente después del rescate bancario, a continuación se realiza una simulación utilizando como año base lo acontecido en 1993. Una vez obtenidos ciertos parámetros, veremos qué tan lejos está el modelo presentado para explicar lo acontecido en 1995.

Es importante mencionar que esta simulación solo utilizará las ecuaciones que describen el comportamiento de la banca, pues la hipótesis que se busca examinar es si los bonos no-comerciables tuvieron un impacto en el portafolio de la banca que Orrillo a una reducción de la oferta crediticia.

6.5.1. Escenario base 1993

Durante 1993, no existían bonos no-comerciables en los activos bancarios y la banca en general presentaba una capitalización en línea con la regulación. Para nuestro modelo, ello implica que $F = 0$ y que $k_o = (K/L)$. Por lo tanto, $\alpha = \beta = 1$. Dadas estas condiciones iniciales, las tres ecuaciones fundamentales se convierten en

¹⁶ Este resultado es compatible con lo que sugieren las encuestas crediticias que realiza el Banco de México desde 1998. En ellas se reporta que uno de los principales factores que inhibe las solicitudes de crédito es la alta tasa de interés.

$$r^b + r^d(D/K)\alpha'(\cdot) = r^k, \quad (6.5)$$

$$r^b(1 - \varepsilon) = r^d, \quad (6.6)$$

y

$$pr^L = r^b + (D/L)\alpha'(\cdot)r^d. \quad (6.7)$$

6.5.1.1. Datos

Las fuentes de datos, tanto para 1993 como para 1995, son las siguientes: r^b , el valor que tomaron los pagarés con rendimiento liquidable al vencimiento a 28 días, proviene de Zedillo (1997: 92); r^k , la utilidad neta anualizada sobre el promedio anual del capital contable sin revaluaciones, proviene de Zedillo (1997: 104); finalmente, los datos para 1993 y 1995 referentes a la captación vigente (D), capital contable (K), cartera crediticia directa (L) y disponibilidades —necesario este último para la construcción del parámetro ε — proviene de Zedillo (1997: 97): $r^b = 11,46\%$, $r^k = 38,98\%$, $p = 0,93$, $\varepsilon = 0,0389$, $D/K = 9,347$ y $D/L = 0,946$.

6.5.1.2. Solución

- De la ecuación 6.6, se desprende que $r^d = 7,1\%$. Esta cifra es muy similar al promedio ponderado de las tasas de interés que pagaban las cuentas de cheques (con una ponderación de 27,2%), los instrumentos bancarios líquidos (con una ponderación del 58,6%) y los instrumentos bancarios de largo plazo que, dentro de la captación, representan el 14,24%.
- De la ecuación 6.5, se desprende que $\alpha'(\cdot) = 0,02748$. Si asumimos que la función α es lineal en (Lk_o/K) , $\alpha = \alpha_o + 0,02748(Lk_o/K)$. Dado que $\alpha(1) = 1$, entonces, $\alpha_o = 0,9725$.
- De la ecuación 6.7, se desprende que $r^l = 22,84\%$. Ello implica una tasa real de catorce puntos y una tasa nominal activa que está nueve puntos por encima de la tasa de interés interbancaria.

6.5.2. Estimaciones para 1995

Tal y como se reporta en el cuadro 6.4, en 1995 aparecen los bonos no-comerciables dentro de la estructura de activos del sistema bancario. Ante ello, el sistema de ecuaciones que pasa a representar el comportamiento de la banca está dado por las ecuaciones originales del modelo, ecuaciones 6.1, 6.2 y 6.3.

En la sección anterior, supusimos que, al hacerse público el nivel de subcapitalización en que se encontraba la banca, aumentó el costo de estar en tal situación. Con ello, el rescate gubernamental generó un desplazamiento hacia arriba en el valor de la función α que llevó —como sugiere la ecuación 6.1— a la banca a buscar un mayor nivel de capital; esto es, el valor del parámetro α_0 aumentó de valor. Entre otros aspectos, veremos si la simulación numérica arroja tal resultado.

6.5.2.1. Datos

$r^b = 41,53\%$, $r^k = 7,2\%$, $r^d = 35\%$,¹⁷ $p = 0,851$, $\varepsilon = 0,0832$, $F/D = 0,0133$ y $(K/L) = 0,129$. Además, supondremos que —al igual que en 1993— la tasa real activa de interés es de catorce puntos, con lo que $r^L = 71\%$.

6.5.2.2. Solución

- Por la ecuación 6.3, el valor estimado para $(D/L) = 1,114$, lo cual no está muy lejos de su verdadero valor, que fue —según Zedillo (1997)— de 1,190.
- De la ecuación 6.1 se desprende que el valor puntual de la función $\beta = 1,6088$. Asumiendo que dicha función es lineal en el valor de (F/D) , entonces la función puede ser descrita por $\beta = \beta_0 + \beta_1(F/D)$. Dado que $\beta(0) = 1$, se desprende que $\beta_0 = 1$ y $\beta_1 = 45,77$.

¹⁷ Es el promedio ponderado de las tasas de interés que pagaban las cuentas de cheques, los instrumentos bancarios líquidos y los instrumentos de largo plazo.

- Por la ecuación 6.2, resulta que el valor puntual de la función $\alpha = 1,0171$. Ello significa que el costo de fondeo de la banca aumentó entre 1995 y 1993 en aproximadamente 1,71 %. Más aún, asumiendo la misma forma lineal para la función α , obtenemos que el nuevo valor de $\alpha_o = 0,9906$, lo cual implica un aumento con respecto al valor de 0,9725 que mantenía en 1993. Como puede observarse, los datos no rechazan la hipótesis que hicimos en la sección anterior: una vez conocida la subcapitalización de la banca, el valor puntual de la función α aumentó de valor, lo cual, según nuestro modelo, indujo a la banca a mejorar su capitalización y desplazó hacia la derecha a la curva IS.

6.6. Conclusiones

El modelo teórico aquí desarrollado sugiere que uno de los factores que motivó la caída inicial de la cartera crediticia de la banca¹⁸ fue el intercambio de cartera crediticia por bonos no-comerciables. En efecto, el modelo aquí presentado sugiere —y la simulación numérica no lo invalida— que la presencia de estos bonos dentro de los activos de la banca generó una recomposición de la cartera de la banca que derivó en un incremento de las tasas activas de interés y en una menor demanda por préstamos bancarios.

Según el modelo, menores hubieran sido las tasas de interés en caso se hubiera financiado la compra de cartera con bonos públicos comerciables. Así, la mayor liquidez se hubiera reflejado en un desplazamiento hacia la derecha de la curva DD, fruto del menor valor de F, con lo que las tasas de interés y la cantidad demandada de bienes hubieran sido mayores. Sin embargo, haberlos hecho desde un inicio comerciables podría haber conducido a un contexto poco propicio para las finanzas públicas y para el desarrollo del crédito bancario, dado que las instituciones bancarias rescatadas tenían incentivos a que dichos bonos pagaran mayores tasas de interés. En este sentido, resulta obvio el dilema que enfrentó la autoridad cuando tuvo que decidir la naturaleza de los bonos que utilizó para la compra de la cartera crediticia de la banca.

¹⁸ En 1995, la caída de la cartera crediticia fue 19%. En términos de nuevos préstamos, la caída fue aun mayor, pues la cartera crediticia incluye préstamos vigentes, reestructurados y los comprados por el Gobierno.

Referencias bibliográficas

- [1] Aninat, E. (1996), Chile, en Hausmann, R. y Rojas, L. *Las Crisis Bancarias en América Latina*.
- [2] Del Villar, R., Backal, D., y Treviño, J. (1997), Experiencia Internacional en la Resolución de Crisis Bancarias, Documento de Trabajo del Banco de México.
- [3] Diamond, D. (2001), Should Banks be Recapitalized? *Economic Quarterly* 87/4, Federal Reserve Bank of Richmond.
- [4] Diamond, D. y Rajan, R. (2003), Liquidity Shortages and Banking Crisis. NBER Working Paper 10071.
- [5] Gavito, J., Silva, A., y Zamarripa, G. (1997), Mexico's Banking Crisis: Origins, Consequences and Countermeasures, en F. Von Furstenberg, *Regulation and Supervisión of Financial Institutions in the NAFTA countries and beyond*. Academic Publishers, Boston.
- [6] Gil Diaz, F. y Cartens, A. (1996), One Year of Solitude: Some Pilgrim Tales about Mexico's 1994-1995 Crisis. *American Economic Review* 86, Papers and Proceedings.
- [7] Gonzales-Anaya, J. (2003), Why have Banks Stopped Lending in Mexico Since the Peso Crisis in 1995. Center for Research on Economic Development and Policy Reform, Stanford University, Working Paper No. 118.
- [8] Gruben, W. y McComb, R. (1997), Liberalization, Privatization and Crash: Mexico's Banking System in the 1990's. *Economic Review*, First Quarter. Federal Reserve of Dallas.

- [9] Hausmann, R. y Rojas, L. (1997), *Las Crisis Bancarias en América Latina*. Banco Interamericano de Desarrollo.
- [10] Hellman, T., Murdock, K. y Stiglitz, J. (2000), Liberalization, Moral Hazard in Banking, and Prudential Regulation: are Capital Requirements Enough? *American Economic Review* 90(1).
- [11] Hernández, F. y Villagómez, A. (2000), El Sector Financiero y el TCLN, en Fernández de Castro y Leycegui, *¿Socios Naturales? Cinco Años del Tratado de Libre Comercio de América del Norte*. Editorial Porrúa, México.
- [12] Kaminsky, G. y Schmukler, S. (2002), Short-Run Pain, Long Run Gain: The effects of Financial Liberalization, Manuscrito.
- [13] Krueger, A. y Tornell, A. (1999), The Role of Bank Restructuring in Recovering from Crises: Mexico 1995-1998. NBER Working Paper No. 7042
- [14] Krugman, P. (1996), Are Currency Crisis Self Fulfilling? NBER Macroeconomics Annual. MIT Press: Cambridge, Mass.
- [15] La Porta, R., López de Silanes, F. y Zamarrita, G. (2002), Related Lending. NBER Working Paper No. 8848.
- [16] Mancera, M. (1996) México, en Hausmann, R. y L. Rojas's *Las Crisis Bancarias en America Latina*.
- [17] McKinnon, R. y H. Pill (1996), Credible Economic Liberalizations and Overborrowing. *American Economic Review* 87(2).
- [18] Negrín, J. (2000), Mecanismos para Compartir Información Crediticia. Evidencia Internacional y la Experiencia Mexicana. Banco de México, Documento de Trabajo.
- [19] Zedillo, E. (1997), Tercer Informe Presidencial. Gobierno Federal de México.
- [20] Zedillo, E. (2000), Sexto Informe Presidencial. Gobierno Federal de México.

7. Brecha salarial por género en el Perú durante 1986-2000.

Evidencia a partir del método de comparaciones emparejadas

*Hugo Ñopo*¹

7.1. Introducción

Los mercados laborales de Perú exhiben considerables disparidades por género. Hay brechas pronunciadas en los niveles de participación y de empleo, así como en las ocupaciones, en el salario por hora y el ingreso mensual. Ahora bien, aunque hay diferencias por género en cuanto a los resultados de estos mercados laborales, también hay disparidades por género en cuanto a las características individuales. Los hombres tienden a tener más años de formación y más tiempo en ocupaciones de mayor nivel de compensación. Una cuestión que no

¹ Economista, Departamento de Investigación del Banco Interamericano de Desarrollo. Correo electrónico: hugon@iadb.org. El presente documento es una reimpresión.

El trabajo fue publicado originalmente por Sebastián Galiani (Editor) en *Económica* Año L N 1-2 enero - diciembre 2004. Se agradece profundamente la asesoría de Chris Taber, Luojia Hu y Dale Mortensen. Sebastián Calónico, Deidre Ciliento, Cristina Gómez y John Jessup brindaron una asistencia valiosa en diversas etapas de este proyecto.

se ha aclarado del todo en mucho tiempo es el grado en el que dichas diferencias, en las características observables, explican las brechas en los resultados de los mercados laborales. En el caso de la brecha salarial por género, la descomposición de Blinder-Oaxaca ha sido el método empleado más frecuente en la obra publicada sobre los mercados laborales (Blinder 1973 y Oaxaca 1973).

La Descomposición de Blinder-Oaxaca es una manipulación algebraica de las diferencias entre las Ecuaciones de Mincer, o mincerianas, para hombres y para mujeres. Permite responder preguntas del tipo «¿cuál habría sido el ingreso del hombre (de la mujer) promedio si sus características observables se hubiesen parecido a las de la mujer (del hombre) promedio?».

Ñopo (2004) desarrolla una nueva metodología para las descomposiciones de brechas salariales introduciendo un enfoque de comparaciones emparejadas. El emparejamiento de hombres y mujeres con las mismas características individuales observables genera muestras sintéticas de individuos idénticos. Este método nos permite entonces responder preguntas del tipo «¿cuál habría sido la distribución del ingreso de la muestra de hombres (mujeres) si sus características observables hubiesen sido similares a las de la muestra de mujeres (hombres)?». Esta extensión permite obtener mayor información de manera inmediata. Su empleo permite explorar no solo la magnitud de la brecha salarial media por género, sino también su distribución.

En el presente trabajo, empleo la metodología de emparejamiento con el fin de comprender la distribución de la brecha salarial por género en el Perú. Se anticipa que la aplicación de este método, en vez de seguir el enfoque tradicional de Blinder-Oaxaca, resultará especialmente beneficiosa en el caso del Perú, debido a su elevado nivel de segregación ocupacional (Blau y Ferber 1992). Además, la informalidad también desempeña un papel en los mercados laborales peruanos, dado que una parte considerable de los empleos tienden a no satisfacer al menos una de las condiciones de formalidad (es decir, que exista un contrato formal de trabajo o el acceso a seguros). El grado de formalidad de la clase trabajadora incide de distinta manera en los hombres que en las mujeres: mientras que 55 % de los primeros tienen empleo informal, la cifra en el caso de las segundas es de 65 %. Estas diferencias por género también guardan relación con las diferencias

7.2. Diferencias por género y brecha salarial

por género en cuanto a las características observables de la población trabajadora, tales como la edad y el nivel de escolaridad. A su vez, se presume que ello puede implicar la existencia de un grave problema de diferencias por género en cuanto a los apoyos de las distribuciones de esas características, una cuestión que el método de emparejamiento puede resolver directamente.

El Perú es uno de los países latinoamericanos donde se aplicaron reformas del mercado laboral a comienzos de la década de 1990.² Entre estas, figuran reducciones considerables de los costos de cesantía vinculadas a reducciones de la formalidad y al subsiguiente aumento de los niveles de rotación de personal a causa de la menor duración, tanto de los lapsos de empleo como de los de desempleo (Saavedra 2000 y Saavedra y Torero 2000). La obra teórica publicada no ofrece predicciones claras sobre la manera en que esos cambios de la dinámica del empleo repercuten en las diferencias salariales. Por lo tanto, analizo la forma en que evolucionó la brecha salarial por género a lo largo de este período. Los resultados apuntan hacia una reducción monótona de las diferencias atribuibles a los sexos en cuanto a los niveles de participación y de empleo; sin embargo, también denotan una evolución cíclica de la brecha por género en cuanto al salario por hora. El efecto combinado de estos tres factores (participación, empleo y salario por hora), medido según la participación del ingreso laboral mensual generado en la economía por hombres y mujeres, también exhibe una reducción monótona a lo largo del lapso de quince años que he analizado.

7.2. Diferencias por género y brecha salarial en Perú durante 1986-2000

Los datos empleados en este estudio provienen de dos encuestas nacionales realizadas en Perú: las Encuestas Nacionales de Hogares y la Encuesta Especializada de Empleo, efectuadas por el Ministerio de Trabajo y Promoción Social (MTPS) durante el lapso 1986-1995 (sin incluir 1988) y por el Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI) durante 1996-2000. Para fines de homogeneización necesarios en este estudio —y dado que casi la mitad de la fuerza laboral

² Las dos etapas de reforma se registraron en 1991 y 1995.

peruana trabaja en Lima— solo se ha tomado en cuenta a los trabajadores de catorce o más años de edad radicados en la zona metropolitana de Lima.

Al explicar las diferencias de ingresos por género, cabe sostener que la brecha salarial entre ellos sencillamente obedece a diferencias en algunas características observables de los individuos, que son factores determinantes de los salarios. Se trata de un argumento válido, hasta cierto punto, debido a que hay diferencias de edad, nivel académico, experiencia laboral y ocupaciones, entre otras. Sin embargo, esas diferencias solo alcanzan a explicar parcialmente la brecha salarial. El propósito del presente trabajo es cuantificar de manera precisa el grado en que las diferencias de las características explican las diferencias de salario. El análisis de algunas estadísticas descriptivas que exhiben estas diferencias por género ayudará a aclarar esta cuestión.

En términos de la edad promedio, los hombres trabajadores tienen tres años más que las mujeres. Ello contrasta con la cifra de la población peruana como un todo, en la que la edad promedio de las mujeres es levemente mayor que la de los hombres (debido a la mayor expectativa de vida de estas). La diferencia de edad promedio entre los trabajadores puede obedecer a que las mujeres ingresan antes al mercado laboral o se retiran de este más pronto que los hombres. Se anticipa que cualquiera de esas dos circunstancias incide negativamente en los salarios. La primera se debe al hecho de que el ingreso temprano al mercado laboral puede significar menos años de escolaridad, mientras que la segunda se debe a que la salida prematura representa un menor tiempo de servicio.

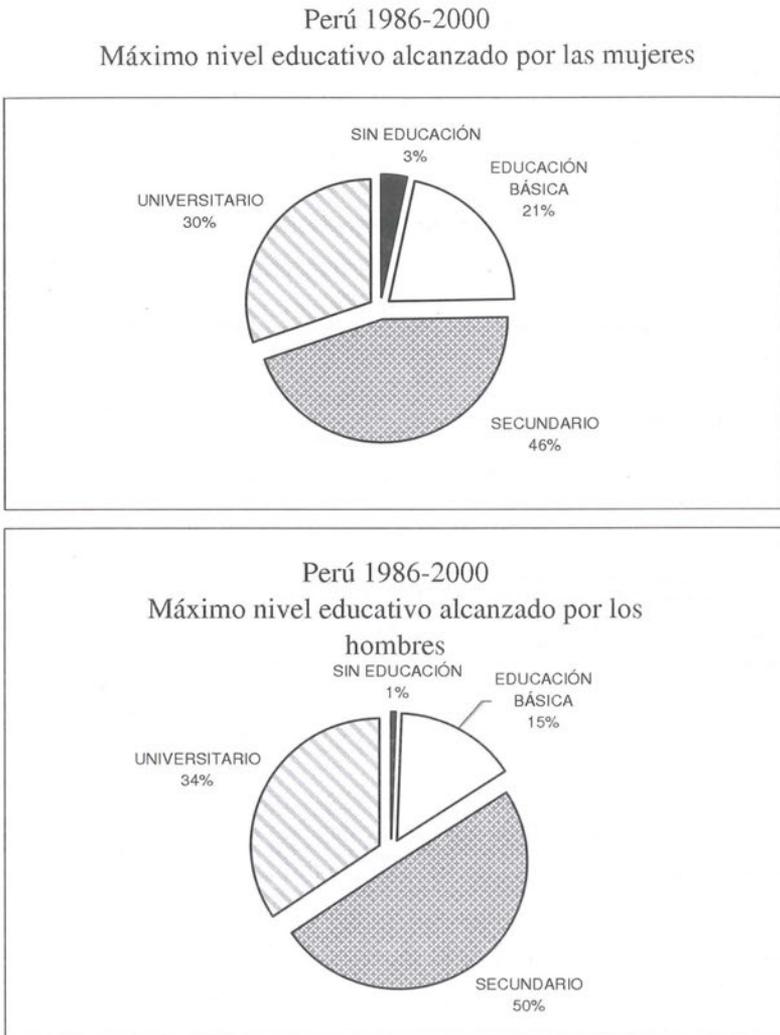
También hay diferencias considerables en las estadísticas de los sexos en cuanto al nivel académico máximo alcanzado, tal como ilustra la figura 7.1: mientras que 16% de los trabajadores han alcanzado un nivel académico de primaria o menos, la cifra correspondiente en el caso de las trabajadoras es 24%. Hay un patrón parecido en cuanto a los años de escolaridad: mientras que los trabajadores presentan una media de escolaridad de 10,75 años, las trabajadoras presentan una media de 9,86 años.

Esas cifras medias del período 1986-2000 muestran que se ha producido una evolución importante: el porcentaje de trabajadoras con título universitario o de educación secundaria ha aumentado de 68% a 81%, mientras que, en el caso de

7.2. Diferencias por género y brecha salarial

sus colegas hombres, el aumento ha sido de 78 % a 84 %.

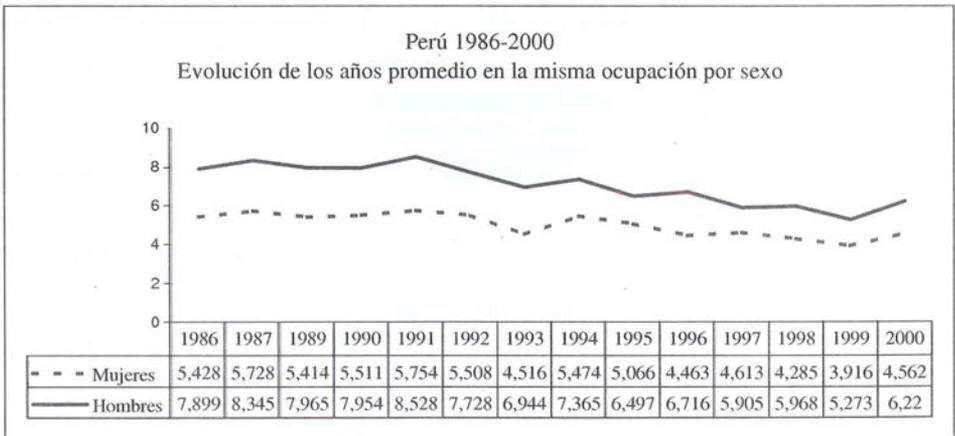
Figura 7.1: Máximo nivel académico alcanzado por sexo



Fuente: Encuestas de Hogares

La diferencia más marcada por género corresponde a la experiencia ocupacional de las personas trabajadoras, medida en términos de años de trabajo en la misma ocupación (se ilustra en la figura 7.2): para el período analizado, los hombres exhiben una media de entre 1,4 y 2,7 años más de experiencia ocupacional que las mujeres, lo que representa una diferencia de 30 % y 50 % respectivamente; sin embargo, hay que hacer notar que esas diferencias de la media de años de experiencia ocupacional por género ha disminuido considerablemente con respecto al período 1986-2000.

Figura 7.2: Evolución de la experiencia ocupacional



Fuente: Encuestas de Hogares

En cuanto a las diferencias de apoyo puestas de manifiesto por la metodología de emparejamiento, he hallado que 30 % de las trabajadoras exhiben combinaciones de edad, nivel académico, situación migratoria³ y estado civil que no pueden ser igualadas por ningún hombre de la muestra. De igual manera, 23 % de los trabajadores hombres exhiben combinaciones de las mismas características individuales (edad, nivel académico, situación migratoria y estado civil) que no pueden ser igualadas por mujer alguna de la muestra. Esta cifra de 23 % de trabajadores exhibe salarios considerablemente mayores que los del resto de los trabajadores hombres.

³ En el presente trabajo, distingo únicamente a los nacidos en Lima de los que nacieron fuera de Lima.

7.2. Diferencias por género y brecha salarial

Como ya se hizo notar, hay diferencias por género en cuanto a algunas características observables que el mercado laboral recompensa. Sin embargo, esas diferencias se han reducido a lo largo del período analizado. En la siguiente sección, se analiza la relación entre las características mostradas anteriormente y el salario por hora, la cual explica, en parte, la brecha salarial por género, así como su evolución.

Los salarios han evolucionado considerablemente durante el período analizado. El aumento de los salarios reales que duró de 1985 hasta 1987 precedió una caída considerable del salario real en un momento de hiperinflación. Los salarios reales cayeron a su nivel mínimo en 1990 y posteriormente mejoraron. Durante la década de 1990, los salarios reales aumentaron a un ritmo sostenido hasta los últimos años de la década, cuando comenzaron a disminuir nuevamente. La figura 7.3 ilustra la evolución del salario por hora en el caso de los hombres y en el de las mujeres. El salario por hora se mide en nuevos soles (S/) constantes de 1994.

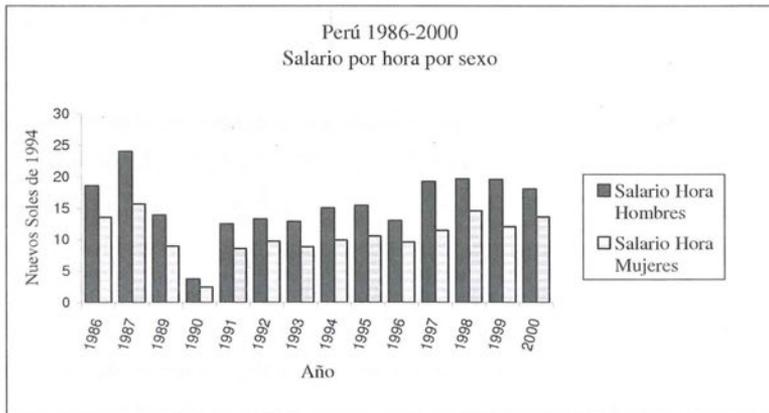
La figura 7.3 muestra los valores absolutos (por contraste con nuevos soles de 1994) de la brecha salarial por género (representada por la diferencia entre un par de columnas adyacentes). La figura 7.4 ilustra la brecha en términos relativos (brecha de salario medio por hora como múltiplo del ingreso por hora de las mujeres).⁴ Se puede ver que la brecha por género en cuanto al salario por hora ha oscilado alrededor de un valor medio de 0,45 (es decir, que los hombres devengan una media de 45 % más por hora que las mujeres). Hay, no obstante, fluctuaciones considerables alrededor de esa medida media.

La medida de la brecha que se describe en esta sección (como múltiplo del salario medio por hora de la mujer) corresponde a datos sin procesar, ya que abarca a todos los hombres y mujeres, independientemente de las diferencias que pueda haber entre las características observables de unos y otras, e independientemente de que sea posible o no establecer dichas comparaciones. Es preciso hacer los ajustes que correspondan a esa brecha, con el fin de obtener una medida de las diferencias no explicadas del ingreso medio de muestras comparables de hombres y mujeres. Ese es el propósito de la siguiente subsección, pero, antes de pasar a

⁴ Nótese que la variable en la que se mide la brecha entre los sexos en el presente trabajo es el salario por hora, en vez de usarse el logaritmo del salario por hora, tal como se suele presentar en la obra publicada. El emparejamiento hace que no sea precisa esa transformación.

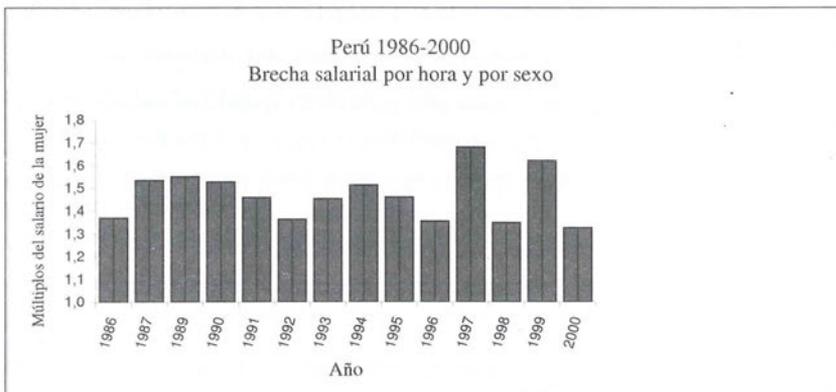
ese ejercicio, veamos la manera en que varían dichas diferencias del salario por hora por género según las características individuales.

Figura 7.3: Salario por hora y por sexo (en nuevos soles de 1994)



Fuente: Encuesta de Hogares

Figura 7.4: Brecha salarial por hora por sexo (en nuevos soles de 1994)



Fuente: Encuestas de Hogares

En cuanto a la edad, una vez que la población ha alcanzado los treinta años, la brecha salarial por género tiende a aumentar y, en el caso de los individuos cercanos a la edad de jubilación, la brecha alcanza 128%.⁵

⁵ Conviene tener presente que, en este cálculo básico de las brechas salariales medias, se combinan distintos grupos de edades con efectos de edades y efectos de grupo. El objeto del presente trabajo no es desenmarañarlos.

7.2. Diferencias por género y brecha salarial

Según el nivel académico máximo alcanzado, la brecha salarial por género muestra un comportamiento no-monótono. Hay una brecha mayor en los casos de los individuos que solo han culminado la educación primaria y los que tienen un título universitario. La brecha disminuye en los casos de los sectores sin formación y los que han culminado la educación secundaria.

Figura 7.5: Salario según sexo y edad (en nuevos soles de 1994)

PERÚ 1986-2000
SALARIO HORARIO SEGÚN
SEXO Y EDAD
(en soles de 1994)

	Menos de 19 años	19 a 20	30 a 44	45 a 60	60 a más
MEJERES	5.50	10.03	12.97	12.45	10.17
HOMBRES	7.62	11.99	17.11	20.32	23.16
BRECHA	37%	20%	32%	63%	128%

PERÚ 1986-2000
SALARIO HORARIO SEGÚN
SEXO Y NIVEL ACADÉMICO
(en soles de 1994)

	SIN EDUCACIÓN	EDUCACIÓN BÁSICA	SECUNDARIA	UNIVERSITARIA
MEJERES	6.52	6.83	9.56	16.32
HOMBRES	7.79	10.22	11.86	23.81
BRECHA	19%	50%	24%	46%

Fuente: Encuesta de Hogares

Las tablas precedentes revelan que hay diferencias considerables en la distribución del salario y en la brecha salarial por género, que dependen de características individuales, analizadas cada una de manera independiente. A continuación, paso a analizar los efectos combinados de esas diferencias en las características del salario, usando el enfoque de emparejamiento y descomposición.

7.3. Componentes de la brecha salarial por género

7.3.1. Descomposición de la brecha salarial - Método de Emparejamiento

Según se recordará de Ñopo (2004), la brecha salarial Δ se puede expresar de la siguiente manera:

$$\Delta = E[Y|M] - E[Y|F] = \Delta_M + \Delta_X + \Delta_0 + \Delta_F.$$

La diferencia salarial media entre hombres y mujeres se puede descomponer en cuatro componentes. Tres de ellos son atribuibles a diferencias de sexo en características individuales observables (Δ_M , Δ_X y Δ_F), mientras que el cuarto componente se atribuye a la existencia de diferencias no-observables por género en cuanto a características determinantes de los salarios y la discriminación sexual en la remuneración (Δ_0):

- Δ_X responde al hecho de que los hombres y las mujeres tienden a exhibir características individuales que se distribuyen de manera distinta a lo largo de sus apoyos comunes. Por ejemplo, en los conjuntos de datos recabados en el Perú, hay tanto hombres como mujeres con nivel académico de maestría y doctorado (Ph.D), pero la proporción de mujeres en esa categoría es considerablemente menor que la de hombres. Δ_X representa la disminución anticipada de salarios entre hombres cuando sus características individuales siguen a la distribución de características femeninas.
- Δ_F obedece al hecho de que hay algunas combinaciones de características femeninas sin contrapartida por el lado masculino. Por ejemplo, en los conjuntos de datos recabados en el Perú hay algunas mujeres casadas, que han migrado, sin formación académica alguna o con muy pocos años de escolaridad, y algunos años de experiencia ocupacional, pero resulta imposible hallar hombres con las mismas combinaciones de características. Δ_F mide el incremento anticipado de salarios que la mujer media experimentará, suponiendo que todas las mujeres alcanzan características comparables a las de los hombres.

7.3. Componentes de la Brecha Salarial

- Δ_M existe porque las mujeres no comparten algunas combinaciones de características de los hombres. Por ejemplo, en los conjuntos de datos recabados en Perú, hay hombres con elevados niveles de formación académica que han estado trabajando durante más de diez años en ocupaciones gerenciales, pero es imposible hallar mujeres con las mismas características. Δ_M mide el incremento anticipado del salario que cabe esperar en el caso del salario femenino, si las mujeres alcanzan esas mismas características individuales de los hombres que, hasta el presente, no han conseguido.
- Δ_0 representa aquello que no cabe explicar en función de esas diferencias en las características observables. Puede obedecer a una combinación de discriminación salarial y a la existencia de diferencias por género en características no observables relacionadas con la productividad.⁶

La figura 7.6 representa la evolución de la brecha salarial por género sin procesar⁷ acompañada de la brecha salarial controlando la edad, formación académica, situación económica y migratoria en el momento del emparejamiento. El gráfico ilustra la evolución de los datos sin procesar y los datos controlados (Δ y Δ_0 , respectivamente).⁸

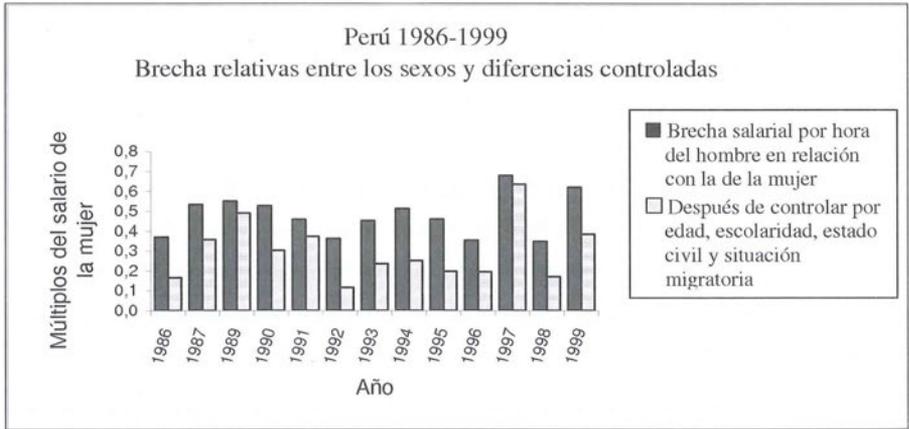
La figura 7.7 representa las brechas salariales medidas en términos relativos (como múltiplos del salario de la mujer) y las descomposiciones en términos de los cuatro componentes introducidos anteriormente. La altura total de cada barra es proporcional a la brecha salarial del año correspondiente. La altura de cada componente es proporcional al valor del componente correspondiente, de tal modo que cada vez que un componente tiene un valor negativo, queda ilustrado por debajo de la línea de cero. El primer conjunto de descomposiciones registrado más adelante se ha calculado empleando diversas combinaciones de variables explicativas, tales como edad (medida en años), formación académica (medida en años de escolaridad), estado civil (una variable dicotómica que toma el valor

⁷ La medida de brecha salarial que empleo es $(\bar{y}^M / \bar{y}^F) - 1$.

⁸ En esta descomposición y las que siguen, omito la que corresponde al año 2000, debido a un problema de codificación en una de las variables explicativas.

zero en el caso de individuos solteros y uno en el caso de casados) y la situación migratoria (una variable dicotómica que distingue entre los individuos nacidos en Lima de los nacidos fuera de la capital).

Figura 7.6: Brecha salarial entre los sexos después de controlar las características observables



Fuente: Encuesta de Hogares

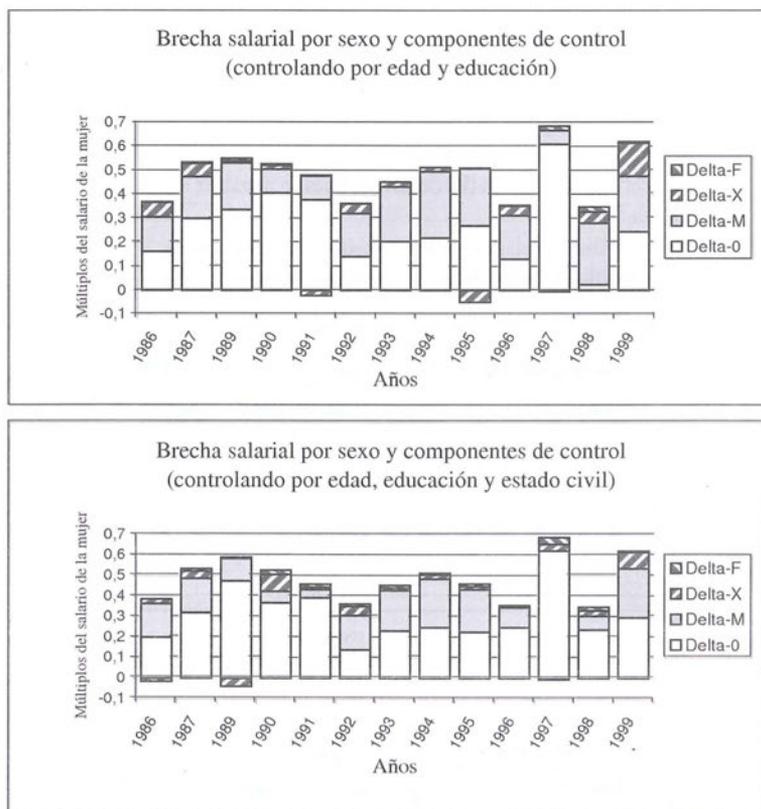
Si bien la brecha salarial por género sin controlar características Δ tiene un valor medio de 45 % durante el período analizado, la brecha controlada Δ_0 oscila alrededor de 28 %.⁹ Así, la combinación de diferencias de sexo que no se ha tomado en cuenta en el análisis (que puede abarcar diferencias observables y no observables) y la discriminación representan una diferencia de 28 % en el salario por hora entre hombres y mujeres. Estas cifras corresponden al conjunto particular de variables especificado anteriormente. Dicho conjunto no incluye las variables que, por lo general, se consideran determinadas de manera endógena en el mercado laboral. Se toman en cuenta las combinaciones de esas variables para las siguientes descomposiciones. En el caso de las descomposiciones de la figura 7.9, tomo en cuenta combinaciones distintas de edad, nivel académico, experiencia ocupacional (medida en años), nivel de informalidad (una variable dicotómica que distingue entre individuos con empleo formal e individuos sin

⁹ Como se demuestra más adelante en el presente trabajo, un intervalo de confianza de 99 % de las diferencias medias no explicadas entre los sexos en cuanto al salario varía de 24,92 % a 31,13 %.

7.3. Componentes de la Brecha Salarial

empleo formal),¹⁰ ocupación (que abarca siete categorías ocupacionales) y el tamaño de la compañía (cinco categorías).

Figura 7.7: Descomposiciones de la brecha salarial para diversos conjuntos de controles (1)



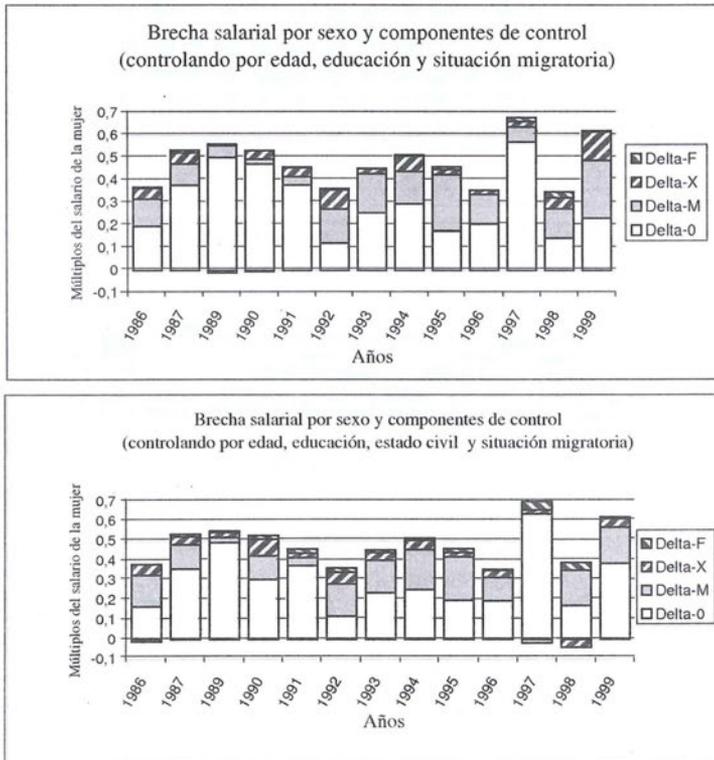
Fuente: Encuestas de Hogares

La brecha salarial no explicada por sexo (Δ_0), después de controlar estas características endógenas, es de aproximadamente 25%, levemente por debajo

¹⁰ Se considera que un empleo es formal si cumple al menos con una de las siguientes condiciones: corresponde al sector público, está registrado en el sistema de Seguridad Social, está afiliado con algún plan privado para la jubilación o está sindicalizado. Los trabajadores domésticos se consideran pertenecientes al sector informal.

del promedio cuando no se toman en cuenta.¹¹ Curiosamente, casi por cada combinación de características que tomé en cuenta en los ejercicios precedentes, la brecha salarial controlada por género muestra dos valores máximos o picos: uno hacia finales de la década de 1980, durante el período de hiperinflación, y el otro a mediados de la década, durante la recesión que siguió a la estabilización de 1990-1994. Además, los valores inferiores de la brecha se hallan alrededor de 1986 y 1993, años en los que el Perú registró un crecimiento considerable del PBI.

Figura 7.8: Descomposiciones de la brecha salarial para diversos conjuntos de controles (2)



Fuente: Encuestas de Hogares

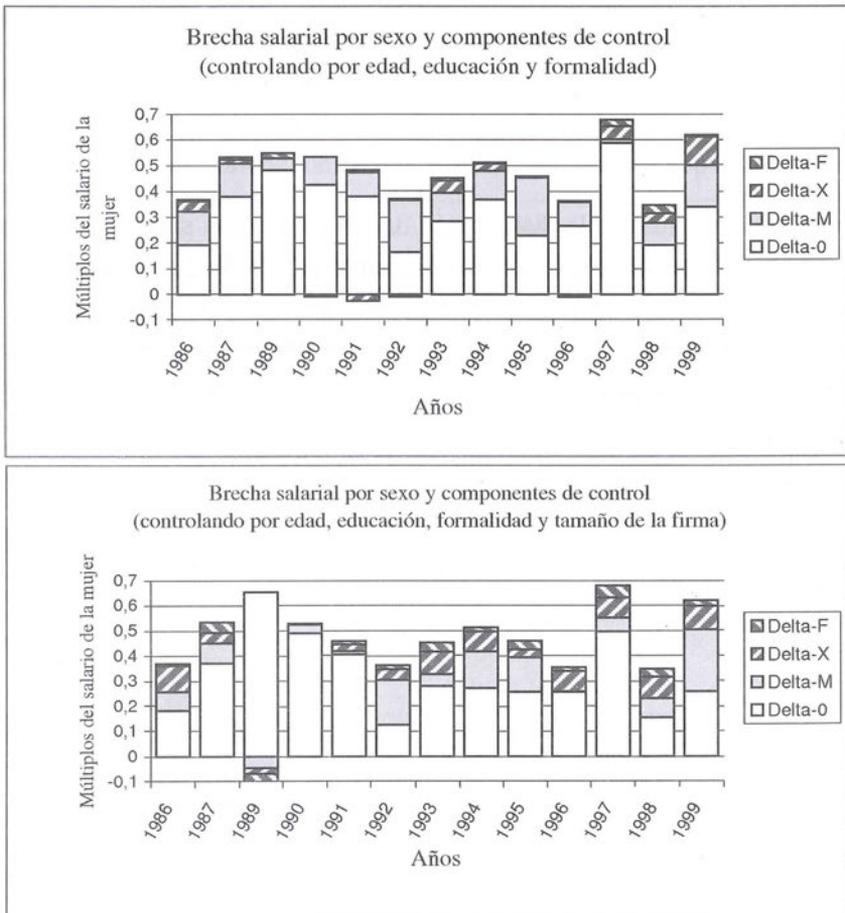
¹¹ Aquí se muestra una hoja de cálculo detallada con los resultados de todas las descomposiciones. También se puede solicitar al autor algunas otras combinaciones de características individuales que no se cubren en esta sección.

7.3. Componentes de la Brecha Salarial

Al analizar el papel que cumplen los cuatro componentes delta en la descomposición, se descubre que los componentes Δ_0 y Δ_M dan cuenta de más de 80% de la brecha salarial durante todos los años para casi todas las combinaciones posibles de características. Tal como se mencionó anteriormente en esta sección, ambos componentes de la brecha se pueden considerar como medidas discriminatorias de efectos considerables o diferencias no explicadas. El primero de ellos se calcula en el mercado laboral y el segundo se determina fuera del mercado laboral (en la adquisición de características valiosas como esas). Si bien lo primero guarda relación con las diferencias salariales, se presume que lo segundo tiene que ver con las diferencias de acceso a combinaciones particulares de características que se recompensan en el mercado laboral.

A continuación, analizo la distribución de las diferencias salariales no explicadas por género que se pueden obtener mediante el método de emparejamiento. Comparo la distribución de salarios de mujeres con la distribución hipotética de salarios de hombres cuando se remuestrea, con el fin de reproducir la distribución de características femeninas.

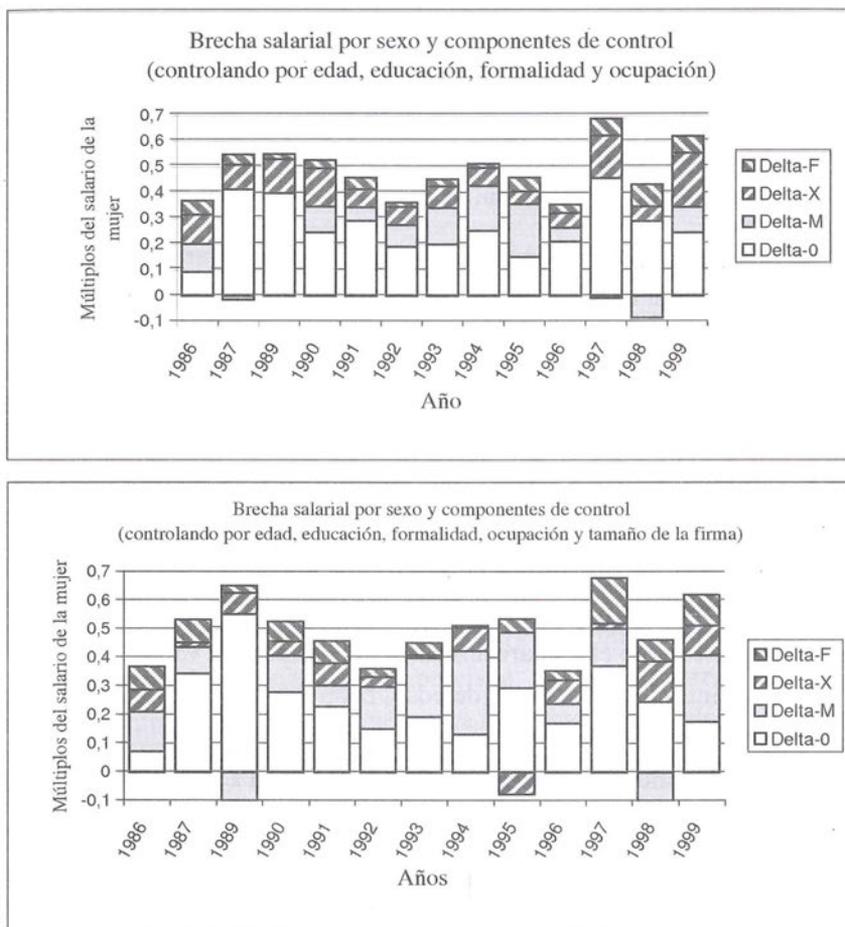
Figura 7.9: Descomposiciones de la brecha salarial para distintos conjuntos de controles (3)



Fuente: Encuestas de Hogares

7.3. Componentes de la Brecha Salarial

Figura 7.10: Descomposiciones de la brecha salarial para diferentes conjuntos de controles (4)



Fuente: Encuestas de Hogares

7.3.2. Diferencias del salario por hora entre muestras emparejadas

Una crítica que se formula usualmente con respecto a la descomposición de Blinder-Oaxaca es que esta resulta informativa únicamente en referencia a las brechas medias y no a la distribución de dichas brechas. Una alternativa ha sido emplear regresiones por quintil en vez de Mínimos Cuadrados Ordinarios, descomponiendo las brechas salariales por género en quintiles distintos de la distribución del término de error de las ecuaciones de ingresos. Este enfoque presenta el mismo problema de las *diferencias por género en los soportes* que resuelve la metodología de emparejamiento.

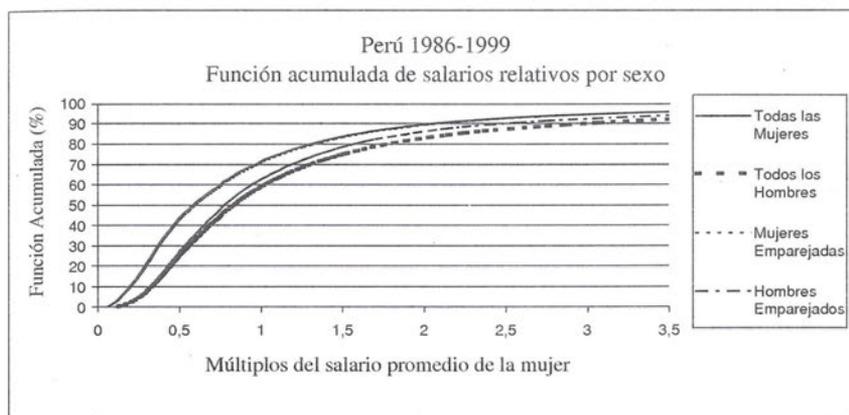
Esta subsección se dedica al análisis de la distribución de los salarios en el caso de los hombres y en el de las mujeres. El objeto del análisis serán las funciones de distribución acumulativa del salario por hora para las muestras original y emparejada de mujeres y hombres.¹²

Al graficar las funciones acumulativas, se puede comprobar que no solo los salarios medios de los hombres son mayores que los salarios medios de las mujeres, sino que además la variable aleatoria *salarios de las mujeres* está dominada estocásticamente por la variable aleatoria *salarios de los hombres*. El resultado es el mismo si la comparación se hace entre las versiones remuestreadas (mediante el emparejamiento) de las mismas variables aleatorias. Aun después de introducir controles de edad, nivel de escolaridad, estado civil y situación migratoria, hay diferencias por género en cuanto al salario que favorecen a los hombres, tal como se puede apreciar en la figura 7.11.

Las diferencias entre las versiones emparejadas de las funciones acumulativas del salario de mujeres y de hombres son menores que las diferencias halladas originalmente en esas funciones acumulativas. Las diferencias por género en cuanto al salario se reducen después del emparejamiento. La distribución emparejada del salario por hora de las mujeres no se diferencia prácticamente de la distribución del salario por hora de todas las mujeres. Ello se debe a que,

¹² Los resultados que se muestran en esta subsección se extrajeron de la subsección 4.2 de Ñopo (2004).

Figura 7.11: Funciones acumuladas del salario relativo por sexo



Fuente: Encuestas de Hogares

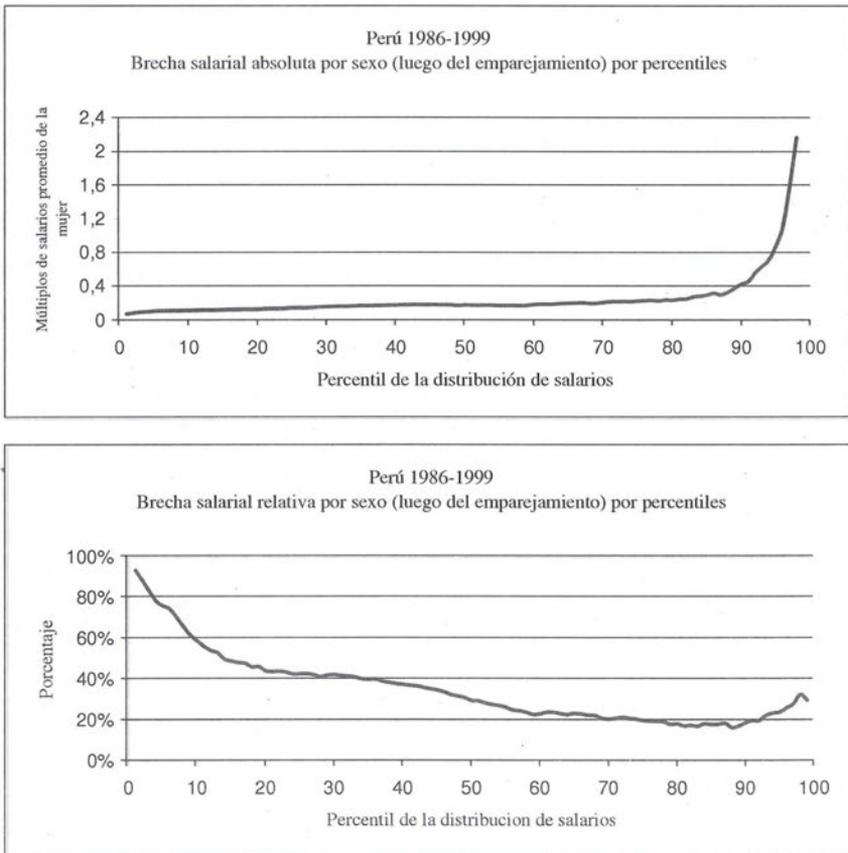
debido a la formulación del caso hipotético, se ha realizado el remuestreo para poder asegurar que la distribución se mantenga sin variación con respecto al apoyo común. Los únicos cambios se deben a las partes que no se solapan del apoyo de características de las mujeres (y, como se ha demostrado anteriormente, el componente Δ_F de la brecha es relativamente pequeño, comparado con los demás componentes). En el caso de los hombres, la situación es distinta. La distribución acumulativa del salario por hora de todos los hombres se diferencia de la distribución emparejada de los hombres (con la nueva ponderación apropiada que se requiere para reproducir la distribución empírica de características individuales de las mujeres), especialmente en el extremo superior de la distribución.

La figura 7.11 sugiere un análisis por quintiles, dado que a cualquier altura (la distancia horizontal entre las dos funciones acumulativas obtenidas después del emparejamiento) mide la brecha salarial por género no explicada correspondiente a ese percentil. La figura 7.12 muestra esas medidas. El gráfico superior muestra que, para los primeros noventa percentiles de la distribución del salario por hora de los hombres y las mujeres, no hay mayores diferencias de salario por hora. La brecha es de poco menos de 0,2 veces el salario medio de las mujeres. Las diferencias más grandes se ubican en el 10% superior de las distribuciones del

7. Brecha salarial por género

salario por hora. En el 99^{no} percentil, la brecha alcanza un máximo en el que el salario medio de los hombres es 2,2 veces el salario medio de las mujeres. El gráfico muestra pruebas de que las diferencias por género en cuanto al salario en los percentiles inferiores de la distribución no contribuyen considerablemente a la medida agregada de las diferencias salariales por género. La brecha salarial media por género en el Perú es una función de las diferencias salariales por género en los percentiles superiores de las distribuciones del salario.

Figura 7.12: Brecha salarial absoluta y relativa entre los sexos por percentil



Fuente: Encuestas de Hogares

Las afirmaciones contenidas en el párrafo anterior ocultan un resultado importante: concretamente, que las diferencias de salario por hora, en los

7.3. Componentes de la Brecha Salarial

percentiles inferiores de las distribuciones del salario, son pequeñas en términos absolutos, pero no en términos relativos. El hombre típico que se halla en el décimo percentil inferior de la distribución gana una prima de 12 % del salario medio de la mujer, comparado con el décimo percentil de las mujeres (aproximadamente 1,40 nuevos soles de 1994). Sin embargo, eso representa una diferencia de 60 %. Cuando se establece la misma comparación con los percentiles más bajos, las diferencias son aun más considerables. La brecha del salario por hora en términos absolutos es de aproximadamente 0,70 nuevos soles de 1994, pero esa cifra representa una diferencia de 94 %. El hombre más pobre gana casi el doble que la mujer más pobre. En el gráfico inferior de la figura 7.12, se muestran esas diferencias porcentuales en cuanto al salario por hora entre los percentiles de las distribuciones del salario.

La brecha salarial relativa por género por percentil de salario muestra una curva con forma aproximada de «U», en la que la brecha mínima, de 18 %, se halla entre aquellos individuos cuyo salario se ubica entre el octavo y el noveno decil. La máxima brecha se halla entre los pobres.

7.3.3. Intervalos de confianza de las diferencias no explicadas de salario por género

El análisis de la distribución de las diferencias salariales no explicadas por género también se puede efectuar mediante el cálculo de los intervalos de confianza. El método $-\delta$ se convierte ahora en la herramienta necesaria. En la figura 7.13, muestro estimadores del error medio y estándar de las diferencias no explicadas de salario de diversos subgrupos de la población. La brecha salarial media no explicada por género, de 28,03 %, tiene un error estándar de 1,89 %. Eso se traduce en un intervalo de confianza de 99 % para las diferencias no explicadas medias de salario que varían de 24,92 % a 31,13 % del salario medio de las mujeres. En cuanto a la situación migratoria, hay indicios de que las diferencias no explicadas de salario son menores entre individuos nacidos fuera de Lima que entre los oriundos de la capital. En cuanto al estado civil, si bien no hay indicios claros de que las diferencias salariales medias no explicadas por género entre individuos casados e individuos solteros sean considerablemente distintas,

hay más indicios de dispersión de dichas diferencias no explicadas entre los casados que entre los solteros. La mayor dispersión de salarios no explicados se puede explicar en términos de otras variables, que se consideran endógenas a un modelo de determinación salarial en el mercado laboral, tales como la experiencia ocupacional, el tiempo de servicio, las horas de trabajo por semana y la ocupación. Es más probable observar una dispersión mayor, en esas variables, entre individuos casados que entre solteros.

Figura 7.13: Errores estándar de la brecha salarial no explicada entre los sexos

Perú 1986-1999		
Brecha salarial por sexo sin explicar según características seleccionadas (Luego de controlar por edad, educación, estado civil y situación migratoria)		
	Media	Error Std.
Todos	0,2803	0,0189
Estado Civil		
Soltero	0,2751	0,0242
Casado	0,2862	0,0289
Situación Migratoria		
Nacido en Lima	0,3067	0,0300
Nacido fuera de Lima	0,2840	0,0269

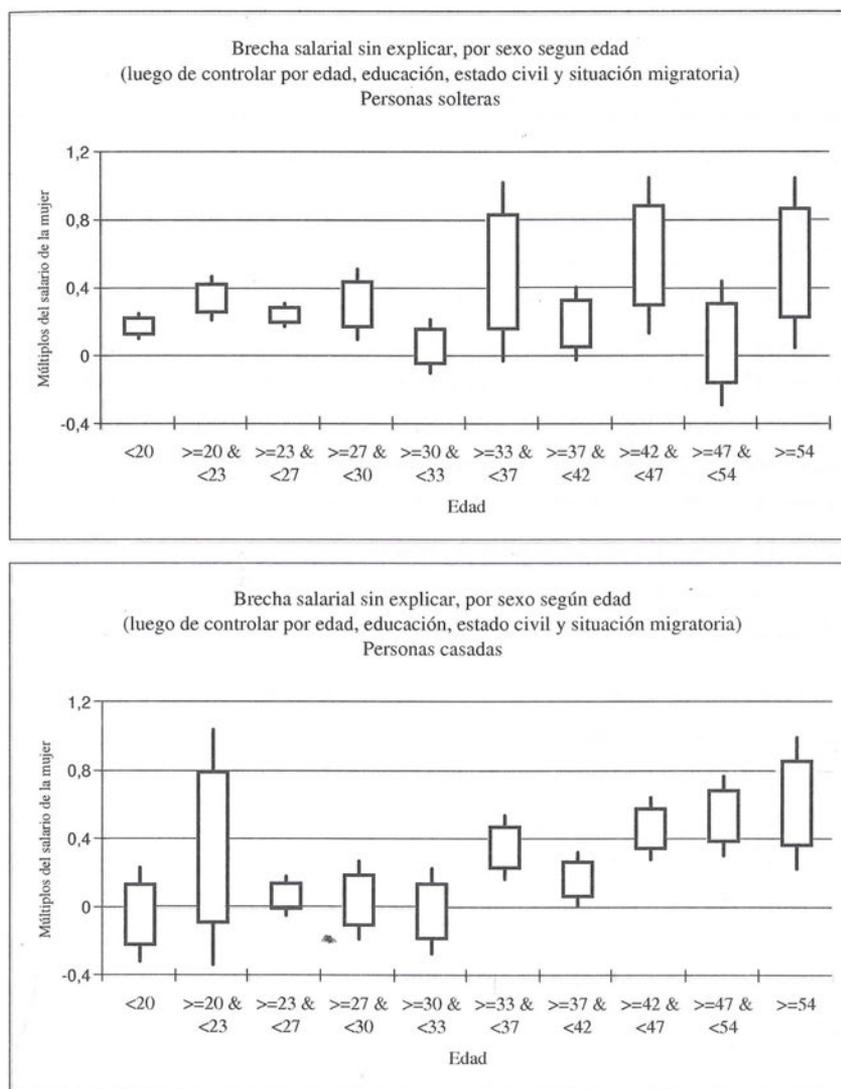
Fuente: Encuestas de Hogares

A continuación presento las desviaciones media y estándar de las diferencias salariales no explicadas condicionadas por la edad y el estado civil (figura 7.14). Para tal fin, empleo diagramas de cuadros y bigotes para representar los intervalos de confianza. Los extremos de los bigotes corresponden a un intervalo de confianza de 99 % para las diferencias salariales medias no explicadas, mientras que los extremos de las cajas corresponden a un intervalo de confianza de 90 %. Los grupos de edad representados aquí corresponden aproximadamente a los deciles de la distribución de edad de la fuerza laboral empleada en Lima.

No hay un patrón claro de la evolución de las diferencias medias no explicadas

7.3. Componentes de la Brecha Salarial

Figura 7.14: Intervalos de confianza de la brecha salarial no explicada entre los sexos (1)



Fuente: Encuestas de Hogares

por edad en el caso de los individuos solteros. En el caso de los miembros casados de la fuerza laboral, hay ciertos indicios de una evolución creciente de esas diferencias no explicadas a lo largo del ciclo vital, pero ese aumento no es significativo de un decil a otro. Sin embargo, aunque las diferencias salariales no explicadas son positivas en el caso de los individuos casados por encima de la edad media (33 años), esas diferencias no son desiguales a 0 en el caso de los que tienen una edad inferior a la media. La dispersión de dichas diferencias no explicadas aumenta a lo largo del ciclo vital de los solteros.

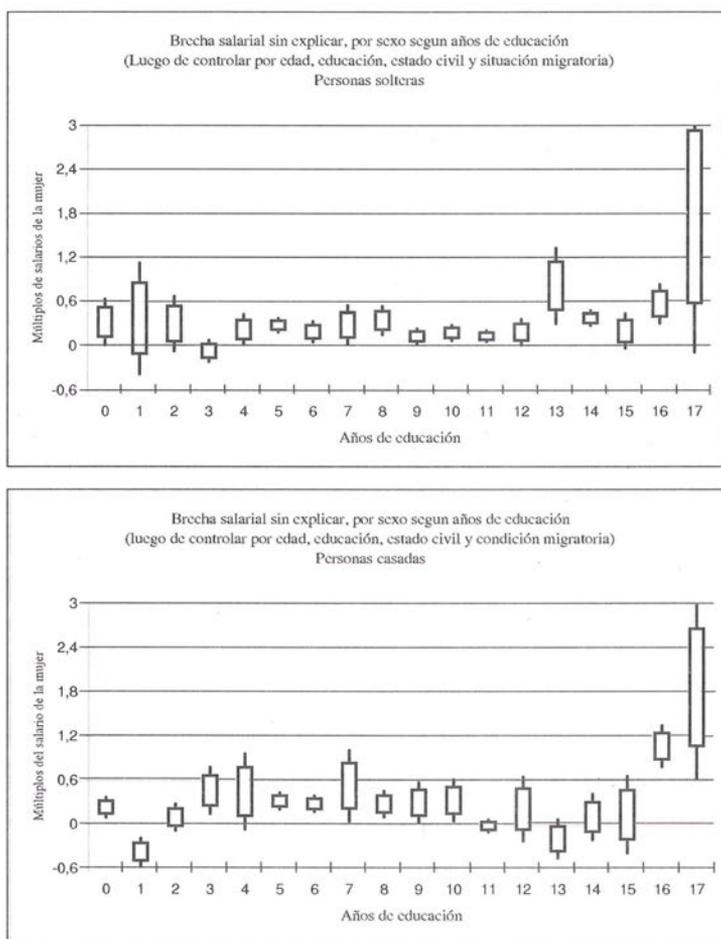
Al analizar las diferencias salariales no explicadas por género según los años de escolaridad, surgen otros aspectos (figura 7.15). Esas diferencias no explicadas son positivas y casi constantes en el caso de los individuos que no han culminado la educación secundaria (menos de once años de escolaridad), especialmente en el caso de los individuos solteros. Además, en el caso de los solteros que han recibido entre 4 y 11 años de escolaridad (que corresponde a 30% de la fuerza laboral empleada), hay una dispersión más pequeña en la brecha salarial no explicada por género. Entre los egresados de la educación secundaria (aquellos que han culminado 11 años de escolaridad y representan 35% de la fuerza laboral total empleada), hay menos indicios de diferencias salariales no explicadas por género, especialmente entre los individuos casados.

Las diferencias no explicadas más considerables se hallan entre los individuos que han culminado más de 11 años de escolaridad y que representan el 30% restante de la fuerza laboral empleada. En primer lugar, en el caso del subconjunto que ha recibido de 1 a 4 años más de escolaridad después de haber concluido la educación secundaria, pero que no culminaron la educación superior (es decir, aquellos que han recibido entre 12 y 15 años de escolaridad), hallo algunos indicios de diferencias salariales no explicadas positivas entre los solteros, mas no entre los casados (se hace notar que la dispersión es mayor entre este último grupo). En el caso de los individuos que han culminado la educación superior (16 años de escolaridad), los indicios de una medida media positiva de las diferencias salariales no explicadas por género de hecho aumenta, especialmente entre los casados. Por último, el grupo educacional con respecto al cual he hallado indicios claros de una brecha salarial no explicada positiva y considerable por género es el formado por aquellos individuos que culminaron la educación superior y

7.3. Componentes de la Brecha Salarial

continuaron estudiando. En el caso de este grupo, las diferencias no explicadas parecen representar más de 50% del salario medio de la mujer en el caso de las mujeres solteras y más de 110% en el caso de las casadas. La dispersión de tales diferencias no explicadas entre ese grupo también es considerablemente mayor que la dispersión hallada en cualquier otro grupo.

Figura 7.15: Intervalos de confianza de la brecha salarial no explicada entre los sexos (2)



Fuente: Encuestas de Hogares

7.4. Conclusiones

Este trabajo halla, mediante el empleo del método de comparaciones emparejadas, nuevos aspectos de las diferencias por género en los mercados laborales peruanos. Aproximadamente uno de cada cuatro trabajadores peruanos exhibe características individuales que no son comparables a las de sus contrapartes del sexo opuesto. Esta forma de diferenciación por género, en características que exhibe el mercado laboral, tiene un impacto evidente en la brecha salarial. Los hombres que exhiben características observables que no tienen contrapartida entre las mujeres perciben salarios mayores que el trabajador medio, mientras que las mujeres que exhiben características observables sin contrapartida perciben salarios más bajos que el trabajador medio.

El hallazgo más interesante es la brecha salarial que persiste después del emparejamiento de hombres y mujeres con las mismas características individuales observables (edad, educación, estado civil y situación migratoria). Entre hombres y mujeres comparables, la brecha salarial es de aproximadamente 28% del salario de las mujeres. Además, el enfoque de emparejamiento nos permite analizar la distribución de dicha medida media. La brecha salarial por género no está distribuida de manera pareja entre la población trabajadora. Se ubica en el extremo más bajo de la distribución de salarios, donde la brecha salarial por género exhibe su mayor magnitud, con lo cual alcanza alrededor de 100%.

Referencias bibliográficas

- [1] Blau, F. y Ferber, M. (1992), *The Economics of Women, Men and Work*, Prentice-Hall: Englewood Cliffs, NJ.
- [2] Blinder, A. (1973), Wage Discrimination: Reduced Form and Structural Estimates, *Journal of Human Resources* 7, 436-55.
- [3] Ñopo, H. (2004), Matching as a Tool to Decompose Wage Gaps, Documento de discusión de IZA No. 981. Por aparecer en *The Review of Economics and Statistics*. MIT Press.
- [4] Oaxaca, R. (1973), Male-Female Wage Differentials in Urban Labor Market, *International Economic Review* 14, 693-709.
- [5] Saavedra, J. (2000), La Flexibilización del Mercado Laboral, en Abusada, R. (ed.) *La Reforma Incompleta: Rescatando los Noventa*, Universidad del Pacífico: Lima.
- [6] Saavedra, J. y Torero, M. (2000), Labor Market Reforms and Their Impact on Formal Labor Demand and Job Market Turnover: The Case of Peru, Banco Interamericano de Desarrollo, Departamento de Investigación, Documento de trabajo No. 394 de la Red de Investigación: Washington D.C.

Tercera parte

Juegos y elección colectiva

8. La topología de las correspondencias y el Equilibrio de Nash

*Elvio Accinelli*¹

8.1. Introducción

El objeto de este trabajo es el de presentar, de forma unificada y lo más general posible, el estudio de las correspondencias; es decir, de las funciones de puntos a conjuntos o —como las llaman a veces— funciones multiformes, en el marco de lo necesario para demostrar el teorema de existencia del Equilibrio de Nash.

Como es bien sabido, no para cualquier tipo de juego normal existe el Equilibrio de Nash. Las condiciones que aseguran la existencia de tal equilibrio son objeto de importantes trabajos. Presentaremos acá un caso simple, que no obstante requiere del estudio de las correspondencias, y en particular del Teorema de Punto Fijo de Kakutani. El esquema para la demostración es básicamente el siguiente:

¹ Profesor Titular, Programa de Posgrado en Ciencias Económicas, Universidad Autónoma Metropolitana, México. Correo electrónico: elvio@correo.xoc.uam.mx.

Deseo agradecer a César Martinelli y a Loretta Gasco por la invitación a participar en el homenaje a Ramón García-Cobian, y a este por todas las atenciones de las que me ha hecho objeto durante mis muy placenteras estadias en el Perú. Comentarios sobre el trabajo son bien recibidos.

- Asumimos que el conjunto de estrategias posibles para cada jugador es compacto en el espacio de estrategias posibles. Existe una cantidad n finita de jugadores.
- Se define la correspondencia *mejor respuesta* del jugador i -ésimo a la elección estratégica de los restantes, y que será denotada como $B_i : \prod_{j \neq i} A_j \Rightarrow A_i$. Como es habitual, $\prod_{i=1}^n X_i$ describe el producto cartesiano de los n conjuntos X_i .
- Se muestra que el Equilibrio de Nash es un punto fijo para la correspondencia producto $B = \prod_i B_i$, donde $B : \prod_i A_i \longrightarrow \times_i A_i$.
- Se muestra que la correspondencia definida en el ítem anterior es compacta y convexa.
- El Teorema de Punto Fijo de Kakutani asegura ahora la existencia del Equilibrio de Nash.

Para lograr este objetivo, comenzaremos analizando el concepto de correspondencias en espacios topológicos; demostraremos luego el teorema del máximo de Berge; y, finalmente, a partir del Teorema de Kakutani, probaremos la existencia del Equilibrio de Nash para juegos normales. No obstante la generalidad que se pretende dar a estas notas, el lector podría seguirlas sustituyendo el concepto de espacio topológico por el de R^n , con la topología habitual, y las redes por sucesiones.

Las referencias básicas son Aliprantis y Border (1994), y Kelley (1955) para correspondencias y espacios topológicos, y Fudenberg y Tirole (1991) para el concepto de Equilibrio de Nash y sus aplicaciones.

8.2. Correspondencias, primeras definiciones

Entendemos por espacio topológico (e.t.) un conjunto arbitrario en el que hay definida una topología. Esta es una familia de subconjuntos a la cual pertenece el conjunto total y el vacío, y que incluye las intersecciones finitas y las uniones arbitrarias de sus elementos, a los que llamamos conjuntos abiertos. Llamamos conjuntos cerrados del espacio a los complementos de los conjuntos abiertos.

A continuación, definiremos correspondencia.

8.2. Correspondencias, primeras definiciones

Definición 8.1. Sean X e Y espacios topológicos. Denotaremos por $\phi : X \rightrightarrows Y$ a la aplicación que a cada punto $x \in X$ hace corresponder el subconjunto $\phi(x) \subseteq Y$. Una aplicación ϕ de este tipo será llamada correspondencia entre X e Y .

Una correspondencia es *cerrada* si $\phi(x)$ es cerrado para cada x en su dominio. Análogamente, será *abierta*, *convexa*, etcétera.

Como puede verse, podríamos haber definido el concepto de correspondencia entre los e.t. X e Y como una función $\phi : X \rightarrow 2^Y$, definida por $x \rightarrow \phi(x)$ (entendiendo como 2^Y el conjunto potencia de Y). Si bien son equivalentes ambas definiciones, usaremos la anterior.

Definición 8.2. Llamaremos *grafo de la correspondencia* ϕ al conjunto

$$\mathcal{G}_\phi = \{(x, y) \in X \times Y : y \in \phi(x)\}.$$

Podemos identificar a ϕ con el subconjunto \mathcal{G}_ϕ de $X \times Y$, de forma que

$$\phi(x) = \{y \in Y : (x, y) \in \mathcal{G}_\phi\}.$$

Sea $A \subset X$, denotaremos como $\phi(A) = \bigcup_{x \in A} \phi(x)$.

Como en el estudio de las funciones, podemos definir para correspondencias el concepto de correspondencia inversa. No obstante, es posible hacer dos definiciones diferentes de este concepto.

Definición 8.3. Sea $\phi : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia. Definimos entonces

- a) inversa fuerte o superior $\phi^u(A) = \{x \in X : \phi(x) \subset A\}$,
- b) inversa débil o inferior $\phi^l(A) = \{x \in X : \phi(x) \cap A \neq \emptyset\}$.

Para *singletons*, usaremos la notación $\phi^{-1}(y) = \{x \in X : y = \phi(x)\} = \phi^l(\{y\})$.

El lector puede verificar que $\phi^u(A) \subseteq \phi^l(A)$.

Las siguientes igualdades se verifican:

- (i) $\phi^u(A) = [\phi^l(A^c)]^c$
- (ii) $\phi^l(A) = [\phi^u(A^c)]^c$
- (iii) $\phi^u(\cap_{i \in I} A_i) = \cap_{i \in I} \phi^u(A_i)$
- (iv) $\phi^l(\cup_{i \in I} A_i) = \cap_{i \in I} \phi^l(A_i)$

Dado el conjunto $A \subset X$, denotamos por $A^c = \{x \in X : x \notin A\} = X - A$.

Sea $A \subset X$, decimos que B es entorno de A si existe V abierto en X , tal que $A \subseteq V \subseteq B$. Análogamente decimos que U es entorno del punto $x \in X$ si existe V abierto en X , tal que $x \in V \subseteq U$. Cualquier V abierto para el que $A \subseteq V$ se llama *entorno abierto de A* .

8.3. Continuidad de correspondencias

En esta sección introduciremos el concepto de continuidad de correspondencias. El concepto es, de alguna manera, semejante al conocido para funciones. Además, veremos la relación existente entre ambos en el caso particular $\phi(x) = \{y\}$, es decir, cuando una correspondencia es en definitiva una función.

Definición 8.4. Sea $\phi : X \Rightarrow Y$ una correspondencia entre los e.t. X e Y . Decimos que es

- a) hemicontinua superior (hcs) en $x \in X$ si para todo entorno abierto U de $\phi(x)$ se verifica que $\phi^u(U) \subseteq X$ es un entorno de x ;
- b) hemicontinua inferior (hci) en $x \in X$ si para todo entorno abierto U tal $\phi(x) \cap U \neq \emptyset$ se verifica que $\phi^l(U) \subseteq X$ es un entorno de x ;
- c) continua cuando es hemicontinua superior e inferior a la vez.

Se dice que una correspondencia es h.c.s. o h.c.i. o continua, si lo es para cada punto en el dominio.

Ejemplo 8.1. Tres ejemplos clásicos que ilustran estas definiciones son los siguientes:

- (i) $\phi : [0, 1] \Rightarrow R$ definida por $\phi(x) = \begin{cases} [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] & \text{si } x < 1/2 \\ [0, 1] & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$
- (ii) $\psi : [0, 1] \Rightarrow R$ definida por $\psi(x) = \begin{cases} [0, 1] & \text{si } x < 1/2 \\ [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$
- (iii) $\gamma : [0, 1] \Rightarrow R$ definida por $\gamma(x) = [0, x]$.

Mientras que la primera es h.c.s., pero no es h.c.i. en $x = 1/2$, la segunda es h.c.i. pero no es h.c.s. en $x = 1$. La tercera correspondencia es continua.

Los siguientes teoremas relacionan el concepto de hemicontinuidad con el de redes² (o sucesiones si pensamos en espacios topológicos con base numerable) y hacen más intuitivo dicho concepto. A menos de que se diga lo contrario, en lo sucesivo X e Y representan e.t.

Lema 8.1. Sea $\phi : X \Rightarrow Y$ una correspondencia con grafo cerrado, entonces es cerrada. El recíproco de este teorema es falso.

Demostración: sea $y_\alpha \in \phi(x)$. Supongamos que $y_\alpha \rightarrow y$, por lo que $(x, y_\alpha) \rightarrow (x, y)$; por ser el grafo cerrado, se tiene que $y \in \phi(x)$.

Como contraejemplo del recíproco, considere la correspondencia $\psi : [0, 1] \Rightarrow [0, 1]$ definida por

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

²Recordamos que una red en un espacio X es una función $x : A \rightarrow X$, donde A , el conjunto de índices, es un conjunto dirigido, o sea, en el que está definida una relación binaria \mathcal{R} , reflexiva y transitiva, tal que para dos elementos cualesquiera α y β en A existe un tercero γ , posiblemente uno de ellos, que está relacionado con ambos, $(\gamma, \alpha) \in \mathcal{R}$ y $(\gamma, \beta) \in \mathcal{R}$. Denotaremos en general la relación $(\gamma, \beta) \in \mathcal{R}$ como $\alpha \succeq \beta$, dando idea de la relación de precedencia. Decimos que la red $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ converge a x (lo que se denota como $x_\alpha \rightarrow x$), si y solo si, para cada entorno V de x , existe α_0 , tal que para todo $(\alpha, \alpha_0) \in \mathcal{R}$, $x_\alpha \in V$ (equivalentemente: $\alpha \succeq \alpha_0$).

Se tiene que

$$\mathcal{G}_\phi = \{(x, y) \in X \times Y : y \in \phi(x)\} = \{0, 1\} \cup \{(0, x) \mid 0 < x \leq 1\}$$

no es cerrado; no obstante, la correspondencia es cerrada.

Vale el siguiente teorema, cuya demostración puede encontrarse en Aliprantis y Border (1994).

Teorema 8.1. Una correspondencia cerrada con rango compacto y Hausdorff³ tiene el grafo cerrado si y solamente si es h.s.c.

La compacidad del rango es imprescindible, como lo muestra el ejemplo 8.2.

Ejemplo 8.2. $\psi : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(x) = \begin{cases} \{\frac{1}{x}\} & \text{si } x \neq 0 \\ \{0\} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

tiene el grafo cerrado (y es compacta), pero no es h.c.s. en cero.

Teorema 8.2. Sea $\phi : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia para la que se verifica el siguiente enunciado: si $x_\alpha \rightarrow x$, y si $y_\alpha \in \phi(x_\alpha) \forall \alpha$, entonces la red (sucesión) y_α tiene un punto límite en $\phi(x)$. Entonces, ϕ es h.c.s. en x .

Si ϕ es cerrada y h.c.s. en x , y si Y es Hausdorff y compacto, entonces ϕ satisface el enunciado anterior.

Demostración: si ϕ no fuera h.c.s., en x , entonces existe un entorno U de $\phi(x)$, tal que para todo V entorno de x , existe $x_v \in V$ e $y_v \in \phi(x_v)$, tal que $y_v \notin U$. Considere ahora la red $\{x_v\}$, la cual converge para x . Luego, como se cumple el enunciado, $y_v \rightarrow y \in \phi(x)$. Por lo tanto, a partir de cierto v_0 , se debe verificar que $y_v \in U$.

Sea ϕ h.c.s. en $x \in X$, consideremos las redes, $x_v \rightarrow x$ e $y_v \in \phi(x_v)$. Como Y es compacto, existe una subred, $y_{v_\alpha} \rightarrow y \in Y$. Por ser Y compacto y ϕ una

³Un e.t. es Hausdorff si, dados dos puntos x e y , existen entornos V_x y V_y de x e y , respectivamente, disjuntos.

8.3. Continuidad de correspondencias

h.c.s., se sigue que es cerrada; luego $\phi(x)$ es cerrado, por lo que $y \in \phi(x)$. Como resultado, se verifica el enunciado.⁴

Teorema 8.3. Una correspondencia $\phi : X \Longrightarrow Y$ es h.c.i. si y solamente si se verifica la siguiente propiedad:

si $x_\alpha \rightarrow x$, entonces para cada $y \in \phi(x)$ existe una subred de índices α_λ y elementos $y_\lambda \in \phi(x_{\alpha_\lambda})$ para cada λ , tal que $y_\lambda \rightarrow y$.

Demostración: sea ϕ h.c.i. en x . Supongamos que $y \in \phi(x)$. Representaremos por \mathcal{U}_y y \mathcal{U}_x el sistema de entornos de y y x respectivamente. Sea \mathcal{G}^{α_0} un conjunto abierto en Y tal que $\mathcal{G}^{\alpha_0} \cap \phi(x) \neq \emptyset$. Por ser ϕ h.c.i., existe $U^{\alpha_0} \in \mathcal{U}_x$, tal que $U_x^{\alpha_0} \subset \phi^l(U)$ y para el que existe $x_\alpha \in U_x^{\alpha_0}$. Consideremos un conjunto dirigido A por la relación \succeq y una familia de conjuntos \mathcal{G}^α con $\alpha \in A$, tales que $y \in \mathcal{G}^\alpha \forall \alpha \in A$, elegidos de forma tal que si $(\alpha_i, \alpha_j) \in \succeq$; equivalentemente, si $\alpha_i \succeq \alpha_j$, entonces $\mathcal{G}^{\alpha_j} \subset \mathcal{G}^{\alpha_i}$. De esta forma, como $x_\alpha \rightarrow x$, podemos elegir una subred x_{α_λ} y una red $y_\lambda \in \phi(x_{\alpha_\lambda}) \cap \mathcal{G}^{\alpha_i}$ que claramente converge para y .

Recíprocamente, supongamos que ϕ no es h.c.i. en x . En este caso, existe V subconjunto abierto de Y para el que $V \cap \phi(x) \neq \emptyset$, pero tal que $\phi^l(V)$ no es entorno de x . Es decir, en cada entorno \mathcal{U}_x existe algún x_α , tal que $\phi(x_\alpha) \cap V = \emptyset$. Elijamos ahora $y \in \phi(x) \cap V$ y una red $\{x_\alpha\}$ entre los elementos anteriormente seleccionados. A partir de la propiedad supuesta, encontramos una subred $x_{\alpha'}$ y la correspondiente red formada por $y_{\alpha'} \in \phi(x_{\alpha'})$ tal que $y_{\alpha'} \rightarrow y$, lo que contradice el hecho de que $\phi(x_\alpha) \cap V = \emptyset$ para todo x_α .

Teorema 8.4. Si una correspondencia $\phi : X \Longrightarrow Y$ es función y es hemicontinua inferior como correspondencia, entonces como función es continua.

Demostración: es una aplicación inmediata del teorema 8.3.

⁴Si el lector prefiere una demostración que no haga uso del teorema del grafo cerrado, puede proceder como se señala a continuación. Suponga que se verifique que $y \notin \phi(x)$ y que Y es Hausdorff. Si $\phi(x)$ es cerrada, existirían entornos V_y de y y $V_{\phi(x)}$ de $\phi(x)$ disjuntos. (Recuerde que, en un e.t. Hausdorff, dados dos conjuntos cerrados A y B , existen entornos U_A y U_B de A y B disjuntos). Entonces, por la h.c.s., para todo v_α , a partir de v_0 , $x_{v_\alpha} \in \phi^u(V_{\phi(x)})$. Así, $y_{v_\alpha} \in \phi(x_{v_\alpha}) \subseteq V_{\phi(x)} \subseteq (V_y)^c$; luego $y \in V_y^c$, lo que es absurdo.

Presentaremos, a continuación, la correspondencia producto obtenida como el producto cartesianos de correspondencias.

Definición 8.5. Considere las correspondencias $\phi_i : X_i \rightrightarrows Y_i$, $i \in I$, donde I es un conjunto de índices. Definimos la correspondencia producto (o el producto de correspondencias) como la correspondencia $\Pi_{i \in I} \phi_i : \Pi_{i \in I} X_i \rightrightarrows \Pi_{i \in I} Y_i$, definida por $(\Pi_{i \in I} \phi_i)(x) = \Pi_{i \in I} \phi_i(x_i)$.

Recordamos que el símbolo $\Pi_i X_i$ hace referencia al producto cartesiano de los conjuntos X_i .

Teorema 8.5. Se verifican las siguientes dos afirmaciones:

- (i) el producto de una familia de correspondencias h.c.s. con valores compactos es una correspondencia h.c.s. compacta;
- (ii) el producto de una familia finita de correspondencias h.c.s. es una correspondencia h.c.s.

Demostraciones:

Demostración de (i): haremos la demostración para el caso de que el conjunto de índices I sea finito. En otro caso, usando el teorema de Tychonov, por ser $\Pi_{i \in I} \phi_i(x_0)$ compacto,⁵ podemos reducir la demostración al caso finito.⁶ Sea $x_0 \in \Pi_{i \in I} X_i$. Sea G abierto en $\Pi_{i \in I} Y_i$, tal que $\phi(x_0) = \Pi_{i \in I} \phi_i(x_{i0}) \subset G$. Por ser ϕ_i compacta, existen V_i conjuntos abiertos en X_i para todo $i \in I$, tales que $\phi(x_0) \subset \Pi_{i \in I} V_i \subset G$. Sea $W_i = \phi_i^{-1}(V_i)$ $i \in I$. Se sigue entonces que $W = \Pi_{i \in I} W_i$ es entorno de x_0 . Finalmente, $\phi(x) \subset G$ para todo $x \in W$.

Demostración de (ii): usando la hemicontinuidad de cada una de las ϕ_i , mostramos que, para todo $G \subset X \times Y$ abierto, tal que $G \cup \phi(x_0) \neq \emptyset$, es posible encontrar conjuntos abiertos $V_i \subset X_i$ abiertos, tales que $V_i \cap \phi_i(x_i) \neq \emptyset$, tales que

⁵Un conjunto es compacto si y solamente si de todo subcubrimiento abierto podemos extraer un subcubrimiento finito.

⁶La demostración se basa en que, por ser $\Pi_{i \in I} \phi_i(x_0)$ compacto, podemos encontrar un subcubrimiento finito formado por abietos del tipo $W_i \times V_i$, y trabajar luego como en el caso en que I es finito.

$\Pi_{i \in I} \subset G$. (Acá I es un conjunto finito de índices). Luego $W = \Pi_{i \in I} \phi_i^l(V_i)$ es un entorno de x_0 . Luego, $\phi^l(G)$ es entorno de x_0 .

El siguiente es el teorema clave de este trabajo. Se trata del Teorema de Kakutani.

Teorema 8.6. Sea $S \subset R^n$ compacto y convexo, y $\phi : S \rightarrow S$ una correspondencia h.c.s. compacta y convexa. Entonces, existe un punto fijo para la correspondencia.⁷

Recordamos que x es un punto fijo para la correspondencia ϕ si $x \in \phi(x)$.

8.4. Teorema del Máximo

En esta sección demostraremos el Teorema del Máximo. Antes recordaremos someramente los conceptos de función semicontinua superior (s.c.s.) y semicontinua inferior (s.c.i.).

Definición 8.6. Sea $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ una función definida en un e.t., decimos que es

- a) semicontinua inferior si, para cada $c \in R$, se verifica que el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq c\}$ es cerrado (equivalentemente $\{x \in X : f(x) > c\}$ es abierto);
- b) semicontinua superior si, para cada $c \in R$, se verifica que el conjunto $\{x \in X : f(x) \geq c\}$ es cerrado (equivalentemente $\{x \in X : f(x) < c\}$ es abierto).

A continuación definiremos *límite superior* (lím sup) y *límite inferior* (lím inf), conceptos que usaremos para dar dos definiciones equivalentes a las anteriores para las semicontinuidades superior e inferior.

Definición 8.7. Definiremos, primero, lím inf y a continuación lím sup :

⁷Para la demostración de este teorema, véase por ejemplo Biaiochi y Capelo (1989).

$$(i) \liminf_{\alpha} f(x_{\alpha}) = \sup_{\alpha} [\inf_{\beta > \alpha} f(x_{\beta})]$$

$$(ii) \limsup_{\alpha} f(x_{\alpha}) = \inf_{\alpha} [\sup_{\beta > \alpha} f(x_{\beta})]$$

Los símbolos \inf_{α} y \sup_{α} denotan, como es habitual, el supremo y el ínfimo en las variables o conjuntos indicados, es decir, la menor de las cotas superiores y la mayor de las cotas inferiores respectivamente.

Teorema 8.7. Sea $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$. Entonces f es s.c.i. (s.c.s.) si y solamente si: $x_{\alpha} \rightarrow x$ implica $\liminf_{\alpha} f(x_{\alpha}) \geq f(x)$ ($\limsup_{\alpha} f(x_{\alpha}) \leq f(x)$).

Demostración: sea f s.c.i. Considere $x_{\alpha} \rightarrow x$. Si $f(x) = -\infty$, el teorema está probado. En otro caso, existe $c \in R : f(x) > c$. Por ser f s.c.i, el conjunto $V_c = \{y \in X : f(y) > c\}$ es abierto y es no vacío, pues $x \in V_c$. Luego existe α_0 , tal que para todo $\beta \succeq \alpha_0$ $x_{\beta} \in V_c$, por lo que $f(x_{\beta}) > c$. Se tiene entonces que $\inf_{\beta > \alpha_0} [f(x_{\beta})] \geq c$, por lo que, con más razón, $\sup_{\alpha_0} \{\inf_{\beta > \alpha_0} [f(x_{\beta})]\} \geq c$. Siendo que esta desigualdad se obtiene para todo $c < f(x)$, se sigue que es cierta para $f(x)$.

Recíprocamente, sea $x_{\alpha} \rightarrow x$ y sea $\liminf [f(x_{\alpha})] \geq f(x)$. Consideremos $c \in R$ y sea $F_c = \{x \in X : f(x) \leq c\}$. Veremos que F_c es cerrado: para esto, consideramos $y_{\alpha} \in F_c$, tal que $y_{\alpha} \rightarrow y$. Se tiene entonces que $f(y) \leq \liminf [f(x_{\alpha})] \leq c$. Por lo tanto, $y \in F_c$.

El lector se ejercitará mostrando la equivalencia entre ambas definiciones para el caso s.c.s.

A continuación, mostraremos el Teorema de Weirstrass para funciones s.c.i. y s.c.s.

Teorema 8.8. Una función real $f : X \rightarrow R$ s.c.i. (s.c.s.) definida en un conjunto compacto alcanza su mínimo (máximo) y el conjunto de los puntos minimizadores (maximizadores) de X es compacto.

Demostración: sea X compacto y sea $c \in f(X)$,⁸ definimos

$$M_c = \{x \in X : f(x) \leq c\}.$$

⁸Por $f(X)$ representamos la imagen de X por f o, lo que es lo mismo, el rango de f .

Por ser f s.c.i., M_c es cerrado. Obsérvese que la intersección de cualquier cantidad finita de elementos de la familia de conjuntos $\{M_c, c \in f(X)\}$ es no-vacía. Luego, por ser X compacto, la intersección de todos los elementos de la familia es no-vacía.⁹ Existe entonces $x \in X : x \in \bigcap_{c \in f(X)} M_c$. El lector puede convencerse de que este es, precisamente, el conjunto de los minimizadores, con lo cual hemos probado que existe al menos un minimizador. La compacidad de este conjunto se sigue del hecho de que, en un compacto, un cerrado es en sí mismo, compacto, y que la intersección arbitraria de cerrados es un cerrado.

El lector demostrará el teorema análogo para funciones s.c.s.

Para la demostración del Teorema del Máximo, haremos uso de los siguientes dos lemas.

Lema 8.2. Sea $\phi : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia h.c.i. y sea $f : X \times Y \rightarrow R$ una función s.c.i., definimos la función $m : X \rightarrow Y$ como

$$m(x) = \sup_{y \in \phi(x)} f(x, y); \quad (8.8)$$

entonces, m es s.c.i.

Demostración: hay que probar que $M_\alpha = \{x \in X : m(x) > \alpha\}$. Sea $x_0 \in M_\alpha$, existe entonces $y_0 \in \phi(x_0)$, tal que $f(x_0, y_0) \geq \alpha$. Siendo f s.c.i., el conjunto $F_\alpha = \{(x, y) \in X \times Y : f(x, y) > \alpha\}$ es abierto en $X \times Y$; por lo tanto, es un entorno (x_0, y_0) . Existen $U_{x_0} \subseteq X$ y $V_{y_0} \subseteq Y$ entornos de x_0 e y_0 respectivamente, tales que $U_{x_0} \times V_{y_0} \in F_\alpha$. Por la hemicontinuidad inferior de ϕ , tenemos que $N_{x_0} = \phi^l(V_{y_0}) \cap U_{x_0}$ es un entorno abierto de x_0 . Por ello, para todo $x \in N_{x_0}$, se tiene que existe $y \in \phi(x) \cap V_{y_0}$, tal que $(x, y) \in N_{x_0} \times V_{y_0} \subseteq F_\alpha$; esto significa que, para todo $x \in N_{x_0}$, se tiene $m(x) \geq \alpha$ y, por lo tanto, $N_{x_0} \subseteq M_\alpha$; luego M_α es entorno de cada uno de sus puntos.

Lema 8.3. Sea $\phi : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia h.c.s. y sea $f : X \times Y \rightarrow R$ una función s.c.s.. Definimos la función $m : X \rightarrow Y$ como

$$m(x) = \sup_{y \in \phi(x)} f(x, y); \quad (8.9)$$

⁹La compacidad de un conjunto X es equivalente a la afirmación de que, dada cualquier familia de subconjuntos cerrados, si toda selección finita tiene intersección no-vacía, entonces la intersección de todos los integrantes de la familia es no vacía. véase, por ejemplo, Kelly (1955).

entonces, m es s.c.s.

Demostración: para probar que m es s.c.s., debemos probar que, para cada $\alpha \in R$, el subconjunto de X , $N_\alpha = \{x : m(x) < \alpha\}$ es abierto. Sea $x_0 \in N_\alpha$, entonces, para cada $y \in \phi(x_0)$, se verifica que $f(x_0, y) \in W_\alpha = \{(x, y) \in X \times Y : f(x, y) < \alpha\}$. La semicontinuidad superior de f asegura que este conjunto es abierto en $X \times Y$. Consecuentemente, podemos definir, para cada $y \in \phi(x_0)$, un entorno de dicho punto V_y y para x_0 un entorno suyo U_{x_0y} , tal que $U_{x_0y} \times V_y \subseteq W_\alpha$. La familia de entorno $V_y, y \in \phi(x_0)$ es un cubrimiento de $\phi(x_0)$. Siendo la correspondencia compacta, es posible encontrar un subcubrimiento finito: $V_{y_i} \ i \in \{1, 2, \dots, n\}$ para $\phi(x_0)$. Es decir, $\phi(x_0) \subseteq \cup_{i=1}^n V_{y_i} = V$. Por otra parte, $\cap_{i=1}^n U_{x_0y_i} = U$ es un entorno de x_0 . Los subconjuntos $U_{x_0y_i} \times V_{y_i}$ de $X \times Y$ son entornos de $(x_0, y_i) \ \forall i = 1, 2, \dots, n$. Se sigue, de la hemicontinuidad superior de ϕ , que $N_{x_0} = U \cap \phi^u(V)$ es un entorno de x_0 , tal que para todo $x \in N_{x_0}$ existe $y \in \phi(x)$, con $(x, y) : f(x, y) < \alpha$; se concluye entonces que $m(x) < \alpha \ \forall x \in N_{x_0}$.

El siguiente teorema, conocido como Teorema del Máximo de Berge, es de gran utilidad en diferentes áreas de las matemáticas aplicadas y, en particular, como veremos en la sección siguiente, en la Teoría de Juegos.

Teorema 8.9. Sea $\phi : X \implies Y$ una correspondencia continua, con valores compactos, y sea $f : X \times Y \longrightarrow R$ una función continua. Definimos las siguientes dos funciones: $m : X \longrightarrow Y$ como

$$m(x) = \sup_{y \in \phi(x)} f(x, y), \quad (8.10)$$

y $\mu : X \longrightarrow Y$ como

$$\mu(x) = \{y \in \phi(x) : f(x, y) = m(x)\}. \quad (8.11)$$

Entonces, m es una función continua y μ es una correspondencia h.c.s. con valores compactos.

Demostración: la continuidad de la función m es consecuencia inmediata de los lemas 8.2. y 8.3. Veamos entonces la hemicontinuidad superior de μ y su

compacidad. Para esto, consideremos $x_\alpha \rightarrow x$ e $y_\alpha \in \mu(x_\alpha)$; debemos probar que y_α tiene un punto límite $y \in \mu(x)$. Como $y_\alpha \in \mu(x_\alpha)$, se sigue que $f(x_\alpha, y_\alpha) \geq f(x_\alpha, z) \forall z \in \phi(x)$. Siendo ϕ continua para $z \in \phi(x)$, podemos encontrar una red $\{z_\alpha\}$ con $z_\alpha \in \phi(x_\alpha)$ con $x_\alpha \rightarrow x$, tal que existe una subred $z_{\alpha'} \rightarrow z$ (véase teorema 8.3.). Se verifica la siguiente desigualdad: $f(x_\alpha, z_\alpha) \leq f(x_\alpha, y_\alpha)$, $y_\alpha \in \mu(x_\alpha)$. Luego, por la continuidad de f , se sigue que $f(x, z) \leq f(x, y)$, $\forall z \in \phi(x)$. Es decir, $y \in \mu(x)$.

8.5. Existencia del Equilibrio de Nash

En esta sección, veremos que un Equilibrio de Nash no es otra cosa que un punto fijo de la *correspondencia mejor respuesta* y que, por lo tanto, una forma de asegurar su existencia es exigir que dicha correspondencia y el espacio en que está definida cumplan con las hipótesis del Teorema de Kakutani.

Considere el juego normal de n jugadores

$$\Gamma = \{S_1, \dots, S_n, u_1, \dots, u_n\},$$

donde S_i $i = 1, 2, \dots, n$ es el espacio de estrategias del jugador i -ésimo.

Asumimos que estos conjuntos son compactos y convexos. Por otra parte, $u_i : S \rightarrow R$, $i = 1, \dots, n$ representa las funciones de utilidad del jugador i -ésimo, las que suponemos continuas. Sea $S = \prod_{i=1}^n S_i$. Representaremos por $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$ el vector estratégico que corresponde a la elección de la estrategia s_i por parte del jugador i . Denotaremos con $S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_j$ el espacio producto formado por los espacios de estrategias de todos los jugadores menos el i -ésimo. Consecuentemente, s_{-i} es el vector estratégico de donde se ha quitado la estrategia s_i . Interpretaremos (r_i, s_{-i}) el vector estratégico donde se resalta la elección estratégica del jugador i -ésimo, quien elige su estrategia r_i , siendo que todos los demás eligieron de acuerdo con s . Asumimos que $u_i(\cdot, s_{-i}) : S_i \rightarrow R$ es cuasicóncava¹⁰ para toda elección s_{-i} .

¹⁰Recordamos que una función $f : X \rightarrow R$ es cuasicóncava si el conjunto

Definimos como

$$B_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i : u_i(s_i, s_{-i}) = \max_{r_i \in S_i} u_i(r_i, s_{-i})\}$$

a la *correspondencia mejor respuesta* del jugador i -ésimo a la elección s_{-i} de los otros.

Definición 8.8. Un Equilibrio de Nash es un vector estratégico

$$s = (s_1, \dots, s_n)$$

que es mejor respuesta para sí mismo. Es decir, $s_i \in B_i(s_{-i}) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Consideremos la correspondencia producto $B = \prod_{i=1}^n B_i : S \rightarrow S$. Puede verse que un Equilibrio de Nash es un punto fijo de esta correspondencia. Es decir, $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ es un Equilibrio de Nash si y solo si $s^* \in B(s^*)$, o sea, si s^* es una mejor respuesta para sí misma.

Si demostramos que esta correspondencia está en las condiciones del Teorema de Kakutani, habremos demostrado la existencia del Equilibrio de Nash.

Teorema 8.10. Todo juego Γ , con las particularidades anteriormente enunciadas, tiene un Equilibrio de Nash.

Demostración: la haremos en una serie de pasos:

- i) la correspondencia mejor respuesta de cada jugador es h.c.s. y compacta, por el Teorema del Máximo de Berge (teorema 8.9.);
- ii) como $u_i(\cdot, s_i)$ es cuasicóncava, entonces $B_i(s_{-i})$ es convexa;
- ii) siendo $B(s)$ el producto de correspondencias h.c.s. y compactas, es ella misma h.c.s. y compacta (véase teorema 8.5.);
- iii) el dominio de B , $S = \prod_{i=1}^n S_i$, es compacto y convexo por ser producto cartesiano de espacios compactos y convexos;
- iv) finalmente, por el Teorema de Kakutani, la correspondencia tiene un punto fijo.

$\{x \in X. f(x) \geq c\}$ es convexo.

8.6. El Equilibrio de Nash-Cournot y la correspondencia mejor respuesta

Dedicaremos esta sección al análisis de un caso de competencia oligopolística; mostraremos que el equilibrio de este juego es un Equilibrio de Nash. Daremos condiciones que aseguran la existencia de tal equilibrio. El modelo que presentaremos a continuación es el de Cournot de 1838, pero en los términos de las secciones anteriores. De ahí entonces que será justo llamar al equilibrio que obtendremos para este juego *Equilibrio de Nash-Cournot*.

Suponemos un juego en forma normal en el que n firmas deben elegir simultáneamente la cantidad de un producto que lanzarán al mercado. Los productos son sustitutos perfectos. Suponemos que cada firma, representada por el subíndice $j \in \{1, \dots, n\}$, puede elegir la cantidad del producto en un intervalo $I_j = [0, Q_j]$. La función de costos de la firma j la representamos por $c_j : I_j \rightarrow R$ y la suponemos convexa.

La función inversa de demanda es conocida por todos los participantes $p : [0, Q] \rightarrow R$, donde $Q = \sum_{j=1}^n Q_j$, la que supondremos cuasicóncava. Los pagos que las firmas reciben están determinados por las funciones de beneficios $u_j : \prod_{j=1}^n I_j \rightarrow R$ definida por: $u_j(q_j, q_{-j}) = x_j p(q) - c_j(q_j)$, $j = 1, \dots, n$, donde $q = \sum_{i=1}^n q_i$.

De esta forma, la correspondencia mejor respuesta para cada firma estará definida por $B_j(q_{-j}^*) = \{q_j^* \in Q_j . u_j(q_j^*, q_{-j}^*) \geq u_j(q_j, q_{-j}^*) \forall j q_j \in Q_j\}$. Consecuentemente, un Equilibrio de Nash será un vector de cantidades $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$, tal que $q_j^* \in B_j(q_{-j}^*)$, $\forall j$, y será un punto fijo de la correspondencia producto $B = \prod_{j=1}^n B_j$.

A partir de la cuasiconcavidad de las funciones de utilidad de las firmas y la compacidad del espacio de estrategias, el Teorema del Máximo asegura que, para cada firma j , su correspondencia mejor respuesta B_j es h.c.s. y compacta. Luego, el Teorema de Kakutani asegura la existencia de un punto fijo para la correspondencia producto. Es decir, existe el Equilibrio de Nash para el Modelo de Cournot.

La forma de calcular este Equilibrio de Nash-Cournot es bien conocida. En las condiciones en que cada empresa tenga incentivos a producir una cantidad $q_j > 0$, las condiciones de primer orden, correspondientes al problema de Kuhn-Tucker, son las siguientes:

$$p + q_j p'(q) \left[1 + \sum_{i \neq j} \frac{dq_i(q_j)}{dq_j} \right] - c'_j(x) = 0 \quad \forall j. \quad (8.12)$$

Estas representan las llamadas *ecuaciones de reacción*. En las condiciones previamente definidas, un Equilibrio de Nash-Cournot es una solución $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ de estas ecuaciones.

Los términos $\frac{dq_i(q_j)}{dq_j}$ representan las llamadas *variaciones conjeturales*, e indican lo que la empresa j -ésima espera que se modifique la producción de los competidores cuando ella altere la cantidad producida.

Si asumimos que estos términos son cero (es decir, cada productor supone que los otros no van a modificar su producción como resultado de modificaciones en su propia producción) obtenemos el Modelo de Cournot clásico. Una hipótesis alternativa es suponer hay una firma destacada l (líder), la cual tiene variación conjetural cero, pero las restantes cambian su producción por decisiones de la líder; es decir, $dq_i/dq_l \neq 0, \forall i \neq l$. Este es el conocido Modelo de Stackelberg. Estos modelos pueden encontrarse en diferentes textos de microeconomía, como por ejemplo Mas-Colell, Whinston y Green (1995).

Referencias bibliográficas

- [1] Aliprantis, C.D. y Border, K.C. (1994), *Infinite Dimensional Analysis*, Springer-Verlag: Berlín.
- [2] Baiocchi, C. y Capelo, A. (1989), *Variational and Quasi Variational Inequalities*, John Wiley y Sons Ltd: Chichester.
- [3] Fudenberg, D. y Tirole, J. (1991), *Game Theory*, MIT Press: Cambridge, Mass.
- [4] Kelley, J.L. (1955), *General Topology*, Von Nostrand: Nueva York.
- [5] Mas-Colell, A., Whinston, M.D. y Green, J.R. (1995), *Microeconomic Theory*, Oxford University Press: Nueva York.

9. Utilidad y altruismo

*Alejandro Lugon*¹

9.1. Introducción

Uno de los supuestos de la mayoría de modelos económicos sobre el comportamiento individual es, dicho crudamente, el egoísmo. Este supuesto establece que los individuos solo consideran su propio bienestar cuando toman una decisión. El modelo se completa construyendo una función utilidad que represente las preferencias del individuo y hallando el resultado del proceso de maximización de esta utilidad sujeta a las restricciones pertinentes. Esta formulación induce erróneamente a identificar *agente maximizador de utilidad* como *agente egoísta*. En este capítulo, presento algunos desarrollos que, manteniendo la característica de *maximizador de utilidad*, permiten dejar de lado la hipótesis de egoísmo.

Este trabajo no intenta ser una revisión exhaustiva de lo hecho sobre el tema; más bien, se busca presentar un modelo sencillo de altruismo y aplicarlo en un juego concreto. En este sentido, un buen estudio, y puerta de entrada a una referencia bibliográfica más completa, es Fehr y Schmidt (2001). También es importante citar los trabajos de Gary Becker (1996), los cuales pueden ser considerados seminales en el tema, en particular para el tipo de altruismo que presentamos más adelante. En el campo de las aplicaciones, una de las más

¹ Profesor Asociado, Departamento de Ciencias, Sección Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú. Correo electrónico: alugon@pucep.edu.pe.

importantes es la teoría de la formación de grupos; en esa línea, podemos citar a Reiter (2001), y a Stark y Falk (1998).

Evidencias empíricas sobre la existencia de comportamientos que no pueden ser explicados con el supuesto de agentes egoístas existen con profusión en la realidad. Un ejemplo claro de esto es la trayectoria del homenajeado con este libro. En un ambiente más controlado, como los experimentos de laboratorio, también se tienen observaciones no-explicables con el modelo clásico como se puede leer en Levine (1998).

Es por esto que existe un importante esfuerzo académico por extender el modelo clásico de comportamiento económico de manera que explique lo observado. Parte de este esfuerzo es la definición de la función utilidad de manera más amplia. En esta línea, está el material que presentamos.

En las próximas secciones, se presenta la manera de definir la utilidad de un individuo alejándose de la formulación clásica (sección 9.2), para luego particularizarla para el caso de altruismo (sección 9.3) y, finalmente, ver una aplicación (sección 9.4).

9.2. Un Problema de dominio

La teoría clásica de la elección basada en preferencias o utilidad se sustenta, explícita o implícitamente, en tres ideas fundamentales:

- una persona toma decisiones evaluando solo aquello que le afecta directamente;
- la utilidad obtenida de una acción solo depende del efecto de esa acción sobre el individuo;
- todos los individuos actúan tratando de maximizar el valor de su utilidad.

Esta formulación parece dejar de lado comportamientos altruistas, así como la envidia, la cooperación, las consideraciones éticas o ideológicas, etcétera. Esto no es del todo cierto. La teoría se puede ajustar definiendo de manera correcta el concepto de *lo que afecta directamente a la persona*. Como veremos más adelante, esto corresponde a tomar diferentes dominios para la función utilidad.

9.2. Un Problema de dominio

Una manera general de incluir cualquier posibilidad es suponer que la utilidad de un individuo tiene como argumento el *estado del mundo*, pensando que este estado incluye todas las variables posibles. El problema con esta aproximación es que se pierde toda posibilidad de un estudio más preciso y esclarecedor. Es por esto que es necesario contar con una formulación que deje explícitas las diferencias, y que permita estudiar y distinguir claramente cada caso, así como poder aplicarlo adecuadamente.

Para empezar a ver el modelo formal, consideremos una sociedad o grupo humano formado por un número finito de individuos

$$I = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Estos individuos tienen la posibilidad de tomar acciones individuales; consideremos que cada individuo i posee un conjunto de acciones

$$A_i,$$

siendo a_{ij} una acción particular del agente i . El resultado de una acción puede afectar solo al individuo que la toma o puede afectar a un grupo de individuos. En este sentido las acciones tomadas individualmente determinan conjuntamente el *estado del mundo*. Cada uno de los posibles estados del mundo determina el estado de cada individuo. Para ser precisos, restrinjámonos a

$$E \subset \mathbb{R}^n$$

como el conjunto de posibles estados del mundo. Cada posible estado del mundo e determina el estado e_i de cada individuo i . Tomando π_i como la i -ésima proyección euclídea, tendríamos que²

$$E_i = \pi_i(E)$$

es el conjunto de posibles estados del individuo i . Finalmente, si definimos

$$A = \prod_{i \in I} A_i,$$

² Notemos que no necesariamente $E = \prod_{i \in I} E_i$.

podemos relacionar acciones y estados por medio de una función de resultado

$$f : A \longrightarrow E.$$

Lo que el agente controla directamente es la acción que realiza y, a través de esta acción, controla, indirecta y muchas veces parcialmente, el estado del mundo. Lo que el agente tiene que elegir entonces es la acción que realizará, es decir, que el conjunto de alternativas del agente i es A_i .

Cuando un individuo se encuentra frente a un proceso de elección entre una serie de alternativas, debe tener algún tipo de preferencias sobre estas. Bajo ciertos supuestos bastante aceptables, podemos pensar que esas preferencias son representadas por una función de utilidad; de tal manera, si una alternativa es preferida a otra, la función de utilidad le asigna un valor mayor. Así, una función de utilidad para el individuo i es

$$U_i : \mathcal{D}_i \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Podemos considerar directamente $D_i = A_i$, pero también podemos considerar que el dominio \mathcal{D}_i es el conjunto de todas las variables que son consideradas al comparar dos alternativas.

En el modelo que estamos desarrollando, las variables que usa un agente para comparar dos acciones posibles pueden ser la acción en sí o las acciones y el estado del mundo que determinan, o solamente el estado del mundo o cualquier otra combinación de las variables consideradas. Según consideremos diferentes formulaciones para definir las alternativas, es decir, diferentes dominios para la función utilidad, tendremos diferentes teorías sobre el comportamiento individual. Cada una de estas captura algún componente particular del comportamiento humano.

Si definimos la función utilidad con dominio $\mathcal{D}_i = E_i$, estaremos dentro de la idea clásica de *función utilidad*. El agente, para tomar una decisión, valora únicamente el resultado que obtiene, sin tomar en cuenta la acción misma ni el efecto que esta tiene sobre los demás integrantes de la sociedad; es decir, estamos frente a un agente económico puramente egoísta. Si nos alejamos de esta formulación clásica tomando otros dominios, podremos capturar otros aspectos.

Por ejemplo, si consideramos $\mathcal{D}_i = A_i \times E_i$, el dominio de la función utilidad está formado por los pares (acción, estado individual). En este sentido, estamos ante una *utilidad conductual*; esto significa que el agente no solo considera su estado final, sino también la acción misma que lo genera. Con este tipo de utilidades, podríamos estudiar los comportamientos éticos como el expresado coloquialmente en la sentencia «el fin no justifica los medios».

Otra posibilidad es definir $\mathcal{D}_i = 2^{A_i} \times E_i$. En este caso, podemos considerar que al conjunto A_i pertenecen todas las posibles acciones y que, en un problema de elección, el individuo se enfrenta a un subconjunto de estas acciones, es decir, a un elemento del conjunto potencia 2^{A_i} . Si un agente tiene como dominio para su utilidad $2^{A_i} \times E_i$, entonces el entorno en el que toma una decisión también es valorado. Tener más (o menos) alternativas para escoger puede ser preferible a tener menos (o más). Este tipo de consideraciones pueden ser caracterizadas como una *utilidad circunstancial*.

Otra posibilidad es la que nos llevaría a considerar los comportamientos altruistas, pero antes de pasar a esto veamos algunas otras posibilidades no tan importantes. Por ejemplo, si $\mathcal{D}_i = E_j$ tendríamos a un agente alienado que valora no su estado final sino el de otro agente (en este caso j). También podríamos tener $\mathcal{D}_i = \prod_{i \in I} A_i$, en el cual el agente se fija solo en las acciones tomadas y no en los resultados. Podríamos seguir con muchas más alternativas, algunas más realistas y aplicables que otras.

En el caso que nos interesa, el altruismo se puede modelar como un caso de *utilidad social*, donde $\mathcal{D}_i = E$ y, por lo tanto, las alternativas de elección están conformadas por los posibles estados del mundo. Un agente con este tipo de utilidad toma en cuenta la situación final de cada individuo de la sociedad. El altruismo es un caso particular de esta familia, en el cual la valoración de un individuo está *alineada* con respecto a la valoración de los demás. Otro caso podría ser el de la envidia, donde la valoración de un individuo es opuesta a la valoración de los demás.

En la siguiente sección, veremos con detalle cómo podemos formular estas dos actitudes a través de utilidades interdependientes.

9.3. Altruismo, una formulación

Al considerar la función de utilidad

$$U_i : E \longrightarrow \mathbb{R},$$

la formulación más sencilla es la de definir directamente U_i . Otro enfoque es definirla indirectamente considerando que cada individuo valora su resultado y los valores de la utilidad obtenida por los otros agentes según una función v_i . De esta manera se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} U_1(e) &= v_1(e_1, U_2(e), \dots, U_n(e)) \\ U_2(e) &= v_2(U_1(e), e_2, U_3(e), \dots, U_n(e)) \\ &\dots \\ U_n(e) &= v_n(U_1(e), \dots, U_{n-1}(e), e_n). \end{aligned}$$

Dadas las funciones v_1, \dots, v_n , las funciones U_1 estarían definidas implícitamente por el sistema de ecuaciones anterior. Las condiciones para la existencia de solución de este sistema son estudiadas en Bergstrom (1999) y en Bramoullé (2001).

Antes de continuar, veamos un ejemplo sencillo presentado en Bergstrom (1999). Supongamos que tenemos solo dos agentes y que las funciones v_1 y v_2 son lineales:

$$\begin{aligned} U_1(e) &= u_1(e_1) + aU_2(e), \\ U_2(e) &= u_2(e_2) + bU_1(e). \end{aligned}$$

La solución de este sistema, siempre que $ab \neq 1$, nos da

$$\begin{aligned} U_1(e) &= \frac{1}{1-ab}u_1(e_1) + \frac{a}{1-ab}u_2(e_2), \\ U_2(e) &= \frac{b}{1-ab}u_1(e_1) + \frac{1}{1-ab}u_2(e_2). \end{aligned}$$

Para tener utilidades altruistas—esto es, funciones U_1 y U_2 crecientes respecto de u_1 y u_2 —necesitamos que $a > 0$, $b > 0$ y $ab < 1$. Para un estudio más detallado de este punto, referimos nuevamente a Bergstrom (1999) y a Bramoullé (2001).

9.3. Altruismo, una formulación

Para lo que sigue, tomaremos directamente que cada agente i posee una función de utilidad que toma la forma

$$U_i(e) = U_i(e_1, e_2, \dots, e_n),$$

donde para todo i , U_i es creciente respecto de su i -ésima componente. Respecto a la interdependencia de las utilidades, podemos distinguir tres casos:

- si U_i es creciente respecto de su j -ésima componente, decimos que i es altruista hacia j ;
- si U_i es constante respecto de su j -ésima componente, decimos que i es indiferente hacia j ;
- si U_i es decreciente respecto de su j -ésima componente, decimos que i es envidioso hacia j .

Una manera sencilla de tener una utilidad altruista es tener una U_i linealmente separable en sus argumentos

$$U_i(e_1, e_2, \dots, e_n) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} u_{ij}(e_j),$$

donde cada u_{ij} es creciente y los α_{ij} son no negativos.

Se simplifica aun más suponiendo que $u_{ij} = u_{jj} =: u_j$ para todos i, j . Esto quiere decir que la valoración básica del estado del agente j es la misma para todos los agentes, incluyendo a j . De esta forma,

$$U_i(e_1, e_2, \dots, e_n) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} u_j(e_j).$$

Podemos identificar a α_{ij} como el nivel de altruismo de i hacia j .

Los niveles de altruismo se pueden normalizar, sin perder generalidad, de manera que $\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} = 1$. Con esta normalización, una restricción natural es que $\alpha_{ii} \geq 1/2$. Tener un valor de α_{ii} menor que $1/2$ implicaría que el agente i valora más la utilidad directa de los demás agentes que la suya propia.

Si consideramos el caso de dos agentes, podemos escribir sus utilidades altruistas como

$$U_1(e_1, e_2) = (1 - \alpha_1)u_1(e_1) + \alpha_1 u_2(e_2),$$

$$U_2(e_1, e_2) = \alpha_2 u_1(e_1) + (1 - \alpha_2)u_2(e_2),$$

donde α_i es el nivel de altruismo del agente i hacia el agente j . En la siguiente sección, veremos una aplicación donde usaremos estas utilidades.

9.4. El juego de las donaciones

Dos agentes $i = 1, 2$ reciben cada uno una renta I_i que es públicamente observada. Luego de recibir la renta, cada agente tiene la posibilidad de hacer una donación privada al otro. Sea T_i la donación que realiza el agente i al agente j . Como resultado de estas donaciones, la riqueza final de cada agente es $W_i = I_i - T_i + T_j$, y su utilidad³

$$U_i(W_1, W_2) = (1 - \alpha_i)u(W_i) + \alpha_i u(W_j), \quad (9.1)$$

donde $u(\cdot)$ es la utilidad *directa* de cada agente⁴ y $0 \leq \alpha_i \leq 1/2$ es el nivel de altruismo del agente i hacia el agente j .

Lo que hemos definido corresponde a un juego en forma normal donde el conjunto de estrategias del jugador i es $[0, I_i]$ y sus pagos están dados por la ecuación 9.1.

En este juego, la función de respuesta óptima del jugador i es definida por el problema de optimización

$$\max_{0 \leq T_i \leq I_i} (1 - \alpha_i)u(I_i - T_i + T_j) + \alpha_i u(I_j - T_j + T_i). \quad (9.2)$$

Este problema de maximización tiene siempre una única solución. Si la solución es interior ($0 < T_i < I_i$), la condición necesaria y suficiente es

$$\frac{u'(I_i - T_i + T_j)}{u'(I_j - T_j + T_i)} = \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i}.$$

³ Aquí tomamos $u_1 = u_2$.

⁴ Se trata de una función cóncava y no decreciente que satisface las condiciones de Inada.

La solución es $T_i = 0$ si y solo si

$$\frac{u'(I_i + T_j)}{u'(I_j - T_j)} \geq \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i}.$$

Finalmente, la condición para tener $T_i = I_i$ como solución es

$$\frac{u'(T_j)}{u'(I_j + I_i - T_j)} \leq \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i}.$$

Si, en un Equilibrio de Nash, ambas donaciones son positivas, debemos tener que:

$$\frac{1 - \alpha_2}{\alpha_2} \leq \frac{u'(I_1 - T_1 + T_2)}{u'(I_2 - T_2 + T_1)} \leq \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1}.$$

Trabajando con los extremos de la desigualdad, obtenemos que se debe cumplir $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 1$. Bajo el supuesto de $\alpha_1, \alpha_2 \leq 1/2$, el único caso posible es $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$.

Luego, si $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$ en todo Equilibrio de Nash, al menos una de las dos donaciones debe ser cero. Supongamos que $T_i = 0$; bajo las condiciones de Inada, la respuesta óptima a esta donación no puede ser $T_j = I_j$. Como conclusión, tenemos que todo Equilibrio de Nash está formado por una donación nula $T_i = 0$ y la otra cumpliendo $0 \leq T_j < I_j$.

Las donaciones $T_1 = T_2 = 0$ forman un Equilibrio de Nash si y solo si

$$\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \leq \frac{u'(I_1)}{u'(I_2)} \leq \frac{1 - \alpha_2}{\alpha_2}.$$

Esta observación nos lleva a decir, *grosso modo*, que, si la razón $\frac{u'(I_1)}{u'(I_2)}$ está suficientemente cercana al valor 1 —es decir, I_1 y I_2 son suficientemente similares— en equilibrio no se observará donación alguna. La idea precisa de *suficientemente* depende de la concavidad de la función u y de los valores α_1 y α_2 . Esto lo veremos claramente en el ejemplo del final de la sección.

Por otro lado, se tendrá al menos una donación positiva si las rentas son suficientemente diferentes. Por ejemplo, para tener $T_1 > 0$ y $T_2 = 0$ como equilibrio, deben cumplirse

$$\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} = \frac{u'(I_1 - T_1)}{u'(I_2 + T_1)} \leq \frac{1 - \alpha_2}{\alpha_2}.$$

Como $\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} \leq 1$, vemos que se debe cumplir que $T_1 \leq \frac{I_1 - I_2}{2}$; en particular, debemos tener que $I_1 > I_2$.

Para terminar con el análisis general, veamos qué pasa cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$. En este caso, podemos calcular explícitamente la función de respuesta óptima:

$$BR_i(T_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } T_j \leq \frac{I_j - I_i}{2} \\ T_j + \frac{I_i - I_j}{2} & \text{si } \frac{I_j - I_i}{2} \leq T_j \leq \frac{I_j + I_i}{2} \\ I_i & \text{si } \frac{I_j + I_i}{2} \leq T_j \end{cases} \quad (9.3)$$

En este caso, tenemos un continuo de equilibrios. Si tomamos los índices tal que $I_j \geq I_i$, tendremos que (T_i, T_j) es un Equilibrio de Nash si y solo si

$$T_i \in [0, I_i], \quad (9.4)$$

$$T_j = T_i + \frac{I_j - I_i}{2}. \quad (9.5)$$

Todos estos equilibrios generan la misma riqueza final:

$$W_i = W_j = \frac{I_j + I_i}{2}.$$

Es decir, los individuos comparten su renta total en partes iguales.

Entre todos los equilibrios de este caso, hay uno que podríamos considerar focal: $T_i = 0$ con $T_j = \frac{I_j - I_i}{2}$. La particularidad de este equilibrio es que es el único en el cual el agente de menor ingreso no realiza una donación positiva.

Para terminar esta sección, presentamos un ejemplo de este juego con una función utilidad precisa. En este ejemplo, se verán más claramente los equilibrios y sus propiedades.

Ejemplo 9.1. Consideremos el juego de las donaciones con la utilidad de Coeficiente Relativo de Aversión al Riesgo Constante: $u(W) = \frac{1}{1-\rho} W^{1-\rho}$, con⁵ $\rho > 0$. Si $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$, el Equilibrio de Nash está caracterizado de la siguiente manera:

$$T_i = \text{máx}\{0, \gamma_i I_i - (1 - \gamma_i) I_j\}, \quad (9.6)$$

⁵ Para $\rho = 1$, consideramos $u(W) = \ln(W)$.

9.5. A manera de conclusión

donde $\gamma_i = \frac{1}{1 + \left(\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i}\right)^{\frac{1}{\rho}}} \in [0, 1/2]$.

Si $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$, los Equilibrios de Nash corresponden a las ecuaciones 9.4 y 9.5, pero el que hemos considerado focal también se puede escribir en la forma de 9.6.

Para que el agente i realice una donación positiva, debe cumplirse que $\gamma_i I_i - (1 - \gamma_i) I_j > 0$; es decir,

$$I_i > \frac{1 - \gamma_i}{\gamma_i} I_j = \left(\frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \right)^{\frac{1}{\rho}} I_j.$$

En esta última ecuación, vemos claramente que será más fácil observar una donación positiva cuanto mayores sean α y ρ . La primera relación no es sorprendente: a mayor nivel de altruismo, mayor posibilidad de observar una donación. La segunda también es natural; en este ejemplo, ρ está asociado con la concavidad de la utilidad: cuanto más cóncava sea esta, una donación disminuye menos la utilidad del donante y aumenta más la del receptor.

9.5. A manera de conclusión

Hemos presentado un modelo sencillo de altruismo y una aplicación directa de él. Obviamente, existe mucha más literatura y avances en el tema, así como otras formas de modelar el comportamiento individual, pero la forma de hacerlo que he presentado es la más usual, quizá por su sencillez y fácil tratamiento.

Un siguiente paso a seguir, en la línea del modelo presentado, es el de endogenizar el nivel de altruismo de los agentes. Esto supone entrar en un campo más usual para la psicología que para la Economía: el campo de los sentimientos y de su interrelación con las acciones. El supuesto desarrollado en estos trabajos es que el nivel de altruismo de una persona hacia otra depende, en cierta medida, del comportamiento de la última. Como el comportamiento, a su vez, depende del nivel de altruismo, se crea una interdependencia entre estas variables. Trabajos que van esta dirección son Stark y Falk (1998), y Cervellati, Esteban y Kranich (2004).

Referencias bibliográficas

- [1] Becker, G. (1996), *Accounting for Tastes*, Harvard University Press: Cambridge, Mass.
- [2] Bergstrom, T. (1999), Systems of Benevolent Utility Functions, *Journal of Public Economic Theory* 1, 71-100.
- [3] Bramoullé, Y. (2001), Interdependent Utilities, Preference Indeterminacy and Social Networks, Manuscrito.
- [4] Cervellati, M., Esteban, J. y Kranich, L. (2004), Redistributive Taxation with Endogenous Sentiments, Manuscrito, IAE-UAB.
- [5] Fehr, E. y Schmidt, K. (2001), Theories of Fairness and Reciprocity-Evidence and Economic Applications, Institute for Empirical Research in Economics, University of Zurich, Working Paper No. 75.
- [6] Levine, D. (1998), Modeling Altruism and Spitefulness in Experiments, *Review of Economic Dynamics* 1, 593-622.
- [7] Reiter, S. (2001), Interdependent Preferences and Groups of Agents, *Journal of Public Economic Theory* 3, 27-67.
- [8] Stark, O. y Falk, I. (1998), Transfers, Empathy Formation, and Reverse Transfers, *The American Economic Review* 88 Papers and Proceedings of the Hundred and Tenth Annual Meeting of the American Economic Association, 271-276.

10. ¿Saben lo que quieren los votantes?

*César Martinelli*¹

10.1. Introducción

Cuando era estudiante de Economía en la Universidad Católica tuve la fortuna de asistir a las inolvidables clases y recibir la influencia de Ramón García-Cobián. Quiero recordar en particular una conferencia que dio en esos días acerca del Teorema de Imposibilidad de Arrow² y que fue mi primera introducción al análisis formal de la decisión colectiva. En este artículo, voy a ocuparme de otra idea con implicaciones críticas respecto de las limitaciones de la democracia y que fue formulada por Anthony Downs en su *Teoría Económica de la Democracia* (1957), como una hipótesis más que como un teorema formal. Me refiero a la hipótesis de la *ignorancia racional*.

La hipótesis de la ignorancia racional es la siguiente: dado que cada votante sabe que el impacto de un solo voto es desdeñable en una elección con muchos votantes, ningún votante tiene incentivos para informarse con seriedad acerca

¹ Profesor Investigador, Centro de Investigación Económica, Instituto Tecnológico Autónomo de México, Camino Santa Teresa 930, 10700 México D.F., México. Correo electrónico: martinel@itam.mx.

² Véase García-Cobián (1985).

de los temas en debate. Si los votantes mismos desconocen sus verdaderos intereses, hay pocas esperanzas de que la democracia produzca un resultado que sea consistente con los intereses de la mayoría. En otras palabras, la información política es un bien público y, como en otros casos de bienes públicos, podemos esperar que no se provea en la medida en que hace falta.

La idea de la ignorancia racional ha recibido muchísimo menos atención en la literatura que el brillante Teorema de Arrow, tal vez porque es una idea aparentemente obvia. Las implicaciones de la hipótesis de la ignorancia racional, sin embargo, pueden ser devastadoras. En tanto que el Teorema de Arrow, en una posible lectura, pone en duda la *estabilidad* de las decisiones bajo cualquier regla de decisión democrática, la ignorancia racional pone en duda la *fidelidad* de estas decisiones respecto de los intereses de la mayoría, aun en circunstancias en las que estos intereses están bien definidos pese a Arrow (por ejemplo, cuando hay solo dos alternativas o cuando las preferencias de los votantes son unimodales). Una versión particularmente dura de la ignorancia racional es asumida, entre otros, por Becker (1983), quien propone que las «preferencias» de los votantes (así, entre comillas) son manipuladas y creadas por la información y la desinformación diseminadas a través de los medios de comunicación por los grupos de interés.

En este artículo, voy a explicar someramente mi trabajo de investigación sobre el tema de la ignorancia racional, desarrollado *in extenso* en Martinelli (2005a), y a ponerlo en el contexto de literatura. En esencia, la idea de este artículo es que aceptar la idea de la ignorancia racional a nivel del votante individual no necesariamente lleva a aceptarla a nivel del electorado en su conjunto. En otras palabras, en una elección con muchísimos votantes, hace falta muy poca información en las manos de cada votante para que el electorado probablemente tome la decisión correcta —una formulación alternativa del tema de la ignorancia racional, desarrollada en Martinelli (2005b), muestra de modo análogo que basta tener una minoría con costos de adquirir información pequeños para obtener el mismo resultado—.

La capacidad de las elecciones para agregar información es una antigua idea en las ciencias sociales y puede remontarse a la obra del Marqués de Condorcet en el siglo XVIII. Condorcet, como otros filósofos ilustrados, creía que existía

un elemento de *interés común* en las decisiones sociales. Para Condorcet, uno de los pioneros en la aplicación del cálculo de probabilidades en las ciencias sociales, cada opinión individual puede tomarse como una *señal ruidosa* del interés colectivo. El objetivo de los procedimientos electorales es, entonces, descubrir ese interés común a partir de la agregación estadística de las opiniones individuales.³ El modelo que propongo puede calificarse de *condorcetiano*, como lo es la literatura reciente sobre votantes decisivos Feddersen y Pesendorfer 1997, sobre diseño de jurados y comités Duggan y Martinelli 2001, Pérsico 2004, y Gerling *et al.* 2005, o sobre las ventajas para la sociedad de la protección de las minorías Chwe 1999. Luego de desarrollar el modelo, volveré, en las conclusiones, a ocuparme de Arrow y Condorcet.

10.2. Ignorancia racional

Consideremos una sociedad donde hay $2n + 1$ votantes, ($i = 1, \dots, 2n + 1$). La sociedad debe elegir entre dos alternativas, A y B . Podemos pensar en dos candidatos en la segunda vuelta de una elección presidencial o en algún tema sobre el que la decisión es forzosamente binaria y sobre el cual el Gobierno seguirá la opinión pública expresada en un referendun. La utilidad de un votante $U_i(d, z)$ depende de la alternativa elegida $d \in \{A, B\}$ y de las circunstancias o *estado del mundo* $z \in \{z_A, z_B\}$. Asumimos que, para todo i ,

$$U_i(A, z_A) - U_i(B, z_A) = U_i(B, z_B) - U_i(A, z_B) = 1.$$

Es decir, A es la alternativa correcta bajo las circunstancias z_A y B es la alternativa correcta bajo las circunstancias z_B (por supuesto, un modelo más razonable debe incluir la posibilidad de que existan minorías que apoyan a A o a B independientemente de las circunstancias, pero en este artículo estoy intentando concentrarme en las ideas esenciales).

Los votantes no conocen con certeza las circunstancias. Conocen que, con probabilidad 50%, las circunstancias son iguales a z_A y, con probabilidad

³ Véase, por ejemplo, la amena discusión por Rothschild (2001), o la más formal discusión por Young (1988).

50%, las circunstancias son iguales a z_B . Cada votante recibe una señal ruidosa (la opinión del votante) acerca de cuál es la alternativa correcta, $O_i \in \{A, B\}$. Condicionando por las circunstancias, las opiniones de los votantes son independientes e idénticamente distribuidas. Asumimos

$$\Pr\{O_i = A|z = z_A\} = \Pr\{O_i = B|z = z_B\} = 1/2 + x,$$

donde $x \in (1/2, 1)$ —sería más razonable asumir que existe una gran heterogeneidad en la información disponible a distintos votantes, pero seguimos en el tenor de considerar únicamente las ideas esenciales. Las opiniones representan información privada; es decir, cada votante desconoce las opiniones de los demás—.

La elección toma lugar después de que cada votante recibe una señal, es decir, luego de que cada votante se forma una opinión. Asumimos que cada votante vota según su opinión⁴ y que ninguno se abstiene.⁵

La *probabilidad de tomar la decisión correcta* es la misma bajo las circunstancias z_A y z_B , y puede calcularse como

$$\begin{aligned} & \Pr\{d = A|z = z_A\} \\ &= \Pr\{\text{la mayoría vota por } A \text{ y el resto vota por } B|z = z_A\} \\ &= \sum_{m=n+1}^{2n+1} \Pr\{m \text{ votantes votan por } A \text{ y el resto vota por } B|z = z_A\} \\ &= \sum_{m=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{m} (1/2 + x)^m (1/2 - x)^{2n+1-m}. \end{aligned}$$

Esta es la suma de las probabilidades de todos los eventos en los que una mayoría (m) de votantes tiene la opinión correcta y, en consecuencia, vota por la

⁴ En el modelo que estamos contemplando, existe suficiente simetría para que esta conducta se pueda obtener a partir de un razonamiento estratégico. Si nos alejamos del supuesto de simetría, sin embargo, el razonamiento estratégico puede llevar a algunos votantes a votar sin tomar en cuenta su opinión. Intuitivamente, si existen algunos votantes *fanáticos* que favorecerán a una alternativa bajo cualquier circunstancia, entonces algunos de los votantes *independientes* pueden compensar este sesgo a favor de una alternativa votando por la otra independientemente de su opinión.

⁵ Si algunos votantes tienen menos información que otros, es posible obtener que estos deciden abstenerse en un modelo de tipo estratégico.

alternativa correcta. Como mostró por primera vez Condorcet, en una aplicación temprana de la ley de grandes números, si dejamos que n crezca arbitrariamente —manteniendo al mismo tiempo x constante— esta probabilidad converge a uno. Es decir, con un electorado arbitrariamente grande, podemos estar arbitrariamente seguros de que la sociedad tomará la decisión correcta.

El razonamiento del párrafo anterior puede considerarse ingenuo desde el punto de vista de la hipótesis de la ignorancia racional. Es decir, podemos esperar que, al aumentar el tamaño del electorado, la *probabilidad que cada voto sea decisivo* decline a cero. La probabilidad de que un votante sea decisivo es igual a la probabilidad de que, de los demás $2n$ votantes, n votantes voten por una alternativa y otros n por la otra. Esta probabilidad es también la misma bajo las circunstancias z_A y z_B , y puede calcularse como

$$\begin{aligned} & \Pr\{O_i = A \Rightarrow d = A \text{ y } O_i = B \Rightarrow d = B | z = z_A\} \\ &= \Pr\{n \text{ votantes votan por } A \text{ y } n \text{ por } B | z = z_A\} \\ &= \binom{2n}{n} (1/2 + x)^n (1/2 - x)^n. \end{aligned}$$

Como $(1/2 + x)(1/2 - x)$ está acotado por arriba por $1/4$, la probabilidad de que un voto sea decisivo está acotada por arriba por $(2n)!/(2^{2n}n!n!)$, que converge a cero conforme n tiende a infinito. Pero, si la probabilidad de que cada voto sea decisivo tiende a cero, podemos esperar que el incentivo para adquirir información que tiene cada votante tienda a cero. Si un votante sabe que su probabilidad de afectar el resultado de la elección es minúscula, el votante seguramente estará dispuesto a invertir una cantidad minúscula de tiempo y esfuerzo en informarse. Por lo tanto, podemos esperar que x no permanezca constante conforme n se incrementa, sino que a cada valor de n le corresponda un valor x_n y que x_n tienda a cero conforme n crece arbitrariamente. Es decir, podemos esperar que en el límite los votantes sean (racionalmente) ignorantes. En la sección siguiente, estudiamos las consecuencias de asumir que x_n tiende a cero.

10.3. Agregación de información

En esta sección, estudiamos la probabilidad límite de tomar la decisión correcta cuando n toma valores arbitrariamente grandes y x_n tiende a cero. Suponemos en adelante que $x_n n^{1/2}$ converge a $k \in [0, \infty]$, donde $k = \infty$ representa la situación en la que $x_n n^{1/2}$ crece arbitrariamente conforme n tiende a infinito. Como veremos adelante, k es un indicador de la información de la que dispone el electorado en su conjunto cuando hay muchísimos votantes. Sea $\Phi(\cdot)$ la función de distribución normal estándar, tenemos lo señalado a continuación.

Teorema 10.1. Conforme n tiende a infinito, la probabilidad de elegir la alternativa correcta converge a $\Phi(2\sqrt{2}k)$. En particular, converge a uno si $k = \infty$ y a $1/2$ si $k = 0$.

Para demostrar este teorema, supongamos que el estado es z_A (cálculos similares se siguen si el estado es z_B). El evento de que un votante vote por A en el estado z_A es, según el modelo, una Prueba de Bernoulli con probabilidad de éxito $1/2 + x_n$. Para $n = 1, 2, \dots$ e $i = 1, \dots, 2n + 1$ definamos las variables aleatorias

$$V_i^n = \begin{cases} 1/2 - x_n & \text{si el votante } i \text{ vota por } A, \\ -1/2 - x_n & \text{si el votante } i \text{ vota por } B. \end{cases}$$

Para cada n , las variables aleatorias V_i^n son iid. Más aún,

$$\begin{aligned} E(V_i^n) &= 0, \\ E((V_i^n)^2) &= 1/4 - x_n^2, \quad y \\ E(|V_i^n|^3) &= 1/8 - 2x_n^4. \end{aligned}$$

Sea F_n la función de distribución de la suma normalizada

$$(V_1^n + \dots + V_{2n+1}^n) / \sqrt{E((V_i^n)^2)(2n+1)}.$$

Nótese que A pierde la elección si obtiene n votos o menos, es decir, si

$$V_1^n + \dots + V_{2n+1}^n + (2n+1)(1/2 + x_n) \leq n$$

o, de modo equivalente,

$$V_1^n + \cdots + V_{2n+1}^n \leq -1/2 - (2n + 1)x_n.$$

La probabilidad de que A gane la elección es entonces $1 - F_n(J_n)$, donde

$$J_n = \frac{-1/2 - (2n + 1)x_n}{\sqrt{E((V_i^n)^2)(2n + 1)}}.$$

En este punto, necesitamos recurrir a una versión del Teorema del Límite Central. Tiene que ser una versión *sofisticada* para lidiar con el hecho de que, conforme aumentamos el tamaño de muestra $2n + 1$, alteramos la probabilidad de éxito $1/2 + x_n$ de la Prueba de Bernoulli. El resultado estadístico que utilizamos es el Teorema de Berry-Esseen.⁶ Este teorema nos permite acotar la distancia entre una distribución normalizada (tal como F_n arriba) y la distribución normal estándar evaluada en el mismo punto *para un tamaño de muestra dado*. En particular, el Teorema de Berry-Esseen nos dice en nuestro caso que, para todo w ,

$$|F_n(w) - \Phi(w)| \leq \frac{3E(|V_i^n|^3)}{E((V_i^n)^2)^{3/2}\sqrt{2n + 1}};$$

el factor 3, en la mano derecha de la ecuación, reportado por Feller y Durrett, no es la mejor cota conocida para el teorema, pero eso es irrelevante para nuestro propósito aquí. Ahora bien, la expresión en la mano derecha de la ecuación arriba converge a cero conforme n tiende a infinito. Es decir, usando la distribución normal standard, obtenemos una aproximación crecientemente precisa a F_n , aunque la distribución de V_i^n cambia con n . Así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |F_n(J_n) - \Phi(J_n)| = 0.$$

Consideremos ahora el caso $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2}x_n = k < \infty$. En este caso, J_n converge a $-2\sqrt{2}k$. Como la distribución normal standard Φ es continua,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \Phi(J_n) - \Phi(-2\sqrt{2}k) \right| = 0.$$

En consecuencia, la probabilidad de que A gane las elecciones converge a $1 - \Phi(-2\sqrt{2}k) = \Phi(2\sqrt{2}k)$.

⁶ Véase la referencia clásica en Feller (1971: 542) o en el texto de Durrett (1991: 106).

Consideremos finalmente el caso en el que $n^{1/2}x_n$ diverge a infinito con n , es decir, el caso $k = \infty$. En este caso, J_n diverge a $-\infty$. Entonces, para cualquier número real positivo L , la probabilidad de que A gane la elección es mayor que $1 - F_n(-L)$, para n suficientemente grande. Usando la aproximación normal propuesta arriba, podemos ver que la probabilidad de que A gane las elecciones debe converger a uno. Esto concluye la demostración del teorema.

10.4. Adquisición de información

Hasta ahora no hemos explicado cómo se determina x_n . El modelo desarrollado hasta este punto en el artículo es claramente insatisfactorio sin tal explicación. Supongamos, pues, que cada votante decide cuánta información adquirir haciendo un cálculo de tipo marginal. Más precisamente, supongamos que cada votante iguala el beneficio marginal de adquirir información, que es igual a la probabilidad de tener un voto decisivo, con el costo marginal de adquirir información. Hacemos, más aún, otro supuesto

Supuesto 10.1. El costo de adquirir la calidad de información x es $x^3/3$.

Bajo el supuesto 10.1., el costo marginal de adquirir información para el votante i es x_i^2 , donde x_i es la calidad de información que este individuo adquiere. Si todos los demás votantes adquieren la calidad de información x_{-i} , entonces el beneficio marginal de adquirir información para i es

$$\binom{2n}{n} (1/2 + x_{-i})^n (1/2 - x_{-i})^n,$$

donde estamos empleando la fórmula correspondiente a la probabilidad de que cada voto sea decisivo. En un Equilibrio Simétrico de Nash, tendremos que todos los individuos adquieren la misma información, digamos x_n , donde el subíndice indica la dependencia respecto del número de votantes. Entonces, x_n es la solución de la siguiente ecuación:

$$\binom{2n}{n} (1/2 + x_n)^n (1/2 - x_n)^n = x_n^2,$$

donde la mano izquierda es el beneficio marginal y la mano derecha el costo marginal de adquirir información. Es sencillo mostrar que esta ecuación tiene una solución única para cada $n = 1, 2, \dots$. Podemos ahora encontrar el límite k y así utilizar el teorema 10.1. para averiguar cuál es aproximadamente la probabilidad de que un electorado muy grande tome la decisión correcta cuando el costo de adquirir información está dado por una función cúbica.

Teorema 10.2. Bajo el supuesto 10.1, $k = \infty$.

Para probar este resultado, podemos reescribir la ecuación que iguala costo y beneficio marginal como

$$\binom{2n}{n} (1/4 - x_n^2)^n = x_n^2.$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por n , obtenemos

$$\binom{2n}{n} \frac{n^{1/2}}{4^n} n^{1/2} (1 - 4k_n^2/n)^n = k_n^2,$$

donde $k_n \equiv n^{1/2} x_n$. Queremos demostrar que $k_n \rightarrow \infty$. Supongamos por contradicción que existe una subsecuencia de k_n , tal que converge a algún número $k' < \infty$. Entonces, a lo largo de esta subsecuencia, la expresión en la mano derecha de la ecuación arriba converge a k'^2 , pero la expresión en la mano izquierda diverge a ∞ , pues, usando la Fórmula de Stirling,

$$\binom{2n}{n} \frac{n^{1/2}}{4^n} \rightarrow \pi^{-1/2}$$

y, usando, por ejemplo, el teorema 4.2 en Durrett (1991),

$$(1 - 4k_n^2/n)^n \rightarrow \exp\{-4k'^2\}.$$

Combinando ambos teoremas, obtenemos la conclusión deseada: es posible que los votantes sean completamente ignorantes en el límite (es decir, aproximadamente, para un electorado muy grande), pero la capacidad de las elecciones para agregar información es tal que la sociedad probablemente toma decisiones equivalentes a las que tomarían los votantes si estuviesen perfectamente informados.

10.5. Discusión

Una crítica inmediata a los resultados anteriores es que una función cúbica de costo de información como la descrita por el supuesto 10.1 puede tomarse solo como un ejemplo. El lector aficionado al análisis matemático podrá reconocer que, si el costo es cuadrático, se obtiene un valor de k entre cero e infinito; y, si el costo es lineal, se obtiene k igual a cero. Sin embargo, como se muestra en Martinelli (2005a), siempre que la derivada del costo marginal esté acotada cuando x está cerca de cero, se obtendrá al menos alguna agregación de información. Para mostrar esto, la clave es sencillamente utilizar una expansión de Taylor para el costo marginal. Mucho más difícil es demostrar que los resultados se mantienen cuando la situación es asimétrica. En una situación asimétrica, el Teorema de Radner-Stiglitz (1984) sobre no-convexidad del valor de la información podría hacernos anticipar que es imposible obtener que los votantes estén dispuestos a adquirir calidades de información arbitrariamente pobres —sin embargo, una demostración de esta violación más aparente que real del Teorema de Radner-Stiglitz es provista en Martinelli (2005a)—. La clave aquí es que estamos lidiando con un problema de Teoría de Juegos y no simplemente con un problema de decisión individual, de modo que el entorno para cada votante puede ser aproximadamente simétrico dadas las decisiones de los demás votantes.

Una crítica más dura es que puede ser razonable imaginar que existe un costo fijo en la adquisición de información. Con un costo fijo, la *ignorancia racional* viene a parecerse un poco más a otra idea lanzada por Downs, la *paradoja del votante*. En esencia, la *paradoja* detectada por Downs es que, si los votantes votan únicamente con la intención de afectar los resultados de la elección y si votar es una actividad que envuelve algunos costos, entonces podríamos predecir una escasísima participación electoral dada la escasa probabilidad de que un solo voto afecte los resultados cuando hay mucho votantes. Este razonamiento ha sido desarrollado de modo formal en el marco de un modelo de juegos en un trabajo clásico de Palfrey y Rosenthal (1985). Obviamente, el argumento no se aplica en sociedades como la peruana, en las que el voto es obligatorio (una práctica muy mala de la que no podemos ocuparnos ahora); sin embargo, en la mayoría de las democracias el voto no es obligatorio, y aún así los votantes acuden

masivamente a las urnas. Una propuesta reciente para hacer frente a la *paradoja* ha sido desarrollada por Tim Feddersen y Álvaro Sandroni. En esencia, la propuesta (explicada, por ejemplo, en Feddersen (2004)) es que los votantes experimentan una satisfacción de carácter ético por adoptar reglas de conducta que benefician al grupo o grupos con los que se identifican. Estas reglas, a su vez, deben de ser tales que las obligaciones que imponen a los votantes no sean excesivas. Por ejemplo, votar, sea cual sea el costo, no puede sostenerse como regla de conducta, porque la satisfacción de carácter ético no es infinita. En un trabajo reciente, Feddersen y Sandroni (2005) utilizan la misma idea para explicar cómo los votantes pueden adquirir información aun si existe un costo fijo.

Una crítica, en el sentido opuesto a las dos anteriores, es que, como propone el propio Downs, podemos imaginar que, en el curso de sus actividades diarias, los individuos reciben un flujo frecuente de información, alguna de la cual puede tener algún valor para decidir cuál es la alternativa correcta. Downs contrargumenta que incluso asimilar información gratuita puede requerir un esfuerzo cognitivo mínimo de parte del votante (Downs 1977: 245).

10.6. Comentarios finales

Como dije en la introducción, el modelo propuesto puede calificarse de *condorcetiano*, en tanto pone énfasis en la habilidad de las elecciones para descubrir el interés común. Por supuesto, cuando solo hay dos alternativas, siempre podemos definir el interés común como el interés de la mayoría. Con más de dos alternativas, la lección o una de las lecciones del Teorema de Arrow es que puede ser imposible describir de manera consistente tal cosa como el interés de la mayoría. Como típicamente existen más de dos alternativas en los problemas de decisión colectiva, esta lección de Arrow ha motivado una visión de la decisión social como un problema de controlar y vigilar a los gobernantes, y de asegurar la circulación del liderazgo político, antes que de descubrir un (posiblemente inexistente) interés común. Podríamos llamar a esta una visión *arroviana* de la decisión social. El politólogo William Riker (1982) usaba más bien los términos *populista* y *liberal* (en vez de *condorcetiano* y *arroviano*), pero estos dos términos tienen tal vez connotaciones demasiado fuertes en el medio peruano.

¿Cuál es la perspectiva acertada, la condorcetiana o la arroviana, para los modelos formales de la política? Ambas reflejan, en mi opinión, aspectos de la realidad relevantes en diferentes circunstancias. La política puede ser entendida, en algunas circunstancias, como un problema de elección entre intereses opuestos y, en otras circunstancias, como un problema de descubrimiento de intereses comunes a al menos la mayoría de los ciudadanos. La visión arroviana ha sido más aceptada por los economistas, posiblemente porque es consonante con los supuestos habituales (aunque no inevitables) en los modelos económicos, tales como el individualismo metodológico y una función de utilidad estrictamente egoísta. Pero, en modelos políticos, estos supuestos habituales pueden ser bastante inadecuados —véase, por ejemplo, los modelos de participación electoral revisados por Feddersen (2004), en particular el que enfatiza la lealtad de carácter ético al grupo y que construye sobre ideas que se remontan a las reflexiones de Harsanyi (1977, 1992) sobre moralidad y teoría de juegos—.

En mi propio trabajo de investigación, en la teoría de la decisión colectiva, como en el modelo reseñado en este artículo, he puesto énfasis en la visión condorcetiana no por creer que esta sea la correcta de manera exclusiva sino porque he encontrado en ella preguntas interesantes abiertas en las que mi investigación podría empujar (aunque sea un poco) la frontera del conocimiento. Creo que esta inquietud por empujar la frontera se la debo a mis maestros de la Universidad Católica, y en particular, a Ramón García-Cobián, y que mi trabajo sobre la decisión colectiva, de alguna manera, hace eco, muchos años después, de la inquietud de Ramón por explicar a sus colegas y a un grupo de estudiantes de licenciatura el Teorema de Arrow, ese resultado brillante y para mí, al menos entonces, difícil y retador.

Referencias bibliográficas

- [1] Arrow, K. (1963), *Social Choice and Individual Values*, segunda edición, Yale University Press: New Haven y Londres.
- [2] Becker, G. (1983), A Theory of Competition among Pressure Groups for Political Influence, *Quarterly Journal of Economics* 98, 371-400.
- [3] Chwe, M. (1999), Minority Voting Rights can Maximize Majority Welfare, *American Political Science Review* 93, 85-97.
- [4] Downs, A. (1957), *An Economic Theory of Democracy*, Harper Collins Publishers: Nueva York.
- [5] Duggan, J. y Martinelli, C. (2001), A Bayesian Model of Voting in Juries, *Games and Economic Behavior* 37, 259-294.
- [6] Durrett, R. (1991), *Probability: Theory and Examples*, BrooksCole Publishing Company: Pacific Grove, California.
- [7] Feddersen, T. (2004), Rational Choice Theory and the Paradox of Not Voting, *Journal of Economic Perspectives* 18, 99-112.
- [8] Feddersen, T. y Pesendorfer, W. (1997), Voting Behavior and Information Aggregation in Elections with Private Information, *Econometrica* 65, 1029-1058.
- [9] Feddersen, T. y Sandroni, A. (2005), Ethical Voters and Costly Information Acquisition, borrador en circulación.
- [10] Feller, W. (1971), *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. II, segunda edición, John Wiley y Sons: Nueva York.

- [11] García-Cobián, R. (1985), Una Versión Didáctica del Teorema de Imposibilidad de Arrow, *Economía (Universidad Católica del Perú)* 8, 115-126.
- [12] Gerling, K., Grüner, H.P., Kiel, A. y Schulte, E. (2005), Information Acquisition and Decision Making in Committees: A Survey, *European Journal of Political Economy* 21, 563-597.
- [13] Harsanyi, J. (1977), Morality and the Theory of Rational Behavior, *Social Research* 44, 623-656.
- [14] Harsanyi, J. (1992), Game and Decision Theoretic Models in Ethics, en Aumann, R. y Hart, S. (eds.) *The Handbook of Game Theory, Volumen 1*, Elsevier North-Holland: Amsterdam, Holanda.
- [15] Martinelli, C. (2005), Would Rational Voters Acquire Costly Information?, *Journal of Economic Theory*, en prensa.
- [16] Martinelli, C. (2005), Rational Ignorance and Voting Behavior, *International Journal of Game Theory*, en prensa.
- [17] Palfrey, T.R. y Rosenthal, H. (1985), Voter Participation and Strategic uncertainty, *American Political Science Review* 79, 62-78.
- [18] Radner, R. y Stiglitz, J. (1984), A Nonconcavity in the Value of Information, en Boyer, M. y Kihlstrom, R. (eds) *Bayesian Models in Economic Theory*, Elsevier: Amsterdam.
- [19] Persico, N. (2004), Committee Design with Endogenous Information, *Review of Economic Studies* 71, 165-191.
- [20] Riker, W.H. (1982), *Liberalism against Populism: A Confrontation Between the Theory of Democracy and the Theory of Social Choice*, Waveland Press: Prospect Heights, Illinois.
- [21] Rothschild, E. (2001), *Economic Sentiments: Adam Smith, Condorcet, and the Enlightenment*, Harvard University Press: Cambridge, Mass.
- [22] Young, P. (1988), Condorcet's Theory of Voting, *American Political Science Review* 82, 1231-1234.

Impresión:

ROBLE ROJO GRUPO DE NEGOCIOS S.A.C.

Teléfonos: 348 5571 / 349 6636

info@roblerojo.com

www.roblerojo.com

2007

LIMA - PERÚ

Ramón García-Cobián es ingeniero civil por la Universidad Nacional de Ingeniería y Doctor en Matemáticas por la Universidad de Southampton, Inglaterra. Ha realizado estudios de postgrado en Ingeniería en Matemáticas Aplicadas en la Universidad de Lovaina, Bélgica; en Economía en la Pontificia Universidad Católica del Perú y en Filosofía en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Sus numerosos ensayos y artículos tratan sobre investigación de operaciones, teoría de catástrofes, teoría de juegos, elección social, equilibrio general y economía dinámica, entre otros temas.

Es docente de la Pontificia Universidad Católica del Perú desde 1970. Su enorme y contagioso apetito intelectual, su exigente amor por la precisión y su compromiso ético con el conocimiento han iluminado a varias generaciones de estudiantes de Matemáticas y de Economía, para quienes sus enseñanzas representaron una sincera invitación a la vida académica.

Los artículos que componen este libro constituyen un recorrido por las materias que el doctor Ramón García-Cobián ha investigado a lo largo de su vida académica y profesional. Con ellos, sus alumnos y colaboradores han buscado rendir un merecido homenaje a su insigne maestro.

ISBN-978-9972-42-812-8



9789972428128