

ALFREDO POIRIER

# Iteración de polinomios y funciones racionales



FONDO  
EDITORIAL

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ



## ITERACIÓN DE POLINOMIOS Y FUNCIONES RACIONALES



Alfredo Poirier

# ITERACIÓN DE POLINOMIOS Y FUNCIONES RACIONALES



**FONDO  
EDITORIAL**

PONTIFICIA **UNIVERSIDAD CATÓLICA** DEL PERÚ

*Iteración de polinomios y funciones racionales*

Alfredo Poirier

© Alfredo Poirier, 2016

© Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú, 2016

Av. Universitaria 1801, Lima 32, Perú

feditor@pucp.edu.pe

www.fondoeditorial.pucp.edu.pe

Portada, corrección de estilo y cuidado de la edición: Fondo Editorial PUCP

Diagramado por el autor

Promotor de la iniciativa *Matemáticas*: de la PUCP al Perú: Francisco Ugarte

Primera edición: febrero de 2016

Tiraje: 500 ejemplares

Prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio, total o parcialmente,  
sin permiso expreso de los editores.

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2016-01409

ISBN: 978-612-317-154-4

Registro del Proyecto Editorial: 31501361501021

Impreso en Tarea Asociación Gráfica Educativa

Pasaje María Auxiliadora 156, Lima 5, Perú

# Índice

Introducción	13
1. Prerrequisitos mínimos del análisis complejo	15
2. Funciones propias y espacios de recubrimiento	37
Un curso relámpago en espacios de recubrimiento	47
3. Familias normales	63
Una prueba del teorema de Montel	67
4. Algunos preliminares de sistemas dinámicos	71
El cambio de variables como herramienta de los sistemas dinámicos	77
5. Conceptos básicos de dinámica polinomial	83
6. Iteración de funciones racionales	91
7. Puntos periódicos	93
8. El método de Newton	97
9. Una primera ojeada al conjunto de Julia	101
10. Discos de Siegel y puntos de Cremer	111
11. Órbitas atractoras	115
12. Cuencas parabólicas	123
13. Densidad de puntos periódicos en el conjunto de Julia	143
14. Productos de Blaschke	151
15. Componentes periódicas simplemente conexas	161
16. Componentes críticas periódicas	173
17. La estructura del conjunto de Fatou	179
18. El conjunto de Mandelbrot	189
Índice temático	197
Referencias	199



## Prólogo

Este libro es el resultado de una serie de cursos que ofreció el doctor Alfredo Poirier, profesor del Departamento de Ciencias, Sección Matemáticas, de la Pontificia Universidad Católica del Perú, en el marco de la iniciativa *Matemáticas: de la PUCP al Perú* durante los años 2013, 2014 y 2015 en las Universidades Nacionales de Piura, Cusco, Puno, Ayacucho y Ancash.

Como promotor y organizador de este proyecto, que desde el año 2013 ha movilizó a trece profesores de la PUCP y a seis profesores de universidades de Brasil y España para ofrecer en total cuarenta cursos en siete universidades del país, me produce gran satisfacción el haber concretado la publicación de este libro, pues por un lado quedará como huella de este esfuerzo sin precedentes y, por otro, permitirá que estos temas estén a disposición de todos los estudiantes y matemáticos del Perú.

Debo agradecer a quienes hicieron posible la iniciativa, en particular a los promotores locales, por su desinteresada colaboración y compromiso. También corresponde mencionar a la vicerrectora de investigación de la PUCP, doctora Pepi Patrón, como al vicerrector administrativo, doctor Carlos Fosca, por el respaldo a este proyecto.

Finalmente dejo constancia de que esta publicación ha sido parcialmente financiada por el vicerrectorado de investigación de la PUCP, a través de los Proyectos DGI0141 y DGI0095 del 2013.

Francisco Ugarte Guerra

Promotor nacional de la iniciativa *Matemáticas: de la PUCP al Perú*



## Presentación

Siempre la publicación de un nuevo libro es un motivo de celebración. Es la esperanza de que el conocimiento sigue avanzando y de que existen personas comprometidas con la investigación que tienen el impulso creativo para aventurarse por senderos no hollados. Sin embargo, el mérito del texto que presentamos es todavía mayor. No solo se trata del trabajo de uno de los matemáticos más destacados y comprometidos con su disciplina con los que cuenta la Pontificia Universidad Católica del Perú, el doctor Alfredo Poirier, sino que es el resultado de un esfuerzo por crear una comunidad de conocimiento en nuestro país. Su contenido se gesta a partir del trabajo y diálogo realizado en dos universidades importantes que conforman la Red Peruana de Universidades (RPU): la Universidad Nacional del Piura y la Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco. Con esta publicación, el conocimiento desarrollado a partir de esos encuentros regresa a ellas, y a todas las universidades del Perú, en la forma de un texto que puede servir de base para el dictado de un curso sobre la iteración de funciones racionales.

Precisamente, la vocación del texto por contribuir con el desarrollo de capacidades en nuestro país es lo que para nosotros lo convierte en tan meritorio. Estos son los esfuerzos en los que la RPU se enorgullece de participar. El proyecto en el que a su vez se inscribe esta contribución, *Matemáticas 2013: de la PUCP al Perú*, promovido por el infatigable doctor Francisco Ugarte, es uno de los más importantes en los que la RPU colabora. Es una valiosa experiencia que debería ser replicada en otros campos del conocimiento porque no solo promueve la excelencia académica y estimula la investigación, sino porque crea una comunidad académica. Logra que los profesores e investigadores de las diversas regiones del Perú se encuentren, se conozcan y compartan sus hallazgos; es decir, constituyan una red. Esta experiencia da un sentido pleno al objetivo para el cual la RPU ha sido creada. Porque, además, esta red no se queda en nuestro país sino que se extiende a otros, e incorpora nuevos nodos, como España y Brasil.

Lograr que la academia local establezca lazos que permitan producción de conocimiento en beneficio de la sociedad es el reto de la RPU. Con esta publicación del doctor Poirier queda demostrado que es posible conseguir este objetivo, y que con *Matemáticas: de la PUCP al Perú* se sigue haciendo realidad.

Doctora Estrella Guerra Caminiti  
Jefa de la Oficina de la Red Peruana de Universidades y Entorno  
Dirección Académica de Relaciones Institucionales



# Introducción

Estas notas buscan iniciar al lector en el área de la iteración de funciones racionales. Hemos decidido priorizar la dinámica polinomial pues así pueden organizarse pruebas completas sin entrar en detalles poco o nada significativos a un nivel introductorio.

Esta exposición debe mucho al libro de John Milnor [5]. Ello no es casualidad: estamos ante un texto excepcional que dejó huella en gran parte de una generación. Otras fuentes indispensables son el tercer capítulo del libro de Robert Devaney [2] y el libro de Carleson y Gamelin [1].

La publicación de este trabajo nace de un proyecto de la Pontificia Universidad Católica del Perú titulado *Matemáticas 2013: De la PUCP al Perú*, coordinado por Francisco Ugarte. Dentro de este marco, se dictaron sendos cursos introductorios de ocho horas en la Universidad Nacional de Piura y en la Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco. Este material es complementario a dichos eventos, y, tal como está planificado, sirve de base para un curso de entre 48 y 60 horas de duración. Un sincero agradecimiento a quienes sirvieron de “conejiillos de india”.

En los primeros tres capítulos presentamos los prerrequisitos. Intercalamos material más o menos conocido, pero hasta cierto punto reinventado, con nociones frescas. Una parte es extraída de Lang [4] —para resultados clásicos—, otra, de Poirier [7] —en lo que toca a ideas geométricas—. El capítulo 2 pretende ser un curso relámpago en funciones propias y espacios de recubrimiento. Aquí adaptamos material de Munkres [6] a nuestros fines precisos: la categoría analítica. Sigue un breve recuento de las familias normales y el teorema de Montel.

Introducimos el tema propiamente dicho en los capítulos 4 y 5, de dificultad creciente. El capítulo 4 se orienta a familiarizarnos con el lenguaje de los sistemas dinámicos. Aquí es motor el ejemplo 4.1, análisis tomado prestado de [2]. La idea de presentar pinceladas de la teoría de los sistemas dinámicos racionales a través de un ejemplo prosaico es copiado casi a la letra. En el capítulo 5 nos topamos por vez primera con la dinámica polinomial. Si bien este encuentro es bastante superficial, ya presagia un vasto campo de estudio.

En el capítulo 6 penetramos en el terreno de la teoría de iteración de funciones racionales al hablarse de los conjuntos de Julia y de Fatou. En términos didácticos, el conjunto de Fatou se caracteriza por ser la colección de puntos donde la dinámica es estructuralmente estable y, hasta cierto punto, predecible. El conjunto de Julia es, en

revancha, el lugar que alberga los mayores misterios. Los primeros puntos que atrapan nuestro interés son los periódicos; a una primera clasificación de estos nos abocamos en el capítulo 7. Con las pocas herramientas desarrolladas, arrojamos cierta luz sobre el método de Newton, cronológicamente el primer sistema dinámico en lo que a iteración de funciones racionales concierne. Cerramos este bloque con un listado de las propiedades básicas del conjunto de Julia.

Iniciamos el estudio de la teoría local concentrándonos en tres tipos de componentes de Fatou: los dominios de rotación, las cuencas atractoras y las cuencas parabólicas. Los discos de Siegel, tratados en el capítulo 10, son las componentes que admiten un punto periódico interior alrededor del cual la dinámica se comporta como una rotación. Las componentes atractoras, tema del capítulo 11, admiten una órbita a la que tienden sus vecinos sin excepción. Curiosamente, existen también componentes que son arrastradas en masa no a un punto interior, sino a la frontera; nos enfrentaremos a estas componentes parabólicas en el capítulo 12.

Con el conocimiento ganado, podemos volcarnos al análisis global. Constatamos en el capítulo 13 que gran parte de las propiedades ya establecidas para el conjunto de Julia de  $z \mapsto z^2$  persisten en toda generalidad. Como consecuencia, deducimos de manera indirecta que la cantidad de componentes de Fatou periódicas —de las ya vistas— es finita. Un buen ejemplo de aplicación es el estudio de los productos de Blaschke (capítulo 14). Entendida la dinámica en esta familia, la clasificación de componentes periódicas simplemente conexas se completa en el capítulo 15. Llegado este punto, en el capítulo 16 caemos en la cuenta de que todas las componentes periódicas con un mínimo de regularidad —mídase ello por ser simplemente conexas o por no restringir a automorfismos de regiones exóticas— se adscriben a los formatos ya mencionados: discos de Siegel, componentes atractoras (lo que incluye las superatractoras) o parabólicas. Con esta descripción cerramos el circuito al demostrar en el capítulo 17 que la posible alternativa se halla en las rotaciones de anillos topológicos, los llamados anillos de Herman.

Clausuramos la exposición con una escueta reseña del conjunto de Mandelbrot.

Aquí un comentario sobre la métrica hiperbólica. Aunque esta sea omnipresente cada vez que se invoca el lema de Schwarz, hemos rehuído su uso explícito. Admirablemente, lo que se requiere de esta es absorbido por el lema 1.29, elemental.

# 1 Prerrequisitos mínimos del análisis complejo

En esta sección preliminar reexaminamos una serie de formulismos del análisis complejo clásico. No pretendemos ser exhaustivos, sino, más bien, privilegiar material por utilizarse posteriormente. En general, no presentaremos demostraciones salvo que estas sean concisas y aporten algo concreto. Advertimos al lector que algunas pruebas son elementales y se encuentran en los fundamentos de la teoría, mientras otras son más avanzadas, pero están bien documentadas. En la medida de lo posible haremos un comentario para asegurarnos de su correcta utilización.

En estas notas haremos uso extensivo de algunos conjuntos: el **plano complejo**  $\mathbb{C}$ , la **esfera de Riemann**  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  (o **plano complejo extendido**), el **disco unitario**  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , el **círculo unitario**  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , el exterior del disco cerrado unitario  $\mathbb{D}_\infty = \{\infty\} + \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ , el **plano agujereado**  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ , el **disco agujereado**  $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} - \{0\}$ , el **semiplano superior**  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{im } z > 0\}$  (o **hiperbólico**).

Una función constante, digamos igual a  $x$ , se denotará por  $c_x$ .

## Coordenadas

Dado un espacio topológico  $X$ , un **sistema de coordenadas analítico complejo para un abierto**  $A \subset X$ , o un **sistema de coordenadas para**  $A$  pues no habrá lugar a confusión, es un homeomorfismo (es decir, una función continua con inversa continua)  $\varphi : A \rightarrow U \subset \mathbb{C}$ . En términos simples, algo “abstracto” en  $X$  lo plasmamos en forma numérica.

Esta definición, en principio inocente, permite encarar, mediante artificios del análisis complejo, funciones que de otro modo permanecerían un tanto difusas. Esto se hace patente con la siguiente definición. Decimos que  $f : X \rightarrow Y$  es **analítica** si existen sistemas de coordenadas  $\varphi : X \rightarrow U \subset \mathbb{C}$ ,  $\psi : Y \rightarrow V \subset \mathbb{C}$  con los que  $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U \rightarrow V$  es holomorfa. En la práctica se aprecia el significado de esta idea a través del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ U & \xrightarrow{\tilde{f}} & V. \end{array}$$

**Ejemplo 1.1.** En principio, mientras no nos interesen los números como valores, sino como miembros de un espacio topológico, trataremos al punto  $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$  como un elemento ordinario. Para ello es indispensable un sistema de coordenadas que lo invite a convivir con el resto. El sistema idóneo es la recíproca  $w = \varphi(z) = 1/z$  que convierte  $z = \infty$  en  $w = 0$ .

En esta plataforma, para entender  $f(z) = \frac{1}{1+z}$  en las proximidades de  $z = \infty$ , reemplazamos  $w = 1/z$  y obtenemos

$$\tilde{f}(w) = \frac{1}{1+1/w} = \frac{w}{w+1},$$

la cual, por ser holomorfa en  $w = 0$ , delata a  $f$  como analítica en  $z = \infty$ . El valor corrientemente asignado a  $f(\infty)$  es 0, igual a  $\tilde{f}(0)$ .

Amplia oportunidad para practicar este método se presenta cuando  $f(z_0)$  no está definido en  $z_0 \in U$ . En este caso, la inversión se efectúa en el conjunto de llegada. La nueva función a estudiar será entonces  $F(z) = 1/f(z)$ . Por ejemplo en  $z_0 = 2$  la función  $f(z) = 1/(z-2)^2 + 1/(z-2) = (z-1)/(z-2)^2$  registra un polo. Al trabajar como fue sugerido, tenemos

$$F(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-1)/(z-2)^2} = \frac{(z-2)^2}{z-1},$$

holomorfa en  $z = 2$ . Ello es síntoma de la analiticidad de  $f$ , la función original, en el punto ya mencionado.

**Ejercicio 1.2.** Demuestre que  $c_\infty$ , la función idénticamente igual a  $\infty$ , es analítica.

**Ejercicio 1.3.** Demuestre que la función  $e^{-1/z}$  no es analítica en  $z_0 = 0$ . [Sugerencia: ¿será  $f$  continua en  $z_0 = 0$ ?]

Una situación ilustrativa se presenta cuando la imagen de  $\infty$  es tácitamente  $\infty$ , en particular para los polinomios, pues debemos recurrir a inversión numérica tanto en el dominio como en el rango.

Sea  $P(z) = a_d z^d + \dots + a_0$  con  $d \geq 1$  y  $a_d \neq 0$ . Al reemplazar  $z$  por  $1/w$  y  $P$  por  $1/P$  obtenemos la función holomorfa

$$\tilde{P}(w) = \frac{1}{P(1/w)} = \frac{1}{z^d} \frac{1}{a_d + \frac{a_{d-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^d}} = \frac{w^d}{a_d + a_{d-1}w + \dots + a_0 w^d}$$

(en el tercer término hay cierto abuso notacional que no debe calificarse de exceso). En consecuencia, *los polinomios son analíticos en  $\infty$* .

Las pruebas de los siguientes resultados son bastante asequibles y pueden consultarse en Poirier [7] (específicamente capítulo 1), a donde remitimos al lector para propiedades adicionales de sistemas locales de coordenadas.

**Proposición 1.4.** *Sea  $f : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  una función no idénticamente igual a  $\infty$  definida en cierta vecindad conexa del plano. Entonces  $f$  es analítica si y solo si  $f$  es meromorfa en la acepción usual del término.*  $\square$

**Proposición 1.5.** *Sea  $f : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  una función no idénticamente igual a  $\infty$  definida en una vecindad de  $\infty$ . Entonces  $f$  es analítica en  $z_0 = \infty$  si y solo si  $f$  acepta un desarrollo de Laurent convergente*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^n a_k z^k,$$

*con apenas un número finito de potencias positivas, esto es, con  $n < \infty$ .*  $\square$

Como muestra, y por ser de interés, presentamos la caracterización de las funciones analíticas en la esfera de Riemann acompañada por alguna de sus propiedades. La prueba omitida es elemental, aunque algo larga, y se encuentra disponible en [7, capítulo 1].

**Proposición 1.6.** *Toda función analítica de la esfera de Riemann en sí misma que no es idénticamente igual a  $\infty$  es una función racional, es decir, puede expresarse como el cociente de dos polinomios. Toda función racional no constante tiene un grado bien definido. Este grado, digamos  $d$ , es tal que todo punto acepta  $d$  preimágenes contadas con multiplicidad. Además, la composición de una función de grado  $d_1$  con una función de grado  $d_2$  es de grado  $d_1 d_2$ .*  $\square$

## Algunos resultados sueltos válidos en $\mathbb{C}$

Incluso al querer un análisis complejo libre de coordenadas, muchas veces tropezaremos con propiedades que serán expresadas de manera más ágil a través de valores numéricos concretos. En los siguientes resultados se conjuga lo analítico con lo topológico. Para las tres pruebas nos remitimos a Lang [4].

**Teorema 1.7** (Teorema de Liouville). *Toda función holomorfa  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  acotada es constante.*  $\square$

**Proposición 1.8.** *Para  $f$  holomorfa las siguientes propiedades son equivalentes.*

- La función  $f$  admite inversa topológica local cerca de  $z_0 \in U$ ;
- la función  $f$  admite inversa holomorfa local cerca de  $z_0 \in U$ ;
- la función  $f$  es localmente inyectiva cerca de  $z_0$ ;
- se cumple  $f'(z_0) \neq 0$ .  $\square$

Muchas veces nos interesa contar las soluciones de una ecuación dada o, lo que es lo mismo, las preimágenes de una función, dentro de una región predeterminada. Cuando los elementos son analíticos, existe un procedimiento estándar.

**Proposición 1.9.** *Sea  $f$  holomorfa (un polinomio, verbigracia) definida en una vecindad del disco cerrado centrado en  $z_0$  y de radio  $r$  y que no se anula sobre  $\mathcal{C} = \{z : |z - z_0| = r\}$ . Entonces la integral*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

*donde  $\mathcal{C}$  describe la frontera de la bola orientada contra el reloj, cuenta el número de ceros de  $f$  al interior de  $B(z_0, r)$ .*  $\square$

## Rigidez

Una característica de las funciones analíticas es su rigidez. Esto se puede precisar de innumerables formas, con o sin coordenadas de por medio. Los siguientes resultados son familiares en el caso holomorfo (ver por ejemplo [4]), y trasladarlos al contexto analítico es rutina (comparar [7]).

**Teorema 1.10** (Principio del módulo máximo). *Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica con  $U$  conexo. Si  $\sup_{z \in U} |f(z)| = |f(z_0)|$  para cierto  $z_0 \in U$ , entonces  $f$  es constante.*  $\square$

**Teorema 1.11** (Teorema de la función abierta). *Sea  $f : U \rightarrow V$  analítica con  $U$  conexo. Entonces  $f(W)$  es abierto para todo abierto  $W \subset U$  o, en su defecto,  $f$  es constante.*  $\square$

**Teorema 1.12.** *Sean  $f, g : U \rightarrow V$  analíticas con  $U$  abierto y conexo. Supongamos que en un conjunto  $X \subset U$  con punto de acumulación interno se tenga  $f(z) = g(z)$  para  $z \in X$  (por ejemplo en un subconjunto abierto no vacío de  $U$ ). Entonces  $f$  y  $g$  son idénticas.*  $\square$

## Equivalencia de espacios analíticos

Diremos que dos espacios topológicos son **analíticamente equivalentes** si existe una función analítica entre ellos con inversa analítica. Hay que tomar en cuenta que aquí se filtra un cambio de coordenadas global.

**Ejemplo 1.13.** La inversión  $w = 1/z$  describe una equivalencia entre  $\mathbb{C}$  y  $\hat{\mathbb{C}} - \{0\}$ .

**Ejemplo 1.14.** La transformación fraccionaria  $\Phi(z) = \frac{z-i}{z+i}$  entre  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{D}$  determina una equivalencia. En efecto, de figurarnos a  $z$  como coordenada en el semiplano superior y a  $w$  en el disco, la inversa resulta ser  $z = \Psi(w) = i \frac{1+w}{1-w}$ . Mostremos ahora que  $\Phi$  lleva  $\mathbb{H}$  en  $\mathbb{D}$  y  $\Psi$  repone todo en su lugar.

Comprobemos primero que  $\Phi(z)$  pertenece al disco unitario siempre y cuando  $z$  se localiza en el semiplano hiperbólico. La aserción  $|\Phi(z)| < 1$  es equivalente a la desigualdad  $|z-i| < |z+i|$ ; y así, en términos geométricos, ubicamos a  $z$  más cerca de  $i$  que de  $-i$ . En pocas palabras  $z$  se ubica por encima de la recta real.

Asimismo, cuando se cumple  $|w| < 1$ , toca abogar por la positividad de la parte imaginaria de  $\Psi(w)$ , y ello pasa por escrutar el signo de la parte real de  $(1+w)/(1-w)$ , es decir de  $(1-|w|^2)/(|1-w|^2)$ ; valor positivo justamente bajo la condición propuesta.

Es importante resaltar que *el disco unitario y el plano complejo no son equivalentes dentro de la categoría analítica*, pues de otra manera tal equivalencia sería una función no constante entre  $\mathbb{C}$  y un subconjunto acotado del plano, hecho reñido con el teorema de Liouville. Este fenómeno no es más que un caso fácil de la siguiente forma del teorema de uniformización de Riemann.

**Teorema 1.15** (Teorema de uniformización de Riemann). *Todo subconjunto abierto no vacío del plano, distinto de  $\mathbb{C}$ , conexo y simplemente conexo es analíticamente equivalente a  $\mathbb{D}$ .* □

Un concepto estudiado de la mano con el de equivalencia es el de automorfismo. Con este se brinda una lista exhaustiva de las equivalencias de un espacio analítico consigo mismo. Es otras palabras, un **automorfismo** es un cambio de variables global dentro de un mismo ambiente. El resultado que sigue no es difícil, y nosotros lo presentamos para no forzar cambios de variable allí donde no existen. La referencia principal para estos dos lemas es [7, capítulo 3].

**Lema 1.16.** *Los automorfismos de  $\mathbb{C}$  vienen dados por las transformaciones lineales tipo  $\varphi(z) = \lambda z + b$ , con  $\lambda \neq 0$ .*  $\square$

**Lema 1.17.** *Los automorfismos de  $\hat{\mathbb{C}}$  pueden ser representados por cocientes de la forma*

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{con } ad - bc \neq 0,$$

llamados también **transformaciones de Möbius**.  $\square$

De cardinal importancia es la triple transitividad de la esfera de Riemann. (De nuevo, ver [7].)

**Lema 1.18.** *Dados tres puntos distintos en  $\hat{\mathbb{C}}$ , existe una única transformación de Möbius que los lleva, en orden, a  $0, 1, \infty$ .*  $\square$

Un **punto fijo** de  $f$  es un valor  $z_0$  sujeto a  $f(z_0) = z_0$ .

**Lema 1.19.** *Toda transformación de Möbius admite por lo menos un punto fijo. Si una transformación de Möbius tiene tres puntos fijos, es la identidad.*  $\square$

## Lema de Schwarz y automorfismos de $\mathbb{D}$

El siguiente resultado aparece constantemente en pruebas relacionadas con la iteración de funciones analíticas. Por el carácter elemental de su prueba, la desarrollamos entera.

**Lema 1.20** (Lema de Schwarz). *Toda función analítica  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , con  $f(0) = 0$ , está sujeta a  $|f'(0)| \leq 1$  y  $|f(w)| \leq |w|$ , para todo  $w \in \mathbb{D}$ . Para ser exactos, estas funciones satisfacen una y solamente una de las siguientes propiedades:*

- *si existe  $w_0 \neq 0$  tal que  $|w_0| \leq |f(w_0)|$ , entonces se tiene  $f(w) = \lambda w$  para algún  $\lambda$  de norma unitaria, y en este caso se cumple  $f'(0) = \lambda$ ; o en su defecto*
- *para todo  $w \neq 0$  se tiene  $|f(w)| < |w|$  a la vez que  $|f'(0)| < 1$ .*

*Es más, como consecuencia de los puntos anteriores, no bien se cumpla la condición  $|f'(0)| \geq 1$ , reconoceremos en  $f$  una rotación.*

*Prueba.* Para  $g$ , definida mediante

$$g(w) = \begin{cases} f'(0) & \text{si } w = 0, \\ f(w)/w & \text{si } w \neq 0, \end{cases}$$

la igualdad  $f(w) = wg(w)$  asegura el mismo radio de convergencia que para  $f$ . Fijemos  $r$  entre 0 y 1. Cuando se tiene  $|w| = r$ , la cota

$$|g(w)| = \left| \frac{f(w)}{w} \right| = \frac{|f(w)|}{r} \leq \frac{1}{r}$$

—válida pues se cumple  $|f(w)| \leq 1$ — restringe vía el principio del módulo máximo los valores que puede asumir  $g$  en el disco  $|w'| \leq r$ . Así, en tanto se satisfaga  $|w'| \leq |w| = r$  dispondremos del estimado

$$|g(w')| \leq \frac{1}{r}.$$

Sin embargo, dado un  $w' \in \mathbb{D}$  arbitrario, muchos  $s < 1$  acatan  $|w'| \leq s$ , y, merced a lo bosquejado atrás, este elemento está sometido a  $|g(w')| \leq 1/s$  para todos tales  $s$ . En particular, si elegimos  $s$  cercano a 1, se comprueba

$$|g(w')| \leq \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{s} = 1$$

sea cual fuere  $w' \in \mathbb{D}$ . Si recordamos la definición original de  $g$ , con lo anterior afloran dos consecuencias: al evaluar en  $w' = 0$  se constata el estimado  $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$ ; mientras para  $w' \neq 0$  se obtiene  $|f(w')| \leq |w'|$ , fruto de multiplicar la relación por  $|w'|$ .

Ahora consideremos un hipotético  $w_0 \neq 0$  con  $|w_0| \leq |f(w_0)|$ , como lo sugiere el primer añadido. Ello, encabezado por  $|g(w_0)| \geq 1$  y respaldado por el análisis del párrafo anterior, abre paso a la igualdad  $|g(w_0)| = 1$ . Hemos localizado de ese modo, en  $w_0$ , un punto interior en donde  $|g(w)|$  alcanza el máximo admitido por la teoría, y en consistencia  $g$  debe ser constante. Así, al poner  $\lambda = g(w_0)/w_0$  se recupera  $f(w) = \lambda w$  en todo  $\mathbb{D}$ .

Recíprocamente, cuando tiene  $|f'(0)| \geq 1$ , se cumple  $|g(0)| \geq 1$  (y con ello, también  $|g(0)| = 1$ ), y el supremo de  $|g|$  emerge nuevamente desde el interior.  $\square$

Cuando un automorfismo ancla el origen, su inversa hace lo propio, y el lema de Schwarz puede ser también aplicado. Ello rinde dividendos.

**Lema 1.21.** *Los únicos automorfismos de  $\mathbb{D}$  que fijan el origen son las rotaciones.*

*Prueba.* Sea  $\varphi$ , sujeto a  $\varphi(0) = 0$ , un automorfismo de  $\mathbb{D}$  con inversa  $\psi$ . Si ponemos  $w = \varphi(z)$ , obtenemos  $z = \psi(w)$ . Cuando aplicamos el lema de Schwarz a ambas funciones logramos  $|\varphi(z)| \leq |z|$  y  $|z| = |\psi(w)| \leq |w| = |\varphi(z)|$ . Gracias a ello se consigue  $|z| = |\varphi(z)|$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ , y por la segunda parte del lema de Schwarz concluimos que  $\varphi$  es una rotación.  $\square$

Ahora veamos una colección peculiar de automorfismos de  $\mathbb{D}$ . Primero fijemos  $\alpha$  sujeto a  $|\alpha| < 1$ . La transformación fraccionaria

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

cuenta con  $\varphi_{-\alpha}$  por inversa (esto es dejado al lector), y ambas resultan automorfismos de la esfera  $\hat{\mathbb{C}}$ .

**Ejercicio 1.22.** Dado  $\alpha \in \mathbb{D}$ , demuestre que la inversa de  $\varphi_\alpha$  como automorfismo de  $\hat{\mathbb{C}}$  es  $\varphi_{-\alpha}$ .

**Ejercicio 1.23.** Para  $\alpha, \beta \in \mathbb{D}$ , confirme la igualdad  $|\varphi_\alpha(\beta)| = |\varphi_\beta(\alpha)|$ .

La restricción de  $\varphi_\alpha$  a  $\mathbb{D}$  será un automorfismo. A ello apuntamos con los siguientes lemas.

**Lema 1.24.** Para  $|\alpha| < 1$ , la transformación fraccionaria  $\varphi_\alpha$  determina una biyección del círculo unitario.

*Prueba.* Basta demostrar que  $\varphi_\alpha$  lleva el círculo unitario en sí mismo: si ello es cierto, entonces  $\varphi_{-\alpha}$  hará lo mismo y, por operar en el mismo espacio, será la inversa. En otras palabras, ambas,  $\varphi_\alpha$  y  $\varphi_{-\alpha}$ , serán biyecciones de  $\mathbb{T}$ , el círculo unitario.

Demostremos entonces que  $|z| = 1$  implica  $|\varphi_\alpha(z)| = 1$ . Para ello notemos primero que  $1 - \alpha\bar{z}$  y  $1 - \bar{\alpha}z$  tienen la misma norma al ser números complejos conjugados. Así, dado que la igualdad  $z\bar{z} = |z|^2 = 1$  nos conduce a

$$|\varphi_\alpha(z)| = |\bar{z}\varphi_\alpha(z)| = \left| \frac{\bar{z}z - \alpha\bar{z}}{1 - \bar{\alpha}z} \right| = \left| \frac{1 - \alpha\bar{z}}{1 - \bar{\alpha}z} \right| = 1,$$

queda establecido el resultado. □

**Lema 1.25.** Para  $|\alpha| < 1$ , la transformación fraccionaria  $\varphi_\alpha$  es un automorfismo de  $\mathbb{D}$  con  $\varphi_{-\alpha}$  por inversa.

*Prueba.* Puesto que  $\varphi_\alpha$  es un automorfismo de  $\hat{\mathbb{C}}$ , las imágenes de  $\mathbb{T}$ ,  $\mathbb{D}$  y  $\mathbb{D}_\infty$  han de ser disjuntas. Más aún, como  $\varphi_\alpha$  es continua y  $\mathbb{D}$  es conexo, la imagen  $\varphi_\alpha(\mathbb{D})$  cae íntegra dentro de una componente conexa del complemento de  $\varphi_\alpha(\mathbb{T})$ . Sin embargo, por el lema anterior se tiene  $\varphi_\alpha(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$ , y por ello  $\varphi_\alpha(\mathbb{D})$  debe asentarse sea en el interior del disco unitario o, en su defecto, en el exterior. Como ya se cumple  $\varphi_\alpha(\alpha) = 0 \in \mathbb{D}$ , la relación  $\varphi_\alpha(z) \in \mathbb{D}$  queda validada para todo  $z \in \mathbb{D}$ . □

La recompensa a esta labor es la clasificación de los automorfismos de  $\mathbb{D}$ .

**Lema 1.26.** *Todo automorfismo de  $\mathbb{D}$  puede escribirse cual*

$$\psi(z) = \lambda \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} = \lambda \varphi_\alpha(z),$$

donde los parámetros verifican  $|\lambda| = 1$  y  $|\alpha| < 1$ .

*Prueba.* Definamos  $\alpha = \psi^{-1}(0)$ . Entonces  $\varphi_\alpha \circ \psi^{-1}$  es un automorfismo que fija el origen, es decir, una rotación, digamos multiplicación por  $\bar{\lambda} = 1/\lambda$ . De acá podemos despejar  $\psi(z)$  con confianza y concluir que este último coincide con  $\lambda \varphi_\alpha(z)$ .  $\square$

**Corolario 1.27.** *Sea  $U$  un conjunto analíticamente equivalente a  $\mathbb{D}$ . Entonces, para cada  $z_0 \in U$  existe una equivalencia  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{D}$  que lleva  $z_0 \in U$  en  $0 \in \mathbb{D}$ .*

*Prueba.* Cuando disponemos de una equivalencia  $\phi : U \rightarrow \mathbb{D}$  que lleva  $z_0$  en  $\alpha = \phi(z_0) \in \mathbb{D}$ , el lema anterior enseña cómo, de modo natural, reubicar  $\alpha$  en 0 sin abandonar  $\mathbb{D}$ .  $\square$

**Corolario 1.28.** *Una función analítica de  $\mathbb{D}$  en  $\mathbb{D}$  con dos puntos fijos es la identidad.*

*Prueba.* El corolario anterior otorga potestad para situar uno de los puntos fijos en el origen. Como la distancia de la imagen del segundo punto fijo al origen no se altera, el lema de Schwarz decreta que la función sea una rotación. Esta rotación inmoviliza dos puntos, y entre estas solo la identidad lo hace.  $\square$

El siguiente lema sale ligeramente fuera de contexto. Lo traemos a colación pues será beneficioso llegado su momento.

**Lema 1.29.** *Sea  $\varphi$  un automorfismo de  $\mathbb{D}$  que lleva  $\alpha$  en 0. Entonces  $|\alpha|, |\beta| \leq r$  implica  $|\varphi(\beta)| \leq 2r$ .*

*Prueba.* Como todo automorfismo que lleva  $\alpha$  en 0 es de la forma  $\lambda \varphi_\alpha$ , con  $|\lambda| = 1$ , es suficiente mostrar la desigualdad  $|\varphi_\alpha(\beta)| \leq |\alpha| + |\beta|$ . En uso del ejercicio 1.23 se puede asumir  $|\alpha| \leq |\beta|$ . Con ello se obtiene  $|1 - |\beta|^2| \leq |1 - \bar{\alpha}\beta|$  pues  $|\beta|^2$  y  $\bar{\alpha}\beta$  pertenecen al

disco cerrado de radio  $|\beta|^2$  centrado en el origen y en esta bola el punto más próximo a 1 es  $|\beta|^2$ . En consecuencia se cumple

$$\left| \frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right| \leq \left| \frac{\beta - \beta\bar{\beta}\alpha}{1 - \alpha\bar{\beta}} \right| + \left| \frac{\beta\bar{\beta}\alpha - \alpha}{1 - \alpha\bar{\beta}} \right| \leq |\beta| + |\alpha| \left| \frac{1 - |\beta|^2}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right| \leq |\beta| + |\alpha|.$$

□

## Automorfismos de $\mathbb{H}$

El cambiar de ambiente de trabajo de  $\mathbb{D}$  a  $\mathbb{H}$  nos permite acceder a información que de otro modo pasaría desapercibida.

**Ejercicio 1.30.** Demuestre que la subcolección de transformaciones de Möbius

$$PSL_2(\mathbb{R}) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } ad - bc = 1 \right\}$$

conforma un grupo.

**Ejercicio 1.31.** Pongamos  $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  para referirnos a la **recta real extendida**. Sea  $\varphi$  una transformación de Möbius. Para  $\varphi \in PSL_2(\mathbb{R})$  es evidente la inclusión  $\varphi(\hat{\mathbb{R}}) \subset \hat{\mathbb{R}}$ ; demuestre la recíproca. [Sugerencia:  $\varphi(0) = b/d, \varphi(\infty) = a/c, \varphi(-b/a) = 0, \varphi(-d/c) = \infty$  en alianza con  $ad - bc = 1$  es lo justo para que se cumpla  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Aplique luego el lema 1.18.]

Puesto que para  $\varphi \in PSL_2(\mathbb{R})$  se tiene

$$\operatorname{im} \varphi(i) = \operatorname{im} \frac{ai + b}{ci + d} = \frac{ad - bc}{|ci + d|^2} > 0,$$

podemos concluir junto con los ejercicios anteriores que  $PSL_2(\mathbb{R})$  es un inmenso subgrupo de automorfismos de  $\mathbb{H}$ . Estos son todos.

**Proposición 1.32.** *El grupo de automorfismos de  $\mathbb{H}$  está dado por  $PSL_2(\mathbb{R})$ .*

*Prueba.* Debemos representar todo automorfismo de  $\mathbb{H}$  como un miembro de  $PSL_2(\mathbb{R})$ . Tenemos a nuestra disposición dos formas de hacerlo, en ambas se apela al lema 1.26.

La primera se basa en el hecho trivial de que los automorfismos de  $\mathbb{D}$  y de  $\mathbb{H}$  son lo mismo tras conjugación vía un cambio de coordenadas (el sugerido en el ejemplo 1.14,

digamos). Esta es la línea de acción seguida por [7, capítulo 22] y dejamos en plena libertad al lector para consultar ahí los detalles.

La segunda forma es conceptual. Todo automorfismo de  $\mathbb{D}$  es una transformación de Möbius. El cambio de coordenadas entre  $\mathbb{D}$  y  $\mathbb{H}$  también lo es. Como consecuencia, tras conjugar, notamos que todo automorfismo de  $\mathbb{H}$  se extiende a un automorfismo de  $\hat{\mathbb{R}}$ , su frontera. Al ser así, por el ejercicio 1.31, este automorfismo pertenece a  $PSL_2(\mathbb{R})$ .  $\square$

**Nota 1.33.** Hay que aprender a leer adecuadamente la proposición anterior. En esencia esta dice que todo automorfismo de  $\mathbb{H}$  puede (y subrayamos este verbo) expresarse, de ser conveniente, como un miembro de  $PSL_2(\mathbb{R})$ .

Por ejemplo, cuando queremos intercambiar  $0$  e  $\infty$  mediante un automorfismo de  $\mathbb{H}$ , recurrimos a  $z \mapsto -1/z$ . Este automorfismo cumple con los requerimientos necesarios para pertenecer a  $PSL_2(\mathbb{R})$ , pues se satisface  $-1/z = (0z - 1)/(1z - 0)$ .

Mientras tanto, si tenemos dos números reales  $a, b$  distintos y queremos reubicarlos en  $0, \infty$ , respectivamente, con todas las de la ley, debemos procurar un automorfismo bajo el cual  $\hat{\mathbb{R}}$  sea invariante y que además lleve un punto de diagnóstico en  $\mathbb{H}$ , por ejemplo  $i$ , en un punto en  $\mathbb{H}$ . Al ensayar con  $z \mapsto \alpha \frac{z-a}{z-b}$ , con  $\alpha$  real, la evaluación

$$\operatorname{im} \alpha \frac{i-a}{i-b} = \operatorname{im} \alpha \frac{i-a-i-b}{i-b-i-b} = \alpha \frac{a-b}{1+b^2}$$

nos hará concluir que  $\alpha$  debe tener el mismo signo que  $a-b$ . El candidato idóneo es entonces la transformación  $(a-b) \frac{(z-a)}{(z-b)}$ . Esta transformación tiene una presentación en  $PSL_2(\mathbb{R})$  un tanto recargada:

$$z \mapsto (a-b) \frac{z-a}{z-b} = \frac{z/\sqrt{a-b} - a/\sqrt{a-b}}{z/\sqrt{a-b} - b/\sqrt{a-b}}.$$

Por último, si queremos asumir  $a \in \mathbb{R}$  en  $0$  sin estropear previos arreglos en  $\infty$ , siempre se puede recurrir a  $z \mapsto z-a$ . Un detalle curioso: la recíproca es cierta. *Si una translación  $z \mapsto z+z_0$  es un automorfismo de  $\mathbb{H}$  entonces se tiene  $z_0 \in \mathbb{R}$ .* En efecto, un punto en la frontera ( $0$  en este caso) es llevado a un punto ( $z_0$  para nosotros) en  $\hat{\mathbb{R}}$ , la frontera de  $\mathbb{H}$ .

Antes de conciliar la información del lema 1.19 y el corolario 1.28, que, si bien responden a intereses muy distintos, tratan acerca de los puntos fijos de una transformación de Möbius (y los elementos de  $PSL_2(\mathbb{R})$  son restricciones de transformaciones de Möbius), proponemos un ejercicio.

**Ejercicio 1.34.** Si  $z$  es punto fijo de  $\varphi \in PSL_2(\mathbb{R})$ , entonces  $\bar{z}$ , su conjugado complejo, también lo es.

**Ejemplo 1.35.** La involución  $z \mapsto -1/z$ , perteneciente a  $PSL_2(\mathbb{R})$ , tiene en  $i$  un punto fijo; su imagen especular  $-i$  es el otro.

En general, diremos que una transformación en  $PSL_2(\mathbb{R})$  es **elíptica** si tiene un único punto fijo al interior de  $\mathbb{H}$ . Esto trasladado a  $\mathbb{D}$  significa que *las transformaciones elípticas son precisamente aquellas que en algún sistema referencial son rotaciones.*

**Lema 1.36.** *Los automorfismos elípticos de  $\mathbb{H}$ , interpretados como transformaciones de Möbius, acogen exactamente dos puntos fijos: uno, digamos  $z$ , al interior de  $\mathbb{H}$  y el otro  $\bar{z}$ , su reflejo. (Para los automorfismos elípticos que actúan en  $\mathbb{D}$  el reflejo del punto fijo  $w \in \mathbb{D}$  es  $1/\bar{w} \in \mathbb{D}_\infty$ .)*

Cuando un automorfismo de  $\mathbb{H}$  (o de  $\mathbb{D}$ ) no es elíptico, debe tener al menos un punto fijo como transformación de Möbius; este se halla sobre  $\hat{\mathbb{R}}$ .

Un automorfismo de  $\mathbb{H}$  (o de  $\mathbb{D}$ ) es **parabólico** si —como transformación de Möbius— tiene un único punto fijo en la frontera. Será **hiperbólico** si tiene dos puntos fijos distintos en la frontera.

**Ejemplo 1.37.** La transformación parabólica  $z \mapsto z/(z+1) \in PSL_2(\mathbb{R})$  tiene su único punto fijo en 0.

La transformación  $z \mapsto 2z/(z+1)$  tiene sus dos puntos fijos sobre  $\hat{\mathbb{R}}$ . Como es un automorfismo de  $\mathbb{H}$  (muéstrello, pues no luce como miembro de  $PSL_2(\mathbb{R})$ ), es hiperbólico.

Al forzar el punto fijo de los parabólicos en  $\infty$  y los de los hiperbólicos en 0 e  $\infty$  se gana información adicional.

**Proposición 1.38.** *Todo automorfismo parabólico de  $\mathbb{H}$  con punto fijo en  $\infty$  tiene la forma  $z \mapsto z+b$  donde  $b$  es real.*

*Prueba.* Ya sabemos de la nota 1.33 que tales transformaciones son automorfismos de  $\mathbb{H}$ . Como  $\infty$  es su único punto fijo, todas ellas (excepto cuando  $b=0$ ) son parabólicas.

A la inversa, si  $\infty$  es punto fijo, la transformación debe ser un polinomio  $\varphi(z) = az+b$ . Si además el punto fijo es único, se debe tener  $a=1$ .  $\square$

**Proposición 1.39.** *Todo automorfismo hiperbólico de  $\mathbb{H}$  con puntos fijos en  $0$  e  $\infty$  tiene la forma  $z \mapsto rz$ , donde  $r$  es real y positivo.*

*Prueba.* Si en  $\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  se exige  $\varphi(0) = 0$ , se tendrá  $b = 0$ , mientras  $\varphi(\infty) = \infty$  implica  $c = 0$ . Cuando además  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  están atados por  $ad - bc = 1$ , se cumplirá  $ad = 1$ , es decir,  $a, d$  mostrarán el mismo signo. Al poner todo junto veremos  $\varphi(z) = rz$ , donde  $r = a/d$  será positivo.

Es evidente que tales automorfismos llevan  $\mathbb{H}$  en sí mismo tan pronto se tenga  $r > 0$ , y serán hiperbólicos si  $r \neq 1$ . □

Gracias a estas descripciones, podemos inferir propiedades suplementarias.

**Lema 1.40.** *Una potencia no trivial de un automorfismo parabólico es un automorfismo parabólico cuyo único punto fijo es el mismo que el del anterior.*

*Prueba.* Al reubicar el punto fijo del parabólico en  $\infty$  tendremos  $\varphi(z) = z + b$ . Observemos que la inversa de  $\varphi$  es  $z \mapsto z - b$ , parabólico también. Gracias a esto, una fácil inducción lleva a  $\varphi^{on}(z) = z + nb$ , para  $n \in \mathbb{Z}$ . □

**Lema 1.41.** *Una potencia no trivial de un automorfismo hiperbólico es un automorfismo hiperbólico con puntos fijos en el mismo lugar.*

*Prueba.* Al colocar los puntos fijos en  $0$  e  $\infty$  tendremos  $\varphi(z) = rz$ . Esta vez la inversa está dada por  $\varphi^{-1}(z) = z/r$ , hiperbólica también, y la inducción conduce a  $\varphi^{on}(z) = r^n z$ , para  $n \in \mathbb{Z}$ . □

**Corolario 1.42.** *Si un automorfismo de  $\mathbb{H}$  (o de  $\mathbb{D}$ ) es de orden finito, entonces es elíptico.*

*Prueba.* Por exclusión, como la potencia de un parabólico o hiperbólico no puede ser la identidad, un automorfismo de orden finito debe ser elíptico. □

Como última tarea nos proponemos estudiar cuándo dos automorfismos del espacio hiperbólico conmutan. Si bien son en apariencia nueve las combinaciones no triviales a tratar, las cuentas se simplifican sobremanera debido al siguiente conocido resultado.

**Lema 1.43.** *Sea  $z_0$  un punto fijo de  $\varphi$ . Si  $\psi$  conmuta con  $\varphi$ , entonces  $\psi(z_0), \psi^{\circ 2}(z_0), \dots$  son también puntos fijos de  $\varphi$ .*

*Prueba.* De  $\varphi(z_0) = z_0$  y la conmutatividad se pasa a  $\varphi(\psi(z_0)) = \psi(\varphi(z_0)) = \psi(z_0)$ , y  $\psi(z_0)$  resulta punto fijo de  $\varphi$ . Por lo recién demostrado  $\psi(\psi(z_0))$  será también punto fijo de  $\varphi$ ; y así sucesivamente.  $\square$

**Teorema 1.44.** *Dos automorfismos no triviales de  $\mathbb{H}$  conmutan si y solo si tienen (como transformaciones de Möbius) los mismos puntos fijos.*

*Prueba.* Sean  $\varphi$  y  $\psi$  automorfismos de  $\mathbb{H}$ , distintos de la identidad, que conmutan.

Supongamos que  $\varphi$  sea parabólico con  $z_0$  como único punto fijo. Mostraremos que lo mismo ocurre para  $\psi$ . Al ser  $\psi(z_0)$  también punto fijo de  $\varphi$ , se ha de tener  $\psi(z_0) = z_0$ . Ahora, si por el absurdo  $\psi$  tuviera un segundo punto fijo, digamos en  $z_1$ , del lema 1.43 —con los libretos invertidos— concluiríamos que  $\varphi(z_1)$  es también punto fijo de  $\psi$ . De este modo,  $\psi$  tendría tres puntos fijos nominales  $(z_0, z_1, \varphi(z_1))$  y por ser  $\psi$  no trivial, dos de ellos deben coincidir. El primer prospecto, es decir  $z_0 = z_1$ , fue desechado con la hipótesis del absurdo; el segundo,  $z_0 = \varphi(z_1)$ , nos lleva a concluir que  $z_0$  tiene dos preimágenes pues  $z_0$  también satisface  $\varphi(z_0) = z_0$ ; mientras  $z_1 = \varphi(z_1)$ , el tercero, reporta en  $z_1$  un segundo punto fijo de una transformación parabólica, lo cual es imposible.

Sea ahora  $\varphi$  con dos puntos fijos distintos, en  $z_0, z_1$ . Por el lema 1.43,  $\psi(z_0), \psi(z_1)$ , distintos entre sí también, son puntos fijos de  $\varphi$ . Como intentamos probar  $\psi(z_0) = z_0$  y  $\psi(z_1) = z_1$ , suponemos nuevamente por el absurdo que se cumple  $\psi(z_0) = z_1$  y  $\psi(z_1) = z_0$ . Esto implica que  $\psi^{\circ 2}$  consiente, aparte de los puntos fijos de  $\psi$ , puntos fijos en  $z_0, z_1$ . Por haber superabundancia de puntos fijos se debe tener  $\psi^{\circ 2} = id_{\mathbb{H}}$ . Al invertir los roles de  $\varphi$  y  $\psi$  se concluye igualmente  $\varphi^{\circ 2} = id_{\mathbb{H}}$ . De este modo, debido al corolario 1.42, ambas transformaciones son elípticas. Por definición apenas uno de los puntos fijos de  $\varphi$ , que sea  $z_0$ , está en  $\mathbb{H}$ . Sin embargo  $\psi$  es también automorfismo de  $\mathbb{H}$  y con toda justicia  $z_0 \in \mathbb{H}$  implica  $z_1 = \psi(z_0) \in \mathbb{H}$ . Esta es la contradicción pronosticada pues  $\varphi$  no puede fijar puntos distintos en  $\mathbb{H}$  sin ser la identidad.

La recíproca es válida para cualquier par de transformaciones de Möbius como es fácil de convencerse al situar estratégicamente los puntos fijos en común.  $\square$

**Nota 1.45.** Un ejemplo de dos involuciones (es decir transformaciones de orden 2) que conmutan sin compartir puntos fijos está dada por  $z \mapsto 1/z$  y  $z \mapsto -z$ . Esto no desautoriza

al teorema 1.44; simplemente demuestra que no existe una región equivalente a  $\mathbb{D}$  que sea invariante conjuntamente por estas dos funciones.

**Ejemplo 1.46.** Conocido cuáles transformaciones conmutan, podemos determinar los subgrupos abelianos de  $PSL_2(\mathbb{R})$ . Algunos ejemplos son

$$\mathcal{P} = \{z \mapsto z + b : b \in \mathbb{R}\}$$

y sus subgrupos

$$\mathcal{P}_\alpha = \{z \mapsto z + n\alpha : n \in \mathbb{Z}\},$$

donde  $\alpha$  es un real no nulo. Adicionalmente tenemos el grupo multiplicativo

$$\mathcal{M} = \{z \mapsto az : a > 0\}$$

y sus subgrupos

$$\mathcal{M}_r = \{z \mapsto r^n z : n \in \mathbb{Z}\},$$

donde  $r > 0$  es un real no nulo.

Decimos que  $\Gamma$ , subgrupo de  $aut(S)$ , el grupo de automorfismos de una superficie  $S$ , actúa **libre de punto fijo en  $S$**  si  $\gamma(z_0) = z_0$  para  $\gamma \in \Gamma$  y  $z_0 \in S$  implica que  $\gamma$  es la identidad. Por ejemplo, ningún subgrupo de  $aut(\mathbb{H})$  que contenga elípticos actúa sin puntos fijos en  $\mathbb{H}$ .

**Teorema 1.47.** *Todo grupo conmutativo que actúa libre de puntos fijos en  $\mathbb{H}$  es conjugado a un subgrupo de  $\mathcal{P}$  o  $\mathcal{M}$ .*

*Prueba.* Los parabólicos comparten único punto fijo reubicado en  $\infty$ , mientras el grupo multiplicativo enlaza con el caso hiperbólico.  $\square$

**Ejemplo 1.48.** Todos los subgrupos abelianos discretos que contienen un parabólico y que actúan en  $\mathbb{H}$  sin puntos fijos son analíticamente equivalentes a  $\mathcal{P}_1$ . Ello se debe a que al ser el grupo discreto y convenirse en que el punto fijo esté en  $\infty$ , el conjunto  $\{\alpha \in \mathbb{R} : T_\alpha(z) = z + \alpha \in \Gamma\}$  ha de ser un subgrupo discreto de  $\mathbb{R}$  y por lo mismo estará generado por un valor, digamos  $\alpha_0 \neq 0$  (comparar [7, capítulo 6]). Al hacer el cambio de variable  $w = z/\alpha_0$ , el subgrupo se leerá cual  $\mathcal{P}_1$ .

El espacio de órbitas de la acción asociada será  $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} - \{0\}$ , el disco agujereado. La proyección  $\pi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}^*$  deberá ser inerte a la acción del grupo en el sentido de cumplir  $\pi(z) = \pi(\gamma(z))$  para  $\gamma \in \mathcal{P}_1$ , y está dada por  $\pi(z) = e^{2\pi iz}$ .

**Ejemplo 1.49.** El caso multiplicativo discreto es estructuralmente distinto. En primer lugar  $z \mapsto rz$  y  $z \mapsto z/r$ , al ser inversas una de la otra, generan el mismo subgrupo discreto  $\mathcal{M}_r$ . Con estas transformaciones, los hemisferios superiores de los círculos  $|z| = 1$  y  $|z| = r$  se identifican y el espacio de órbitas resulta ser un anillo. Amplios detalles pueden hallarse en [7, capítulo 14].

## La esfera doble y triplemente pinchada y sus grupos de automorfismos

El plano complejo puede imaginarse como la esfera de Riemann con una pinchadura situada en  $\infty$ . Un forado en la esfera siempre puede suponerse en  $\infty$  y la conclusión geométrica es inmediata: todas las esferas con un agujero son la misma.

A medida que un espacio gana en complejidad, por ejemplo al ser pinchado en ciertos lugares, la cantidad de simetrías disminuye y los fenómenos tienden a individualizarse aun sin que nos percatemos de ello. Por ser de mediano interés y por corresponder a ejemplos sumamente didácticos, estudiaremos acá las esferas con unas —pocas— pinchaduras.

**Ejemplo 1.50** (La esfera doblemente agujereada). Para el estudio de la esfera con dos pinchaduras estas son situadas en  $0$  e  $\infty$ . Por supuesto, estamos hablando también del plano agujereado  $\mathbb{C}^*$ . El estudio de sus automorfismos es sucinto: por teoremas básicos de remoción de singularidades, cualquier automorfismo de  $\mathbb{C}^*$  se extiende a un automorfismo de  $\hat{\mathbb{C}}$ . Esta transformación de Möbius, es evidente, lleva puntos en  $\mathbb{C}^*$  en sí mismo y por tanto el conjunto  $\{0, \infty\}$  permanece invariante. Por suerte, el grupo de automorfismos de  $\hat{\mathbb{C}}$  que dejan tal conjunto invariante está dado por

$$\text{aut}(\mathbb{C}^*) = \{z \mapsto \lambda z^\pm : \lambda \in \mathbb{C}^*\}.$$

El plano agujereado puede concebirse como el espacio de órbitas del grupo parabólico  $\mathcal{P}_1$  esta vez al actuar sin punto fijo en  $\mathbb{C}$ . La proyección es nuevamente  $\pi(z) = e^{2\pi iz}$ .

**Ejemplo 1.51** (La esfera triplemente agujereada). Para el estudio de la esfera con tres agujeros, estos los situamos en  $1, \omega, \omega^2$ , donde  $\omega = e^{2\pi i/3}$  es una raíz cúbica primitiva de la unidad; esto supone agotar nuestros tres comodines. Su grupo de automorfismos es esta vez el conjunto de transformaciones de Möbius que permutan los tres agujeros.

Como tres valores determinan una transformación de Möbius, hay seis en total. El grupo de automorfismos está dado por

$$\{z \mapsto \omega^i z^\pm : \text{con } i \in \{0, 1, 2\}\}.$$

(Para la acción en  $\mathbb{H}$  que genera este espacio, ver ejemplo 3.14.)

**Ejemplo 1.52.** Las esferas con cuatro agujeros no son todas iguales pues no disponemos de una cuarta opción que ejercer. Por ejemplo el grupo de automorfismos de  $\hat{\mathbb{C}} - \{0, \infty, \pm 1\}$  está dado por  $\{z \mapsto \pm z^\pm\}$ , un grupo no cíclico de orden 4; mientras  $\hat{\mathbb{C}} - \{0, \infty, 1, 3\}$  no admite automorfismo no trivial. (Ver también ejemplo 2.62.)

## Invariantes

Cuando interesa un objeto, nos esmeramos por extraer la mayor información posible que sea independiente del observador. A estos objetos que incursionan de manera recurrente los llamaremos **invariantes**. En general, estos serán el motivo de estudio en cualquier área.

**Ejemplo 1.53.** Supongamos que  $U, V \subset \mathbb{C}$  sean abiertos. Entonces una equivalencia  $\varphi$  entre  $U$  y  $V$  es una función analítica invertible entre estos conjuntos. En particular, cerca de todo punto  $z_0 \in U$  esta función  $\varphi$  es localmente inyectiva. Según la proposición 1.8, se tiene  $\varphi'(z) \neq 0$  para todo  $z \in U$ .

Si decidimos imponer nuevas coordenadas en  $U$  o  $V$ , entonces la propiedad anterior resulta inmune a las coordenadas en el sentido que, hagamos como hagamos en el dominio o en el rango, obtendremos derivada no nula. Ello no puede ser distinto puesto que en la práctica apenas se efectúa la composición de funciones analíticas de derivada no nula. Esta composición, por la regla de la cadena, tampoco se anula.

Un **punto crítico** de una función es un punto donde la función no es inyectiva. Ser o no ser inyectiva es una propiedad fundamental de la teoría de conjuntos, y estamos ante un concepto independiente del sistema de observación que, así expuesto, es invariante. Es más, si una función no constante cerca de un punto  $z_0$  posee grado local  $n$ , le adjudicaremos **multiplicidad**  $n - 1$  a  $z_0$  como punto crítico. A la imagen de un punto crítico se le llama **valor crítico**; este también es un invariante.

**Ejemplo 1.54.** Cuando  $f : U \rightarrow V$  es una función holomorfa entre dos subconjuntos del plano, existe una manera fácil de detectar cuando un punto es crítico: *un número complejo  $z_0$  es punto crítico de  $f$  si y solo si cumple  $f'(z_0) = 0$ .*

Como el hecho de ser un punto crítico es una distinción topológica, concluimos una propiedad importante. *Si la derivada de una función se anula en un sistema coordenado, entonces se anula en todos.*

De esta observación, de factura simple, se desprende un corolario instrumental para el análisis complejo.

**Proposición 1.55.** *Los puntos críticos de una función analítica no constante son puntos aislados.*

*Prueba.* Sea  $z_0$  un punto crítico de  $f$ . Debemos verificar que existe una vecindad de  $z_0$  donde  $f$  no admite otro punto crítico aparte de  $z_0$ . Para ello imponemos cartas en el dominio y rango de modo que  $f$  sea holomorfa. Dado que  $z_0$  es punto crítico, en este sistema coordenado tendremos  $f'(z_0) = 0$ . Como  $f$  es holomorfa y no constante cerca de  $z_0$ , habrá toda una vecindad de  $z_0$  donde la derivada no volverá a anularse. Así, gracias al ejemplo 1.53, no existirá ningún otro punto crítico de  $f$  cerca de  $z_0$  (más allá de  $z_0$ ).  $\square$

**Ejemplo 1.56** (La derivada de una función analítica). Cuando nos permitimos cambiar de coordenadas, muchas funciones mutan y se tornan holomorfas. Algo habremos perdido en el trayecto.

Por paradójico que parezca, debemos ser cuidadosos antes de animarnos a tomar derivadas. Expliquémonos. Expresemos una función en dos sistemas coordenados distintos, digamos, al enmarcarla en el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \varphi(U) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \psi(V). \end{array}$$

Como  $f$  y  $\tilde{f}$  son materializaciones *sui generis* de una misma función analítica, moralmente los puntos  $z_0$  y  $w_0 = \varphi(z_0)$ , del dominio, a la par que  $z_1 = f(z_0)$  y  $w_1 = \tilde{f}(w_0)$ , del rango, son los mismos. Nosotros nos preguntamos bajo qué condiciones la derivada no depende del contexto, es decir, ¿cuándo es posible tener  $f'(z_0) = \tilde{f}'(w_0)$ ?

Empecemos. La conmutatividad del diagrama es garantía de  $\psi(f(z)) = \tilde{f}(\varphi(z))$ . Al aplicar la regla de la cadena obtenemos

$$\psi'(f(z_0))f'(z_0) = \tilde{f}'(\varphi(z_0))\varphi'(z_0),$$

o, de manera simplificada

$$\psi'(z_1)f'(z_0) = \tilde{f}'(w_0)\varphi'(z_0).$$

Al tener  $\psi$  y  $\varphi$  derivadas no nulas (pues los cambios de variables son inyectivos), resulta excesivo exigir igualdad entre  $\psi'(z_1)$  y  $\varphi'(z_0)$  pues en principio una simple dilatación en una carta altera la derivada por un factor constante. Por supuesto, un caso discordante nos conmina a concluir que *la derivada de una función analítica no es invariante y por consiguiente no está adecuadamente definida.*

En una circunstancia este razonamiento se viene abajo: la igualdad sí se sostiene cuando ambos miembros de la relación desplegada valen 0. En este caso, por lo ya expuesto, las derivadas  $f'(z_0)$  y  $\tilde{f}'(\varphi(z_0))$  serán 0. Esto, empero, ya hemos comprobado que es una propiedad invariante: significa que la función de interés no es inyectiva cerca del punto crítico en cuestión.

Muchas veces nos vemos compelidos a pensar en el dominio y rango de una función como el mismo ambiente de trabajo. Ello ocurre en el estudio de sistemas dinámicos, nuestra razón de ser. Cuando sea el caso, confrontaremos diagramas conmutativos tipo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ Y & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y, \end{array}$$

y en general podremos movernos con toda la libertad de acción que la manipulación de una igualdad  $w = \varphi(z)$  consienta.

Pragmáticamente hablando, un tal cambio de coordenadas se valida con un diagrama conmutativo como el arriba indicado. No obstante, un diagrama puede interpretarse de diversas maneras.

En primer lugar podemos situarnos en la esquina superior izquierda con una variable, digamos  $z$ , y recorrer las dos rutas que conducen a la casilla inferior derecha, para luego igualar. Así obtenemos

$$\varphi(f(z)) = \tilde{f}(\varphi(z)).$$

Eso no es todo. Cuando convenga invertir la variable  $w = \varphi(z)$ , las cuentas conducen a

$$\tilde{f}(w) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(w),$$

fórmula al parecer más recargada, pero que inaugura un nuevo panorama. En este caso, si asumimos a las variables  $z$  y  $w$  como la misma solo que presentadas de manera distinta, entonces quien encarna a  $f$  (la manifestación de la función en la variable  $z$ ) en la variable  $w$  resulta ser  $\tilde{f}$ .

Una tercera manera de reinterpretar el diagrama es empezar de un punto específico, por ejemplo  $z_0 \in X$ , y utilizar la notación  $z_1 = f(z_0)$  junto con los correspondientes  $w_i = \varphi(z_i)$ . Por supuesto, en este código, la relación apenas postula que se satisface  $w_1 = \tilde{f}(w_0)$ , pero se torna extremadamente nítida al tomar derivadas con la regla de la cadena y evaluar, pues con esto se saca a relucir la igualdad

$$\varphi'(z_1)f'(z_0) = \tilde{f}'(w_0)\varphi'(z_1).$$

**Ejemplo 1.57** (Los multiplicadores de los puntos periódicos son invariantes). A modo de aplicación, detectaremos un nuevo invariante en lo que a los sistemas dinámicos concierne. Dado  $f : X \rightarrow X$ , un **punto fijo** para este sistema dinámico es un punto  $z_0$  que satisface  $f(z_0) = z_0$ . Como ser igual a uno mismo no depende del sistema referencial (recuérdese que se modifica el dominio y el rango de manera coordinada), este es un concepto invariante.

Lo que acá queremos hacer notar es la posibilidad de asignar una “derivada” en estos puntos cuando  $f$  es analítica. Para ello, suponemos sin pérdida de generalidad que  $z$  está en el plano complejo. De esta forma, la función  $f$  se torna holomorfa en  $z_0$  y su derivada  $f'(z_0)$  existe. Afirmamos que *esta derivada no depende del sistema de cartas analítico utilizado*. A este valor se le llamará en lo sucesivo **el multiplicador del punto fijo**  $z_0$ .

Enumeremos los ítems pendientes para validar esta afirmación. El primer requisito es efectuar una mudanza de variable sincronizada entre dominio y rango, como arriba. Luego hemos de evaluar derivadas en estos sistemas. Con estas convenciones disponemos de  $f'(z_0)$  y  $\tilde{f}'(w_0)$ , respectivamente. Toca verificar que, sea cual fuere la carta  $\varphi$  empleada, estos valores coincidirán. Para ello, al examinar la igualdad  $\varphi'(z_1)f'(z_0) = \tilde{f}'(w_0)\varphi'(z_1)$ , dos detalles confluyen a favor nuestro: por un lado, el punto  $z_0$  es fijo (es decir cumple  $z_1 = f(z_0) = z_0$ ) y, por otro, el valor común  $\varphi'(z_0) = \varphi'(z_1)$  es no nulo (por ser  $\varphi$  un cambio de variable). En  $\varphi'(z_0)f'(z_0) = \varphi'(z_1)f'(z_0) = \tilde{f}'(w_0)\varphi'(z_1) = \tilde{f}'(w_0)\varphi'(z_0)$  cancelamos  $\varphi'(z_0)$ , y concluimos la igualdad entre  $f'(z_0)$  y  $\tilde{f}'(w_0)$ .

Pero podemos ser más punzantes y extender esta observación a los puntos periódicos. Si fijamos  $z_0 \in X$  y maquinalmente definimos  $z_{n+1} = f(z_n)$ , diremos que  $z_0$  **tiene periodo**  $n \geq 1$  si se cumple  $z_0 = z_n$ .

**Ejercicio 1.58.** Demuestre que el **multiplicador de una órbita periódica** (de periodo  $n$ ) definido por  $\lambda = f'(z_0)f'(z_1)\cdots f'(z_{n-1})$  es invariante. [Sugerencia: pruebe que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{f} & X & \cdots & X & \xrightarrow{f} & X \\
 \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow \\
 Y & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y & \cdots & Y & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y,
 \end{array}$$

es conmutativo.]



## 2 Funciones propias y espacios de recubrimiento

En el capítulo anterior repasamos detalles conocidos del análisis complejo. Si bien en algunos momentos la presentación parecía algo novedosa, no por ello dejó de ser elemental. Ahora osamos dar varios pasos al frente. Primero introducimos el concepto de función propia, el prototipo de aquellas funciones que, como las racionales, poseen un grado bien definido. En este mismo contexto derivamos la fórmula de Riemann-Hurwitz, de extrema utilidad para intuir, al menos vagamente, cómo debe ser la topología de los espacios donde están afincadas. Cerramos el capítulo con material opcional. La teoría de recubrimientos es presentada con la finalidad de habilitar un camino en espacios que no sean simplemente conexos.

### Funciones analíticas propias

Cuando se requiere poner énfasis especial en el tratamiento de preimágenes de una función, se suele recurrir a la idea de función propia. En cierta medida esto no es más que una generalización de la noción de función racional en la esfera de Riemann a otros contextos.

Una función analítica  $f : U \rightarrow V$  entre abiertos es **propia** cuando la preimagen de todo compacto no vacío es un compacto no vacío. El ejemplo predilecto está dado por las funciones analíticas entre superficies de Riemann compactas. Hacer mención a compactos no vacíos es una manera económica de cerciorarnos de que estas funciones sean sobreyectivas, en particular, no podrán ser constantes.

Una de las bondades de estos objetos es su estabilidad bajo composición.

**Lema 2.1.** *La composición de dos funciones propias es una función propia.*

*Prueba.* Para jalar un compacto no vacío con la composición, se trabaja en dos tandas: se jala en un compacto no vacío por la primera función, y este en un compacto no vacío por la segunda.  $\square$

Una función holomorfa en cierta región del plano no tiene por qué poderse extender, ni siquiera de manera continua, a la frontera. Nosotros estamos interesados en funciones que sí mantienen cierta estructura en la frontera, razón por la que estudiaremos las funciones propias. Motivemos al lector con un ejercicio.

**Ejercicio 2.2.** Una función  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  es propia si y solo si  $|z_k| \rightarrow 1$  implica  $|\varphi(z_k)| \rightarrow 1$ .

En el ejercicio anterior hay una tática pero ambigua alusión a la frontera que no es tal: es posible manejar el concepto de *convergencia a la frontera* en cualquier espacio. Para tal efecto diremos que **una sucesión  $z_n$  en  $U$  tiende a la frontera** (y en símbolos pondremos  $z_n \rightarrow \partial_U$ ) cuando para cada compacto  $K \subset U$ , existe  $N$  tal que  $n \geq N$  implica  $z_n \in U - K$ . (Acá hay estar en guardia pues no debemos confundir  $\partial_U$  con  $\partial U$ , la frontera de  $U$  en un espacio topológico más grande.) La definición equivale a afirmar que la secuencia no admite punto de acumulación en  $U$ . Con este lenguaje, el ejercicio anterior es un caso particular del siguiente lema.

**Lema 2.3.** Si  $V$  es conexo, una función analítica  $f : U \rightarrow V$  entre conjuntos abiertos es propia si y solo si  $z_n \rightarrow \partial_U$  implica  $f(z_n) \rightarrow \partial_V$ .

*Prueba.* Sea  $f$  propia y  $z_n \in U$  una secuencia arbitraria. Si  $f(z_n)$  no tiende a la frontera, entonces por definición existe un compacto  $K \subset V$  y una cantidad infinita de subíndices  $n_i$  con los cuales se tiene  $f(z_{n_i}) \in K$ . De este modo todos los  $z_{n_i}$  pertenecen al compacto  $f^{-1}(K)$ , y con ello la sucesión de los  $z_n$  no tenderá a  $\partial_U$ .

Para la recíproca es indispensable asegurarnos primero de que  $f$  es sobreyectiva. Como es claro que  $f$  no puede ser constante,  $f(U)$  resulta un conjunto abierto. También  $f(U)$  es relativamente cerrado pues  $z_n \rightarrow z \in U$  implica a  $f(z_n) \rightarrow f(z)$ , mientras  $z_n \rightarrow \partial_U$  sintoniza con  $f(z_n) \rightarrow \partial_V$ . Al ser  $f(U)$  abierto, cerrado y conexo, será idéntico a  $V$ , y podemos proceder sin traba. Sea  $K \subset V$  un compacto no vacío. Si por contradicción el cerrado  $\varphi^{-1}(K)$  no fuese compacto, existiría una secuencia  $z_n \in \varphi^{-1}(K) \subset U$  sin punto de acumulación en  $U$ . Es decir, tendríamos  $z_n \rightarrow \partial_U$  sin que la sucesión  $f(z_n)$  abandone el compacto  $K$ .  $\square$

**Ejercicio 2.4.** Demuestre que si  $\varphi$  es una función propia de  $\mathbb{D}$  en sí mismo, entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe  $r < 1$  tal que  $|z| \geq r$  implica  $|\varphi(z)| \geq 1 - \epsilon$ . [Sugerencia: la bola cerrada de radio  $1 - \epsilon$  es un subconjunto compacto del disco unitario y por consiguiente su preimagen cae dentro de una bola cerrada de radio  $r < 1$ ; traduzca esta condición a jerga matemática y luego torne el “menor” en “menor o igual”.]

Si bien para una función el ser propia es una suerte de continuidad desde y hacia la frontera, hay funciones que por derecho propio poseen tal propiedad. Para ellas tenemos lo siguiente.

**Lema 2.5.** *Sean  $U$  y  $V$  conjuntos abiertos de clausura compacta en superficies de Riemann  $R, S$ , respectivamente. Supongamos que  $f : U \rightarrow V$ , aparte de ser analítica, se pueda extender de manera continua a  $f : cl(U) \rightarrow cl(V)$ . Entonces  $f$  es propia si y solo si lleva  $\partial U = cl(U) - U$  en  $\partial V = cl(V) - V$ .*

*Prueba.* El mayor cuidado recae sobre el lenguaje: “ $\partial$ ” hace mención tanto a la frontera física de un subconjunto de una superficie, como a un lugar abstracto donde vertemos las sucesiones sin punto de acumulación; dos entidades conceptualmente distintas.

Supongamos primero que  $f$  sea propia. Para  $z \in cl(U) - U$ , por definición existe una sucesión  $z_n \in U$  con límite  $z$ . Por continuidad se tiene entonces que  $f(z_n) \in V$  converge a  $f(z) \in cl(V)$ . Como  $z_n \rightarrow \partial U$  implica  $f(z_n) \rightarrow \partial V$ , concluimos que  $f(z)$  no pertenece a  $V$ . De este modo se obtiene  $f(z) \in cl(V) - V = \partial V$ .

Para la implicación de regreso apelamos a la compacidad de  $cl(U)$ . Si  $z_n \rightarrow \partial U$ , de cualquier subsucesión se puede extraer un refinamiento convergente a un punto en  $\partial U$ . La continuidad de  $f$  en  $cl(U)$  en sociedad con la hipótesis indican que todo punto de acumulación de  $f(z_n)$  se ubica en  $\partial V$ , la frontera física de  $V$ . □

Nos interesa vincular también funciones propias con aquellas de grado bien definido. Una precaución lícita es no dejar fuera de la cuenta preimágenes obvias de un punto.

**Lema 2.6** (Semicontinuidad de la cantidad de preimágenes). *Supongamos que  $f : U \rightarrow V$ , analítica, sea tal que  $\hat{w} \in V$  tiene, exacto,  $k$  preimágenes contadas con multiplicidad. Entonces existe una vecindad  $W$  de  $\hat{w}$  y un compacto  $K_W \subset U$  con los cuales todo punto  $w \in W$  tolera en  $K_W$  exactamente  $k$  preimágenes.*

*Prueba.* Por definición de multiplicidad local, aparecen puntos  $t_1, \dots, t_m \in U$  de grados  $d_1, \dots, d_m$ , respectivamente, sujetos a  $d_1 + \dots + d_m = k$ , con los cuales tenemos  $f(t_j) = \hat{w}$ . Al ser  $f$  analítica, aparecen vecindades  $A_1, \dots, A_m$  de  $t_1, \dots, t_m$ , en cuyas clausuras las restricciones de  $f$  son de grado  $d_j$ . Si recortamos estos  $A_j$ , sus clausuras pueden suponerse disjuntas y compactas al interior de  $U$ , y definimos  $K_W = cl(A_1) \cup \dots \cup cl(A_m)$ . De este modo, todo punto de  $W = f(A_1) \cap \dots \cap f(A_m)$  tiene exactamente  $d_1 + \dots + d_m = k$  preimágenes en  $K_W$ . □

La cantera inagotable de ejemplos de funciones propias está dada por las funciones de grado finito.

**Corolario 2.7.** *Sean  $U$  y  $V$  abiertos. Toda función analítica de  $U$  en  $V$  de grado finito bien definido es propia.*

*Prueba.* Imaginemos una función analítica  $f : U \rightarrow V$  de grado  $d$  y una secuencia  $z_n \rightarrow \partial_U$  para la cual  $f(z_n)$  esté apartada de la frontera (y a juzgar por ello se acumule en  $\hat{w} \in V$ ), y derivemos una contradicción. Obsérvese que al pasar a una subsecuencia se puede asumir la convergencia de  $f(z_n)$  a  $\hat{w} \in V$ . Tomemos una vecindad  $W$  de  $\hat{w}$  asociada a un compacto  $K_W \subset U$  como en el lema anterior. Entonces, por definición de convergencia, para  $n$  grande se tiene  $f(z_n) \in W$ . Así, de la construcción de  $W$ , las  $d$  preimágenes de  $f(z_n)$  deberán buscarse en  $K_W$  y no habrá más. Con ello se tiene obligado  $z_n \in K_W$  para  $n$  grande, y los  $z_n$  se acumularán al interior de  $U$ . Esto es una contradicción pues se ha asumido  $z_n \rightarrow \partial_U$ .  $\square$

Para establecer la conversa, se procede escalonadamente: se muestra que para una función propia la cantidad de preimágenes de un punto es siempre finita y a continuación, que dicha cantidad no varía al cambiar de punto.

**Lema 2.8.** *Si  $f : U \rightarrow V$  es propia, la cantidad de preimágenes de todo punto es finita.*

*Prueba.* Si un punto  $\hat{w}$  admitiera infinitas preimágenes, estas no podrán acumularse en  $U$  pues de otro modo  $f$  sería constante. La alternativa es que exista una secuencia  $z_n \rightarrow \partial_U$  sujeta a  $f(z_n) = \hat{w}$ . Esto desdice que  $f$  sea propia.  $\square$

Pongamos  $N_f(w)$  para registrar el número de preimágenes de  $w$  con multiplicidad para  $f$  propia. La misión es establecer que, cuando  $V$  es conexo,  $N_f(w)$  no depende del punto  $w \in V$  en disputa. Con ello toda función propia tendrá un grado finito bien definido.

**Teorema 2.9.** *Sean  $U, V$  abiertos con  $V$  conexo. Una función analítica  $f : U \rightarrow V$  es propia si y solo si tiene un grado finito bien definido.*

*Prueba.* Para cada  $i$  pongamos

$$W_i = \{w \in V : N_f(w) \geq i\}.$$

Hay cuatro detalles por destacar. Primero,  $W_0$  coincide con  $V$ ; segundo, los conjuntos vienen encajados en forma descendente; tercero,  $W_1$  es, al coincidir con  $f(U) = V$ , no vacío; y, por último, del índice  $N_f(w) + 1$  en adelante, los conjuntos  $W_i$  excluirán a  $w$ .

Como  $V$  es conexo, bastará demostrar que  $W_i$  es abierto y relativamente cerrado en  $V$  para cada  $i$ , pues en el índice de ruptura se leerá el grado. Claramente el lema 2.6 señala a cada  $W_i$  como abierto. Veamos por qué estos conjuntos son relativamente cerrados. Sea  $w_n \in W_i$  una secuencia que converge a  $\hat{w} \in V$ . Elijamos  $W$ , vecindad de  $\hat{w}$ ,  $K_W \subset U$ , compacto, a la usanza del lema 2.6. Ahora, si  $N_f(\hat{w}) < i$ , por definición de  $W$  y de  $i$ , cada  $f(z_n)$  acepta al menos una preimagen, llamémosla  $t_n$ , fuera de  $K_W$ . Ahora aparece una dicotomía: o bien  $t_n$  admite un punto de acumulación en  $U$ , con lo cual al extraer una subsucesión se logra  $t_n \rightarrow \bar{t} \in U$ , o en su defecto se tiene  $t_n \rightarrow \partial U$ . Ambas situaciones son insostenibles. En el primera vertiente se cumple  $f(\bar{t}) = \lim f(t_n) = \lim w_n = \hat{w}$ , con lo cual  $w$  acepta una preimagen no antes contabilizada (entre las  $N_f(\hat{w})$  que hemos citado). En el segundo, puesto que estamos ante una función propia, se satisfaría  $w_n = f(t_n) \rightarrow \partial V$ , lo cual no es cierto pues  $\hat{w}$  es un punto interior a  $V$ .

La dirección de regreso está consignada en el corolario 2.7. □

Ahora el lema 2.1 puede reescribirse de manera más práctica.

**Lema 2.10.** *La composición de una función propia de grado  $d_1$  con una función propia de grado  $d_2$  es una función propia de grado  $d_1 d_2$ .* □

Merece un pie de página especial el comportamiento de la restricción de una función propia a subconjuntos que soportan un mínimo de simetría.

**Proposición 2.11.** *Tomemos  $f : U \rightarrow V$  analítica y propia. Si  $B \subset V$  es abierto y conexo y  $A$  es cualquier componente conexa de  $f^{-1}(B) \subset U$ , entonces la restricción  $f : A \rightarrow B$  es una función propia con un grado bien definido.*

*Prueba.* Sea  $z_n \rightarrow \partial A$ . Distinguiamos dos casos. Si  $z_n \rightarrow \partial U$ , entonces  $f(z_n) \rightarrow \partial V$ ; y así, al no acumularse  $f(z_n)$  en  $V$ , no se acumula en  $B$ , es decir, se tiene  $f(z_n) \rightarrow \partial B$ . Si al contrario  $z_n$  se acumula en  $(cl(A) - A) \cap U$ , se puede asumir convergente, digamos a  $\hat{z}$ . Por continuidad  $f(z_n)$  converge a  $f(\hat{z}) \in V$ . Acá todo pende de si  $f(\hat{z})$  pertenece o no a  $B$ . Pero esto es claro. Si  $f(\hat{z})$  perteneciera al abierto  $B$ , sería interior a  $B$ , motivo por el cual  $\hat{z}$ , al encontrarse en la clausura de  $A$ , se hallaría en el interior de  $A$ .

La cláusula adicional está inmersa en el teorema 2.9. □

## Riemann-Hurwitz

Gracias a la teoría local de funciones holomorfas damos por descontado que la proposición 2.11 se cumple si trabajamos en vecindades pequeñas. Para ser exactos, se sabe la validez de lo siguiente.

**Lema 2.12.** *Sea  $f$  analítica e inyectiva en  $u_0$ . Entonces existen vecindades  $U$  de  $u_0$  y  $V$  de  $f(u_0)$  para las cuales  $f : U \rightarrow V$  es una equivalencia. En particular, la preimagen de un subconjunto simplemente conexo de  $V$  es un subconjunto simplemente conexo de  $U$ .*

*Prueba.* Al ser  $f$  localmente inyectiva, resulta localmente invertible por proposición 1.8; exactamente lo que propone el lema.  $\square$

**Lema 2.13.** *Sea  $f$  una función analítica no localmente constante con un punto crítico en  $u_0$ . Entonces existen vecindades conexas  $U, V$  de  $u_0, f(u_0)$ , respectivamente, tales que  $f : U \rightarrow V$  es una función con un grado bien definido, digamos  $m > 1$ . Este conjunto  $V$  puede ser elegido de modo tal que todo subconjunto simplemente conexo de  $V$  sin  $f(u_0)$  en su interior y cuya frontera esté conformada por arcos analíticos admita precisamente  $m$  preimágenes en  $U$ , todas simplemente conexas.*

*Prueba.* Es un hecho elemental (cf. [4]) que cuando el grado local de una función analítica es  $m$ , existen vecindades  $U, V$  en donde, al cambiar coordenadas al dominio y rango (por separado esta vez), la función se permite leer como la restricción de  $\tilde{f}(z) = z^m$ . En la región que corresponde a  $V$  tomemos un conjunto simplemente conexo  $T$  de frontera analítica en cuyo interior no se encuentre  $f(u_0)$  (es decir 0). Como la frontera de  $T$  es analítica, podemos unir 0 con  $\infty$  mediante un arco  $\ell$  disjunto de  $T$ ; así  $\mathbb{C} - \ell$  es simplemente conexo y contiene a  $T$ . En  $\mathbb{C} - \ell$  existen  $m$  ramas de la raíz  $m$ -ésima de  $z$ , cada una de ellas una equivalencia sobre su imagen, las mismas que en conjunto reconstruyen la preimagen de  $\tilde{f}$ . Es evidente entonces que la inversa de  $T$  está compuesta por  $m$  piezas separadas, todas ellas copias de  $T$ .  $\square$

**Corolario 2.14.** *Sea  $f$  una función entre superficies de Riemann compactas, analítica, propia y de grado  $d$ . Entonces, para cualquier punto de la imagen existe una vecindad en donde todo subconjunto simplemente conexo de frontera analítica sin valores críticos en su interior admite precisamente  $d$  imágenes inversas, todas ellas subconjuntos simplemente conexos.*

*En particular esta propiedad se cumple para funciones racionales no constantes.*

*Prueba.* Cerca de cada una de las preimágenes de cierto  $v_0$  los lemas anteriores garantizan vecindades con la propiedad mencionada. En la componente conexa de la intersección de todas ellas que contiene a  $v_0$ , las preimágenes disfrutarán del atributo buscado.  $\square$

Estamos listos para enunciar y probar un teorema que restringe la cantidad de puntos críticos de una función analítica en función del aspecto topológico de las regiones en donde se asientan dominio y rango.

Recordemos que la **característica de Euler** de una triangularización finita de un espacio topológico se define como la suma alternada en el signo del número de caras (simplemente conexas), de aristas y de vértices que conforman dicha triangularización. Es sabido que este es un invariante topológico independiente de la triangularización escogida. De no poderse proveer una triangularización finita, la característica de Euler será, por definición, igual a  $-\infty$ .

**Ejemplo 2.15.** Tanto el plano complejo como el disco unitario pueden ser descritos como una única singular cara. Ambos tienen característica de Euler igual a 1.

La esfera de Riemann suele ser presentada como el plano más el punto en infinito. Así vemos una cara, cero aristas y un vértice. La característica de Euler vale por tanto  $1 - 0 + 1$ , es decir, es igual a 2.

Podemos diseccionar un cilindro abierto mediante un tajo longitudinal de base a tapa para lograr una cara y una arista. La característica de Euler es por tanto  $1 - 1 + 0 = 0$ . Si de la esfera de Riemann sustraemos dos discos cerrados (o dos puntos), nos encontramos ante un cilindro (o un cilindro infinito). Por ser la característica de Euler un invariante topológico, deberá valer 0.

Ahora, si del plano se escinden dos discos cerrados, al practicar un corte longitudinal entre círculo y círculo y trazar rectas de ellos hacia  $\infty$ , nos quedamos con dos regiones simplemente conexas acotadas por tres arcos. La característica de Euler es entonces  $-1$ .

En general, es fácil constatar que cuando el complemento de un abierto  $U \subset \hat{\mathbb{C}}$  consta de  $k$  componentes, la característica de Euler  $\chi(U)$  vale  $2 - k$ . En particular, *la característica de Euler de un subconjunto abierto del plano que no es simplemente conexo nunca es positiva.*

Es evidente también que la característica de Euler de una reunión disjunta de objetos es la suma de las respectivas características de Euler.

**Teorema 2.16** (Fórmula de Riemann-Hurwitz). *Sea  $f$  función analítica entre superficies de Riemann compactas. Supongamos que alguna restricción  $f : U \rightarrow V$  sea propia de grado  $k$ . Si  $\chi(U), \chi(V)$  denotan las características de Euler de  $U, V$ , respectivamente, entonces el número de puntos críticos de  $f$  en  $U$ , contados con multiplicidad, viene dado por*

$$\chi(V)k - \chi(U).$$

*Prueba.* Sea  $x$  el número de puntos críticos de  $f : U \rightarrow V$  al tomar en cuenta multiplicidad. Para cada punto del rango existe una vecindad que satisface las condiciones del corolario 2.14. Como las superficies son compactas, extraemos una subcobertura finita en base a estas vecindades agraciadas. Triangularicemos  $V$  de modo que todos los valores críticos de  $f$  sean vértices. Refinemos esta triangularización de forma tal que cada constituyente caiga dentro de uno de los elementos de la cobertura escogida arriba (acá se apela a la compacidad del rango). Si esta triangularización consta de  $c$  caras,  $l$  aristas y  $v$  vértices, se cumple  $\chi(V) = c - l + v$ . Que la triangularización en  $V$  esté adaptada a la cobertura es aval de que cada cara tenga exactamente  $k$  preimágenes en  $U$ , todas ellas simplemente conexas; es decir, queda determinada una triangularización de  $U$  con  $kc$  caras,  $kl$  aristas y  $kv$  vértices, estos últimos contados con multiplicidad. Como hay  $x$  puntos críticos en  $U$ , los vértices presenciales son apenas  $kv - x$ . Así, la característica de Euler de  $U$  está dada por  $\chi(U) = kc - kl + kv - x = \chi(V)k - x$ . Despejamos  $x$  y logramos la fórmula consignada arriba.  $\square$

Ahora expresimos esta relación. El primer resultado es una propiedad que puede ser probada también por medios directos.

**Proposición 2.17.** *Una función racional de grado  $d$  tiene  $2d - 2$  puntos críticos contados con multiplicidad.*

*Prueba.* Al tenerse  $\chi(U) = \chi(V) = \chi(\hat{C}) = 2$ , la cantidad de puntos críticos está dada por  $2d - 2$ .  $\square$

**Lema 2.18.** *Sea  $f$ , entre superficies de Riemann compactas, analítica. Asumamos que una restricción  $f : U \rightarrow V$  tenga grado  $k$ . Si  $U, V$  son simplemente conexos, entonces  $f$  acoge exactamente  $k - 1$  puntos críticos en  $U$  contados con multiplicidad. En particular,  $f$  determina una equivalencia analítica entre  $U$  y  $V$  si y solo si  $f$  no admite puntos críticos en  $U$ .*

*Prueba.* Se tiene  $\chi(U) = \chi(V) = 1$  y por ello la cantidad de puntos críticos es  $k - 1$ , donde  $k$  es el grado en  $U$ . Es decir, que el grado sea 1 recae única y exclusivamente en la ausencia de puntos críticos. □

**Lema 2.19.** *Sea  $f : U \rightarrow V$  de grado  $k$ . Si  $f$  no tiene puntos críticos en  $U$ , entonces se cumple  $\chi(U) = \chi(V)k$ .*

*Prueba.* El número de puntos críticos es 0. □

**Lema 2.20.** *Sea  $f : U \rightarrow U$  de grado  $k$ , donde  $U$  es abierto. Si  $f$  no tiene puntos críticos en  $U$ , entonces se presenta una de las siguientes tres posibilidades no excluyentes.*

- *El grado  $k$  es igual a 1, y con ello  $f$  es un automorfismo;*
- *la característica de Euler  $\chi(U)$  es finita e igual a 0;*
- *la característica de Euler  $\chi(U)$  es infinita.*

*Prueba.* Trivial pues si la característica de Euler es finita, la igualdad  $\chi(U)(k - 1) = 0$  indica que al menos una entre las cantidades  $k - 1$  y  $\chi(U)$  ha de anularse. □

**Ejemplo 2.21.** La función  $z \mapsto z^d$  es un recubrimiento  $d$  a 1 de  $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} - \{0\}$  sin puntos críticos. Esta ausencia de puntos críticos internos es compatible con una característica de Euler igual a 0, como la de  $\mathbb{D}^*$ .

La fórmula de Riemann-Hurwitz no solo es útil cuando se trabaja con funciones racionales o restricciones de ellas. A continuación veremos cómo ayuda a identificar la imagen de llegada de una función analítica.

**Ejemplo 2.22.** La manera común de construir un toro topológico es tomar un cuadrado e identificar lados opuestos. La manera sistemática de hacerlo es ligeramente más formal. Se fija un parámetro  $\tau \in \mathbb{H}$  de parte imaginaria positiva, y luego se define el grupo de transformaciones parabólicas

$$\Gamma_\tau = \{z \mapsto z + m + n\tau : (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$$

que actúa de manera discontinua y libre de punto fijo en  $\mathbb{C}$  (cf. [7, capítulo 16]). Al tomar el cociente de  $\mathbb{C}$  por esta acción, la estructura analítica perdura y aparece una familia de toros  $S_\tau$ , con dependencia en el parámetro  $\tau$ , cuyos puntos son las órbitas

$$\mathcal{O}(z) = \{z + m + n\tau : (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Determinar cuándo existe equivalencia entre dos de estas superficies compactas no es elaborado, mas nos desviaría de las metas trazadas (los detalles pueden consultarse en [7, capítulo 19]). Un dominio fundamental para esta acción, es decir un recinto cerrado del plano que ya captura la faceta topológica y analítica del espacio de órbitas, está dado por el paralelogramo con base  $[0, 1]$  y lado oblicuo  $[0, \tau]$ . Acá pegamos caras opuestas y logramos el toro  $S_\tau$ . La estructura analítica de  $S_\tau$  se hereda del plano a través de los patrones reticulares. El ejemplo por excelencia es la elección  $\tau = i$ ; la misma que permite la identificación rutinaria de caras opuestas del cuadrado unitario para formar  $S = S_i$ .

En algún futuro cercano habrá excusa para identificar puntos antípodas del toro  $S_i$ . Si bien es válido introducir una relación de equivalencia al emparentar  $\mathcal{O}(z)$  y  $\mathcal{O}(-z)$  en  $S_i$ , nos ahorramos discusiones retóricas si refinamos la acción de  $\Gamma$  en  $\mathbb{C}$  al tratar con el grupo discreto

$$\tilde{\Gamma} = \{z \mapsto \pm z + m + ni : (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$$

que también actúa de manera discontinua en  $\mathbb{C}$  (cf. [7, capítulo 19]), pero esta vez con puntos fijos. El cociente de  $\mathbb{C}$  por esta nueva acción, llamémoslo  $R$ , tiene por clases

$$[z] = \{\pm z + m + ni : (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Si nos fijamos detenidamente, acabamos de introducir una proyección  $\pi : S_i \rightarrow R$  mediante  $\pi(\mathcal{O}(z)) = [z]$ , la misma que es 2 a 1 puesto que evidentemente se tiene  $[-z] = [z]$ .

Al ser  $R$  la imagen de  $S_i$ , será una superficie de Riemann compacta y conexa pues  $S_i$  goza de ambas propiedades. Es más, como  $\pi$  es dos a uno, la región fundamental para la acción de  $\tilde{\Gamma}$  es, casi con certeza, la mitad del paralelogramo referencial. De hecho, cualquier punto  $z$  del cuadrado unitario es equiparable con  $1 + i - z$ , también en el mismo cuadrado. Así, basta tomar el triángulo de vértices en  $0, 1$  e  $i$  para que todos los puntos queden censados. Veamos cómo se pegan los lados de este triángulo.

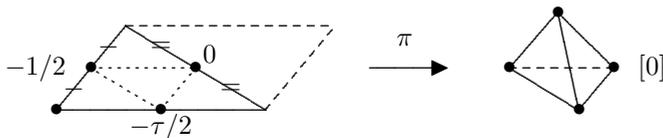


FIGURA 1. Se pliega por las líneas punteadas y al espacio de órbitas se le brinda apariencia de tetraedro; con ello ratificamos la forma esférica del cociente.

Una oportunidad de prestarle viso formal a lo dicho otórgasenos si determinamos los puntos críticos de la proyección  $\pi$ . Como  $\pi$  es dos a uno, un punto crítico es sinónimo

de preimagen doble, y ello equivale a  $\mathcal{O}(z) = \mathcal{O}(-z)$ , igualdad que pone de manifiesto la pertenencia de  $z$  a la órbita  $\mathcal{O}(-z)$ , es decir, a la existencia de enteros  $n, m$  sujetos a

$$z = -z + m + ni;$$

o a la igualdad  $z = (m + ni)/2$ . Basta limitarnos a representantes en el paralelogramo fundamental. Ahí los puntos dobles quedan retratados en  $\mathcal{O}(0) = \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(i) = \mathcal{O}(1 + i)$ , así como en  $\mathcal{O}(1/2) = \mathcal{O}(1/2 + i)$ , en  $\mathcal{O}(i/2) = \mathcal{O}(1 + i/2)$  y en  $\mathcal{O}((1 + i)/2)$ , cuatro clases en total. “Abajo”, en  $R$ , los valores críticos son  $[0], [1/2], [i/2], [(1 + i)/2]$ . En pocas palabras, en el triángulo fundamental cada arista se dobla justo por el medio hasta conformar un tetraedro. En otros términos, al imponer estructura analítica a  $R$ , lo que obtenemos es una superficie compacta de genero 0 isomorfa a la esfera. Por el teorema de uniformización de Riemann solo existe una esfera, de ahí nace la identificación  $R = \hat{\mathbb{C}}$ .

[Cortar y engomar no es, matemáticamente, muy formal. Presentamos, luego, una prueba contundente de la identificación de  $R$  con  $\hat{\mathbb{C}}$ . La característica de Euler del toro  $S$  es  $\chi(S) = 0$ . La función  $\pi$ , de grado 2, sabemos posee exactamente 4 puntos críticos contados con multiplicidad. Si  $\chi(R)$  es la característica de Euler de la superficie compacta  $R$ , entonces la fórmula de Riemann-Hurwitz entrega

$$4 = 2\chi(R) - \chi(S),$$

de donde al despejar se concluye que  $R$  es la esfera de Riemann pues esta es la única superficie compacta con característica de Euler igual a 2.]

## Un curso relámpago en espacios de recubrimiento

El siguiente material es facultativo, pues tiene poca o ninguna relevancia para el estudio directo de la iteración de polinomios. La diferencia entre el caso polinomial y el racional radica en que en el primero los acontecimientos transcurren en un mundo simplemente conexo. El nexo entre un espacio simplemente conexo y otro que no lo es se tiende con recubrimientos. Si bien no presentaremos pruebas completas —las cuales son conocidas y aparecen en fuentes accesibles (por ejemplo Munkres [6])—, desarrollaremos una amplia gama de aplicaciones y ejemplos.

Dada una función continua y sobreyectiva  $p : E \rightarrow B$ , decimos que un abierto  $U \subset B$  es **distinguido respecto a la proyección**  $p$  cuando la preimagen  $p^{-1}(U)$  puede expresarse

como una reunión disjunta de abiertos  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$  (la **descomposición** de la preimagen de  $U$ ), de modo tal que la restricción de  $p$  a cada  $V_\lambda$  determina un homeomorfismo con  $U$ , su imagen.

A nosotros nos interesa que cada punto de  $B$  esté provisto de una vecindad distinguida respecto a  $p$ . Cuando ello ocurra  $p : E \rightarrow B$  será un **recubrimiento**. De ser así, a  $B$  se le llamará la **base** y a  $E$ , la **fibra**, o, por abuso de lenguaje, el **recubrimiento**. La existencia de vecindades distinguidas permite concluir que  $p^{-1}(\{b\})$ , la **fibra sobre el punto**  $b \in B$ , es un conjunto discreto. De la misma definición resulta obvio que un recubrimiento no acepta puntos críticos.

**Ejemplo 2.23.** Un automorfismo  $\varphi : B \rightarrow B$  actúa de recubrimiento.

**Ejemplo 2.24.** La exponencial  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ , definida por  $\exp(x) = e^{2\pi i x}$ , determina un recubrimiento: debido a la periodicidad de  $\exp$ , la recta  $\mathbb{R}$  puede antojársenos como un resorte infinito que proyecta su sombra al círculo. Las vecindades distinguidas son pequeños arcos en torno a cada punto de la circunferencia.

**Ejemplo 2.25.** La función  $z \mapsto z^n$ , cuando  $n > 0$ , determina un recubrimiento del disco agujereado  $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} - \{0\}$  en sí mismo. Este autorrecubrimiento es no trivial en tanto  $n \geq 2$ . Lo importante es que este artefacto conlleva la resolución de un importante problema analítico: la extracción coherente de raíces  $n$ -ésimas.

Nosotros impondremos bastante regularidad a los espacios involucrados. Por ejemplo, al tratar con espacios analíticos, estará implícito que todas las funciones sean analíticas, salvo advertencia previa. Una que otra vez visitaremos la categoría diferenciable: el caso de excepción será el uso de coordenadas polares. Las vecindades distinguidas se evocan como cartas locales a fin de agilizar el traspaso de información entre espacios.

Una de las ventajas de los recubrimientos es que acarrear un grado bien definido. Esta vez, sin embargo, este puede no ser finito. En pocas palabras, los recubrimientos generalizan el concepto de funciones propias siempre que no aparezcan puntos críticos. O podemos razonarlo a la inversa: las funciones propias son los recubrimientos finitos con ramificación en los puntos críticos.

**Lema 2.26.** *Dado un recubrimiento  $p : E \rightarrow B$  con base conexa, la cardinalidad de una fibra  $p^{-1}(\{b\})$  no depende del punto  $b \in B$  elegido.*  $\square$

La prueba es una copia fiel a la del teorema 2.9. Se definen conjuntos  $W_i \subset B$  (esta vez  $i = \infty$  es bienvenido y requerido), y se demuestra que todos ellos son abiertos y cerrados.

La real potencia de la teoría de recubrimientos se aprecia recién al bombardear la base desde un tercer espacio a través de funciones continuas tipo  $f : X \rightarrow B$ . En caso exista una función  $\tilde{f} : X \rightarrow E$  enclaustrada en el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B, \end{array}$$

diremos que  $\tilde{f}$  es un **levantamiento de  $f$** . Por supuesto, ello equivale a escribir  $f = p \circ \tilde{f}$ , y, por lo tanto, el auténtico acertijo a resolver se reduce a, primero, proponer condiciones concretas bajo las cuales exista  $\tilde{f}$ , por ejemplo, continua, y, segundo, determinar hasta que punto la suerte de  $\tilde{f}$  depende de la información original. En este tipo de esquemas la línea quebrada es un recordatorio de que la función  $\tilde{f}$  no es parte del planteamiento, sino, por el contrario, ha de ser construida.

En general, cuando existe una solución al problema de levantamiento, aparecen de manera natural otras. Ello se debe a que un punto  $b_0 \in B$  dispone en la fibra  $p^{-1}(b_0) \subset E$  de todo un contingente de preimágenes. Para sustraernos a estos eventos circunstanciales, reformulamos el problema: partimos de  $x_0 \in X$  y tabulamos  $b_0 = f(x_0)$ , enseguida se apela a la sobreyectividad de  $p$  para encontrar  $e_0 \in E$  condicionado a  $p(e_0) = b_0$ . Estas nuevas imposiciones especializan el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & (E, e_0) \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ (X, x_0) & \xrightarrow{f} & (B, b_0); \end{array}$$

y el problema alternativo exige que se cumpla  $\tilde{f}(x_0) = e_0$  además. Bajo este supuesto la unicidad queda garantizada (mas no así la existencia).

**Proposición 2.27.** *Sea  $X$  un espacio conexo y  $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$  un recubrimiento. Entonces para  $f : (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$  continua existe a lo mucho un levantamiento continuo  $\tilde{f} : (X, x_0) \rightarrow (E, e_0)$  sujeto a  $\tilde{f}(x_0) = e_0$ . □*

**Corolario 2.28.** *Si dos levantamientos de una misma función continua coinciden en un punto, entonces son idénticos. □*

Por otra parte, bajo premisas razonables, la posibilidad de resolver el problema depende en exclusiva de cómo se relacionan los grupos fundamentales de los tres espacios. A nosotros poco nos interesa el trabajo en tal generalidad, y nos atenderemos a tratar casos sencillos, específicamente aquel cuando  $X$  es simplemente conexo.

Primero veamos el levantamiento de curvas.

**Proposición 2.29.** *Sea  $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$  un recubrimiento e  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo conexo. Toda curva  $\alpha : (I, t_0) \rightarrow (B, b_0)$  puede ser levantada a  $\tilde{\alpha} : (I, t_0) \rightarrow (E, e_0)$ . Este levantamiento continuo de caminos es único.*  $\square$

**Ejemplo 2.30.** Si  $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$  describe un recubrimiento, entonces  $c_{e_0}$ , el camino constante igual a  $e_0$ , es el levantamiento de la curva constante  $c_{b_0}$ .

**Ejemplo 2.31.** El levantamiento de la proyección de una curva solo puede ser el camino original apenas se detecte coincidencia en un punto.

Para curvas, típicamente la normativa es laxa, y nos desprecupamos de su regularidad más allá de la topológica. Cuando levantemos funciones analíticas o diferenciables seremos más exigentes. El siguiente teorema (con las modificaciones pertinentes) permanece válido en muchos espacios simplemente conexos que obedecen requisitos topológicos mínimos. (Ver [6].)

**Teorema 2.32.** *Sea  $M \subset \hat{\mathbb{C}}$  abierto, conexo y simplemente conexo y  $f : (M, m_0) \rightarrow (B, b_0)$  y  $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$  funciones analíticas. Entonces el problema de levantamiento con  $\tilde{f}(m_0) = b_0 = p(e_0)$  siempre acepta solución. Esta solución no solo es única, sino también es analítica. Lo mismo vale en la categoría diferenciable.*  $\square$

Es decir, la función  $f$  se factoriza a través de una función regular  $\tilde{f}$  con imagen en  $E$ , en el sentido que se satisface  $f = p \circ \tilde{f}$  y  $\tilde{f}(m_0) = e_0$ .

**Ejemplo 2.33.** Consideremos el autorrecubrimiento  $z \mapsto z^2$  de  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ . Si tomamos un conjunto simplemente conexo  $U \subset \mathbb{C}$  y una función  $f : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ , esta podrá ser levantada a  $\tilde{f}$  dentro del esquema

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbb{C}^* \\
 & \nearrow \tilde{f} & \downarrow z \mapsto z^2 \\
 U & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^*
 \end{array}$$

En consecuencia, se satisface  $f(z) = p(\tilde{f}(z)) = \tilde{f}(z)^2$ , y  $\tilde{f}$  se interpreta como una raíz cuadrada de  $f$ .

En particular, si  $U \subset \mathbb{C}^*$  es simplemente conexo, entonces, al tomar la identidad en  $U$ , disponemos de una “rama de la raíz cuadrada” definida en todo  $U$ .

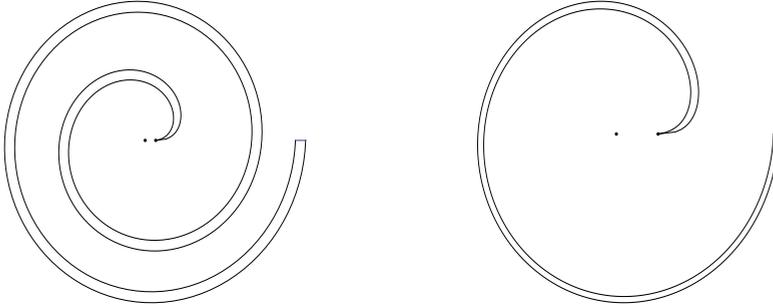
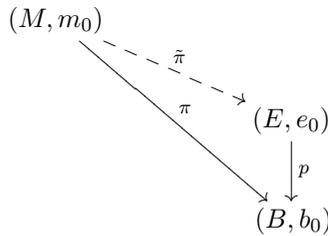


FIGURA 2. La raíz cuadrada de una región simplemente conexa que no contiene el origen. Aparecen marcados el origen y el punto  $z = 1$ . La magnificación a la derecha es por diez. Acá la raíz cuadrada de 1 vale 1; si se opta por  $-1$ , se rota 180 grados la figura de la derecha.

### Recubrimiento universal

Respecto a la jerarquía entre recubrimientos sobre una misma base que se está insinuando, el esquema



y la proposición siguiente son clave.

**Teorema 2.34.** Sean  $p : E \rightarrow B$  y  $\pi : M \rightarrow B$  recubrimientos entre espacios conexos por caminos. Si  $\pi$  acepta un levantamiento  $\tilde{\pi} : M \rightarrow E$ , entonces este necesariamente es un recubrimiento. En particular,  $\tilde{\pi}$  es sobreyectiva.  $\square$

La prueba de esta propiedad es trivial, excepto por el detalle de la suryectividad de  $\tilde{\pi}$ . Esto, empero, tampoco es difícil: como es habitual, se plantan hitos de referencia  $b_0, e_0, m_0$

en cada espacio; en  $E$  conectamos  $e_0$  con  $e$  vía un camino; la proyección de este camino (ahora entre  $b_0$  y  $b = p(e)$ ) se alza a un camino entre  $m_0$  y  $m$  en  $M$ ; al devolver esta curva a  $E$  mediante  $\tilde{\pi}$ , la unicidad —implícita en cada etapa— asegura que la curva coincide con la original; en resumen, ha de cumplirse  $\tilde{\pi}(m) = e$ .

Al considerar un recubrimiento  $p : E \rightarrow B$ , buena parte de las propiedades algebraicas y topológicas de  $B$  se ven reflejadas de forma resumida o simplificada en  $E$ . Ello, en la práctica, significa que mientras más recubrimientos de un espacio  $B$  conozcamos, tanto mejor para su estudio y comprensión. Al revisar el teorema 2.34 nos preguntamos si existe entre los recubrimientos de  $B$  uno dominante.

En ese sentido diremos que un recubrimiento  $\pi : M \rightarrow B$  (analítico o diferenciable) es **recubrimiento universal de  $B$**  si el espacio  $M$  es simplemente conexo. Para nosotros, inmersa en la definición se encuentra la conexidad de  $M$  y  $B$ . De no haber lugar a confusión, nos referiremos a  $M$  como **recubrimiento universal de  $B$** .

**Ejemplo 2.35.** La recta real es recubrimiento universal del círculo.

**Ejemplo 2.36.** Dado un grupo parabólico de rango dos, el espacio de órbitas —un toro— admite el plano como recubrimiento universal. (Comparar ejemplo 2.22.)

**Teorema 2.37.** *Tomemos  $M \subset \hat{\mathbb{C}}$  simplemente conexo (por ejemplo el disco, el plano o la misma esfera). Supongamos  $\pi : M \rightarrow B$  sea recubrimiento universal. Entonces todo recubrimiento  $p : E \rightarrow B$  filtra a través de un recubrimiento  $\tilde{\pi} : M \rightarrow E$ ; es decir, cumple  $\pi = p \circ \tilde{\pi}$ .*

*Prueba.* El enunciado absorbe los teoremas 2.32 y 2.34. □

**Ejemplo 2.38.** Consideremos  $z \mapsto e^z$  como recubrimiento universal de  $\mathbb{C}$  sobre el plano agujereado  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ . Cuando  $U \subset \mathbb{C}^*$  es simplemente conexo, la inclusión natural  $inc : U \rightarrow \mathbb{C}^*$  puede ser alzada dentro del esquema acostumbrado. Debido a la relación  $e^{\widetilde{inc}(z)} = inc(z) = z$ , cada izamiento —desde un punto referencial distinto— resulta ser una de las llamadas “rama del logaritmo”.

**Nota 2.39.** Como la esfera de Riemann es simplemente conexa, se le acepta como su propio recubrimiento universal.

Otro tanto sucede con  $\mathbb{C}$ , el plano, el cual esta vez es también recubrimiento analítico universal de los toros complejos (ver ejemplo 2.22) y del plano agujereado (ver ejemplo 2.38).

El resto de conjuntos analíticos abiertos y conexos admiten a  $\mathbb{D}$  como recubrimiento universal. Pronto nos explayaremos sobre esta propiedad.

### Levantamiento de endomorfismos al recubrimiento universal

Una vez reconocido  $p : E \rightarrow B$  como recubrimiento, muchos endomorfismos de la base pueden estudiarse en la fibra  $E$ , en teoría un espacio algebraicamente más simple. En ese aspecto diremos que  $F : E \rightarrow E$  es un **levantamiento** del endomorfismo  $f : B \rightarrow B$  si se cumple  $p \circ F = f \circ p$ .

**Ejercicio 2.40.** Demuestre que si  $F$  es levantamiento de  $f$  y  $G$  es levantamiento de  $g$ , entonces  $G \circ F$  es un levantamiento de  $g \circ f$ .

Los referentes también juegan su parte. Por ese motivo, solemos recurrir a

$$\begin{array}{ccc} (E, e_0) & \xrightarrow{F} & (E, e_1) \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ (B, b_0) & \xrightarrow{f} & (B, b_1), \end{array}$$

como mnemotécnico cada vez que se requiera  $f(b_0) = b_1, p(e_0) = b_0, p(e_1) = b_1$  —téngase en mente el orden de enumeración—.

Para el recubrimiento universal no hay impedimento alguno.

**Teorema 2.41.** *Sea  $\pi : M \rightarrow B$  recubrimiento universal. Entonces todo problema de levantamiento de endomorfismos*

$$\begin{array}{ccc} (M, m_0) & \xrightarrow{F} & (M, m_1) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ (B, b_0) & \xrightarrow{f} & (B, b_1), \end{array}$$

*admite solución única.*

*Prueba.* De haber incluido  $f \circ \pi$  en el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 (M, m_0) & \overset{F}{\dashrightarrow} & (M, m_1) \\
 \pi \downarrow & \searrow^{f \circ \pi} & \downarrow \pi \\
 (B, b_0) & \xrightarrow{f} & (B, b_1),
 \end{array}$$

la conclusión sería consecuencia del teorema 2.32. □

**Corolario 2.42.** *Cuando dos levantamientos de un mismo endomorfismo al recubrimiento universal coinciden en un punto, son iguales.* □

### El grupo de cubierta de un recubrimiento universal

Inicialmente nos interesaba develar los secretos de un espacio y para ello construimos cierto recubrimiento universal. Pero las cosas pueden enfocarse distinto una vez conocido el desenlace: ¿qué artificio permite reconstruir  $B$  desde  $M$ , su recubrimiento universal?

Dado  $\pi : M \rightarrow B$ , recubrimiento universal (continuo, diferenciable o analítico, según convenga), decimos que  $\varphi : M \rightarrow M$  (ídem) es **transformación de cubierta** si el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\varphi} & M \\
 \pi \searrow & & \swarrow \pi \\
 & B &
 \end{array}$$

conmuta —o si se satisface  $\pi = \pi \circ \varphi$ —. Intuitivamente, las transformaciones de cubierta son funciones imperceptibles a la proyección.

**Ejercicio 2.43.** Demuestre que la composición de dos transformaciones de cubierta es de cubierta.

Aparte de su interpretación natural, hay al menos dos otras aceptables.

**Ejercicio 2.44.** Cuando  $\pi : M \rightarrow B$  es recubrimiento universal, demuestre que para  $\varphi : M \rightarrow M$  las siguientes condiciones son equivalentes:

- $\varphi$  es una transformación de cubierta;
- $\varphi$  es un levantamiento de la identidad de  $B$ ;
- $\varphi$  es un levantamiento del recubrimiento  $\pi : M \rightarrow B$ .

Listemos consecuencias.

**Proposición 2.45.** *Dos transformaciones de cubierta que coinciden en un punto son iguales. En particular, una transformación de cubierta con un punto fijo es la identidad.*

*Prueba.* Como dos levantamientos son iguales no bien coincidan en un punto, el ejercicio anterior torna evidente la primera parte.

Para el extra recordemos que la identidad en  $M$  es una transformación de cubierta.  $\square$

Las transformaciones de cubierta ensamblan un grupo. Ello resultará evidente una vez que afinemos detalles en una de las equivalencias del ejercicio 2.44.

**Lema 2.46.** *Dados  $m_0, \tilde{m}_0$  en  $\pi^{-1}(b_0)$ , la fibra de  $b_0$ , existe una única transformación de cubierta que lleva  $m_0$  en  $\tilde{m}_0$ .*

*Prueba.* Ver teorema 2.41.  $\square$

**Corolario 2.47.** *Toda transformación de cubierta es un automorfismo del recubrimiento universal. Es más, su inversa es también transformación de cubierta.*

*Prueba.* Si  $\varphi$  es de cubierta, edificaremos su inversa. Para  $b_0 = \pi(m_0) \in B$ , por definición se tiene  $\tilde{m}_0 = \varphi(m_0) \in \pi^{-1}(b_0)$ . Si  $\psi$  es la transformación de cubierta que lleva  $\tilde{m}_0$  en  $m_0$  prometida por el lema 2.46, entonces  $\psi \circ \varphi$ , por llevar  $m_0$  en  $m_0$  y ser transformación de cubierta, es la identidad en cumplimiento de la proposición 2.45.  $\square$

Así, sin más, las transformaciones de cubierta configuran un grupo, el cual en lo sucesivo denotaremos por  $\mathcal{D}$  (“ $\mathcal{D}$ ” de *deck*, cubierta en inglés, cubierta como nivel superior de una nave). Puesto en un lenguaje eficiente, el grupo  $\mathcal{D}$  actúa sobre  $M$  sin puntos fijos. Las órbitas de esta acción vienen dadas por  $\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(z) = \{\varphi(z) : \varphi \in \mathcal{D}\}$ .

Cómo describir estas clases de equivalencia, de manera redundante y hasta quizá algo ineficiente pero útil, está dado a continuación.

**Ejercicio 2.48.** Para todo  $z \in M$  se tiene  $\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(z) = \pi^{-1}(\pi(z))$ .

En resumen, las órbitas de esta acción y las fibras de la proyección son una y la misma cosa. Gracias a ello, proponemos una relación entre el espacio base original y la acción del grupo de cubierta sobre el recubrimiento universal vía el siguiente resultado estructural.

**Teorema 2.49.** *Dado  $\pi : M \rightarrow B$  recubrimiento universal, su grupo de cubierta  $\mathcal{D}$  actúa de forma discontinua y libre de punto fijo en  $M$ . El espacio de órbitas asociado a esta acción es, de manera canónica, equivalente a  $B$ .*

*Prueba.* Ninguno de los automorfismos no triviales que constituyen  $\mathcal{D}$  admite fijo punto (comparar proposición 2.45). Acá el espacio de órbitas  $M/\mathcal{D}$  es el conjunto  $\{\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(z)\}$  de clases de equivalencia. La estructura analítica en torno a  $\mathcal{O}(z)$  es un calco de la  $M$  alrededor de  $z$ : que los  $\varphi$  sean automorfismos asegura una definición consistente. Nosotros mostraremos que la función entre  $M/\mathcal{D}$  y  $B$  dada por  $\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(z) \mapsto \pi(z)$  es una biyección: de estar bien definida, será automáticamente analítica.

Primero veamos la buena definición. Si se satisface  $w \in \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(z)$ , entonces existe una transformación de cubierta  $\varphi$  que lleva  $z$  en  $w$ , es decir, sujeta a  $w = \varphi(z)$ . Merced a ello concluimos la igualdad  $\pi(w) = \pi(\varphi(z)) = \pi(z)$ , y la buena definición.

La sobreyectividad es directa al ser  $\pi$  sobreyectiva.

Para la inyectividad, supongamos que se tenga  $\pi(z) = \pi(w)$ . En ese caso  $w$  y  $z$  se encuentran sobre la misma fibra y por lo tanto, en concordancia con el ejercicio 2.48, comparten órbita.  $\square$

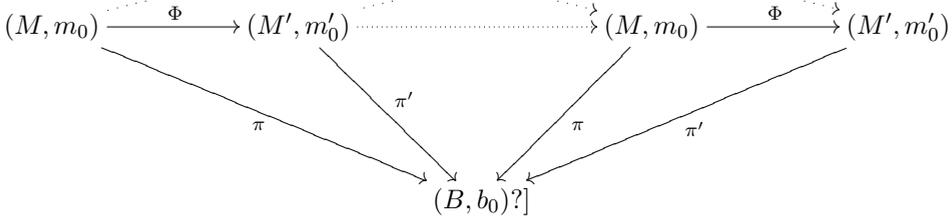
**Nota 2.50.** También es cierto que el grupo de transformaciones de cubierta es isomorfo al grupo fundamental de la base. Nosotros no usaremos esta información. El lector interesado puede consultar [6].

Al acuñar el término *recubrimiento universal* fuimos muy estrictos gramaticalmente. Nos abstuvimos de usar artículo pues anteponer la partícula *el* hubiese connotado unicidad, mientras un *un* hubiera sugerido diversidad. La verdad es que ahora el lector está en condición de mostrar que el recubrimiento universal es, para efectos prácticos, único.

**Ejercicio 2.51.** Sean  $\pi : (M, m_0) \rightarrow (B, b_0)$  y  $\pi' : (M', m'_0) \rightarrow (B, b_0)$  recubrimientos universales. Demuestre que existe una equivalencia  $\Phi : (M, m_0) \rightarrow (M', m'_0)$  con la cual el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 (M, m_0) & \xleftrightarrow{\Phi} & (M', m'_0) \\
 \searrow \pi & & \swarrow \pi' \\
 & (B, b_0) &
 \end{array}$$

es conmutativo. [Sugerencia: en qué orden ha de ser rotulado el diagrama



**Proposición 2.52.** *Todo recubrimiento conexo de un recubrimiento universal es una equivalencia.*

*Prueba.* Si  $p : (E, e_0) \rightarrow (M, m_0)$  es un recubrimiento de un recubrimiento universal, levantamos la identidad en  $M$  a una función  $\varphi : (M, m_0) \rightarrow (E, e_0)$  la cual satisface  $p \circ \varphi = id_M$  por definición de levantamiento y es sobreyectiva debido al teorema 2.34. Como  $p \circ \varphi = id_M$  implica que  $\varphi$  es también inyectiva, resulta ser equivalencia de espacios analíticos. □

**Teorema 2.53.** *Si  $E$  recubre  $B$ , ambos tiene el mismo recubrimiento universal.*

*Prueba.* Esto es una lectura especializada del teorema 2.34. □

Antes de pasar a aplicaciones, es prudente indicar que en el estudio de composición de recubrimientos pueden brotar complicaciones insospechadas. Como consuelo, hay dos casos que no dejaremos escapar.

**Proposición 2.54.** *Sean  $q : F \rightarrow E$  y  $p : E \rightarrow B$  recubrimientos. Si  $p$  es un recubrimiento finito, entonces  $p \circ q$  es un recubrimiento.*

*Prueba.* Para determinar una vecindad distinguida para  $b \in B$  respecto a la composición, partimos de una vecindad distinguida  $U \subset B$  respecto a  $p$ . Como el recubrimiento es finito, por definición  $p^{-1}(U) \subset E$  se descompone como una reunión disjunta  $p^{-1}(U) = V_1 \cup \dots \cup V_k$  de abiertos homeomorfos a  $U$  bajo el mismo  $p$ ; en particular, cada uno contiene una preimagen de  $b$ , digamos  $e_i$ . Ahora, cada  $e_i$  cuenta con una vecindad distinguida respecto a  $q$ , digamos  $W_i$ . Como  $W_i \cap V_i$  es abierto, la proyección  $p(W_i \cap V_i)$  resulta ser una vecindad de  $p(e_i) = b$ . Dejamos en manos del lector confirmar que la intersección finita  $\bigcap p(W_i \cap V_i)$  es una vecindad distinguida de  $b$  respecto a  $p \circ q$ . □

**Lema 2.55.** *Sea  $p : E \rightarrow B$  un recubrimiento y  $\varphi : F \rightarrow E$  una equivalencia. Entonces  $p \circ \varphi$  es un recubrimiento.*

*Prueba.* Esto es trivial pues  $\varphi$  apenas intercambia nombres entre objetos de  $E$  y  $F$ .  $\square$

## Superficies elípticas, parabólicas e hiperbólicas

Estamos ahora en condiciones de presentar el teorema de uniformización de Riemann en toda su magnitud y aprovechar sus consecuencias. Si bien el enunciado es sensato, su prueba rebasa los alcances de este libro y puede encontrarse en Farkas y Kra [3].

**Teorema 2.56** (Teorema de uniformización de Riemann). *Toda superficie de Riemann conexa admite como recubrimiento universal la esfera de Riemann, el plano complejo o el disco unitario.*  $\square$

Un espacio analítico conexo será **elíptico, parabólico o hiperbólico** en tanto su recubrimiento universal sea la esfera de Riemann, el plano complejo o el disco unitario, respectivamente.

**Ejemplo 2.57.** Pensemos en una superficie elíptica. De acuerdo con el teorema 2.49, esta puede ser reconstruida como el cociente de  $\hat{\mathbb{C}}$  por un grupo de automorfismos que actúa sin puntos fijos en  $\hat{\mathbb{C}}$ . A pesar de todo, un automorfismo de  $\hat{\mathbb{C}}$  es una transformación de Möbius y como tal admite puntos fijos. Concluimos de esta manera que el único grupo de automorfismos que actúa libre de punto fijo en  $\hat{\mathbb{C}}$  es el de la identidad. Por consiguiente *la esfera  $\hat{\mathbb{C}}$  es la única superficie de Riemann elíptica.*

**Ejemplo 2.58.** En el plano los automorfismos sin punto fijo son translaciones  $z \mapsto z + \alpha$ . Acá hay tres tipos de subgrupos discretos que pueden servir como transformaciones de cubierta (cf. [7, capítulo 6]).

Cuando el subgrupo es el de la identidad, el cociente es  $\mathbb{C}$ , el plano.

Cuando el subgrupo es de rango 1, se modifican las coordenadas de modo que este sea  $\Gamma = \{z \mapsto z + n : n \in \mathbb{Z}\}$ , generado por  $z \mapsto z + 1$ . En este caso el recubrimiento universal es la exponencial  $z \mapsto e^{2\pi iz}$  y la superficie resultante es el plano agujereado (comparar ejemplo 2.38).

Cuando el grupo es de rango 2, es de dominio público que, tras conjugación, puede escribirse  $\Gamma_\tau = \{z \mapsto z + n + \tau m : n, m \in \mathbb{Z}\}$ , donde  $\text{im } \tau > 0$ . La superficie recubierta es el toro  $S_\tau$  (comparar ejemplo 2.22).

**Ejemplo 2.59.** La esfera con tres agujeros es topológicamente distinta de la esfera (una es compacta, la otra, no), de los toros parabólicos (igual), del plano (uno es simplemente conexo, el otro, no) y del plano agujereado (uno tiene grupo de automorfismos infinito, el otro, finito). Por descarte su recubrimiento universal es el disco unitario —o cualquier superficie simplemente conexa equivalente a ella—. Una construcción del recubrimiento universal, donde se presenta explícitamente el grupo fuchsiano que actúa en  $\mathbb{H}$  como grupo de cubierta es presentado en [7, capítulo 31] (ver también ejemplo 3.14).

Esta escasez de superficies no hiperbólicas tiene consecuencias.

**Teorema 2.60.** *Cualquier subespacio de un espacio hiperbólico es hiperbólico.*

*Prueba.* Sea  $V \subset U$  conexo, donde  $U$  admite a  $\mathbb{D}$  como recubrimiento universal. Por el absurdo, supongamos que  $V$  no sea hiperbólico. En tal caso, como  $V$  no es compacto, su recubrimiento universal solo podrá ser  $\mathbb{C}$ , el plano. Aparecen entonces dos recubrimientos  $p : \mathbb{D} \rightarrow U$  y  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow V$ . Como  $V$  es subconjunto de  $U$ , por el teorema 2.32 la función  $\pi$ , como función de  $\mathbb{C}$  en  $U$ , puede ser levantada a  $\tilde{\pi} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ , función analítica que por el teorema de Liouville tendrá que ser constante. Así el supuesto recubrimiento universal  $\pi = p \circ \tilde{\pi}$  también será constante. Esto es imposible.  $\square$

**Proposición 2.61.** *En un espacio hiperbólico todo endomorfismo analítico con más de un punto fijo es un automorfismo de orden finito.*

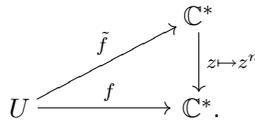
*Prueba.* Levantemos  $f : U \rightarrow U$  con puntos fijos  $z_0, z_1$ , a  $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  con  $F(0) = 0$ , donde  $w = 0$  proyecta a  $z_0$ . Sea  $E_1 \subset \mathbb{D}$  la fibra de  $z_1$ . Como este conjunto es discreto, contiene un subconjunto finito, llamémoslo  $X_1$ , de puntos que se encuentran más cerca de 0 que el resto. Escojamos uno de ellos, por ejemplo  $w_1$ . Ahora,  $F$  no necesariamente fija  $w_1$ , pero, dado que la imagen  $F(w_1)$  proyecta sobre  $f(z_1) = z_1$ , lo envía a un punto en  $E_1$ . Sin embargo, el lema de Schwarz implica  $|F(w_1)| \leq |w_1|$ , y ello conduce a  $F(w_1) \in X_1$ . Esto muestra que se cumple en general  $F(X_1) \subset X_1$ . Por tanto, dado que  $X_1$  es finito, algún iterado  $F^{on}$  fijará un punto en  $X_1$ . Esta  $F^{on}$  fija dos puntos de  $\mathbb{D}$  y por el corolario 1.28 es la identidad. Su proyección  $f^{on}$  es obvio que también es la identidad (ahora en  $U$ ).  $\square$

**Ejemplo 2.62.** En la superficie hiperbólica  $\hat{\mathbb{C}} - \{1, i, -1, -i\}$ , el automorfismo  $z \mapsto iz$ , de orden 4, tiene puntos fijos en 0 e  $\infty$ .

**Una aplicación adicional: extracción de raíces  $n$ -ésimas**

La extracción de raíces principales lejos de 0 es un problema tradicional ampliamente documentado (cf. [4]). Lo que sigue es (quizá salvo por el lenguaje) una reseña clásica.

Consideremos el recubrimiento  $z \mapsto z^n$  de  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$  en sí mismo. Dada una región simplemente conexa  $U \subset \mathbb{C}$ , toda función  $f : U \rightarrow \mathbb{C}^*$  que evita el origen puede ser levantada a  $\tilde{f}$  dentro del esquema



Dado que se satisface  $f(z) = p(\tilde{f}(z)) = \tilde{f}(z)^n$ , la función  $\tilde{f}$  se interpreta como una raíz  $n$ -ésima de  $f$ .

El párrafo anterior es una repetición mecánica poco imaginativa. Para tornar útil este retazo de información nos centraremos en casos particulares. Sea así  $U$  una vecindad simplemente conexa de 0 y  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica que satisface  $g(0) = 0$  y  $g(z) \neq -1$  para  $z \in U$ . La **raíz  $n$ -ésima principal de  $1 + g$**  es la única función analítica  $\psi_n$  definida en todo  $U$ , de ordinario denotada por  $\sqrt[n]{1 + g(z)}$ , que satisface  $\psi_n(0) = 1$ ,  $\psi_n(z) \neq 0$  y  $\psi_n^n(z) = 1 + g(z)$ .

El estudio sigue ahora dos caminos igual de interesantes: o bien congelamos el orden de extracción y comparamos manipulaciones de distintas funciones que calcen en la definición o, fijada una función  $g$ , extraemos raíces de diversos órdenes.

**Proposición 2.63.** *Sea  $U$  vecindad simplemente conexa de 0 y sean  $g_1, g_2 : U \rightarrow \mathbb{C}$  funciones analíticas sujetas a  $g_1(0) = g_2(0) = 0$  y  $g_1(z), g_2(z) \neq -1$ . Entonces se cumple*

$$\sqrt[n]{(1 + g_1(z))(1 + g_2(z))} = \sqrt[n]{1 + g_1(z)} \sqrt[n]{1 + g_2(z)};$$

*Similarmente se tiene*

$$\sqrt[n]{\frac{1}{1 + g_1(z)}} = \frac{1}{\sqrt[n]{1 + g_1(z)}}.$$

*Prueba.* La prueba de que el producto de raíces principales es la raíz principal del producto la confiamos al lector.

Al escribir  $1 + h(z) = 1/(1 + g_1(z))$ , respecto a  $h$  notamos que está definido en todo  $U$  puesto que  $1 + g_1$  nunca se anula, en 0 vale 0 y, también, jamás toma valor  $-1$  al ser  $1 + g(z)$  finito. En breve,  $1 + h(z)$  admite una raíz  $n$ -ésima principal, digamos  $\sigma$ , sujeta a  $\sigma(0) = 1$ ,  $\sigma(z) \neq 0$  y  $\sigma(z)^n = 1/(1 + g_1(z))$ . Como se satisface  $(1/\sigma(z))^n = 1 + g_1(z)$ , por definición  $1/\sigma(z)$  resulta ser la raíz principal de  $1 + g_1(z)$ .  $\square$

Las condiciones impuestas en la definición de raíz principal son universales, en el sentido que no se hace mención al orden de extracción. La siguiente proposición no pasa de ser un ejercicio rutinario.

**Proposición 2.64.** *Sea  $U$  una vecindad simplemente conexa del origen y  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica sujeta a  $g(0) = 0$  y  $g(z) \neq -1$ . Si  $m$  divide a  $n$ , entonces se cumple*

$$\sqrt[n]{(1 + g(z))^m} = \sqrt[n]{(1 + g(z))^m} = \sqrt[n/m]{(1 + g(z))}.$$

$\square$

Más sugestivo es el siguiente estimado.

**Lema 2.65.** *Sea  $U$  vecindad simplemente conexa de 0. Si cumple  $|g(z)| < 1/2$  en  $U$ , entonces  $\sqrt[n]{1 + g(z)}$  converge uniformemente a 1 con  $n$ .*

*Prueba.* Objetivamente, nuestra  $g$  apenas interviene de manera nominal. Si  $w \in B_{1/2}(1)$ , entonces  $w$  pertenece a la intersección del anillo apresado entre las circunferencias de radio  $1/2$  y  $3/2$  con la cuña de abertura 30 grados respecto a la semirrecta real positiva. Al extraer raíz, el valor principal de  $\sqrt[n]{w}$  pertenecerá a la intersección del anillo comprendido entre las circunferencias de radio  $\sqrt[n]{1/2}$  y  $\sqrt[n]{3/2}$  con la cuña de abertura  $30/n$  grados respecto a la horizontal; conjunto que se encoge al crecer  $n$ .  $\square$

Presentamos una consecuencia relacionada con recubrimientos intermedios, la única tratada hasta el momento.

**Proposición 2.66.** *Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{D}$ , con  $U$  una vecindad conexa y simplemente conexa de 0, dada por  $f(z) = z^k + a_{k+1}z^{k+1} + \dots$ . Si  $f(z_0) = 0$  implica  $z_0 = 0$ , entonces existe una única  $\phi : U \rightarrow \mathbb{D}$  analítica y tangente a la identidad (i.e  $\phi(z) = z + b_2z^2 + \dots$ ), con la cual se tiene  $f(z) = \phi(z)^k$ .*

*Prueba.* La función  $h(z) = f(z)/z^k$ , satisface  $h(0) = 1$  por presentación y  $h(z) \neq 0$  por hipótesis, conque admite una única raíz  $n$ -ésima principal  $\sigma$ .

Que  $\phi(z) = z\sigma(z)$  caiga dentro de  $\mathbb{D}$  es consecuencia *a posteriori*. □

### 3 Familias normales

A continuación introducimos la convergencia uniforme y las familias normales. Es a través de este concepto, gracias al teorema de Montel, que la teoría cobra vigor y modernidad. Una prueba del caso especial puede encontrarse en [7]. Con carácter opcional esbozamos, al concluir el capítulo, la prueba del caso general, pues se requieren técnicas de espacios de recubrimiento y rudimentos de geometría hiperbólica.

En este capítulo reseñamos cómo, con una dosis de buena voluntad, podemos hablar de convergencia uniforme en compactos de funciones analíticas con valores en  $\hat{\mathbb{C}}$  aun cuando la esfera de Riemann no cuente con una métrica natural.

Sea  $U \subset \hat{\mathbb{C}}$  un abierto. Una secuencia  $f_n : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  **converge uniformemente en compactos a**  $f : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  si para cada  $z_0 \in U$  existe un compacto  $K_{z_0} \subset U$  en cuyo interior  $\text{int}(K_{z_0})$  se asienta  $z_0$  y una transformación de Möbius  $\varphi$  para la cual, con  $n$  grande, se tenga  $\varphi(f_n(K_{z_0})) \subset \mathbb{C}$  y  $\varphi \circ f_n$  converja uniformemente a  $\varphi \circ f$  en  $K_{z_0}$ .

**Ejercicio 3.1.** Demuestre que el hecho de que la convergencia sea uniforme no depende de la elección de  $\varphi$ . [Sugerencia: cuando  $F_n$  converge uniformemente a  $F$  en  $K$  y  $G$  es continua en una vecindad de  $F(K)$ , ¿qué se puede afirmar sobre  $G \circ F_n$ ?; aplique su respuesta con  $G = \psi \circ \varphi^{-1}$ , donde  $\psi$  describe otro automorfismo.]

Si queremos eludir el uso de una métrica en  $\hat{\mathbb{C}}$ , habrá necesidad de manipular cartas en el conjunto de llegada. Por lo mismo, en la definición debemos asegurarnos de que porciones de las imágenes de los  $f_n$  caigan en una carta común donde podamos concentrarlas a todas —y así compararlas—; para ello  $K_{z_0}$  no debe ser muy grande. Convergencia uniforme presiona por un nivel de comparación de acercamiento entre puntos próximos, y de ahí la urgencia de que  $z_0$  sea interior a  $K_{z_0}$ . Curiosamente, no hemos perdido mucho pues la experiencia enseña que convergencia de este tipo es un compromiso entre lo local y lo global. Esto lo hacemos preciso enseguida.

**Proposición 3.2.** *Una secuencia  $f_n : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  converge uniformemente en compactos a  $f : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  si y solo si todo  $z_0$  admite una vecindad  $W_{z_0} \subset U$  en la cual las restricciones de los  $f_n$  a  $W_{z_0}$  convergen uniformemente en compactos a la restricción de  $f$  a  $W_{z_0}$ .*

*Prueba.* Por una parte, si  $f_n : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  converge uniformemente en compactos a  $f : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , tomamos  $W_{z_0}$  igual a  $U$ , y todo va bien.

Recíprocamente, tomemos  $z_0 \in U$  y busquemos el compacto  $K_{z_0} \subset U$  requerido por la definición. Sea  $W_{z_0}$  una vecindad de  $z_0$  donde  $f_n$  converge a  $f$  uniformemente. Por definición existe una vecindad compacta  $\tilde{K} \subset W_{z_0}$  de  $z_0$  y una carta  $\varphi$  que abarca  $f(K)$  donde  $\varphi \circ f_n$  converge uniformemente a  $\varphi \circ f$ . Pero  $z_0$  es interior a  $\tilde{K}$  y  $W_{z_0}$  es subconjunto abierto de  $U$ , así que es válido seleccionar  $K_{z_0} = \tilde{K}$ .  $\square$

De haber convergencia uniforme, se deriva de inmediato que la composición  $\varphi \circ f$  es una función holomorfa. Ello significa por definición que  $f$ , el límite, es siempre analítico. (Ver [7, capítulo 32]).

El concepto en la mira es el de normalidad. Una familia  $\mathcal{F}$  de funciones analíticas definidas en  $U$  será **normal** cuando de cualquier sucesión  $f_n \in \mathcal{F}$  se pueda extraer un refinamiento convergente en compactos. La primicia está en que el límite puede participar en  $\mathcal{F}$  como no hacerlo.

**Ejemplo 3.3.** La familia de funciones  $\mathcal{F} = \{z \mapsto \lambda z : z \in \mathbb{C}, \text{ con } 0 < |\lambda| \leq 1\}$  es normal. En efecto, dada una secuencia  $f_n(z) = \lambda_n z$  podemos forzar la convergencia  $\lambda_{n_k} \rightarrow \lambda$  y con ello consentiremos un límite  $f(z) = \lambda z$ . El quid radica en la posibilidad de tener  $f$  nula, función ausente de  $\mathcal{F}$ .

Cuando —como arriba— el límite es una función constante, digamos idéntica a  $w_0$ , por simplicidad decimos que la secuencia **converge uniformemente a**  $w_0$ .

**Ejemplo 3.4.** La familia de funciones  $\mathcal{F} = \{z \mapsto z^n : |z| < 2 \text{ donde } n \geq 0\}$  no es normal, pues cualquier subsucesión converge a 0 cuando  $|z| < 1$ , más converge a  $\infty$  apenas se tenga  $1 < |z| < 2$ . Así, es imposible lograr un límite siquiera continuo.

La normalidad es un concepto que armoniza lo local con lo global. Cuando se tiene una función  $f : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  y  $W \subset U$  es abierto, ponemos  $res_W(f)$  para referirnos a la restricción de  $f$  a  $W$ . De modo más general, dada una familia  $\mathcal{F}$  de funciones analíticas definidas en  $U$ , para cada  $W \subset U$  abierto escribimos  $\mathcal{F}(W) = \{res_W(f) : f \in \mathcal{F}\}$ .

**Proposición 3.5.** *Si una familia  $\mathcal{F}$  compuesta de funciones analíticas definidas en  $U \subset \hat{\mathbb{C}}$  es normal, entonces  $\mathcal{F}(W)$  es normal para todo abierto  $W \subset U$ .*

*Prueba.* Esto es trivial.  $\square$

**Proposición 3.6.** *Una familia  $\mathcal{F}$  de funciones analíticas definidas en  $U \subset \hat{\mathbb{C}}$  es normal si y solo si todo  $z_0 \in U$  admite una vecindad  $W_{z_0} \subset U$  con la cual  $\mathcal{F}(W_{z_0})$  es normal.*

*Prueba.* Si  $\mathcal{F}$  es normal, podemos elegir  $W = U$  pues  $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}$ .

Para la recíproca consideramos la cobertura por abiertos  $W_z$  de  $U$ . Como el abierto  $U$  es segundo contable, ya una colección enumerable de los  $W_z$  cubre  $U$ . Sea entonces  $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_{z_n}$  y fijemos una secuencia  $f_n \in \mathcal{F}$ . Por la normalidad de  $\mathcal{F}(W_{z_1})$ , existe una elección de subsecuencia con la cual las restricciones a  $W_{z_1}$  convergen. Restringimos aún más y podemos garantizar convergencia adicional en  $W_{z_2}$ . Al continuar con la mecánica, comprobamos que, al precio de descartar algunos índices en cada tramo, siempre existe un refinamiento convergente. Un proceso diagonal estándar coordina entonces para que la convergencia sea global.  $\square$

Para la teoría de iteración de polinomios y funciones racionales la piedra angular es el siguiente resultado, el teorema de Montel. Esbozaremos su prueba al finalizar el capítulo. Una demostración que recoge los ingredientes principales pero con premisas más relajadas se halla en [7, capítulo 32].

**Teorema 3.7** (Teorema de Montel). *Toda familia de funciones analíticas que omita tres valores de la esfera de Riemann es una familia normal.*

Ahora veamos cómo se comporta el concepto de normalidad con la composición de funciones. Supongamos que  $h$  sea una función analítica cuyo dominio de definición abarca, cuando menos, la clausura de la unión de las imágenes de las funciones  $f \in \mathcal{F}$ , todas definidas en  $U$ . Cuando esto es así, es válido componer  $h \circ f$  en  $U$  y podemos definir  $h_{\#}(\mathcal{F}) = \{h \circ f : f \in \mathcal{F}\}$ . Similarmente, cuando  $g : V \rightarrow U$  es analítica, la existencia de  $f \circ g$  (para  $f \in \mathcal{F}$ ) queda garantizada y podemos hablar de  $g^{\#}(\mathcal{F}) = \{f \circ g : f \in \mathcal{F}\}$ .

**Proposición 3.8.** *Si  $\mathcal{F}$  es una familia normal, entonces  $h_{\#}(\mathcal{F})$  y  $g^{\#}(\mathcal{F})$  son familias normales.*

*Prueba.* Si  $f_n$  converge a  $f$ , entonces  $h \circ f_n$  (respectivamente  $f_n \circ g$ ) converge a  $h \circ f$  (respectivamente a  $f \circ g$ ). Hemos tenido la precaución de definir  $h$  sobre la clausura de las imágenes para lidiar con la eventualidad de que el límite sea igual a una constante en la frontera.  $\square$

**Corolario 3.9.** *El concepto de normalidad es independiente de las coordenadas (locales en el dominio, globales en el rango) utilizadas.*

*Prueba.* En la proposición anterior tomamos  $h$  y  $g$  como cartas. □

Ahora nos embarcamos en un proyecto más codicioso y nos preguntamos cuánto la normalidad de  $g^\#(\mathcal{F})$  repercute en la de  $\mathcal{F}$ .

**Teorema 3.10.** *Sea  $U$  abierto y conexo y  $g : V \rightarrow U$  una función analítica sobreyectiva. Entonces una familia  $\mathcal{F}$  es normal si y solo si  $g^\#(\mathcal{F})$  es normal.*

*Prueba.* Una dirección ya fue establecida en la proposición 3.8.

Asumamos que  $g^\#(\mathcal{F})$  es una familia normal. Para confirmar la normalidad de  $\mathcal{F}$  apelamos a la proposición 3.6. Para ello construimos una vecindad de cada punto en donde sea indiscutible la normalidad. Tomemos entonces  $z \in U$ . Como  $g$  es sobreyectiva, existe  $w \in V$  que cumple  $g(w) = z$ . Si  $W$  es una vecindad suficientemente pequeña de  $w$  y  $K$  es un compacto para el cual se tiene  $w \in K \subset W$ , entonces la convergencia de  $f_n$  en el compacto  $g(K)$  (en donde se satisface  $z = g(w) \in g(K) \subset g(W)$ ) es equivalente a la de  $f_n \circ g$  en  $K$ . Como consecuencia la familia  $\mathcal{F}(g(W))$  es normal. □

Para la convergencia normal una fuente permanente de disgustos es la convergencia —incluso puntual— a un valor en la frontera. El siguiente resultado arroja algo de luz al respecto.

**Lema 3.11.** *Sea  $U$  abierto y conexo y  $\varphi_n : U \rightarrow V$  una secuencia de funciones analíticas que converge uniformemente en compactos a  $\varphi$ . Si las imágenes  $\varphi_n(U)$  omiten el punto  $\hat{w}$ , entonces, excepto cuando  $\varphi$  es idénticamente igual a  $\hat{w}$ , la función  $\varphi$  omite  $\hat{w}$  por igual.*

*Prueba.* Asumamos que  $\varphi$  no es la constante  $c_{\hat{w}}$ . Fijemos  $a \in U$  y mostremos que  $\varphi(a)$  es distinto de  $\hat{w}$ . Según la proposición 1.9, dado un pequeño contorno circular  $\mathcal{C}$  alrededor de  $a$ , la multiplicidad de  $a$  como preimágen de  $\hat{w}$  está calculada por la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z) - \hat{w}} dz.$$

La misma fórmula para  $\varphi_n$  entrega

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{\varphi_n'(z)}{\varphi_n(z) - \hat{w}} dz = 0,$$

pues  $\hat{w}$  no pertenece a la imagen de  $\varphi_n$ . Ahora, como la convergencia a  $\varphi$  es normal, se tiene  $\varphi_n(z) \rightarrow \varphi(z)$ , así como  $\varphi'_n(z) \rightarrow \varphi'(z)$ , uniformemente en  $\mathcal{C}$ . Podemos, por tanto, intercambiar el límite con la integral y concluir que se cumple

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{\varphi'_n(z)}{\varphi_n(z) - \hat{w}} dz \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z) - \hat{w}} dz = 0;$$

es decir,  $\varphi$  también omite  $\hat{w}$ . □

### Convergencia normal en $\text{aut}(\mathbb{D})$ versus convergencia puntual

A veces resulta saludable compaginar criterios. Una oportunidad para contrastar distintos tipos de convergencia se presenta al imponer en la colección de automorfismos de  $\mathbb{D}$  una topología.

**Proposición 3.12.** *Una secuencia  $\lambda_n \varphi_{\alpha_n}$  (con  $|\lambda_n| = 1$  y  $|\alpha_n| < 1$ ) en  $\text{aut}(\mathbb{D})$  converge uniformemente en compactos a  $\lambda \varphi_{\alpha}$  (con  $|\lambda| = 1$  y  $|\alpha| < 1$ ) si y solo si se tiene  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  y  $\alpha_n \rightarrow \alpha$ .*

*Prueba.* La convergencia normal de  $\lambda_n \varphi_{\alpha_n}$  a  $\lambda \varphi_{\alpha}$  implica  $\lambda_n \varphi_{\alpha_n}(\alpha) \rightarrow \lambda \varphi_{\alpha}(\alpha) = 0$ , es decir

$$\lambda_n \frac{\alpha_n - \alpha}{1 - \bar{\alpha}_n \alpha} \rightarrow 0.$$

Como  $\lambda_n/(1 - \bar{\alpha}_n \alpha)$  es imposible que converja a 0, necesariamente se tendrá  $\alpha_n - \alpha \rightarrow 0$ . Por su parte se satisface también  $\lambda_n \varphi'_{\alpha_n}(0) \rightarrow \lambda \varphi'_{\alpha}(0)$ , es decir

$$\lambda_n(1 - |\alpha_n|^2) \rightarrow \lambda(1 - |\alpha|^2).$$

Como ya sabemos que se cumple  $1 - |\alpha_n|^2 \rightarrow 1 - |\alpha|^2 \neq 0$ , obtenemos  $\lambda_n \rightarrow \lambda$ .

La recíproca es evidente. □

## Una prueba del teorema de Montel

Para la prueba del teorema de Montel, tomaremos como punto de largada el llamado caso fácil. El desarrollo completo está presentado en [7, capítulo 32], y los interesados quedan comprometidos a revisarlo.

**Teorema 3.13.** *Dado un abierto  $U$ , la colección de funciones analíticas definida en  $U$  con valores en  $\mathbb{D}$  constituye una familia normal.*  $\square$

Para utilizar adecuadamente la teoría de recubrimientos, recordamos algunos detalles de cómo  $\mathbb{H}$  recubre la esfera triplemente agujereada.

**Ejemplo 3.14** (El recubrimiento universal de la esfera triplemente agujereada). Sea  $\Gamma$  el grupo de automorfismos de  $\mathbb{H}$  generado por  $z \mapsto T_4(z) = z + 4$  y  $z \mapsto \gamma(z) = z/(z + 1)$ , transformaciones parabólicas que empalman, la una, las rectas  $\text{im } z = \pm 2$ , y la otra, las circunferencias  $|z \pm 1| = 1$ . El espacio de órbitas de la acción de este grupo es analíticamente equivalente a la esfera triplemente agujereada, lo cual exhibe a  $\mathbb{D}$  (por ser equivalente a  $\mathbb{H}$ ) como recubrimiento universal de la esfera con tres agujeros. El dominio fundamental para esta acción se muestra en la figura 3.

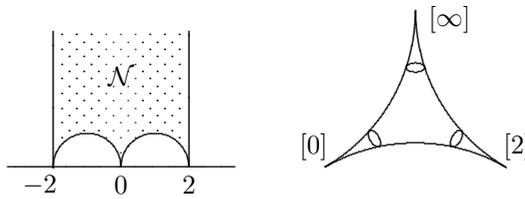


FIGURA 3. ¿Hoyos u orificios?

Nosotros estaremos moviéndonos ida y vuelta entre  $\mathbb{D}$  y  $\mathbb{H}$ . El siguiente estimado es equivalente al lema de Schwarz y representa uno de los pocos lugares en donde la métrica hiperbólica aparece explícitamente.

**Lema 3.15.** *Con  $|w| \leq r < 1$  se cumple  $\text{re } \frac{1+w}{1-w} \geq \frac{1-r}{1+r}$ .*

*Prueba.* Trivial pues se tiene

$$\text{re } \frac{1+w}{1-w} = \frac{1-|w|^2}{|1-w|^2} \geq \frac{1-r^2}{|1-w|^2} \geq \frac{1-r^2}{(1+r)^2}.$$

$\square$

**Proposición 3.16.** *Sea  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$  analítica. Si  $|\hat{w}| \leq r$ , entonces se tiene*

$$\text{im } f(\hat{w}) \geq \text{im } f(0) \frac{1-r}{1+r}.$$

*Prueba.* Sea  $f(0) = x_0 + iy_0 \in \mathbb{H}$ . Es fácil constatar que  $\Phi(w) = iy_0 \frac{1+w}{1-w} + x_0$  es una equivalencia entre  $\mathbb{D}$  y  $\mathbb{H}$  que lleva 0 en  $f(0) = x_0 + iy_0$  (comparar ejemplo 1.14). Por el lema de Schwarz se tiene entonces  $|\Phi^{-1} \circ f(\hat{w})| \leq |\hat{w}| \leq r$ , y de este modo se logra  $f(\hat{w}) \in \Phi(B_r[0])$ , donde acá  $B_r[0]$  es la bola cerrada de radio  $r$  centrada en origen. En particular se satisface

$$\operatorname{im} f(\hat{w}) \geq \inf_{w \in B_r[0]} \operatorname{im} \Phi(w) = y_0 \inf_{w \in B_r[0]} \operatorname{re} \frac{1+w}{1-w} \geq y_0 \frac{1-r}{1+r}.$$

□

Para la prueba del teorema de Montel, gracias a la proposición 3.6, podemos asumir sin pérdida de generalidad que el dominio  $U$  es un disco abierto. Mejor todavía, al reescalar podemos ceñirnos al caso donde este disco es  $\mathbb{D}$ . Sea entonces  $f_n : \mathbb{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} - \{0, 1, \infty\}$  una secuencia arbitraria de funciones analíticas de la que queremos extraer un refinamiento convergente en compactos.

Al pasar a subsecuencias podemos suponer de entrada que  $f_n(0)$  converge, digamos a  $\hat{z}$ . Distinguimos dos casos.

### Prueba del teorema de Montel cuando $f_n(0)$ se acumula en $\hat{\mathbb{C}} - \{0, 1, \infty\}$

Sea  $\pi : \mathbb{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} - \{0, 1, \infty\}$  recubrimiento universal sujeto a  $\pi(0) = \hat{z}$ . Para cada  $n$  consideramos el único levantamiento  $F_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  de  $f_n$  donde  $F_n(0)$  es cercano a 0. Estas funciones satisfacen por definición  $f_n = \pi \circ F_n$ . Por el teorema 3.13, podemos asumir que los  $F_n$  convergen uniformemente en compactos a  $F$ . Como se tiene  $f_n(0) \rightarrow \hat{z}$ , los  $F_n(0)$  se han de acumular sobre 0 por ser este el único punto cercano a 0 sobre la fibra de  $\hat{z}$ . Al ya haberse concluido que se cumple  $F(0) = 0$ , el lema 3.11 muestra que  $F(\mathbb{D})$  es subconjunto de  $\mathbb{D}$ . Queda claro de esta manera que  $f_n = \pi \circ F_n$  converge a  $\pi \circ F$ .

### Prueba del teorema de Montel cuando $f_n(0)$ se acumula en $\{0, 1, \infty\}$

En este caso el argumento del acápite anterior falla simple y llanamente porque  $\pi$  no se extiende a  $\partial\mathbb{D}$ . El límite  $\hat{z}$  es ahora 0, 1 o  $\infty$  y podemos decidirnos directamente por uno de ellos, por ejemplo 0. De ser así, el único candidato aceptable a límite es, de acuerdo con el lema 3.11, la función idénticamente 0.

Esta vez es preferible utilizar  $\mathbb{H}$  como recubrimiento universal. Es más, elijiremos las cúspides de modo que una secuencia  $w_n \in \mathbb{H}$  sujeta a  $\text{im } w_n \rightarrow +\infty$  proyecte a una secuencia  $\pi(w_n)$  que converja a 0. (Comparar figura 3.)

Levantemos ahora cada  $f_n : \mathbb{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} - \{0, 1, \infty\}$  a  $F_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$  con  $F_n(0)$  en la región fundamental de la figura 3. En este caso, puesto que los  $f_n(0)$  no se acumulan dentro del espacio se ha de tener  $\text{im } F_n(0) \rightarrow +\infty$ . Para probar que  $f_n$  converge a 0 compactos, exhibiremos cómo  $\text{im } F_n(z)$ , la parte imaginaria de  $F_n(z)$ , es remolcada junto con  $F_n(0)$  a  $\infty$  uniformemente en bolas cerradas de radio  $r < 1$ . Pero esto es precisamente lo que afirma la proposición 3.16 al aplicarla con  $F_n$ .  $\square$

## 4 Algunos preliminares de sistemas dinámicos

Consideremos un polinomio  $P$  de coeficientes complejos, no constante y de grado  $d$ . La consigna es entender el comportamiento del sistema dinámico  $z \mapsto P(z)$ . La manera idónea de adaptarnos a la coyuntura es sembrar una “semilla”  $z_0$  que accione el proceso de iteración

$$z_0 \mapsto z_1 = P(z_0) \mapsto z_2 = P(z_1) \mapsto \dots,$$

para luego recolectar la información de todos los  $z_0$  al unísono. Cuando haya urgencia de mencionar el “pasado” de  $z_0$  usaremos  $z_{-1}$ . En otras palabras,  $z_{-1}$  será uno de tantos valores que satisfacen  $P(z_{-1}) = z_0$  (en el caso polinomial existe siempre una de estas preimágenes inmediatas y como tope  $d$ , el grado de  $P$ ).

Cuando se tenga  $P(z) = w$ , diremos que  $w$  es la **imagen inmedata** de  $z$  (o, en breve, **la imagen de  $z$** ); alternativamente, diremos que  $z$  es la **preimagen inmediata** de  $w$ . En caso se cumpla  $P^{on}(z) = w$  para cierto  $n \geq 1$ , diremos que  $w$  es una **imagen eventual de  $z$** , o que  $z$  **cae eventualmente en  $w$**  o, también, que  $z$  es una **preimagen** de  $w$ .

**Ejemplo 4.1** (Eleva al cuadrado). Si consideramos  $P(z) = z^2$ , el sistema dinámico *debe* leerse como *eleva al cuadrado*. Este sistema dinámico acepta, *grosso modo*, tres tipos marcados de comportamiento asintótico: este depende de si  $z_0$  es de norma menor, igual o mayor que 1.

**Ejemplo 4.2** (Copiar literalmente). Si consideramos  $P(z) = z$ , la identidad, al sistema dinámico es preferible leerlo como *copiar literalmente*. Este sistema dinámico es totalmente predecible pues nada nunca ocurre.

**Ejemplo 4.3** (Iteración de polinomios de grado 1). Todo polinomio no trivial de grado 1 es de la forma  $P(z) = \lambda z + b$ , con  $\lambda \neq 0$ .

Cuando se tiene  $\lambda = 1$ , con  $b = 0$  estamos ante la identidad, y con  $b \neq 0$ , ante una translación.

Si  $\lambda \neq 1$ , entonces el punto  $a = b/(1 - \lambda)$  satisface  $P(a) = a$ . En este caso, la mejor manera de entender el comportamiento global del sistema es a través del cambio de variable  $w = z - a$ . Cuando iteramos, la acción transcurre en un mismo conjunto. De modificarse las coordenadas, ello *se hace* de manera concertada en dominio y rango. En primer lugar,

notemos que  $w = z - a$  implica  $w_0 = z_0 - a$ , un cambio de nombre a la semilla. Si continuamos rebautizando a los sucesivos iterados  $z_0, z_1, z_2, \dots$ , tendremos  $w_n = z_n - a$ , valores que por inducción quedan atados a

$$w_{n+1} = z_{n+1} - a = P(z_n) - a = \lambda z_n + b - a.$$

Como sabemos que se cumple  $a - b = \lambda a$  (pues  $a$  fue elegido al satisfacer  $P(a) = a$ ), pasamos a

$$w_{n+1} = \lambda z_n - \lambda a = \lambda(z_n - a) = \lambda w_n,$$

proceso por demás predecible.

Presentaremos detalles adicionales sobre iteración de polinomios de grado 1 conforme los necesitemos. Un estudio completo puede hallarse en [7].

**Ejemplo 4.1, continuación: elevemos al cuadrado nuevamente.** Desde el punto de vista dinámico el proceso  $z \mapsto z^2$ , de elevar al cuadrado, puede descomponerse en tres partes (para precisar, aquello que se subdivide es el plano complejo extendido, el ámbito de acción del sistema dinámico). Estas tres partes son el disco unitario  $\mathbb{D}$ , el círculo unitario  $\mathbb{T}$ , y  $\mathbb{D}_\infty$ , el resto, conformado por todos los valores de norma mayor que 1 junto con  $\infty$ .

Cada uno de estos tres conjuntos es *totalmente invariante* en el sentido que su futuro y su pasado están íntimamente ligados a ellos mismos. Por ejemplo, si un valor  $z_0$  pertenece a  $\mathbb{D}$  entonces  $|z_0| = r < 1$  implica  $|z_1| = |z_0^2| = r^2 < 1$ , de donde concluimos  $z_1 \in \mathbb{D}$ . Con el pasado ocurre algo similar: si  $z_{-1}$  satisface  $P(z_{-1}) = z_0$ , se deduce  $|z_{-1}| = \sqrt{r} < 1$ , y por lo mismo se tiene  $z_{-1} \in \mathbb{D}$ . Algo análogo sucede en  $\mathbb{T}$  y en  $\mathbb{D}_\infty$ .

De este modo  $\mathbb{D}$  y  $\mathbb{D}_\infty$  son las cuencas de ciertos “superatractores” (justificaremos este vocablo más adelante). ¿Pero qué hay de  $\mathbb{T}$  atrapado entre dos frentes? Es precisamente por este motivo que la dinámica restringida a  $\mathbb{T}$  es, en muchos aspectos, complicada.

Para estudiar la dinámica en y cerca de  $\mathbb{T}$  utilizamos descripción polar. Escribimos todo elemento de norma unitaria como  $e^{2\pi i\theta}$ , donde  $\theta$  es un número real bien definido módulo un entero. Como al elevar al cuadrado duplicamos el argumento, los acontecimientos en  $\mathbb{T}$  quedan descritos por el sistema dinámico

$$\theta \mapsto 2\theta \quad (\text{módulo } 1).$$

Este sistema dinámico, por elemental que parezca ser, es —citando a Devaney [2]— para muchos el prototipo de “sistema caótico”. En lenguaje matemático, para que un ente

merezca este calificativo deben conjugarse tres factores: debe ser impredecible (sino, ¿a santo de qué tacharlo de caótico?), debe poseer cierto grado de regularidad (si es vana la esperanza de entenderlo, entonces ¿a qué viene preocuparse tanto por él?) y no debe poderse descomponer en dos procesos independientes.

El primero de los factores se manifiesta como *dependencia sensitiva a las condiciones iniciales*. En términos prácticos, computacionales, esto significa que pequeñas anomalías de medición (hoy, actuales) se traducen en gruesos errores de predicción futuros. Veamos esto en acción: podemos arriesgarnos a afirmar que dos ángulos que difieren (módulo 1, siempre) en al menos  $1/4$  de vuelta no son cercanos. Empecemos entonces con dos ángulos  $\theta_0$  y  $\tilde{\theta}_0$ , distintos pero indistinguibles a nuestros aparatos de medición; es decir, sujetos a  $0 < |\theta_0 - \tilde{\theta}_0| \leq \epsilon < 1/4$ . Sea  $N$  tal que  $1/2^{N+1} \leq |\theta_0 - \tilde{\theta}_0| < 1/2^N$ . Los sucesivos iterados satisfacen

$$2^n/2^{N+1} \leq |2^n\theta_0 - 2^n\tilde{\theta}_0| = |\theta_n - \tilde{\theta}_n| < 2^n/2^N,$$

con lo que eventualmente  $\theta_n$  y  $\tilde{\theta}_n$  quedarán separados por al menos  $1/4$  de vuelta, el tope para tolerarlos como “próximos”.

La segunda propiedad queda reflejada en la abundancia de puntos periódicos, pues estos son densos en  $\mathbb{T}$ . Un valor periódico es tal que satisface  $\theta_0 = \theta_n$  para algún  $n$  positivo, su periodo. Por ejemplo  $\theta = 0$  es un punto fijo (es decir, tiene periodo 1), mientras que la pareja  $1/3, 2/3$  describe un ciclo de periodo 2 como muestra la cadena  $1/3 \mapsto 2/3 \mapsto 4/3 = 1/3$ . En el caso general, si la definición la traducimos a fórmula, leeremos

$$\theta_0 = \theta_n = 2^n\theta_0 \quad (\text{módulo } 1).$$

Al manipular, en apariencia aflora una infinidad de ecuaciones tipo

$$2^n\theta = \theta + k, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z},$$

de solución  $\theta = \frac{k}{2^n - 1}$ . Sin embargo, basta ceñirnos a  $k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 2\}$  pues el trabajo es insensible a giros completos en la circunferencia. Esto muestra en particular que en todo arco de amplitud al menos  $\frac{2\pi}{2^n - 1}$  aparecerá, mínimo, un punto de periodo  $n$  (divisible por  $n$ , para ser exactos). Cuando  $n$  tiende a infinito, obtenemos la densidad de los puntos periódicos.

Acerca de la tercera particularidad, esta puede ser ratificada de diversas maneras, todas relacionadas con la llamada transitividad topológica, no necesariamente equivalentes entre sí. Nosotros indicaremos algunas, y dejaremos los correspondientes detalles al lector apenas indicando que son relativamente automáticas si se persiste en el uso de coordenadas polares.

**Propiedad 4.4.** Sean  $V, W$  subconjuntos abiertos no vacíos de  $\mathbb{T}$ . Entonces, existe  $n \geq 1$  para el cual se tiene  $P^{on}(V) \cap W \neq \emptyset$ .  $\square$

(Esto puede ser mejorado: puede tomarse como  $W$  cualquier subconjunto abierto y no vacío del plano siempre que el abierto  $V \subset \mathbb{C}$  se interseque con  $\mathbb{T}$ , y la consecuencia será la misma.)

La propiedad anterior puede hacerse más robusta.

**Propiedad 4.5.** Dado  $z \in \mathbb{T}$  y  $V \subset \mathbb{T}$  abierto y no vacío, existe  $n$  con el cual se tiene  $z \in P^{on}(V)$  (o alternativamente, existe  $w \in V$  y  $n \geq 0$  tal que  $P^{on}(w) = z$ ).  $\square$

(Nuevamente puede tomarse  $z$  como cualquier valor excepto  $0$  e  $\infty$  siempre y cuando el abierto  $V \subset \hat{\mathbb{C}}$  se interseque con  $\mathbb{T}$ , y la consecuencia será idéntica.)

**Propiedad 4.6.** El conjunto de las preimágenes de un punto de  $\mathbb{T}$  es denso en  $\mathbb{T}$ .  $\square$

**Propiedad 4.7.** Dado  $V \subset \mathbb{T}$  abierto y no vacío, se tiene  $\bigcup_{n \geq 0} P^{on}(V) = \mathbb{T}$ .  $\square$

(En  $\hat{\mathbb{C}}$ , la propiedad equivalente indica que, cuando  $V$  se interseca con  $\mathbb{T}$ , la unión  $\bigcup_{n \geq 0} P^{on}(V)$ , de iterados, abarca todo con la posible excepción de dos puntos (el origen e  $\infty$  en este caso).)

## Comportamiento local de atractores y superatractores

Consideremos la función holomorfa expresada por

$$f(z) = \lambda z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$$

mientras se satisfaga  $|z| \leq R$ .

En el sistema dinámico determinado por  $f$ , cuando se tenga  $0 < |\lambda| < 1$  diremos que el origen es un **atractor pero no un superatractor**. Y para ser consistentes, si  $\lambda = 0$ , el origen será un **superatractor**. (Esta distinción es más tradicional que realmente necesaria.)

**Ejemplo 4.8.** Para  $\lambda \neq 0$ , consideremos el sistema dinámico

$$z \mapsto f(z) = \lambda z.$$

Para cualquier condición inicial  $z_0$ , el proceso inductivo formado por  $z_{n+1} = f(z_n)$  conduce a  $z_n = \lambda^n z_0$ . Si asumimos a  $\lambda$  de norma menor que 1, los iterados convergen uniformemente en compactos del plano al punto fijo situado en el origen.

Parte del afán de individualizar el caso  $\lambda = 0$  se ampara en que para este último no disponemos de modelo lineal.

Sea  $\lambda$  no nulo y de norma estrictamente menor que 1 en valor absoluto. Si en la definición de  $f$  factorizamos  $z$ , tendremos  $f(z) = \lambda zh(z)$ , donde  $h(z)$  es una función holomorfa en la bola cerrada de radio  $R$ , sujeta además a  $h(0) = 1$ . Como  $h(z)$  es continua cerca del origen, dado  $\epsilon > 0$  existe  $r \leq R$  (con dependencia tácita en  $\epsilon$ ) tal que

$$0 < \frac{1}{1 + \epsilon} \leq |h(z)| \leq 1 + \epsilon, \quad \text{cuando } |z| \leq r.$$

Elijamos  $\epsilon$  (y con ello  $r$ ) de modo que se tenga  $(1 + \epsilon)|\lambda| < 1$ . Con estos valores, logramos el estimado

$$|f(z)| = |\lambda zh(z)| \leq |h(z)| |\lambda z| \leq (1 + \epsilon)|\lambda| |z| < |z|.$$

Si partimos de un elemento  $z_0$  sujeto a  $|z_0| \leq r$ , tendremos

$$|z_1| = |f(z_0)| \leq (1 + \epsilon)|\lambda| |z_0| < |z_0| \leq r,$$

y el proceso podrá ser repetido con  $z_1$  en vez de  $z_0$ , pues el nuevo elemento cae en la bola donde, uno, la función  $f$  está definida y, dos, los estimados están vigentes. En consecuencia, si procedemos inductivamente logramos

$$|z_n| \leq (1 + \epsilon)^n |\lambda^n| |z_0|,$$

sucesión que converge a 0 pues la razón geométrica  $(1 + \epsilon)|\lambda|$  es subunitaria.

Acá aparece una ligera pero sutil diferencia con el caso lineal: en el caso lineal la razón geométrica de convergencia es  $|\lambda| < 1$ ; en el caso general la convergencia es geométrica para cualquier exponente comprendido entre  $|\lambda|$  y 1.

**Ejercicio 4.9.** Con la notación introducida, demuestre que se cumple

$$\frac{|\lambda|^n}{(1 + \epsilon)^n} |z_0| \leq |z_n|.$$

El ejercicio anterior, de engañosa inocencia, explica en parte el deslinde entre atractores y superatractores: para los atractores la fuerza de atracción es geométrica y no mejor, para los superatractores la atracción desborda la geométrica. El siguiente ejercicio muestra que la razón de convergencia en un superatractor es exponencial.

**Ejercicio 4.10.** Sea

$$f(z) = c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + \dots,$$

donde  $m > 1$  y  $c_m \neq 0$ , convergente en cierto disco cerrado centrado en el origen y de radio positivo. Demuestre la existencia de  $r$  y  $C$ , positivos ambos y con  $C < 1$ , tales que cuando  $z_0$  satisface  $|z_0| \leq r$ , entonces  $z_0$  puede ser iterado indefinidamente y sus iterados satisfacen  $|z_n| \leq C^n |z_0|^{m^n}$ .

Un breve comentario respecto a  $|\lambda| \geq 1$ , los casos no tratados. En la manipulación llevada a término jamás apareció  $|\lambda|$  propiamente dicho sino una ligera modificación suya. Por ejemplo, para las cotas superiores resalta en la fórmula  $|\lambda|(1 + \epsilon)$ : esto para el caso  $|\lambda| \geq 1$  no fuerza una contracción. Peor aún, debido a ello, no hay evidencia de que los sucesivos valores  $z_n$  no abandonen la región de definición de  $f$  para así frustrar el proceso iterativo.

En la misma vena, en los estimados por abajo quien coacciona es  $|\lambda|/(1 + \epsilon)$ . En las fórmulas del ejemplo 4.8 y el ejercicio 4.9 debemos distinguir entre  $|\lambda|$  igual a 1 o mayor. Si  $|\lambda| > 1$ , podemos elegir  $\epsilon > 0$  de modo tal que  $|\lambda|/(1 + \epsilon)$  sobrepase 1. Empujados por ello, los puntos  $z_n$  se apartan del origen a un ritmo al menos geométrico. Esto en la práctica significa que los sucesivos iterados tienden a ser expulsados de pequeñas vecindades del origen, con lo cual el progreso de la iteración se trunca o en el mejor de los casos desaparece del plano visual. Si  $|\lambda|$  vale exactamente 1, entonces  $|\lambda|/(1 + \epsilon)$  es menor que 1 y los estimados del ejercicio 4.9 carecen de funcionalidad.

Sin embargo, sea cual fuere el caso, se ha llamado a  $\lambda$  el **multiplicador del punto fijo en 0**, y puede ser recuperado con la fórmula  $\lambda = f'(0)$  no bien trabajemos con coordenadas.

## El cambio de variables como herramienta de los sistemas dinámicos

Para nosotros, un sistema dinámico ocurre en un espacio topológico bien escogido. Este espacio puede venir equipado con coordenadas o no. Es más, cuando un espacio acepta un sistema de coordenadas, por lo general, dispone de muchos. Unas palabras de cautela son indispensables. Como un sistema dinámico es una función  $f : X \rightarrow X$ , es imperativo que pensemos en las coordenadas del dominio y el rango como las mismas.

Un sinónimo de cambiar coordenadas es **conjuguar**, pues una relación  $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$  auspicia la presencia de un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ Y & \xrightarrow{g} & Y. \end{array}$$

Por medio de ejemplos ilustremos esta filosofía.

**Ejemplo 4.11** (La cuenca de atracción de  $\infty$  de un polinomio). Para el estudio del sistema dinámico  $z \mapsto P(z) = a_d z^d + \dots + a_0$ , con  $d \geq 2$  y  $a_d \neq 0$ , introduzcamos la nueva variable  $w = 1/z$  con el objeto de brindarle coordenadas al entorno de infinito. El proceso de iteración queda explícito con

$$w_{n+1} = \frac{1}{z_{n+1}} = \frac{1}{P(z_n)} = \frac{1}{z_n^d} \frac{1}{a_d + \frac{a_{d-1}}{z_n} + \dots + \frac{a_0}{z_n^d}} = w_n^d f(w_n),$$

donde  $f(w) = \frac{1}{a_d + a_{d-1}w + \dots + a_0 w^d}$  es una función holomorfa cerca de  $w = 0$ . Pero esto significa que el origen es un punto superatractor: existe  $S > 0$  tal que cuando  $|w_0| \leq S$ , la sucesión  $\{w_n\}$ , tributaria de los iterados de  $w_0$ , converge al origen. Al revertir a la coordenada original  $z$  donde el origen del plano  $w$  se corresponde con el infinito, deducimos que  $\infty$  es superatractor y que apenas se cumple  $|z_0| \geq R = 1/S$ , la sucesión  $z_n$  converge a  $\infty$ .

**Ejemplo 4.12** (Punto fijo parabólico lineal). La dinámica de  $z \mapsto T(z) = z + 1$  tiene apariencia un tanto sosa: todo punto se desplaza una unidad a la derecha y resulta difícil imaginar complicaciones peores. De este modo toda recta horizontal es completamente

invariante. Esta transformación no admite puntos fijos ni periódicos en  $\mathbb{C}$ . No obstante, el punto  $\infty$  queda fijo en su lugar. Es más, un poco de imaginación nos advierte que  $\infty$  actúa como un atractor para ciertos puntos mientras funge de repulsor para otros. Para entender este rasgo ambivalente, tracemos una recta vertical  $\mathcal{L}$ , digamos definida por  $\operatorname{re} z = a$ . Si seleccionamos un valor  $z_0$  a la derecha de  $\mathcal{L}$ , entonces la sucesión  $z_n$  converge a  $\infty$  en compactos. Mientras, si tomamos  $z_0$  a la izquierda de  $\mathcal{L}$  es posible encontrar  $N$  tal que para  $n \geq N$  los iterados  $z_n$  se localizan a la derecha de  $\mathcal{L}$ , es decir, son sistemáticamente expulsados del semiplano.

Todo lo expuesto nos hace sospechar que el accionar focalizado en  $\infty$  dista de ser tan sencillo como pensábamos originalmente. Lo mejor entonces es escarbar alrededor de este punto, y ello solo es confiable incorporándolo al estudio por intermedio de un cambio de coordenadas  $w = 1/z$ .

Tendremos entonces

$$w_{n+1} = \frac{1}{z_{n+1}} = \frac{1}{z_n + 1} = \frac{1/z_n}{1 + 1/z_n} = \frac{w_n}{1 + w_n}.$$

Por ende, el sistema dinámico local con el que debemos compenetrarnos es

$$w \mapsto \tilde{T}(w) = \frac{w}{1+w} = w - w^2 + w^3 - w^4 + \dots,$$

el cual trasciende lo analizado al inicio de este capítulo al ser su multiplicador de norma unitaria. Por ello, habrá que emprender un análisis desde fojas cero.

Notemos que  $\tilde{T}$  entendida como transformación fraccionaria admite en 0 su único punto fijo. Esto puede confirmarse de diversas maneras. Si nos inclinamos por hacerlo de forma numérica, primero verificamos que  $\infty$  no es un punto fijo pues satisface  $\tilde{T}(\infty) = 1$ , y luego buscamos puntos fijos en el plano complejo vía la ecuación  $\tilde{T}(w) = w$ , la cual, al ser equivalente a  $w + w^2 = w$ , arroja  $w = 0$  como solución exclusiva. La confirmación conceptual es aún más categórica: si  $T$  admite en la variable  $z$  apenas a  $\infty$  como punto fijo, al rectificar los nombres, de  $z$  a  $w$ , el punto fijo en la variable  $w$  es también único y se ubica en  $0 = 1/\infty$ .

Ahora restrinjámonos a la recta real y demostremos que el punto fijo es repulsor por la izquierda y atractor por la derecha. La primera parte es rutina y los pormenores los dejamos como ejercicio al lector. La segunda contiene un pequeño escollo por salvar.

**Ejercicio 4.13.** Para  $w \in (-1, 0)$  se tiene  $\tilde{T}(w) < w$ , es decir  $\tilde{T}(w)$  es negativo y está más alejado del origen que  $w$ .

**Propiedad 4.14.** Si  $w_0 > 0$  entonces los  $w_n$  forman una sucesión decreciente de números positivos que converge a 0.

*Prueba.* Para  $w > 0$  real resulta inmediata la relación  $0 < \tilde{T}(w) < w$ . Con ello la sucesión  $w_n$  es positiva y decreciente, luego convergente digamos a  $a \in \mathbb{R}$ . Un desfase de índices no trastoca convergencias, así que obtenemos también  $\lim \tilde{T}(w_n) = \lim w_{n+1} = a$ . Como  $\tilde{T}$  es continua en  $a$ , concluimos la igualdad  $a = \lim \tilde{T}(w_n) = \tilde{T}(\lim w_n) = \tilde{T}(a)$ . Ya que  $a$  es punto fijo de  $\tilde{T}$ , solamente puede ser 0 por lo estudiado párrafos arriba.  $\square$

¿Y qué hay de las rectas horizontales invariantes en la coordenada  $z$ ? Pues, estas se convierten bajo el cambio de variables en círculos invariantes, todos ellos tangentes a la recta real y con centros sobre el eje imaginario.

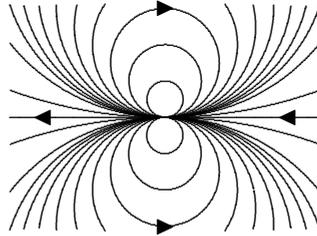


FIGURA 4. La configuración local cerca de un punto fijo parabólico lineal.

**Ejemplo 4.15** (Puntos fijos atractores). Recordemos que  $f$  tiene un punto fijo en  $a$  si se cumple  $f(a) = a$ . En un ambiente donde se pueda desarrollar análisis complejo, al valor  $\lambda = f'(a)$  se le llama **el multiplicador del punto fijo**  $a$ .

Si expandimos en series de potencias de  $z - a$ , obtenemos

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + b_2(z - a)^2 + b_3(z - a)^3 + \dots .$$

De esta suerte, al definir

$$g(w) = \lambda w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \dots ,$$

tendremos  $f(z) - a = f(z) - f(a) = g(z - a)$  y estaremos prestos para efectuar el cambio de variables  $w = z - a$ . Ergo se tiene

$$w_{n+1} = z_{n+1} - a = f(z_n) - a = g(z_n - a) = g(w_n),$$

y caemos de regreso en el contexto de lo estudiado con anterioridad en este capítulo.

Por ejemplo para  $|\lambda| < 1$ , el punto  $a$  es un atractor pues  $w_n \rightarrow 0$  equivale a  $z_n - a \rightarrow 0$ , es decir, se cumple  $z_n \rightarrow a$ . Es más, los estimados ahí logrados se respetan: si escogemos  $s$  real entre  $|\lambda|$  y 1, y  $z_0$  es cercano al punto  $a$ , entonces  $|w_n| \leq |w_0|s^n$  se traduce en la desigualdad  $|z_n - a| \leq |z_0 - a|s^n$ . También la cota del ejercicio 4.9 se transcribe a la letra y se concluye que la aproximación existe, pero no es tan rápida. Por supuesto, para  $\lambda = 0$  es formidable, para los otros, no tanto.

En la esfera de Riemann, disponemos de hasta tres elecciones de coordenadas libre de cargo. Regularmente situamos un punto en  $\infty$  por una de tres razones: porque ahí apareció una vez que imponemos coordenadas y no existe motivación para reubicarlo; porque queremos esconder ciertos imponderables y tornar lo analítico en holomorfo para el resto de puntos; o para magnificar eventos. Una vez realizada esta elección, solemos centrar nuestro objeto de estudio en el origen: esto simplifica el manejo simbólico de series de potencias. Alcanzado este punto, tendemos a olvidar que disponemos de una tercera opción, probablemente para no invalidar el trabajo anterior. La manera eficaz de ejercer esta tercera opción sin destruir normalizaciones previas es a costa de una dilatación. Esto puede ser muy práctico para aliviar algunas fórmulas. A continuación, algunos ejemplos y resultados que se sustentan en estas ideas.

**Proposición 4.16.** *Toda función racional de grado  $d \geq 1$  distinta de la identidad tiene  $d + 1$  puntos fijos contados con multiplicidad.*

*Prueba.* Es claro que una tal función racional tiene apenas un puñado de puntos fijos. Los puntos fijos a los cuales resulta tedioso calcular multiplicidad están situados en  $\infty$ . Por ello, cambiamos de coordenadas a la función racional  $R$  de modo que  $\infty$  no sea un punto fijo. De este modo al escribir

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

con  $P, Q$  polinomios primos entre sí, sabremos, respecto a los grados, que el de  $P$  será menor o igual a  $d$ , mientras el grado de  $Q$  será precisamente  $d$ , pues de lo contrario se tendría  $R(\infty) = \infty$  si  $R$  ha de tener grado  $d$ .

La condición  $R(\infty) \neq \infty$  implica por añadidura que todo punto fijo de  $R$  es un número complejo, y por lo mismo será solución de  $zQ(z) = P(z)$ , una ecuación de grado  $d + 1$ .  $\square$

Que hayamos otorgado cobijo provisional a un punto en  $\infty$  con un trasfondo teórico no significa que este se apodere del lugar.

**Ejemplo 4.17.** Una función racional  $R(z)$  de grado  $d$  tiene un punto fijo de multiplicidad  $d + 1$  en  $\infty$  si y solo si es de la forma  $R(z) = z + \alpha/Q(z)$ , donde  $Q$  es un polinomio de grado  $d - 1$  y  $\alpha$  es una constante no nula. Esto es correcto:  $R(z)$  tiene a  $Q(z)z + \alpha$ , de grado  $d$ , en el numerador y a  $Q(z)$ , de grado  $d - 1$ , en el denominador, polinomios sin factor común. En este caso, como no aparece ningún otro punto fijo para  $R$ , la multiplicidad en  $\infty$  es  $d + 1$  según la proposición anterior. Incluso se puede asumir a  $Q$  mónico si  $\alpha$  absorbe constantes.

Pasemos a casos típicos en el manejo de escalas.

**Ejemplo 4.18.** Cuando se tiene un desarrollo local de un punto fijo superatractor

$$f(z) = \alpha z^m + a_{m+1}z^{m+1} + \dots,$$

el cambio global de coordenadas  $w = z/\eta$ , donde  $\eta$  satisface  $\alpha\eta^{m-1} = 1$ , resulta legal siempre y cuando se tenga  $\alpha \neq 0$  y  $m \geq 2$ . En este nuevo sistema  $f$  se convierte en

$$\tilde{f}(w) = f(\eta w)/\eta = \alpha\eta^{m-1}w^m + a_{m+1}\eta^m z^{m+1} + \dots.$$

Se sigue fácilmente que  $\alpha$  puede trocarse no solo por 1, sino también por cualquier número complejo  $\beta$  no nulo.

Como muestra particular, la dinámica de  $z \mapsto 9z^3$  es equivalente a la de  $w \mapsto w^3$  bajo la identificación  $w = 3z$ , un sistema dinámico bastante bien comprendido.

Lo anterior fue un cambio de coordenadas practicado con miras a un análisis local. También la motivación puede ser global. Por ser la iteración de polinomios no lineales la motivación de este trabajo, colocaremos el polinomio a iterar en una forma estandarizada que facilite manipulaciones abstractas.

**Lema 4.19.** Dado un polinomio  $P$  de grado  $d \geq 2$ , existe una coordenada global en la cual este se lee

$$\tilde{P}(z) = z^d + a_{d-2}z^{d-2} + \dots + a_0;$$

es decir, sin pérdida de rigor se puede asumir que un polinomio de grado al menos 2 es mónico y centrado.

*Prueba.* El primer paso es tornar el polinomio en mónico. Dado  $P(w) = c_d w^d + \dots + c_0$ , con  $c_d \neq 0$ , buscamos  $\eta$  sujeto a  $c_d \eta^{d-1} = 1$  e introducimos la variable  $y = w/\eta$ . El efecto

se aprecia en la presentación

$$\hat{P}(y) = \frac{P(\eta y)}{\eta} = \frac{c_d \eta^d y^d}{\eta} + \cdots + \frac{c_0}{\eta} = y^d + b_{d-1} y^{d-1} + \cdots + b_0.$$

Enseguida centramos este nuevo polinomio. Para ello basta poner  $z = y + b_{d-1}/d$ . Si

$$z^d + a_{d-1} z^{d-1} + a_{d-2} z^{d-2} + \cdots + a_0$$

es la lectura del polinomio en esta nueva variable, comprobaremos que se cumple  $a_{d-1} = 0$ . Como el polinomio no es lineal, en la coordenada  $y$  la suma de todas las preimágenes de cualquier valor, digamos 0, vale  $-b_{d-1}$ . Es decir, si  $y_1, \dots, y_d$  son los ceros del polinomio, entonces se cumple  $\sum y_i = -b_{d-1}$ . Algo similar vale en la coordenada  $z$ : la suma de las preimágenes de  $\hat{z} = b_{d-1}/d$  (la personificación de  $y = 0$ ) es  $-a_{d-1}$ . Pero las preimágenes de  $\hat{z} = b_{d-1}/d$  son precisamente  $z_i = y_i + b_{d-1}/d$ . Al sumar las  $d$  igualdades logramos  $-a_{d-1} = \sum z_i = \sum (y_i + b_{d-1}/d) = -b_{d-1} + db_{d-1}/d = 0$ .  $\square$

De habernos sido familiar esta técnica al inicio del capítulo, la descripción presentada en el ejemplo 4.11 del superattractor hubiese resultado aún más nítida.

## 5 Conceptos básicos de dinámica polinomial

A partir de ahora  $P$  personificará un polinomio de grado mayor o igual a dos.

### La órbita y la gran órbita de un punto

Cuando echamos a rodar el proceso de iteración con  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ , se va formando inductivamente una colección  $z_1 = P(z_0), z_2 = P(z_1), \dots$ . El conjunto  $\mathcal{O}(z_0) = \{z_0, z_1, z_2, \dots\}$  es llamado la **órbita** [positiva o futura] de  $z_0$ . Usaremos también la notación  $z_n = P^{\circ n}(z_0)$ .

Cuando  $z_0$  y  $w_0$  tienen órbitas que se intersecan, diremos que determinan la misma **gran órbita**. Esto es claramente una relación de equivalencia. De este modo, **la gran órbita de  $z_0$**  es el conjunto  $\mathcal{G}(z_0)$  de puntos que comparten con  $z_0$  la misma gran órbita, aunque suene a tautología.

Notemos que  $z_0$  y  $w_0$  pertenecen a la misma gran órbita si y solo si existen números  $n, m$  con los cuales se cumple  $z_n = P^{\circ n}(z_0) = P^{\circ m}(w_0) = w_m$ , es decir, si las trayectorias de  $z_0$  y  $w_0$  se interceptan en algún futuro cercano.

**Ejercicio 5.1.** Defina un conjunto  $X$  como **invariante** si satisface  $f(X) \subset X$ . Demuestre que un conjunto es invariante si y solo si es una unión de órbitas.

Similarmente, un conjunto  $X$  es **totalmente invariante** si satisface  $f(X) \subset X$  y  $f^{-1}(X) \subset X$ . Demuestre que un conjunto es totalmente invariante si y solo si es la unión de grandes órbitas.

### Una primera descomposición dinámica para el caso polinomial

Denotemos por  $U(\infty)$  la cuenca de atracción del punto superatractor  $\infty$  del polinomio  $P$  (ver ejemplo 4.11). Pongamos  $K(P)$  para referirnos al conjunto de puntos cuya órbita a futuro es acotada, llamado **conjunto lleno de Julia**.

Si bien los conjuntos  $U(\infty)$  y  $K(P)$  son disjuntos, nada asegura que determinen una partición del plano complejo extendido. Entonces, ¿qué características debe observar un punto para no decantarse por  $U(\infty)$  ni por  $K(P)$ ? Otra cuestión relacionada es la siguiente: ¿el conjunto de puntos cuya gran órbita es acotada coincide con el conjunto lleno de Julia? (Antes de contestar de modo erróneo es preciso pensar en  $z \mapsto z/2$ .) Para responder y

apreciar la relevancia de estas preguntas lo aconsejable es circunscribirnos a polinomios de grado mayor o igual a dos, y eso haremos en lo sucesivo.

Ahora estudiaremos a fondo la cuenca de atracción de infinito, bien sea de modo directo o por intermedio de su complemento. Primero anotamos que tanto  $U(\infty)$  como su complemento son totalmente invariantes.

**Lema 5.2.** *Se satisface  $z_0 \in U(\infty)$  si y solo si  $P(z_0) \in U(\infty)$ .*

*Prueba.* Pongamos  $z_0, z_1, z_2, \dots$  para referirnos a la secuencia de los iterados de  $z_0$  y  $w_0 = z_1, \dots, w_n = z_{n+1}$  a la secuencia de iterados de  $z_1$ . Con esta notación, la propiedad  $z_0 \in U(\infty)$  equivale, por definición, a que se cumpla  $z_n \rightarrow \infty$ , mientras  $z_1 \in U(\infty)$  equivale a  $w_n \rightarrow \infty$ . Queda clara entonces la permutabilidad de los criterios.  $\square$

**Corolario 5.3.** *Se satisface  $z_0 \in U(\infty)$  si y solo si se cumple  $\mathcal{G}(z_0) \subset U(\infty)$ . Es decir, el conjunto  $U(\infty)$  es totalmente invariante.*

*Prueba.* Dos puntos pertenecen a la misma gran órbita si y solo si existe un tercer punto que está en el horizonte común a ambas. Tras esta observación el resultado se desprende de aplicar un número finito de veces el lema anterior.  $\square$

Páginas atrás presentamos estimados con el objeto de garantizar la convergencia hacia  $\infty$ . Ponemos esto en relieve para luego extraer algunas consecuencias contextuales.

**Lema 5.4.** *Existe  $R$  tal que  $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$  es subconjunto invariante de  $U(\infty)$  (es decir, se cumple  $P(U) \subset U \subset U(\infty)$ ).*

*Prueba.* Esto fue demostrado ya en el ejemplo 4.11.  $\square$

**Lema 5.5.** *Sea  $U$  como en el lema anterior. Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes:*

- $z_0 \in U(\infty)$ ;
- existe  $N$  tal que  $n \geq N$  implica  $z_n \in U$ ;
- existe  $n \geq 0$  para el cual se tiene  $z_n \in U$ ;
- $\mathcal{G}(z_0) \cap U \neq \emptyset$ .

*Prueba.* Recorramos de modo circular las presuntas equivalencias.

Si  $z_0 \in U(\infty)$ , se tiene  $z_n \rightarrow \infty$ . Como  $U$  es una vecindad de  $\infty$ , por definición de convergencia existe  $N$  tal que  $n \geq N$  implica  $z_n \in U$ .

El paso de la segunda a la tercera propiedad es gratuita.

Si  $z_n = P^{on}(z_0) \in U$ , entonces  $z_n$  está en la gran órbita de  $z_0$  y en  $U$ .

Cuando  $w \in \mathcal{G}(z_0) \cap U$ , por un lado tenemos  $w \in U \subset U(\infty)$  y por otro que  $z_0$  y  $w$  comparten la misma gran órbita. Sin embargo, como  $w$  es atraído a  $\infty$ , el corolario 5.3 dictamina que todo  $\mathcal{G}(w)$  —conjunto al que pertenece  $z_0$ — es subconjunto de  $U(\infty)$ .  $\square$

Una consecuencia de lo expuesto es lo siguiente.

**Proposición 5.6.** *La cuenca de atracción de  $\infty$  es un conjunto abierto.*

*Prueba.* Si  $U$  es como en el lema 5.4, entonces el lema anterior presenta a

$$U(\infty) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (P^{on})^{-1}(U)$$

como reunión de conjuntos abiertos.  $\square$

Echemos ahora una mirada al complemento de  $U(\infty)$ .

**Lema 5.7.** *Un punto tiene órbita acotada si y solo si tiene gran órbita acotada. En particular, el conjunto  $K(P)$  es totalmente invariante.*

*Prueba.* Si un punto tiene órbita acotada, entonces no es atraído por  $\infty$  y en consecuencia, gracias al lema 5.5, su gran órbita no invade la región  $U$  del lema 5.4 y por tal motivo es acotada.

Por el lado de regreso, si la gran órbita es acotada, su órbita positiva también lo es.  $\square$

**Proposición 5.8.** *Los conjuntos  $U(\infty)$  y  $K(P)$  forman una partición de  $\mathbb{C}$ .*

*Prueba.* Si un punto no pertenece a  $U(\infty)$ , entonces, debido al lema 5.5, su órbita a futuro jamás ingresa en el conjunto  $U$  y es acotada.  $\square$

Repasemos lo anterior desde la perspectiva del conjunto lleno de Julia.

**Corolario 5.9.** *El conjunto  $K(P)$  es compacto y no vacío.*

*Prueba.* Como  $K(P)$  no se puede intersectar con el conjunto  $U$  del lema 5.4, resulta acotado. Es cerrado por ser el complemento de un abierto. Luego es compacto.

El conjunto  $K(P)$  es no vacío pues incluye todos los puntos fijos de  $P$ . En efecto, como  $P$  tiene grado 2 o más, la ecuación  $P(z) = z$  arroja al menos una raíz  $z_0$ . En este caso la órbita futura de  $z_0$  es estacionaria y, desde luego, acotada al ser finita.  $\square$

Otros puntos ubicados en  $K(P)$  son aquellos que satisfacen  $P^{on}(z) = P^{om}(z)$  con  $n, m$  distintos.

**Ejemplo 5.10.** Mostraremos que el conjunto lleno de Julia del polinomio  $P(z) = z^2 - 2$  es el intervalo real  $[-2, 2]$ . Para ello nos remitimos atrás a la iteración  $w_{n+1} = w_n^2$ , cuya sinopsis no abarca más de tres oraciones:

- se cumple  $|w_0| < 1$  si y solo si  $w_n \rightarrow 0$ ,
- se cumple  $|w_0| > 1$  si y solo si  $w_n \rightarrow \infty$ , y
- se cumple  $|w_0| = 1$  si y solo si  $|w_n| = 1$  para todo  $n$ .

Pongamos ahora  $z_n = w_n + 1/w_n$  (si  $w_n = 0$ , irremediamente  $z_n = \infty$ ). [Acá invocamos al lector a andar con cuidado: esto no es un cambio de variable. Efectivamente, la asignación  $z(w) = w + 1/w$  es una función dos a uno, y en rigor no es invertible.] Al elevar al cuadrado, resulta  $z_n^2 = w_n^2 + 2 + 1/w_n^2$ . Es decir, es correcto poner

$$z_{n+1} = w_{n+1} + 1/w_{n+1} = w_n^2 + 1/w_n^2 = z_n^2 - 2.$$

Concluimos que  $z_n$  tiende a  $\infty$  si y solo si  $w_n$  tiende a 0 o  $\infty$ . O alternativamente,  $z_n$  no tiende a  $\infty$  si y solo si  $w_n$  no tiende a 0 o a  $\infty$ . O, mejor todavía, se cumple  $z_n \in K(P)$  si y solo si  $|w_n| = 1$  para todo  $n$ . Pero  $|w_0| = 1$  es equivalente a  $z_0 \in [-2, 2]$ , y esto confirma la sospecha de que apenas los valores en este intervalo no se someten al influjo de  $\infty$ .

Antes de finalizar esta subsección, presentamos un importante resultado que explica la conexión entre el conjunto lleno de Julia de un polinomio y el conjunto lleno de Julia de las composiciones del polinomio consigo mismo.

**Proposición 5.11.** *Sea  $P$  un polinomio de grado mayor o igual a 2. Entonces, para todo  $n \geq 1$  se tiene  $K(P) = K(P^{\circ n})$ . Consecuentemente, las cuencas de atracción de infinito de  $P$  y  $P^{\circ n}$  coinciden.*

*Prueba.* Si el conjunto  $\{z_0, z_1, \dots\}$  es acotado, con mayor razón  $\{z_0, z_n, z_{2n}, \dots\}$  lo será. De ello se desprende la inclusión  $K(P) \subset K(P^{on})$ .

Recíprocamente, al tenerse  $z_0 \in K(P^{on})$ , el conjunto  $\{z_0, z_n, z_{2n}, \dots\}$  será acotado y por consiguiente no convergerá a  $\infty$ . Así la sucesión  $z_k$  no converge a  $\infty$  y por la dicotomía de la proposición 5.8 el punto  $z_0$  pertenecerá a  $K(P)$ .  $\square$

### La cuenca de atracción de infinito es conexa

Todo subconjunto abierto del plano se descompone como una unión disjunta enumerable de sus componentes conexas. La cuenca de atracción de infinito no es la excepción. Veremos a continuación que  $U(\infty)$  consta de una única pieza.

Sea  $V$  la componente conexa de  $U(\infty)$  que contiene al conjunto  $U$  del lema 5.4. Por construcción cualquier otra componente de  $U(\infty)$  será acotada, ya que pertenece a la bola de radio  $R$ . Para referencia inmediata hacemos constar que cualquier punto  $z \in K(P)$  satisface  $|P^{on}(z)| \leq R$ , pues de lo contrario su órbita ingresaría al conjunto  $U(\infty)$  y se perdería eventualmente de vista.

Denotemos por  $J$  a la frontera de  $V$ . Como  $J$  no puede intersectarse con  $U(\infty)$ , resulta subconjunto de  $K(P)$ . Sean  $V_0, V_1, \dots$  las componentes conexas de  $\hat{\mathbb{C}} - J$  con  $V_0 = V$ . Es un recurso de topología elemental notar que la frontera de cada  $V_i$  está contenida en  $J \subset K(P)$ . Si tomamos un punto  $z_0 \in V_i$ , con  $i \neq 0$ , vemos que se cumple

$$|z_n| = |P^{on}(z_0)| \leq \sup_{w \in J} |P^{on}(w)| \leq \sup_{w \in K(P)} |P^{on}(w)| \leq R$$

en aplicación del principio del módulo máximo. Así, la órbita de  $z_0$  permanece acotada y nominalmente pertenece a  $K(P)$ . Esto demuestra que ninguno entre los  $V_i$  con  $i \neq 0$  es parte de  $U(\infty)$ .

Resumimos estas apreciaciones en el siguiente teorema.

**Teorema 5.12.** *Para un polinomio de grado mayor o igual a 2 la cuenca de atracción de  $\infty$  es conexa.*  $\square$

En adelante pondremos  $J(P)$  para referirnos a esta frontera de  $U(\infty)$ , la cual, por lo recién expuesto, está incluida en  $K(P)$ . Por las **componentes de  $K(P)$**  nos referimos a las componentes acotadas de  $\hat{\mathbb{C}} - J(P)$ . Estas en conjunto constituyen el interior de  $K(P)$ .

**Ejemplo 5.13.** En la dinámica de  $z \mapsto z^2$ , el conjunto  $J(P)$  es  $\mathbb{T}$ , el círculo unitario. Aquí aparece  $\mathbb{D}$  como única componente interior a  $K(P)$ .

En la dinámica de  $z \mapsto z^2 - 2$ , el conjunto lleno de Julia no tiene interior y no hay lugar para componentes finitas. En casos así  $J(P)$  y  $K(P)$  coinciden.

**Proposición 5.14.** *El conjunto  $J(P)$  es totalmente invariante.*

*Prueba.* Como  $J(P)$  está contenido en  $K(P)$  y este es totalmente invariante, es suficiente probar que  $z \in K(P)$  no es interior a  $K(P)$  si y solo si  $P(z)$  no es interior. Es decir, queda por verse si  $z \in K(P)$  es interior a  $K(P)$  si y solo si  $P(z)$  también es interior. Pero esto último resulta trivial al observar que  $P$  es una función abierta.  $\square$

Ahora centrémonos en la dinámica de las componentes.

**Proposición 5.15.** *Si  $V$  es una componente de  $K(P)$ , entonces  $P(V)$  también es una componente de  $K(P)$ . Es más, la restricción  $P : V \rightarrow P(V)$  tiene un grado finito bien definido.*

*Prueba.* Al ser  $V$  una componente del interior del conjunto invariante  $K(P)$ , su imagen  $P(V)$  es un subconjunto abierto de  $K(P)$ , que, por lo mismo, resulta disjunto de  $J(P)$ . Por continuidad, la imagen de la clausura de  $V$  es la clausura de  $P(V)$ . La componente conexa  $V$  es tal que su frontera  $\partial V = cl(V) - V$  pertenece a  $J(P)$ . En virtud de la proposición 5.14 se tiene  $P(\partial V) \subset J(P)$  y así  $P(\partial V)$  debe pertenecer a  $\partial P(V) = cl(P(V)) - P(V)$ , pues ya hemos comentado por qué no se interseca con  $P(V)$ . En otras palabras  $P(V)$  es una componente de  $K(P)$  y la función  $P : V \rightarrow P(V)$ , por el lema 2.5, es propia, vale decir tiene un grado finito bien definido.  $\square$

Una propiedad donde juega de manera objetiva la prerrogativa de estar trabajando con polinomios es la siguiente.

**Proposición 5.16.** *Para un polinomio  $P$ , las componentes finitas de  $K(P)$  son todas simplemente conexas.*

*Prueba.* Debemos mostrar que la componente acotada de  $\mathbb{C} - \gamma$ , donde  $\gamma$  describe una curva cerrada sin autointersecciones contenida en una componente finita  $V \subset K(P)$ , cae completamente en  $K(P)$ . Pero esto es un ejercicio elemental basado en el principio del módulo máximo.  $\square$

**Nota 5.17.** Es importante insistir en que esta propiedad deja de ser válida para la cuenca de atracción de  $\infty$  de ciertos polinomios (ver teorema 17.19 y ejercicio 17.21).

**Ejemplo 5.18.** Para el polinomio  $P(z) = z^2 - 1$ , la órbita de  $z_0 = 0$ , el punto crítico, tiene periodo 2 y multiplicador 0. Como consecuencia, un iterado sí, un iterado no, puntos cercanos a 0 excursionan aún más cerca del origen. En la figura 5, abajo, se aprecia las componentes que se van formando. En breve explicaremos por qué 0 y  $-1$  pertenecen a distintas componentes finitas de  $K(P)$  (comparar proposición 7.8).

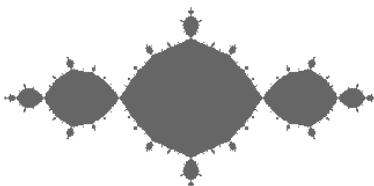


FIGURA 5. La basílica.

Presentamos algunos otros conjuntos llenos de Julia.

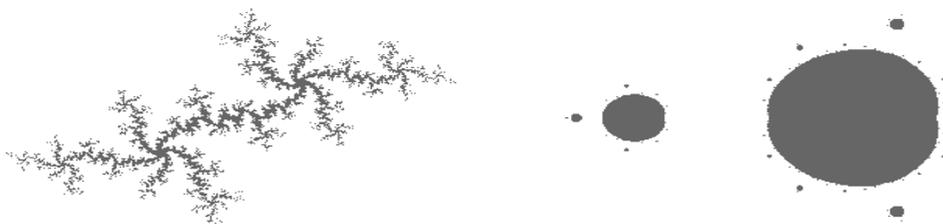


FIGURA 6. A la izquierda el conjunto de Julia de  $z \mapsto z^2 - 0.57 - 0.57i$ . A la derecha el de  $z \mapsto 13z^3 + 6z^2$ , conjunto lleno de Julia que no obstante tener un superatractor en el origen es desconexo.

Y otros.

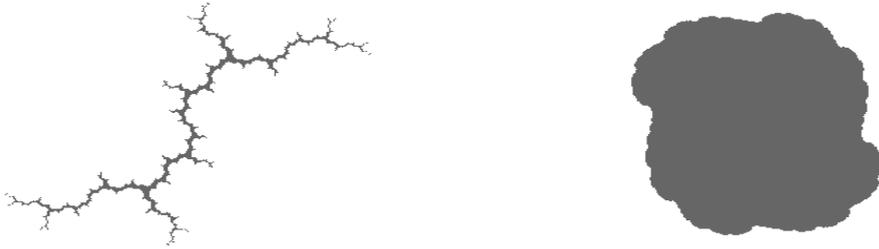


FIGURA 7. A la izquierda el conjunto de Julia de  $z \mapsto z^2 + i$ ; esta figura inspiró el nombre de **dendrita** para los conjuntos llenos de Julia conexos sin interior. A la derecha un cuasidisco determinado por la iteración de  $z \mapsto z^2 + 0.2 + 0.1i$ .

## 6 Iteración de funciones racionales

En esta sección adoptamos un lenguaje flexible para recuperar de un manera económica lo efectuado hasta el momento.

Sea  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  una función racional de grado al menos 2. El **conjunto de Fatou de  $f$** , en adelante  $F(f)$ , es el conjunto de puntos que admiten una vecindad  $U$  para la cual la familia de restricciones  $\{rest_U(f^{on})\}$  de los sucesivos iterados de  $f$  conforman una familia normal.

De las propiedades básicas de normalidad estudiadas en el capítulo 3 deducimos un primer resultado.

**Proposición 6.1.** *El conjunto de Fatou es un conjunto abierto totalmente invariante.*

*Prueba.* Que  $F(f)$  sea abierto se desprende de la proposición 3.6 pues aglutina las regiones locales de normalidad. Que  $F(f)$  sea totalmente invariante es consecuencia del teorema 3.10 al hacer que  $f$  simule ser  $g$ .  $\square$

**Ejemplo 6.2** (La cuenca de atracción de infinito de un polinomio pertenece al conjunto de Fatou). Para un polinomio  $P$  de grado al menos 2, los iterados  $P^{on}$  convergen en  $U(\infty)$  uniformemente a  $\infty$ .

**Ejemplo 6.3** (Las componentes interiores de  $K(P)$  pertenecen al conjunto de Fatou). En el interior de  $K(P)$ , los sucesivos iterados de  $P$  envían una componente en otra (comparar proposición 5.15). Como consecuencia, los sucesivos iterados siempre caen en  $K(P)$  y son acotados. El teorema de Montel rubrica su normalidad pues todos evitan la misma vecindad de  $\infty$ .

El **conjunto de Julia** de  $f$  es el complemento del conjunto de Fatou.

**Ejemplo 6.4** (El conjunto de Julia de un polinomio es  $J(P)$ ). Por lo expuesto en los ejemplos 6.2 y 6.3, el complemento de  $J(P)$  se ubica en el conjunto de Fatou, es decir, el conjunto de Julia es un subconjunto de  $J(P)$ . Así, es suficiente probar que en ninguna vecindad conexa  $A$  de  $z \in J(P) = \partial U(\infty)$  la restricción de los iterados  $P^{on}$  configuran

una familia normal. Para ello es menester comprobar que ninguna subsucesión de  $P^{\circ n}$  converge en  $A$ . Rebatamos por el absurdo  $P^{\circ n_k} \rightarrow g$  como posibilidad, donde  $g : A \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  es analítica. Como  $z$  está localizado en la frontera de  $U(\infty)$ , necesariamente la intersección  $A \cap U(\infty)$  es un abierto no trivial. Por definición se tiene  $P^{\circ n_k} \rightarrow \infty$  en  $A \cap U(\infty)$ . Como  $g$  toma el valor  $\infty$  en un subconjunto abierto, debe ser constante en  $A$  en virtud del teorema 1.12. Pero esto es impensable: los diversos iterados de  $z \in J(P) \subset K(P)$  son acotados y de converger a  $g(z)$ , jamás lo harán a  $\infty$ . He ahí la contradicción.

Puesto que este ejemplo descarta confusiones, en lo sucesivo denotaremos por  $J(f)$  al conjunto de Julia de una función racional cualquiera.

**Proposición 6.5.** *El conjunto de Julia  $J(f)$  es cerrado y totalmente invariante.*

*Prueba.* Es cerrado por ser el complemento de un abierto. Es totalmente invariante al serlo su complemento.  $\square$

Aplicamos la proposición 5.11 y concluimos que, para polinomios, los correspondientes conjuntos de Fatou y de Julia de  $P$  y  $P^{\circ n}$  coinciden. Presentamos a continuación una prueba sustentada en la normalidad.

**Lema 6.6.** *Si  $f$  es una función racional, entonces para  $n \geq 1$  se tiene  $F(f) = F(f^{\circ n})$ . Como consecuencia, se cumple también  $J(f) = J(f^{\circ n})$ .*

*Prueba.* Sea  $z \in F(f)$  y  $V$  una vecindad de  $z$  donde los iterados de  $f$  conforman una familia normal. Si tomamos una subsucesión de  $f^{\circ mn}$  (con  $n$  fijo y  $m$  variable), siempre encontraremos un refinamiento convergente en  $V$  gracias a la hipótesis de normalidad. En consecuencia  $F(f)$  es subconjunto de  $F(f^{\circ n})$ .

A la inversa, asumamos  $z \in F(f^{\circ n})$  y tomemos una secuencia  $f^{\circ m_k}$ . Con apenas un número finito de clases aritméticas módulo  $n$ , podemos asumir, sin temor, que se satisface  $m_k = d_k n + r$ , donde  $0 \leq r < n$ , pues al menos un residuo se repite indefinidamente. En este caso tenemos  $f^{\circ m_k} = f^{\circ r} \circ (f^{\circ n})^{\circ d_k}$ . Como por hipótesis de trabajo  $(f^{\circ n})^{\circ d_k}$  puede forzarse a converger cerca de  $z$ , lo mismo ocurre para  $f^{\circ m_k}$ .  $\square$

A cada componente conexa de  $F(f)$  se le llama **componente de Fatou**.

**Ejercicio 6.7.** Demuestre que  $f$  lleva componentes de Fatou en componentes de Fatou con un grado bien definido. [Sugerencia: ver proposición 5.15.]

## 7 Puntos periódicos

En esta sección recopilamos información en lo que atañe a puntos periódicos.

Todo punto periódico del sistema dinámico  $z \mapsto P(z)$  por definición cierra un circuito tipo  $z_0 \rightarrow z_1 \rightarrow \cdots \rightarrow z_{n-1} \rightarrow z_n = z_0$ , o lo que es lo mismo, da cabida a  $P^{on}(z) = z$  en forma de ecuación. Esto, con certidumbre, implica que la órbita  $\mathcal{O}(z_0)$  es finita.

Si nos cercioramos de que las coordenadas sean elegidas con  $z_0, \dots, z_{n-1}$  visibles (es decir, distintos de  $\infty$ ), es posible definir el **multiplicador**

$$\lambda_{\mathcal{O}(z_0)} = \frac{dP^{on}}{dz}(z_0) = P'(z_0) \cdots P'(z_{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1} P'(z_i).$$

**Lema 7.1.** *El multiplicador de una órbita de periodo  $n$  es un invariante que no depende de cuál sea el punto elegido a lo largo de la órbita.*

*Prueba.* Que el multiplicador no dependa del sistema referencial fue estudiado antes, en el ejercicio 1.58.

Para la segunda parte apreciamos que  $z_k$  acepta también periodo  $n$  pues cuando  $s - r$  es divisible por  $n$ , se tiene  $z_r = z_s$ . En suma, la diferencia entre los multiplicadores

$$(P^{on})'(z_0) = P'(z_0)P'(z_1) \cdots P'(z_{n-1}) \text{ y } (P^{on})'(z_k) = P'(z_k)P'(z_{k+1}) \cdots P'(z_{n+k-1})$$

se halla en el orden de los factores, lo cual no altera el producto. □

**Ejemplo 7.2** (Todos los multiplicadores se logran). Dado  $\lambda$ , para  $P(z) = \lambda z + z^2$  el origen es un punto fijo de multiplicador  $\lambda$ ; el otro punto fijo está en  $1 - \lambda$  y tiene multiplicador  $P'(1 - \lambda) = 2 - \lambda$ .

El siguiente criterio es la manera práctica de detectar puntos periódicos.

**Lema 7.3.** *Un punto tiene periodo  $n$  para  $P$  si y solo si es un punto fijo de  $P^{on}$ . El multiplicador como punto de periodo  $n$  para  $P$  y el multiplicador como punto fijo de  $P^{on}$  coinciden.*

*Prueba.* La primera parte es trivial. La segunda es la regla de la cadena. □

Una órbita periódica asume distintos periodos. Por ejemplo, una órbita de periodo 3 es también de periodo 6. Determinar cómo se relacionan los correspondientes multiplicadores es simple.

**Ejercicio 7.4.** Demuestre que cuando  $z_0$  tiene en periodos  $n, m$  multiplicadores  $\lambda_n, \lambda_m$ , respectivamente, se cumple  $\lambda_n^m = \lambda_m^n$ . [Sugerencia:  $z_0$  es punto fijo de  $P^{on}$ ,  $P^{om}$  y  $P^{onm}$ .]

Sea  $z_0$  periódico de multiplicador  $\lambda = \lambda_{\mathcal{O}(z_0)}$ . Diremos que la órbita de  $z_0$  es

- **atractora** si  $|\lambda| < 1$ ,
- **indiferente** (o **neutral**) si  $|\lambda| = 1$ ,
- **repulsora** si  $|\lambda| > 1$ .

Para  $\lambda = 0$ , la órbita atractora recibe el apelativo adicional de **superatractora**. Cuando  $\lambda$  sea una raíz de la unidad, a la órbita neutral le adjuntaremos la etiqueta de **parabólica**. El estatus nunca dependerá de de cual de los tantos periodos de la órbita estemos hablando. Una muestra viene a continuación.

**Proposición 7.5.** *Una órbita periódica es superatractora si y solo si uno de sus elementos es un punto crítico.*

*Prueba.* Un producto  $\prod_{i=0}^{n-1} P'(z_i)$  vale 0 si y solo si se aniquila a uno de los factores. Esto es posible exclusivamente cuando uno de los  $z_i$  es un punto crítico.  $\square$

## Puntos fijos atractores

Si  $z_0$  es un punto fijo atractor para  $P$ , hemos visto en el ejemplo 4.15 que la **cuenca** (u **olla**) **de atracción de**  $z_0$ , dada por

$$U_P(z_0) = \{z : P^{ok}(z) \rightarrow z_0\},$$

contiene una vecindad de  $z_0$ . Sabido esto, es rutina concluir que  $U(z_0)$  es un conjunto abierto no vacío. (Comparar con lema 5.5 y proposición 5.6.)

Como los sucesivos iterados de  $P$  convergen uniformemente en compactos de  $U(z_0)$  a la función constante igual a  $z_0$ , ahí conforman una familia normal. Hemos comprobado así la primera parte del siguiente lema.

**Lema 7.6.** *La cuenca de un punto fijo atractor es totalmente invariante y pertenece al conjunto de Fatou. Su frontera coincide con el conjunto de Julia.*

*Prueba.* La primera aseveración ya fue comentada parcialmente. Que  $z$  pertenezca a  $U(z_0)$  siempre y cuando se tenga  $P(z) \in U(z_0)$  lo encomendamos al lector. (Véase también lema 5.2.)

Verifiquemos la segunda afirmación. Sea  $U(z_0)$  la cuenca de atracción del punto fijo  $z_0$  de  $P$ , la cual por ser abierta y no vacía (pues contiene de arranque a  $z_0$ ), cuenta con al menos tres puntos. Si  $z \in \partial U(z_0)$ , entonces  $z$  no pertenece a  $U(z_0)$  y, luego, la secuencia  $P^{on}(z)$  no converge a  $z_0$ . Se infiere de inmediato que ninguna subsecuencia de  $P^{on}(z)$  converge a  $z_0$ . Si por absurdo suponemos  $z \notin J(P)$ , existirá una vecindad  $V$  de  $z$  en la cual cierta subsecuencia  $P^{om_k}$  de los iterados converge, digamos a  $\varphi$ . Achicando  $V$  de oficio, este abierto tórnase conexo. Entretanto, por ser  $V$  una vecindad de  $z \in \partial U(z_0)$ , se cumple  $V \cap U(z_0) \neq \emptyset$ . Con ello se tiene

$$\varphi(z) = \lim P^{om_k}(z) = z_0 \quad \text{cuando } z \in V \cap U(z_0),$$

lo cual, en complicidad con el teorema 1.12, descubre a  $\varphi$  como idénticamente igual a  $z_0$  en  $V$ . Esto es imposible pues  $z$  satisface  $\varphi(z) \neq z_0$ .

Para el regreso, supongamos se tenga  $z \in J(P)$ . Si  $z$  no pertenece a  $\partial U(z_0)$ , entonces existe una vecindad  $W$  de  $z$  disjunta de  $cl(U(z_0))$ . En este caso los sucesivos iterados de  $P$  restringidos a  $W$  no asomarán por  $U(z_0)$ . Como de este modo eluden tres puntos, constituyen una familia normal. Esto desdice la pertenencia de  $z$  al conjunto de Julia.  $\square$

Distintos atractores determinan cuencas disjuntas. También, la componente de Fatou que contiene un punto fijo atractor ha de ser invariante.

## Puntos atractores de mayor periodo

Sea  $z_0$  un punto atractor (o superatractor) de periodo  $n$ . La **cuenca de atracción** de  $\mathcal{O}(z_0)$  es el conjunto de puntos que tienden a esta órbita. Para ser exactos, definimos

$$U_P(\mathcal{O}(z_0)) = \bigcup_{i=0}^{n-1} U_{P^{on}}(z_i),$$

donde los  $U_{P^{on}}(z_i)$  son las cuencas individuales de atracción de los puntos fijos  $z_0, \dots, z_{n-1}$  de  $P^{on}$ .

Como consecuencia directa de los lemas 6.6 y 7.6, logramos lo siguiente.

**Lema 7.7.** *La cuenca de una órbita periódica atractora es totalmente invariante y está incluida en el conjunto de Fatou. Su frontera coincide con el conjunto de Julia.*  $\square$

Ha llegado el momento de saldar una antigua deuda.

**Proposición 7.8.** *Cada miembro de un ciclo atractor periódico pertenece a una distinta componente del conjunto de Fatou.*

*Prueba.* Distintos puntos en un ciclo de orden  $n$  para  $f$  representan distintos puntos fijos para  $f^{on}$ . Como distintos puntos fijos atractores pertenecen a distintas componentes, se sigue el resultado.  $\square$

## Órbitas repulsoras

Nuestro siguiente objetivo es probar que las órbitas repulsoras pertenecen al conjunto de Julia. Esto es casi instatáneo. La estrategia es clara: establecemos primero el resultado para puntos fijos y luego reemplazamos  $P$  por  $P^{on}$ .

**Lema 7.9.** *Todo punto fijo repulsor pertenece al conjunto de Julia.*

*Prueba.* Sea  $z_0 \in \mathbb{C}$  un punto fijo de  $P$  con  $|P'(z_0)| > 1$ . Probaremos, independientemente de la vecindad  $W$  de  $z_0$ , que es demasiado optimista el poder improvisar subsecuencias de  $P^{om}$  convergentes en  $W$ . Si por el contrario asumimos que  $P^{om_k}$  converge a  $\varphi$  en  $W$ , entonces tendremos  $\varphi(z_0) = \lim P^{om_k}(z_0) = z_0$  con lo cual  $\varphi$  resulta honestamente holomorfa en  $z_0$ . Esto en particular significa que la derivada  $\varphi'(z_0)$  existe y es un número complejo. Esto último, empero, es impracticable ya que  $\varphi'$  es el límite de las derivadas de  $P^{m_k}$ , y en  $z_0$  en especial se tiene

$$\varphi(z_0) = \lim (P^{m_k})'(z_0) = \prod_{i=0}^{m_k-1} P'(z_i) = \prod_{i=0}^{m_k-1} P'(z_0) = \lambda^{m_k} \rightarrow \infty.$$

$\square$

**Corolario 7.10.** *Toda órbita repulsora pertenece al conjunto de Julia.*  $\square$

## 8 El método de Newton

Para conseguir soluciones numéricas de una ecuación polinomial, el método de Newton resulta inigualable. En base a lo aprendido veamos por qué este algoritmo funciona cuando lo hace, y por qué en otras ocasiones es preciso estar atentos.

Dado un polinomio  $P$  de grado mayor o igual a 2, el **método de Newton asociado** a  $P$  es el sistema dinámico generado por la función racional

$$N(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)} = \frac{zP'(z) - P(z)}{P'(z)} = \frac{(d-1)a_d z^d + (d-2)a_{d-1} z^{d-1} + \cdots + 0a_1 z - a_0}{da_d z^{d-1} + (d-1)a_{d-1} z^{d-2} + \cdots + 2a_2 z + a_1},$$

es decir, por el proceso iterativo  $z_{n+1} = z_n - \frac{P(z_n)}{P'(z_n)}$ .

**Ejercicio 8.1.** ¿Qué ocurre con el método de Newton para un polinomio de grado 1?

**Lema 8.2.** *La función  $N$  tiene en  $\infty$  un punto fijo de multiplicador igual a  $d/(d-1)$ . En consecuencia, este punto fijo es repulsor y pertenece al conjunto de Julia de  $N$ .*

*Prueba.* Al obrar el cambio de coordenadas  $w = 1/z$  para que  $z = \infty$  se corresponda con  $w = 0$ , tendremos

$$\tilde{N}(w) = \frac{1}{N(1/w)} = w \frac{da_d + (d-1)a_{d-1}w + \cdots + a_1 w^{d-1}}{(d-1)a_d + (d-2)a_{d-1}w + \cdots + 0a_1 w^{d-1} - a_0 w^d}.$$

Puesto que  $a_d$  es distinto de 0, el desarrollo de  $\tilde{N}$  es de la forma  $\frac{d}{d-1}w + \cdots$ . Esto equivale a lo afirmado en la primera parte.

Como  $d$  es mayor que  $d-1$ , el multiplicador supera a 1 y el punto fijo por definición es repulsor. Los puntos fijos repulsores pertenecen al conjunto de Julia en consonancia con el Lema 7.9.  $\square$

Los restantes puntos fijos de  $N$  satisfacen  $N(z) = z$ , es decir, son ceros de  $P$ . Veamos ahora qué ocurre cerca de estos puntos con  $N$ . Al computar la derivada de  $N(z)$  queda  $N'(z) = \frac{P(z)P''(z)}{P'(z)^2}$ .

**Proposición 8.3.** *Si  $P$  admite en  $z_0$  una raíz simple, entonces el punto fijo  $z_0$  del método de Newton es superatractor.*

*Prueba.* Cuando la raíz es simple se tiene  $P'(z_0) \neq 0$  y con ello se obtiene  $N'(z_0) = 0$ . El resultado se sigue de la proposición 7.5.  $\square$

Cuando la multiplicidad de la raíz es superior a 1, lo anterior no aplica. Nos facilita la vida escribir  $P(z) = (z - z_0)^k Q(z)$ , donde  $k \geq 2$  y  $Q(z_0) \neq 0$ , pues así tendremos  $P'(z) = k(z - z_0)^{k-1} Q(z) + (z - z_0)^k Q'(z)$ . Derivando por una segunda vez logramos  $P''(z) = k(k-1)(z - z_0)^{k-2} Q(z) + 2k(z - z_0)^{k-1} Q'(z) + (z - z_0)^k Q''(z)$ . El colocar todo junto nos conduce a

$$N'(z) = \frac{Q(z)(k(k-1)Q(z) + 2k(z - z_0) + (z - z_0)^2 Q''(z))}{(kQ(z) + (z - z_0)Q'(z))^2}.$$

Al evaluar en  $z_0$  se obtiene

$$N'(z_0) = \frac{k(k-1)Q(z_0)^2}{k^2 Q^2(z_0)} = \frac{k-1}{k}.$$

**Proposición 8.4.** *Si  $P$  admite en  $z_0$  una raíz de multiplicidad  $k$ , entonces en el método de Newton el multiplicador del punto fijo  $z_0$  vale  $(k-1)/k$ . En particular, si la raíz  $z_0$  es al menos doble, entonces para el método de Newton el punto fijo  $z_0$  es un atractor pero no un superatractor.*  $\square$

**Ejemplo 8.5** (Falsos atractores). El método de Newton para  $P(z) = z^3 - 2z + 2$  dado por  $N(z) = z - \frac{z^3 - 2z + 2}{3z^2 - 2}$  posee un superatractor que no es raíz de  $P$ . Veamos. Un cálculo directo muestra que se cumple  $N(0) = 1$  y  $N(1) = 0$ . Como esta órbita periódica contiene un punto crítico de  $N$  (pues se tiene  $N'(0) = P(0)P''(0)/P'(0)^2 = 0$ ), la proposición 7.5 indica que encaramos un superatractor.

Ahora estamos en condiciones plenas para justificar seriamente algunas propiedades del método de Newton frecuentemente tomadas a la ligera.

- La proposición 8.4 explica por qué el método de Newton es bueno para detectar raíces simples pero delata un comportamiento pobre para las múltiples.
- El ejemplo 8.5 muestra que el método de Newton no es infalible. Fijémonos que el proceso incluso puede verse comprometido para un conjunto abierto de condiciones iniciales.
- Es folclore afirmar que cuando el método de Newton no camina con una condición inicial, una pequeña perturbación numérica lo enrumba. El ejemplo 8.5 atestigua cómo este “principio” no es del todo exacto.

- Lo que sí funciona es lo siguiente. Para todos los valores del conjunto de Julia (y este es no vacío según contempla el lema 8.2) el método no converge a ninguna raíz. Como estos valores se encuentran en la frontera de las cuencas de atracción de las raíces (ver lema 7.6), en cualquier vecindad de estos puntos encontraremos valores que sí convergen.



## 9 Una primera ojeada al conjunto de Julia

Ha llegado el turno de ocuparnos del conjunto de Julia, lugar donde, en principio y por definición, el sistema dinámico racional es errático.

### Conjuntos excepcionales

Para una función racional de grado mayor o igual a 2, un conjunto será **excepcional** tan pronto sea finito y totalmente invariante. Así, un conjunto resulta excepcional siempre y cuando sea una unión finita de grandes órbitas finitas. Un ejemplo en el caso polinomial está dado por el unitario  $\{\infty\}$ . Otra órbita totalmente invariante es  $\{0\}$  para  $z \mapsto z^d$  cuando  $d \geq 2$ . Una gran órbita con dos elementos aparece con  $R(z) = 1/z^d$ , donde  $d \geq 2$ , en  $\{0, \infty\}$ .

El caso polinomial es fácil de catalogar.

**Proposición 9.1.** *Toda gran órbita finita de un polinomio (de grado mayor o igual a 2) es unitaria. Aparte de  $\{\infty\}$ , puede haber a lo sumo una única otra gran órbita excepcional; y de ser así, el polinomio es conjugado a  $z \mapsto z^d$  para cierto  $d \geq 2$ .*

*Prueba.* Sea  $d \geq 2$  el grado de  $P$ . Tomemos  $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$  puntos distintos. Empezamos afirmando que  $P^{-1}(\{w_1, \dots, w_n\})$  contiene al menos  $nd - d + 1$  elementos. En definitiva, tal inversa está constituida por  $nd$  elementos “contando multiplicidad”. Como existen a lo mucho  $d - 1$  puntos críticos, el conjunto de interés contiene al menos  $nd - d + 1$  especímenes distintos. De este modo, si se satisface  $n > 1$ , el tamaño de las sucesivas preimágenes de un conjunto con  $n$  o más puntos se incrementa de inversa en inversa pues  $n, d > 1$  abre camino a  $nd - d + 1 > n$ . Concluimos que un conjunto excepcional en  $\mathbb{C}$  no puede comprender más de un punto en el caso polinomial.

En caso de existir, sin pérdida de generalidad situamos tal punto excepcional en  $w = 0$ . Como este punto es totalmente invariante, la preimagen de 0 debe ser 0, pero contado  $d - 1$  veces; es decir, se debe cumplir  $P'(w) = \lambda w^{d-1}$ , con  $\lambda \neq 0$ . En otras palabras, se ha de tener  $P(w) = (\lambda/d)w^d + c$  para cierta constante  $c$ . Por supuesto,  $P(0) = 0$  implica  $c = 0$ . Finalmente, si  $a \neq 0$  satisface  $a^{d-1} = \lambda/d$ , tendremos  $P(w) = a^{d-1}w^d$ , y al efectuar el cambio de variable  $z = aw$ , la iteración se trueca por  $\tilde{P}(z) = z^d$ .  $\square$

**Corolario 9.2.** *Si  $z_0$  no pertenece a un conjunto excepcional, entonces existen por lo menos tres puntos distintos que eventualmente llegan a  $z_0$ .*

*Prueba.* Esto ciertamente es un escolio a la prueba de la proposición 9.1. Si  $P^{-1}(z_0)$  tiene más de un punto, entonces  $P^{-1}(P^{-1}(z_0))$  contiene más de dos (es decir, al menos tres) y todos ellos necesitan dos pasos para llegar a  $z_0$ . Si  $P^{-1}(z_0)$  tiene exactamente un punto, pongamos  $z_{-1}$ , entonces este es un punto crítico de multiplicidad  $d - 1$ . Como  $z_0$  no pertenece a un conjunto excepcional, debemos tener  $z_{-1} \neq z_0$ . En este caso  $\{z_0, z_{-1}\}$  tiene dos elementos, y por ello  $P^{-1}(\{z_0, z_{-1}\})$  acoge al menos tres. Todos ellos eventualmente terminan en  $z_0$  vía  $z_{-1}$ .  $\square$

**Ejercicio 9.3.** Todo conjunto excepcional de una función racional consta de uno o dos puntos. De existir una gran órbita unitaria, entonces la función racional es conjugada a un polinomio. Si existe una órbita excepcional con dos puntos, entonces la función racional es conjugada a  $R(z) = 1/z^d$ , con  $d \geq 2$ . [Sugerencia: según la proposición 2.17 una función racional de grado  $d$  tiene  $2d - 2$  puntos críticos si contamos multiplicidad. Por ello, la preimagen de un conjunto de  $n$  elementos tiene por lo menos  $nd - 2d + 2$  elementos disiguales. Analice por separado los casos  $n = 1$ ,  $n = 2$  y  $n \geq 3$ .]

**Ejercicio 9.4.** Extienda el corolario 9.2 a funciones racionales de grado al menos 2.

**Corolario 9.5.** *Todo conjunto excepcional se ubica en el conjunto de Fatou.*

*Prueba.* Los conjuntos excepcionales son siempre la unión de órbitas superatractoras, las cuales pertenecen al conjunto de Fatou. Esto es válido incluso en el caso racional si damos crédito al ejercicio.  $\square$

## Transitividad

El siguiente punto en agenda es entender la transitividad en el conjunto de Julia. La pauta fue sentada al inicio del capítulo 4.

**Proposición 9.6.** *Sea  $U$  un abierto que se interseca con el conjunto de Julia. Entonces la unión  $\bigcup_{n \geq 0} P^{on}(U)$  omite máximo dos puntos de la esfera de Riemann. Los puntos omitidos pertenecen a un conjunto excepcional que no se interseca con  $U$ .*

*Prueba.* Supongamos inválido el resultado principal. En tal caso  $\bigcup_{n \geq 0} P^{on}(U)$  evita tres o más puntos y el teorema de Montel asegura entonces que  $\{P^{on}\}$  es una familia normal en  $U$ . Esto significa que  $U$ , entero, pertenece al conjunto de Fatou, lo cual no es cierto.

Cuando esta unión omite un punto, omite todas sus preimágenes. Por el corolario 9.2 (o el ejercicio 9.4 en el caso racional), los puntos ignorados pertenecerán a un conjunto excepcional.  $\square$

**Corolario 9.7.** *Si  $U$  es un abierto que se interseca con el conjunto de Julia, entonces existe  $n_0$  con el cual se tiene*

$$J(P) \subset U \cup P(U) \cup \dots \cup P^{n_0}(U).$$

*Prueba.* Como por el corolario 9.5 el conjunto de Julia no contiene puntos excepcionales, la proposición 9.6 explica una inclusión tipo  $J(P) \subset \bigcup P^{n_0}(U)$ . La compacidad de  $J(P)$  permite circunscribirnos a un número finito de abiertos.  $\square$

**Corolario 9.8.** *Las preimágenes de todo punto  $z_0 \in J(P)$  son densas en  $J(P)$ .*

*Prueba.* Tomemos  $z_0 \in J(P)$  y un abierto  $V$  que arroje intersección no trivial con  $J(P)$ . Elijamos tres puntos que eventualmente emboquen en  $z_0$ . Como la restricción de los  $P^{n_0}$  no forman una familia normal en  $V$ , el teorema de Montel alerta que uno de los tres valores antes indicados, llamémoslo  $a$ , pertenece a la imagen de cierto  $w \in V$  bajo  $P^{n_0}$ . Bueno, de  $w$  se pasa a  $a$ , y de  $a$  se salta a  $z_0$ .  $\square$

## Estructura topológica del conjunto de Julia

Hay un par de propiedades topológicas del conjunto de Julia que están expeditas para ser enunciadas.

**Proposición 9.9.** *El conjunto de Julia no admite puntos aislados.*

*Prueba.* Supongamos por el absurdo que exista un abierto  $V$  cuya intersección con  $J(P)$  arroje exclusivamente  $\{z_0\}$ . En tal caso  $P(V)$  se intersecará con  $J(P)$  también en apenas un punto, en  $z_1 = P(z_0)$ .

Bajo estos supuestos, probemos primero que la órbita  $\mathcal{O}(z_0)$  deberá ser periódica. Si se tiene  $z_1 = P(z_0) = z_0$ , esto ya es cierto. En caso contrario, según el corolario 9.8 existirá en  $P(V) \cap J(P)$  un valor (y este solo puede ser  $z_1$ ) que caerá eventualmente sobre  $z_0$ . Como consecuencia,  $z_0$  ha de ser periódico.

Ahora, como  $z_0 \in J(P)$  no puede ser a la vez periódico y crítico, su imagen  $z_1$  admitirá al menos una preimagen inmediata distinta de  $z_0$ , llamémosla  $\tilde{z}_0$ . Como  $\tilde{z}_0 \in J(P)$  no es periódica —pues  $z_0$  ya lo es—, no pertenece a  $\mathcal{O}(z_0)$ . A continuación nuevamente el corolario 9.8 rescata en  $V \cap J(P)$  un valor, a la fuerza  $z_0$ , que embocará en  $\tilde{z}_0$  tarde o temprano. Esto es imposible.  $\square$

**Proposición 9.10.** *En el caso polinomial el conjunto de Julia no admite interior.*

*Prueba.* Si  $J(P)$  admitiese interior, este no sería atraído a  $\infty$ . Por el teorema de Montel, en este abierto los sucesivos iterados de  $P$  formarían una familia normal. Esto no es posible por definición.  $\square$

**Nota 9.11.** *Si el conjunto de Julia de una función racional tiene interior, entonces es toda la esfera de Riemann.* Esto es cierto pero el argumento presentado en la proposición 9.10 debe ser retocado. Si se cumple  $J(f) \neq \hat{\mathbb{C}}$ , entonces  $F(f) = \hat{\mathbb{C}} - J(f)$  es un abierto no trivial de cardinalidad infinita. Ahora, si  $U \subset J(f)$  fuese abierto y no vacío, los sucesivos iterados de  $f$  restringidos a  $U$  formarían una familia normal ya que evitarían  $F(f)$ .

Al final de este capítulo ilustraremos a modo de apéndice este fenómeno.

## ¿Cuán pequeño resulta ser el conjunto de Julia?

Si el conjunto de Julia contiene al menos un punto, contiene una gran órbita completa. Como esta gran órbita no es excepcional, está conformada por una cantidad enumerable de puntos. Así, no bien aparezca en el conjunto de Julia un elemento, tendremos la certeza de que hay muchos más.

Esta subsección tiene como propósito establecer que el conjunto de Julia de una función racional de grado al menos 2 es no vacío y, por ende, infinito. En el ínterin constataremos que todas las funciones racionales tienen, por lo pronto, dos puntos periódicos distintos. Esto sonará trivial; no obstante, representa una muestra de lo complicado que puede resultar en ocasiones confirmar algo intuitivamente válido.

**Ejemplo 9.12.** La función racional  $f(z) = z + 1/z$  de grado 2 tiene un único punto fijo. Este es parabólico y se ubica en  $z = \infty$ .

Toda función racional cuenta con un punto fijo. Si asumimos que este es único, al instalarlo en  $\infty$  la función a iterar tendrá la forma  $f(z) = z + \alpha/Q(z)$ , donde  $Q(z)$  es un polinomio mónico de grado  $d - 1$ , mientras  $\alpha$  es una constante no nula (comparar ejemplo 4.17).

La composición  $Q(f(z))$  dista de ser un polinomio pues aparecen, en su expansión, potencias de la forma  $f(z), f^2(z), \dots, f^{d-1}(z)$ . Tras multiplicar por el denominador de  $f^{d-1}(z)$ , es decir por  $Q(z)^{d-1}$ , la expresión  $Q(z)^{d-1}Q(f(z))$ , recién, es polinomial. (Antes de proseguir el lector debe convencerse de que el grado de este polinomio es exactamente  $d^2 - d$ .) El desarrollo de Laurent de  $Q(f(z))$  cerca de  $\infty$  —al igual que aquel de  $Q(z)$ — está dominado por  $z^{d-1}$ ; es decir, se tiene

$$Q(f(z)) = z^{d-1} + \text{potencias de menor grado.}$$

En función de ello, un cálculo sencillo enseña que el polinomio  $Q^{d-1}(z)Q(f(z)) + Q^d(z)$  viene encabezado por  $2z^{d(d-1)}$  y, de facto, es no constante.

Esta información fragmentaria nos dejará el campo libre para deducir que  $f$  esconde puntos periódicos distintos. El iterado  $f^{\circ 2}$  posee en  $\infty$  un punto fijo; si nos empeñamos por el absurdo en que este sea el único, quedamos sujetos a

$$f^{\circ 2}(z) - z = \frac{\beta}{H(z)}$$

para cierto polinomio  $H$  de grado  $d^2 - 1$ , pues esta vez el grado de  $f^{\circ 2}$  es  $d^2$  (nuevamente el ejemplo 4.17 interviene). Sin embargo, la presentación misma de  $f$  nos conduce a

$$f^{\circ 2}(z) = f(f(z)) = f(z) + \frac{\alpha}{Q(f(z))} = z + \frac{\alpha}{Q(z)} + \frac{\alpha}{Q(f(z))}.$$

Al reordenar y limpiar denominadores obtenemos

$$f^{\circ 2}(z) - z = \alpha \frac{Q(z)^{d-1} [Q(f(z)) + Q(z)]}{Q(z)^{d-1} Q(f(z))Q(z)},$$

un cociente de polinomios. En base a estas premisas, como en el término de la derecha el grado del denominador ya es  $d^2 - d + d - 1 = d^2 - 1$ , el numerador debe ser constante, pues no hay lugar para cancelaciones sin reducir de pasada el grado global de  $f^{\circ 2}$ . Esto desautoriza lo expuesto en el párrafo anterior acerca de la no trivialidad del polinomio  $Q^{d-1}(z)Q(f(z)) + Q^d(z)$ .

Hemos demostrado que toda función racional de grado mayor o igual a 2 admite dos puntos periódicos distintos, y con certitud muchos más.

**Teorema 9.13.** *El conjunto de Julia de una función racional de grado mayor o igual a dos es, al ser no vacío, de cardinalidad infinita.*

*Prueba.* El conjunto de Julia del sistema dinámico  $z \mapsto z^d$  con  $|d| \neq 0, 1$  es  $\mathbb{T}$ . El conjunto de Julia de un polinomio está dado por la frontera de  $K(P)$ , un conjunto no vacío. Podemos entonces limitarnos a tratar el caso cuando no existen conjuntos excepcionales para  $f$ .

También, tras reemplazar  $f$  por  $f^{\circ m}$ , podemos asumir que  $f$  tiene dos puntos fijos distintos, digamos  $a$  y  $b$ . Como ninguno de estos puntos pertenece a una órbita excepcional, para  $p = a, b$  los conjuntos

$$X_p = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : \text{existe } n \text{ tal que } f^{\circ n}(z) = p\}$$

son disjuntos e infinitos. De suponerse que el conjunto de Julia es vacío, la región de normalidad asociada sería todo  $\hat{\mathbb{C}}$ . En particular, existiría una secuencia  $n_k$  para la cual los iterados  $f^{\circ n_k}$  convergerían a  $\varphi$  en todo  $\hat{\mathbb{C}}$ . Fácilmente vemos que la evaluación de  $\varphi$  en cualquier punto de  $X_a$  arroja  $a$ . Como  $X_a$  es un subconjunto infinito de la esfera de Riemann, la función  $\varphi$  es la constante  $a$ . Pero si repetimos el procedimiento en  $X_b$ , igual concluimos que  $\varphi$  vale  $b$ . Este conflicto es irreconciliable.  $\square$

## Puntos parabólicos

Los puntos periódicos neutrales con multiplicador una raíz  $n$ -ésima de la unidad han sido destacados como **puntos periódicos parabólicos**. La siguiente propiedad común a todos ellos muestra que el concepto se apoya sobre pilares sólidos.

**Lema 9.14.** *Un punto periódico  $z_0$  es parabólico si y solo si existe  $k$  tal que  $f^{\circ k}(z_0) = z_0$  y  $(f^{\circ k})'(z_0) = 1$ .*

*Prueba.* Si  $z_0$  tiene periodo  $k$  y multiplicador  $\lambda$  sujeto a  $\lambda^n = 1$ , entonces para  $g = f^{\circ kn}$  se tiene  $g(z_0) = z_0$  y  $g'(z_0) = \lambda^n = 1$ .

Recíprocamente, si se tiene  $f^{\circ k}(z_0) = z_0$  y  $(f^{\circ k})'(z_0) = 1$ , entonces  $z_0$  tiene periodo  $k$ . Con ello el periodo mínimo de  $z_0$ , digamos  $n$ , divide a  $k$ , y el multiplicador  $\lambda$  de la órbita minimal satisface  $\lambda^{k/n} = (f^{\circ k})'(z_0) = 1$ .  $\square$

**Ejemplo 9.15.** El sistema dinámico inducido por  $P(z) = z^2 + 1/4$  tiene en  $z_0 = 1/2$  un punto fijo de multiplicador igual a 1. Mientras tanto, para el polinomio  $P(z) = z^2 - 3/4$  el punto fijo en  $z_0 = -1/2$  tiene multiplicador igual a  $-1$ .

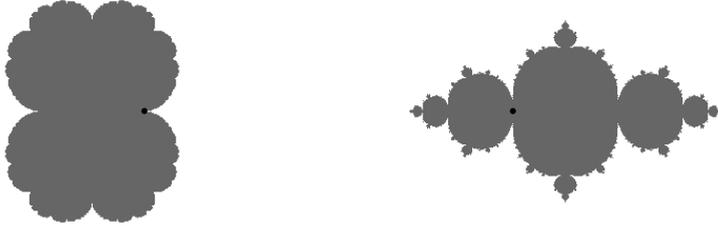


FIGURA 8. Los correspondientes conjuntos llenos de Julia con parabólicos marcados.

Algo curioso sucede con los parabólicos: son parcialmente atractores y parcialmente repulsores. De hecho tienen asociados una cuenca de atracción que pertenece al conjunto de Fatou (ver sección 12), pero, no obstante, ellos pertenecen al conjunto de Julia (comparar lema 9.16).

**Lema 9.16.** *Todo punto periódico parabólico pertenece al conjunto de Julia.*

*Prueba.* Gracias al uso coordinado del lema 6.6 y el lema 9.14 no se pierde credibilidad al aceptar en  $z_0$  un punto fijo de  $f$  de multiplicador 1. Más eficiente aún, al consumir un cambio de variable podemos situar este punto fijo en el origen. Además, como  $f$  tiene grado al menos 2, la función  $f(z) - z$  no es constante y tendremos

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + a_n z^n + \dots = z + a_n z^n + \dots,$$

donde  $a_n \neq 0$  y  $n \geq 2$ . Una fácil inducción lleva entonces a

$$f^{\circ k}(z) = z + a_n k z^n + \dots.$$

Ahora, si la secuencia de iterados formase una familia normal cerca de  $z_0 = 0$ , entonces  $(f^{\circ k})^{(n)}(0) = n! a_n k$  convergería a un número; lo cual es incorrecto dado que se tiene  $a_n \neq 0$ . Hemos confirmado con ello la pertenencia de  $z_0$  al conjunto de Julia.  $\square$

## Órbitas densas

Cerramos esta visita inaugural al conjunto de Julia con un resultado emblemático. Para muchos, este es el significado literal de transitividad.

**Teorema 9.17.** *Existen elementos en  $J(f)$  cuya órbita (a futuro) es densa en  $J(f)$ .*

*Prueba.* Para un subconjunto abierto  $V$  de  $J(f)$  definimos

$$C(V) = \{z \in J(f) : \text{ existe } n \text{ para el cual } f^{on}(z) \in V\}.$$

En cuanto  $V$  sea no vacío, el corolario 9.8 muestra que este conjunto es denso en  $J(f)$ . Al ser  $C(V)$  el conjunto de puntos que eventualmente llegan a  $V$ , lo podemos reexpresar como  $C(V) = \bigcup (f^{on})^{-1}(V)$ , una unión de abiertos, un abierto.

Sea  $\{V_1, V_2, V_3, \dots\}$  una base enumerable de  $J(f)$ . La intersección  $\bigcap C(V_k)$  describe el conjunto de puntos cuya iteración visita, al menos una vez, todo abierto de la lista. Por tratarse de una intersección enumerable de conjuntos abiertos y densos, el teorema de Baire testimonia la densidad de esta intersección.  $\square$

## Implicaciones para el conjunto de Fatou

Si bien este es un capítulo reservado al conjunto de Julia, lo asimilado impone fuertes restricciones en las componentes de Fatou. Dos consecuencias son inminentes.

**Lema 9.18.** *Toda componente de Fatou es un espacio hiperbólico.*

*Prueba.* Esto se deriva del Teorema 2.60 pues el conjunto de Julia tiene más de tres puntos según el Teorema 9.13.  $\square$

**Corolario 9.19.** *Cada componente de Fatou contiene como máximo un punto periódico. En particular, cuando una componente invariante contiene un punto periódico, este será obligatoriamente un punto fijo.*

*Prueba.* Al reemplazar  $f$ , de grado  $d$ , por  $f^{on}$ , se supone a la componente como invariante y a los puntos periódicos, como fijos. Por tanto, de haber más de un punto fijo, la restricción de la función  $f$  a la componente sería por la proposición 2.61 de orden finito, digamos con  $f^{om} = id$ . Por el Teorema 1.12, la función racional  $f^{om}$ , de grado  $d^m$ , sería la identidad. Esto es posible solo si  $d = 1$ . Ello va reñido con la naturaleza del grado de las funciones racionales por tratar.  $\square$

### El ejemplo de Lattès

El móvil de esta subsección, opcional, es la construcción de una función racional de grado 4 cuyo conjunto de Fatou es vacío.

El esquema de la construcción es simple: se diseña un función “lineal” fuertemente expansiva en un toro complejo donde los puntos periódicos son densos. Como consecuencia, los multiplicadores asociados serán todos, en norma, mayores que 1. A continuación, en el toro identificamos un punto con su “antípoda”. Como la función del toro es lineal, puntos antípodos son enviados en puntos antípodos, y la acción desciende a clases de equivalencia. Pero resulta que el espacio de estas clases es una esfera, y como esferas complejas hay solo una, habremos construido una función racional cuyos puntos periódicos repulsores son densos en  $\hat{\mathbb{C}}$ . Desmenucemos ahora los detalles.

Recordemos el toro  $S_i$ , obtenido de la identificación —rigurosa esta vez— de caras opuestas del cuadrado base (ejemplo 2.22). En  $S_i$  (como en cualquier toro  $S_\tau$ ), con clases  $\mathcal{O}(z)$ , introducimos la “multiplicación por 2” mediante  $m_2(\mathcal{O}(z)) = \mathcal{O}(2z)$ . Esta función está bien definida, es analítica y determina un recubrimiento 4 a 1 de  $S_i$ , esto último en armonía con el hecho de que tanto en los meridianos como en los paralelos se duplica la longitud. Los puntos periódicos son densos en  $S_i$  (comparar ejemplo 4.1). Como los representantes cerca de  $\mathcal{O}(z)$  son naturales, de tipo  $z + m + ni$ , los multiplicadores de puntos periódicos sin excepción serán de la forma  $\lambda = 2^n$ , donde  $n$  es el periodo. Es preciso incidir en que  $m_2$  no tiene puntos críticos. Por otro lado  $\mathcal{O}(0)$  es un punto fijo de  $m_2$  y sus 4 preimágenes son  $\mathcal{O}(0), \mathcal{O}(1/2), \mathcal{O}(i/2), \mathcal{O}((1+i)/2)$  (curiosamente los cuatro puntos críticos de la proyección  $\pi$  de  $S_i$  al espacio de órbitas introducido en el ejemplo 2.22).

Esta función  $m_2$  induce un función  $M_2$  en  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{R}$  mediante la fórmula  $M_2([z]) = [2z]$ , con lo cual el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xrightarrow{m_2} & S \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
 \hat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{M_2} & \hat{\mathbb{C}}
 \end{array}$$

conmuta. Ahora, si  $p$  es un punto periódico de  $m_2$ , entonces  $\pi(p)$  es un punto periódico de  $M_2$ . Como consecuencia, los puntos periódicos de  $M_2$  son densos en  $\mathbb{C}$ . Es más, todos, con la latente excepción de  $[0]$ , tienen multiplicador  $2^n$ , donde  $n$  es el periodo.



## 10 Discos de Siegel y puntos de Cremer

Ya hemos echado un vistazo a los puntos periódicos atractores, repulsores y parabólicos; ahora inspeccionamos el resto. De cara a ello introducimos un nuevo concepto de carácter general.

### Linealización

Diremos que  $f$  es **linealizable** cerca de un punto fijo  $z_0$  si existe un sistema coordinado local en torno al cual  $f$  se expresa como  $\tilde{f}(w) = \lambda w$ . Puesto que el multiplicador en un sistema local vale  $\lambda$ , se tiene  $\lambda = f'(z_0)$  tan pronto se trabaje en coordenadas.

No todos los puntos fijos de un sistema dinámico son linealizables. Efectivamente, cerca de un punto fijo de multiplicador igual a 1 ser linealizable significa ser la identidad, mientras multiplicador igual a 0 es lo mismo que ser nulo.

En torno a un punto fijo el desarrollo de Taylor incluye junto al factor lineal otros monomios. Linealizar es afinar esta imperfección.

**Lema 10.1.** *Sea  $P$  un polinomio de grado mayor o igual a dos. Si  $z_0$  es un punto fijo de multiplicador en norma igual a 1, entonces el sistema dinámico es linealizable cerca de  $z_0$  si y solo si  $z_0$  pertenece al conjunto de Fatou.*

*Prueba.* Si cerca de  $z_0$  el sistema es linealizable, entonces existe una vecindad de  $z_0$  donde  $P$  es, para efectos prácticos, una rotación. En particular en el sistema original los sucesivos iterados permanecerán atascados en esta vecindad y evitarán un sinnúmero de puntos lejanos. Por el teorema de Montel toda esta vecindad pertenecerá al conjunto de Fatou.

A la inversa, supongamos a  $z_0$  dentro de una componente conexa  $U$  de  $K(P)$ . Por la proposición 5.16,  $U$  es simplemente conexa. Como  $U$  es acotada, el teorema 1.15 la sitúa a la par del disco unitario. Mejor aún, el corolario 1.27 alienta una uniformización con punto fijo en 0. En estas coordenadas el lema de Schwarz reinterpreta a  $P$  como una rotación pues el multiplicador es de norma unitaria. (Hemos constatado indirectamente que en  $U$  no aparece ningún punto crítico pues ellos son incompatibles con las rotaciones.)  $\square$

**Nota 10.2.** En el caso de iteración de funciones racionales de grado mayor o igual a 2, el resultado anterior también es válido. Cuando el sistema es linealizable cerca de los puntos fijos, la prueba es idéntica a la consignada arriba (solo hay que adaptar un tanto

el lenguaje). La recíproca, empero, no es sencilla de establecer pues esta vez la premisa que la componente del punto fijo sea simplemente conexa deja de ser elemental aunque permanezca válida (ver el acápite a modo de apéndice en esta misma sección).

**Corolario 10.3.** *Los sistemas dinámicos racionales (de grado mayor o igual a 2) no son linealizables cerca de los puntos parabólicos.*

*Prueba.* Esto es cierto ya que los puntos parabólicos se sitúan en el conjunto de Julia.  $\square$

Por supuesto, de habérnoslas con puntos periódicos, estos resultados se extienden de la manera acostumbrada.

Diremos que un punto periódico neutral (es decir uno con multiplicador de norma 1) es un **punto de Siegel** si pertenece al conjunto de Fatou. A la componente que contiene a un punto de Siegel se le llama **disco de Siegel**. Si un punto neutral no es parabólico ni de Siegel diremos que es **de Cremer**.

Acto seguido resaltamos una propiedad de los discos de Siegel inmersa en la prueba del Lema 10.1.

**Lema 10.4.** *Un disco de Siegel no contiene puntos críticos.*  $\square$

## Los discos de Siegel son redondos

Este acápite es un apéndice dirigido a los iniciados en el manejo de técnicas de espacios de recubrimiento (ver capítulo 2). Por la contundencia y elegancia del argumento, esto es una muestra de los alcances de la geometría hiperbólica en calidad de herramienta representativa del área de los sistemas dinámicos.

**Teorema 10.5.** *Los discos de Siegel son simplemente conexos, están uniformizados por el disco unitario y no contienen puntos críticos.*

*Prueba.* En este discurso, el no contener puntos críticos se desprende del lema de Schwarz una vez sepamos que la componente de interés es equivalente al disco unitario.

Sea  $f$  la función racional y  $U$  la componente conexa del conjunto de Fatou donde se asienta el punto fijo  $a$  de multiplicador unitario. Como el conjunto de Julia es no vacío, la región  $U$  admite en  $\pi : \mathbb{D} \rightarrow U$  un recubrimiento universal, donde además se puede

remozar la geografía de modo tal que  $\pi$  proyecte 0 en  $a$ . Utilizaremos la coordenada  $w$  en  $\mathbb{D}$ . Si por el absurdo  $U$  no fuera simplemente conexo, entonces la fibra  $\pi^{-1}(\{a\}) \subset \mathbb{D}$  sería discreta y contendría por lo menos un punto aparte de  $w = 0$ , digamos  $\hat{w}$ . Como el dominio de la función  $f \circ \pi : \mathbb{D} \rightarrow U$ , que envía 0 en  $a$ , es simplemente conexo, podemos levantar  $f \circ \pi$  a  $H : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , función analítica también, sujeta a  $\pi \circ H = f \circ \pi$ . El valor asignado a  $H(0)$  se elige a voluntad entre las preimágenes de  $a$ ; nosotros nos inclinamos por  $H(0) = 0$ . En resumen, hemos diseñado un digrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{D}, 0) & \xrightarrow{H} & (\mathbb{D}, 0) \\
 \pi \downarrow & \searrow f \circ \pi & \downarrow \pi \\
 (U, a) & \xrightarrow{f} & (U, a),
 \end{array}$$

de partes analíticas. Sin embargo, como  $\pi$  es un homeomorfismo local, el multiplicador en el punto fijo  $w = 0$  vale  $H'(0) = f'(a) = \lambda$ . El lema de Schwarz implica luego que  $H$  es una rotación. Ahora, como  $\lambda$  no es una raíz de la unidad, el conjunto  $\{\lambda^n \hat{w}\}$ , situado sobre el círculo de radio  $|\hat{w}| < 1$ , es infinito y, desde luego, no discreto. Afirmamos que todos estos puntos satisfacen  $\pi(\lambda^n \hat{w}) = a$ ; como ello va en franco desacato a que  $\pi^{-1}(\{a\})$  sea discreto, habremos destapado una contradicción. Procedamos por inducción. Para  $n = 0$  esto se satisface por definición de  $\hat{w}$ . Interiorizada la igualdad  $\pi(\lambda^n \hat{w}) = a$ , recurrimos a la conmutatividad del diagrama para obtener

$$\pi(\lambda^{n+1} \hat{w}) = \pi(H(\lambda^n \hat{w})) = f(\pi(\lambda^n \hat{w})) = f(a) = a,$$

como habíamos anticipado. □

**Ejemplo 10.6.** En la figura 9 está delineada la frontera del disco de Siegel asociado con  $z \mapsto z^2 + c$ , para  $c \approx 0.374187862 + 0.193411136i$ , de número de rotación igual a 1 radián. Para ello se ha utilizado un fenómeno no probado en este texto: *la frontera de todo disco de Siegel está contenida en la clausura de la órbita de los puntos críticos* (ver [5, teorema 11.17]). Acá está indicada, con unos 1500 iterados, la órbita de  $z = 0$ , el punto crítico. También hemos seleccionado a ciegas un punto dentro del disco y lo hemos librado a su propia suerte para bosquejar la curva invariante que lo cobija.

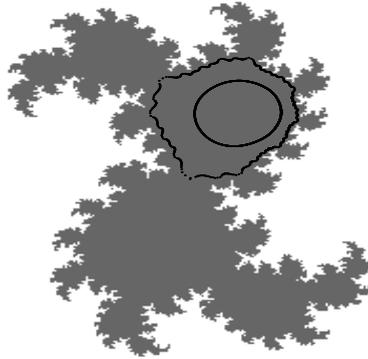


FIGURA 9. *Un disco de Siegel con círculo invariante intermedio.*

## 11 Órbitas periódicas atractoras

En esta sección estudiamos las cuencas periódicas atractoras. Además —por completitud— justificaremos un motivo clave: en los sistemas dinámicos de tinte analítico el que un punto periódico contraiga una vecindad es un matiz monopólico de los ya bautizados previamente como atractores.

### Atractores topológicos

Dado un sistema dinámico analítico  $f : U \rightarrow U$  diremos que un punto fijo  $a$  de  $f$  es un **atractor topológico** cuando admite una vecindad  $V$  equivalente a  $\mathbb{D}$  con la cual se tiene  $cl(f^{on}(V)) \subset V \subset U$  para cierto  $n \geq 1$ .

**Lema 11.1.** *En un sistema dinámico analítico un punto fijo es atractor si y solo si es un atractor topológico.*

*Prueba.* Sin pérdida de generalidad se asume el punto fijo en el origen con multiplicador igual a  $\lambda = f'(0)$ .

Cuando el punto fijo es atractor, se satisface  $|\lambda| < 1$ . Derivado de lo trabajado tras el ejemplo 4.8, existe  $R > 0$  para el cual  $|z| \leq R$  implica  $|f(z)| < |z|$ . Al jugar con la compacidad de toda bola cerrada, en el origen se descubre un atractor topológico.

Por su parte, cuando 0 es un atractor topológico, existe un  $n$  (el iterado) y un  $V$  (el disco), para el cual la restricción  $f^{on} : V \rightarrow V$  no es sobreyectiva. En concordancia con el lema de Schwarz, la derivada de  $f^{on}$  en el origen es menor que 1. Como el multiplicador de  $f^{on}$  vale  $\lambda^n$ , extraemos raíz, y concluimos lo anunciado.  $\square$

### Linealización de Koenigs

La siguiente empresa es probar que los puntos fijos atractores y los puntos fijos repulsores son linealizables. La distinción frecuente entre atractor y superatractor se sustenta en que los superatractores no son linealizables.

**Teorema 11.2.** *Todo sistema dinámico analítico es linealizable alrededor de un punto fijo atractor de multiplicador no nulo.*

*Prueba.* Al recortar la vecindad donde  $f$  es un atractor topológico para luego uniformizar, nos circunscribimos al caso cuando  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  se extiende a una vecindad de la clausura de  $\mathbb{D}$ . Por supuesto, quedan sobreentendidas las condiciones  $f(0) = 0$  y  $|\lambda| = |f'(0)| < 1$ . La prueba planteada se inspira en un ardid recurrente en los sistemas dinámicos cuando se aguarda un cambio de coordenadas tangente a la identidad: se marcha por donde uno está obligado, pero se retorna por donde a uno le hubiera gustado ir. En este caso uno avanza con  $f$  y desata lo andado con división por  $\lambda$ . Al final de la jornada la mudanza de variables estará definida mediante el límite  $w = \varphi(z) = \lim f^{\circ k}(z)/\lambda^k$ .

Hagamos un paréntesis para digerir la dialéctica. Llamemos  $M_\lambda$  a multiplicación por  $\lambda$ . De representar  $w = \varphi(z)$  ya un exitoso cambio de variables, la estructura dinámica se vería retratada en un interminable diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{f} & X & \cdots \xrightarrow{f^{\circ k}} & X & \xrightarrow{f} & X & \cdots \rightarrow \\
 \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow & \\
 Y & \xrightarrow{M_\lambda} & Y & \xrightarrow{M_\lambda} & Y & \cdots \xrightarrow{M_\lambda^{\circ k}} & Y & \xrightarrow{M_\lambda} & Y & \cdots \rightarrow
 \end{array}$$

Acá dos detalles se conjuran a favor nuestro. Por un lado, la función  $M_\lambda$  es invertible de manera irrestricta. La igualdad  $\varphi = (M_\lambda^{-1})^{\circ k} \circ \varphi \circ f^{\circ k}$  está entonces cerca de la tautología. Además, como segundo toque, uno espera que  $\varphi$  sea próxima a la identidad, es decir, a medida que nos acercamos al origen, los valores  $\varphi(z)$  y  $z$  se asemejarán cada vez más. Estas noticias son auspiciosas: los iterados  $f^{\circ k}(z)$  convergen a 0, aviso de que la diferencia entre  $\varphi(f^{\circ k}(z))$  y  $f^{\circ k}(z)$  se estrecha. Esto, significa —en términos prácticos, pues si ya conocemos  $\varphi$  el argumento es circular— que los tres valores  $\varphi(z)$ ,  $(M_\lambda^{-1})^{\circ k} \circ \varphi \circ f^{\circ k}(z)$  y  $(M_\lambda^{-1})^{\circ k} \circ f^{\circ k}(z)$  son cercanos: LQQD.

Reanudemos la demostración propiamente dicha. Desplegamos  $f$  en serie de potencias como

$$f(z) = \lambda z + z^2 h(z),$$

donde  $h$  es una función continua definida en la clausura de  $\mathbb{D}$ . En particular  $|h|$  es acotada, digamos por  $K$  en  $\mathbb{D}$ . Si fijamos  $c$  sujeto a  $0 < c^2 < |\lambda| < c < 1$ , existe  $r > 0$  tal que para  $|z| \leq r$  se cumple

$$|f(z)| \leq c|z| < |z| \qquad \text{y} \qquad |f(z) - \lambda z| \leq K|z|^2.$$

El uso reiterado de la primera desigualdad acondiciona  $|f^{\circ k}(z)| \leq c^k|z| \leq c^k r$  para  $z \in B_r$ . Derivado de ello, la segunda desigualdad implica

$$|f^{\circ k+1}(z) - \lambda f^{\circ k}(z)| \leq K|f^{\circ k}(z)|^2 \leq Kc^{2k}r^2.$$

Al dividir entre  $|\lambda|^{k+1}$  obtenemos

$$\left| \frac{f^{\circ k+1}(z)}{\lambda^{k+1}} - \frac{f^{\circ k}(z)}{\lambda^k} \right| \leq \frac{Kr^2}{|\lambda|} \frac{c^{2k}}{|\lambda|^k}.$$

Como la razón  $c^2/|\lambda|$  es menor que 1, la sucesión  $\{f^{\circ k+1}(z)/\lambda^{k+1}\}$  es de Cauchy —de manera uniforme—, y converge, digamos a  $\varphi(z)$ .

Una inspección directa muestra que se cumple  $\varphi'(0) = 1$ , y de este modo  $\varphi$  representa, al menos en un entorno local, una mudanza de variables.

Finalmente observamos que se satisface la relación funcional

$$\varphi(f(z)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f^{\circ k}(f(z))}{\lambda^k} = \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f^{\circ k+1}(z)}{\lambda^{k+1}} = \lambda \varphi(z),$$

como queríamos probar. □

**Corolario 11.3.** *Un sistema dinámico es linealizable alrededor de un punto fijo repulsor.*

*Prueba.* Si  $f$  satisface  $f(a) = a$  con  $|f'(a)| > 1$ , entonces  $f$  admite una inversa local, digamos  $g$ , que satisface  $g(a) = a$  y  $|g'(a)| = 1/|f'(a)| < 1$ , con lo cual  $a$  es un punto fijo atractor de  $g$ . Si linealizamos  $g$ , en el nuevo sistema de coordenadas el representante será multiplicación por  $1/f'(a)$ , mientras su inversa —es decir  $f$ — se leerá como multiplicación por  $f'(a)$ . □

Está en el temperamento de los atractores de la dinámica racional el convocar siempre al menos un punto crítico.

**Teorema 11.4.** *En todo ciclo de componentes atractoras simplemente conexas existe un punto crítico.*

*Prueba.* Sea  $U_0 \mapsto U_1 \mapsto \dots \mapsto U_n = U_0$  un ciclo atractor de componentes simplemente conexas en  $F(f)$ . Por definición  $f^{\circ n}$  deja  $U_0$  invariante y tiene un punto fijo  $z_0 \in U_0$  con multiplicador  $\lambda$  dominado en norma por 1. El lema de Schwarz dificulta a  $f^{\circ n}$  el comportarse como automorfismo, y, en coherencia, el grado de  $f^{\circ n}$  restringido a  $U_0$  es mayor que 1. El lema 2.18 descubre un punto crítico de  $f^{\circ n}$  en  $U_0$ , digamos  $w_0$ . Respecto a lo global, la regla de la cadena muestra que  $f^{\circ n}$  tiene un punto crítico en  $w_0$  si y solo si alguno entre  $w_0 \in U_0, w_1 = f(w_0) \in U_1, \dots, w_{n-1} = f^{\circ n-1}(w_0) \in U_{n-1}$  es punto crítico de  $f$ . El resultado se desprende de inmediato. □

**Corolario 11.5.** *La dinámica polinomial admite apenas un número finito de atractores. Si el polinomio es de grado  $d$ , entonces, aparte de la cuenca de atracción de  $\infty$ , existen a lo sumo  $d - 1$  cuencas de atracción.*

*Prueba.* Distintas cuencas atraen distintos puntos críticos. Como hay  $d - 1$  puntos críticos, estamos hablando de un techo para el número de atractores.  $\square$

**Ejercicio 11.6.** Supongamos que un sistema dinámico racional cuenta con un punto fijo atractor. Idee un algoritmo para detectarlo. [Sugerencia: un atractor por definición atrae puntos. ¿Quiénes son candidatos idóneos?]

### Un prueba alternativa de la linealización de atractores

Presentamos, como ejercicio, una prueba alternativa de que los gérmenes de los puntos fijos atractores son linealizables.

**Ejercicio 11.7.** Sea

$$f(z) = a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$$

una serie formal, donde  $a_1 \neq 0$ . Demuestre que existe una única serie formal

$$\psi(w) = w + b_2w^2 + \dots$$

con la cual se tiene  $f(\psi(w)) = \psi(a_1w)$ . [Sugerencia: inductivamente exprese  $b_n$  en términos de  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_2, \dots, b_{n-1}$ .]

Quienes están familiarizados con la técnica del ejercicio anterior reconocen en el análisis de convergencia el meollo del asunto. La demostración del siguiente hecho es un tanto complicada desde el punto de vista técnico, más no es difícil.

**Ejercicio 11.8.** En el ejercicio anterior demuestre que si  $f$  es convergente y se cumple  $|a_1| < 1$ , entonces  $\psi$  posee radio de convergencia positivo. Concluya que  $z = \psi(w)$  linealiza el sistema cerca de 0.

Lo grato de esta línea de acción es que no se impone restricciones en el dominio de definición de  $f$ . Lo ingrato es las complicaciones que acarrea. El lector que desee lidiar con los detalles puede consular [2, lemas 4.3 y 4.4].

## Los atractores siempre atraen puntos críticos

Para probar el teorema 11.4 en toda generalidad, se visita el recubrimiento universal.

**Teorema 11.9.** *En todo ciclo de componentes atractoras siempre existe un punto crítico.*

*Prueba.* Nos ajustamos al caso cuando  $f : U \rightarrow U$  tiene un punto fijo atractor, digamos en  $a$ . Al igual que en el teorema 10.5, diseñamos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{D}, 0) & \xrightarrow{H} & (\mathbb{D}, 0) \\ \pi \downarrow & \searrow f \circ \pi & \downarrow \pi \\ (U, a) & \xrightarrow{f} & (U, a), \end{array}$$

de partes analíticas, donde  $\pi : \mathbb{D} \rightarrow U$  es recubrimiento universal. Como  $\pi$  es localmente invertible, el multiplicador del punto fijo (para  $H$ ) en 0 vale  $H'(0) = f'(a)$ , es decir 0 es un atractor. Ahora, si  $f$  no admitiese puntos críticos, entonces  $f : U \rightarrow U$  determinaría un recubrimiento finito de  $U$ . La proposición 2.54 muestra que  $f \circ \pi : \mathbb{D} \rightarrow U$  es también un recubrimiento. Por el teorema 2.34 recubrimientos levantan a recubrimientos, y, por ende,  $H : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  resulta un recubrimiento de  $\mathbb{D}$  en sí mismo, *a fortiori* un automorfismo de  $\mathbb{D}$  por la proposición 2.52. Esto último, sin embargo, no es compatible con la presencia en 0 de un atractor.  $\square$

## Coordenadas de Böttcher

El prototipo de iteración cerca de un punto fijo superatractor tiene un modelo en  $z \mapsto z^k$  con  $k \geq 2$ . Hay razones de peso para ello.

Consideremos  $f(z) = z^k + a_{k+1}z^{k+1} + \dots$ , donde  $k \geq 2$ , una serie convergente cerca del origen. Pongamos  $h(z) = 1 + g(z) = f(z)/z^k$  como funciones auxiliares. Dentro de la bola de radio 1 elijamos una vecindad del origen invariante bajo  $f$ , digamos  $U$ , en donde se consiga además  $|g(z)| \leq 1/2$ .

**Propiedad 11.10.** *Existen funciones tangentes a la identidad  $\Phi_n : U \rightarrow \mathbb{D}$  sujetas a*

$$f^{\circ n}(z) = \Phi_n(z)^{k^n}.$$

*Ellas son únicas.*

*Prueba.* Como todo acontece en un conjunto invariante  $U \subset \mathbb{D}$ , esto es la proposición 2.66 renovada.  $\square$

**Propiedad 11.11.** *Las  $\Phi_n$  satisfacen  $\Phi_n(f(z)) = \Phi_{n+1}(z)^k$ .*

*Prueba.* Esto se desprende de la unicidad y del cuidado reservado al elegir  $U$  como región invariante: ambas, término izquierdo y derecho, son funciones tangentes a la identidad que elevadas a la potencia  $k^n$  arrojan  $f^{\circ n+1}(z)$ .  $\square$

Si nos remontamos a la prueba de la proposición 2.66 se logra de manera explícita la fórmula

$$\Phi_n(z) = z \sqrt[k^n]{\frac{f^{\circ n}(z)}{z^{k^n}}}.$$

Podemos determinar qué relación guardan  $\Phi_n$  y  $\Phi_{n+1}$  si usamos la proposición 2.63.

**Propiedad 11.12.** *Se tiene*

$$\Phi_{n+1}(z) = \sqrt[k^{n+1}]{h(f^{\circ n}(z))} \Phi_n(z) = \sqrt[k^{n+1}]{1 + g(f^{\circ n}(z))} \Phi_n(z).$$

*Prueba.* Dos aplicaciones sucesivas de la proposición 2.63 desembocan en

$$\Phi_{n+1}(z) = z \sqrt[k^{n+1}]{\frac{f^{\circ n+1}(z)}{f^{\circ n}(z)^k} \frac{f^{\circ n}(z)^k}{(z^{k^n})^k}} = \sqrt[k^{n+1}]{\frac{f^{\circ n+1}(z)}{f^{\circ n}(z)^k}} \Phi_n(z).$$

El resultado se sigue de la igualdad  $f^{\circ n+1}(z)/f^{\circ n}(z)^k = h(f^{\circ n}(z)) = 1 + g(f^{\circ n}(z))$ .  $\square$

**Propiedad 11.13.** *La convergencia  $|\Phi_{n+1}(z) - \Phi_n(z)| \rightarrow 0$  es uniforme en  $U$ .*

*Prueba.* De acuerdo con el lema 2.65, la expresión  $|\sqrt[k^{n+1}]{1 + g(f^{\circ n}(z))} - 1|$  tiende a 0 uniformemente. El resultado se concluye nada más recordamos que  $|\Phi_n(z)|$  está mayorado por 1.  $\square$

Ya estamos aptos para introducir las **coordenadas de Böttcher**.

**Proposición 11.14.** Dado  $f(z) = z^k + a_{k+1}z^{k+1} + \dots$ , donde  $k \geq 2$ , convergente, existe cerca de 0 un cambio de coordenadas local  $\Phi(z) = z + b_2z^2 + \dots$  con el cual el diagrama

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & f(U) \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \Phi(U) & \xrightarrow{z \mapsto z^k} & \Phi(U) \end{array}$$

es conmutativo. Si se requiere además que  $\Phi$  sea tangente a la identidad, entonces este cambio de variables es único.

*Prueba.* Los  $\Phi_n$  introducidos arriba determinan una familia normal pues su norma no supera 1. Si por ejemplo se tiene  $\Phi_{n_i} \rightarrow \Phi$ , entonces es inmediato que se satisface  $\Phi(0) = 0$  y  $\Phi'(0) = 1$ : jamás apreciaremos un límite no trivial.

La propiedad 11.13 implica que también se logra  $\Phi_{n_i+1} \rightarrow \Phi$ . Y de este modo la propiedad 11.11 entrega en el límite

$$\Phi(f(z)) = \Phi(z)^k.$$

La unicidad es inmediata al considerer el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Psi(U) & \xrightarrow{z \mapsto z^k} & \Psi(U) \\ \Psi \uparrow & & \uparrow \Psi \\ U & \xrightarrow{f} & f(U) \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \Phi(U) & \xrightarrow{z \mapsto z^k} & \Phi(U). \end{array}$$

Si la composición  $\Phi \circ \Psi^{-1}(z) = z + c_2z^2 + \dots$  fuese distinta de la identidad, existiría un primer coeficiente  $c_n$  (con  $n \geq 2$ ) no nulo, y conseguiríamos  $\Phi \circ \Psi^{-1}(z^k) = \Phi \circ \Psi^{-1}(z)^k$ , es decir

$$z^k + c_n z^{kn} + c_{n+1} z^{kn+k} + \dots = z^k + k c_n z^{n+k-1} + \dots.$$

Igualando términos, esto es verosímil solo con  $k = 1$ , lo cual contradice todo. □

**Nota 11.15.** A la coordenada que conjuga un germen superatractor de orden  $k$  con  $z \mapsto z^k$  se le llama **coordenada de Böttcher**. Encontrada una de estas coordenadas, existen  $k - 1$

en total. Las adicionales se consiguen por composición con las rotaciones  $w = \eta_{k-1}z$ , donde  $\eta_{k-1}$  es una raíz de la unidad de orden  $k - 1$ . Al respecto, el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{D} & \xrightarrow{z \mapsto z^k} & \mathbb{D} \\
 w = \eta z \downarrow & & \downarrow w = \eta z \\
 \mathbb{D} & \xrightarrow{w \mapsto w^k} & \mathbb{D},
 \end{array}$$

es apenas la relación  $(\eta_{k-1}z)^k = \eta_{k-1}z^k$ . Cada una de estas mudanzas de variable privilegia una de las  $k - 1$  direcciones invariantes bajo  $z \mapsto z^k$ .

## 12 Cuencas parabólicas

En grado 1 los puntos periódicos parabólicos atraen por un lado y repelen por otro. En esta sección veremos cómo ello es un sesgo de las órbitas parabólicas en general.

Un punto fijo de  $f$  es parabólico cuando su multiplicador es una raíz de la unidad. Al reemplazar  $f$  por cierto iterado  $f^{\circ k}$  el multiplicador tórnase 1. Este es el momento de subrayar que los puntos fijos de multiplicador 1 representan, desde una óptica algebraica, raíces múltiples de la ecuación  $f(z) - z = 0$ .

Mucho ganamos al situar el punto fijo en el origen. Sea entonces

$$f(z) = z - a_{m+1}z^{m+1} - a_{m+2}z^{m+2} + \dots = z(1 - a_{m+1}z^m) - a_{m+2}z^{m+2} + \dots,$$

donde  $a_{m+1} \neq 0$ , la función a estudiar. A cualquiera de los  $m$  vectores unitarios con los cuales  $a_{m+1}v^m$  es real y positivo se le llama **dirección atrayente**. Análogamente, las  $m$  direcciones que orientan a  $a_{m+1}v^m$  hacia los valores reales negativos son las **direcciones repelentes**.

### Forma normal parabólica

Procedamos a colocar el germen parabólico en una forma patrón, asegurándonos de que una dirección atrayente apunte al semieje real positivo. Veremos en breve cómo el número de estas direcciones distintivas resulta invariante. Concentrémonos en una de las tantas direcciones atrayentes y propongamos una **forma normal parabólica**.

**Lema 12.1.** *Cualquier dirección atrayente puede asumirse como los reales positivos una vez efectuado un cambio lineal de coordenadas. Esto se puede lograr de manera que en la nueva variable se lea*

$$f(z) = z - z^{m+1}/m + c_{m+2}z^{m+2} + \dots = z(1 - z^m/m) + c_{m+2}z^{m+2} + \dots.$$

*Prueba.* Cierta múltiplo positivo  $\eta$  de una dirección atrayente satisface  $a_{m+1}\eta^m = 1/m$ . La nueva coordenada será  $w = z/\eta$ . En este sistema, la presentación de la función sufre metamorfosis hacia

$$\tilde{f}(w) = f(\eta w)/\eta = \eta w/\eta - a_{m+1}\eta^{m+1}w^{m+1}/\eta + \dots = w - w^{m+1}/m + \dots.$$

□

El valor señalado como  $m$  (otros autores priorizan  $m + 1$ ) es independiente de la carta elegida. Para corroborar esto basta con prestar atención a cambios de variables tangentes a la identidad (ver proposición 12.6). Con ello en mente, listamos una serie de propiedades.

**Lema 12.2.** *La inversa local de  $w = \varphi(z) = z - a_k z^k - a_{k+1} z^{k+1} + \dots$ , con  $k \geq 2$ , está dada por*

$$z = \psi(w) = w + a_k w^k + b_{k+1} w^{k+1} + \dots .$$

*Prueba.* La inversa local de  $\varphi$  cobra cuerpo en  $\psi(w) = w + b_2 w^2 + \dots$  pues se satisface  $\varphi(0) = 0$  y  $\varphi'(0) = 1$ . Al efectuar la composición formal obtenemos

$$\begin{aligned} w = \varphi(\psi(w)) &= \psi(w) - a_k \psi(w)^k - a_{k+1} \psi(w)^{k+1} + \dots \\ &= w + b_2 w^2 + \dots + b_k w^k + \dots - a_k (w^k + \dots) + \dots , \end{aligned}$$

donde hemos desplegado tan solo los términos de grado menor o igual a  $k$ . Al comparar miembro izquierdo y derecho concluimos las igualdades  $b_2 = \dots = b_{k-1} = 0$  y  $b_k - a_k = 0$ , como habíamos señalado.  $\square$

De este modo, *las direcciones atrayentes de la inversa son las direcciones repelentes del germen parabólico original.*

Continuamos con un tecnicismo que afecta a ciertas series.

**Lema 12.3.** *Sean  $g(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$  y  $h(z) = z + b_k z^k + b_{k+1} z^{k+1} + \dots$ . Entonces las series  $g(h(z))$  y  $h(g(z))$  coinciden hasta el orden  $k$  inclusive.*

*Prueba.* La presentación de  $h$  implica que para  $n \geq 2$  las series  $h(z)^n$  y  $z^n$  discrepan recién pasada la potencia  $z^k$ . Con este as bajo la manga, el resto se confirma al truncar series. Por ejemplo, se tiene

$$h(g(z)) = g(z) + b_k g(z)^k + \dots = z + a_2 z^2 + \dots + a_k z^k + \dots + b_k (z^k + \dots) + \dots ,$$

así como

$$\begin{aligned} g(h(z)) &= h(z) + a_2 h(z)^2 + \dots + a_k h(z)^k + \dots \\ &= z + b_k z^k + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_k z^k + \dots . \end{aligned}$$

De cotejar término por término se deduce lo pedido.  $\square$

**Corolario 12.4.** *Con la notación del lema 12.3 pensemos en  $w = g(z)$  como un cambio de variables. En tal caso  $h$  queda representado en la variable  $w$  como*

$$\tilde{h}(w) = h(w) + \alpha_{k+1} w^{k+1} + \dots .$$

*Prueba.* En virtud del lema 12.3 se cumple  $g(h(z)) = h(g(z)) + c_{k+1}z^{k+1} + \dots$ . Por tanto, al escribir  $\tilde{h}(w) = g(h(g^{-1}(w)))$  la expresión se reduce a

$$\tilde{h}(w) = h(g(g^{-1}(w))) + \text{términos de grado mayor que } k.$$

Cancelamos  $g$  con  $g^{-1}$ , y obtenemos lo deseado. □

El último paso es efectuar un cambio de variables tangente a la identidad a la forma canónica vigente.

**Corolario 12.5.** *Bajo un cambio de coordenadas tipo  $w = \varphi(z) = z + c_2z^2 + c_3z^3 + \dots$  la función  $f(z) = z - z^{m+1}/m + a_{m+2}z^{m+2} + \dots$  se transforma en*

$$\tilde{f}(w) = w - w^{m+1}/m + b_{m+2}w^{m+2} + \dots$$

□

Todo lo realizado está, en parte, encaminado a resaltar una particularidad.

**Proposición 12.6.** *La cantidad de direcciones atrayentes de un punto fijo parabólico de multiplicador 1 es un invariante analítico. Este valor coincide además con la cantidad de direcciones repelentes.* □

### Parabólicos en infinito

Curiosamente, la manera acertada de confirmar que los puntos parabólicos atraen por direcciones atrayentes es lanzando el punto parabólico lejos, al infinito. Si en la forma normal del lema 12.1 instalamos una nueva coordenada  $w = 1/z$  tendremos

$$\begin{aligned} F(w) &= \frac{1}{f(1/w)} \\ &= \frac{1}{1/w - 1/(mw^{m+1}) + c_{m+2}/w^{m+2} + \dots} \\ &= \frac{1}{1 - 1/(mw^m) + c_{m+2}/w^{m+1} + \dots} \\ &= w(1 + (1/(mw^m) - c_{m+2}/w^{m+1} + \dots) + (1/(mw^m) - c_{m+2}/w^{m+1} + \dots)^2 + \dots) \\ &= w(1 + 1/(mw^m) + b_{m+1}/w^{m+1} + \dots), \end{aligned}$$

cuando la norma de  $w$  es grande.

Subyacente a las siguientes manipulaciones descansa un nuevo cambio de coordenadas.

**Lema 12.7.** *En la expresión anterior, para  $|w|$  grande el argumento del número complejo  $1+1/(mw^m)+b_{m+1}/w^{m+1}+\dots$  es menor que  $2\pi/4m$  en valor absoluto (es decir, su ángulo de elevación o declive es menor que  $1/4m$  de vuelta en referencia a los reales positivos).*

*Prueba.* Una tal serie de Laurent toma valor 1 en  $\infty$ , es decir el argumento de  $F(\infty)$  vale 0 grados. Como cerca de 1 (el número complejo  $F(\infty)$ ) el argumento es una función continua correctamente constituida, se confirma el resultado.  $\square$

Definimos la **cuña** de abertura  $\theta$  como el conjunto abierto

$$C_\theta = \{w : |\arg(w)| < 2\pi\theta\}.$$

**Lema 12.8.** *Cuando  $|w|$  es suficientemente grande, un valor bajo  $F$  en  $C_{1/4m}$  es llevado dentro de  $C_{1/2m}$ .*

*Prueba.* Cuando  $|w|$  es grande, el lema 12.7 es aplicable y conseguimos

$$|\arg(F(w))| \leq |\arg(w)| + |\arg(1 + 1/(mw^m) + \dots)| < 2\pi/4m + 2\pi/4m = 2\pi/2m.$$

$\square$

Tanto en  $C_{1/4m}$  como en  $C_{1/2m}$  el elevar a la potencia  $m$  es un procedimiento reversible. Por ejemplo  $C_{1/4m}$  cae en  $C_{1/4}$ , vale decir, en el semiplano de los números complejos de parte real positiva; mientras  $C_{1/2m}$  se empareja con  $C_{1/2}$ , el plano cortado abierto de un tajo a lo largo de la semirrecta real negativa. Introduzcamos entonces la variable  $y = w^m$ .

**Lema 12.9.** *Bajo el cambio de variable  $y = w^m$  la función  $F$  se convierte en*

$$\tilde{F}(y) = y(1 + 1/y + \dots),$$

*la cual lleva un punto de norma suficientemente grande de  $C_{1/4}$  en un punto de  $C_{1/2}$ .*

*Prueba.* Esto es trivial pues miembro izquierdo y derecho son iguales a

$$F(w)^m = w^m(1 + 1/(mw^m) + \dots)^m = y(1 + 1/(my) + \dots)^m.$$

$\square$

Acá es preciso señalar que  $\tilde{F}(y)$  es en rigor una serie convergente en potencias de  $1/y^{1/m}$ . Sin embargo, la potencia más ligera a considerar es  $1/y$ . Para evitar confusiones nos escudamos detrás de una desigualdad.

**Lema 12.10.** *Existen  $R$  y  $K$  tales que para  $|y| \geq R$  se cumple  $|\tilde{F}(y) - y - 1| \leq \frac{K}{|y|^{1/m}}$ .  $\square$*

Más funcional aun es escoger  $R$  exorbitantemente grande a fin de que toda referencia a potencias fraccionarias quede difuminada.

**Lema 12.11.** *Existe  $R$  tal que para  $|y| \geq R$  se tiene  $|\tilde{F}(y) - y - 1| < 1/2$ .  $\square$*

Hagamos un croquis de la geometría del problema. Sobre el círculo de radio  $R$  unimos los dos puntos de parte real igual a  $R/2$  vía el arco menor (aquel a la derecha del origen). Trazamos también la tangente al círculo que pasa por estos dos puntos y retenemos la semirrecta que se inclina hacia a la izquierda. Sea  $\mathcal{P}$  la región a la derecha de estas curvas. Un detalle curioso: la única ligazón entre esta figura y el sistema dinámico original se halla en la elección del mínimo valor de  $R$  aceptable, por lo demás la construcción es genérica.

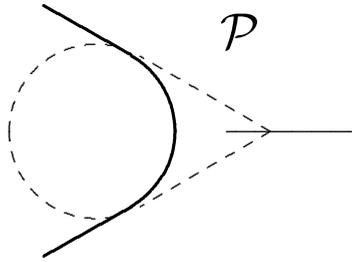


FIGURA 10. *Los trazos sugeridos. Interesa la región  $\mathcal{P}$  a la derecha del trazo continuo.*

Un ejercicio de geometría plana nos enseña el atractivo de la región.

**Ejercicio 12.12.** *¿Qué espectro de inclinaciones puede asumir una recta no horizontal para que goce de la siguiente propiedad: dado un punto  $z$  a la derecha de la recta, todo el disco de radio  $1/2$  centrado en  $z + 1$  se halla a ese mismo lado?*

Si tomamos todas las rectas tangentes al círculo de radio  $R$  con inclinación en regla, y unimos los lados correctos, tendremos la región  $\mathcal{P}$ .

**Lema 12.13.** *La región  $\mathcal{P}$  es invariante por iteración; es decir, para  $y \in \mathcal{P}$  se tiene  $\tilde{F}(y) \in \mathcal{P}$ . De paso se cumple  $\text{re } \tilde{F}(y) \geq \text{re } y + 1/2$  en este conjunto.*

*Prueba.* En virtud del estimado del lema 12.11, el ejercicio 12.12 torna obvia la primera parte. La segunda parte también es una consecuencia directa del lema 12.11.  $\square$

Pero el trasfondo de todo esto es iterar.

**Lema 12.14.** *Los iterados de  $\tilde{F}$  en la región  $\mathcal{P}$  convergen uniformemente en compactos a  $\infty$ .*  $\square$

Reinterpretemos. Sea  $\mathcal{P}'$  la imagen de  $\mathcal{P}$  bajo la extracción canónica de raíz  $m$ -ésima en  $C_{1/2}$ . Puesto que  $\mathcal{P}$  es invariante (a futuro) bajo  $\tilde{F}$ , la región  $\mathcal{P}' \subset C_{2/m}$  es invariante bajo una continuación analítica de  $F$ . Pero  $F$  es la única continuación analítica de sí misma y por tanto  $\mathcal{P}'$  es una región invariante donde los iterados de  $F$  convergen normalmente a  $\infty$ . En la coordenada original tenemos el siguiente importante resultado.

**Teorema 12.15.** *Sea  $\hat{z}$  un punto fijo parabólico de  $f$  con  $f'(\hat{z}) = 1$ . Supongamos que tras la primera derivada, recién la  $(m + 1)$ -ésima derivada no se anula en  $\hat{z}$ . Entonces existen  $m$  regiones abiertas disjuntas e invariantes en donde los iterados de  $f$  configuran una familia normal que converge siempre a la constante  $\hat{z}$ .*

*Prueba.* Es importante insistir en que cada dirección atrayente (y suman  $m$  en total), alienta una construcción autónoma. Resultan, por consiguiente, al menos  $m$  las distintas regiones con acceso a  $\hat{z}$  en la frontera. Si bien ya se insinúa que cada una de ellas pertenece a una componente de Fatou distinta, ello será establecido concluyentemente recién por el corolario 12.24.  $\square$

Cada componente de Fatou en donde los sucesivos iterados convergen normalmente a uno de estos puntos parabólicos recibe el nombre de **componente parabólica**. Es verdad que las componentes parabólicas contienen siempre puntos críticos. No obstante, incluso en el caso polinomial confirmar esto es un poco técnico. Lo dejamos en compás de espera unas páginas pues de momento hay otros detalles topológicos por tratar.

## Pétalos atrayentes

Retornemos a la región  $\mathcal{P}$  de la figura 10. Un minuto de reflexión nos persuade de que, por construcción, la frontera de  $\mathcal{P}$  se parametriza vía  $y(\theta) = r(\theta)e^{2\pi i\theta}$  para  $\theta \in (-5/12, 5/12)$ , con  $\lim_{\theta \rightarrow \pm 5/12} r(\theta) = +\infty$  (recordemos que  $5/12$  de vuelta corresponde a 150 grados).

En la variable  $w = y^{1/m}$  la frontera de  $\mathcal{P}' = \sqrt[m]{\mathcal{P}}$  se expresa por  $w(\theta) = r(\tau)^{1/m}e^{2\pi i\tau}$ , donde  $\tau \in (-5/12m, 5/12m)$ . En particular,  $\mathcal{P}'$  queda apresada en la cuña  $C_{5/12m}$ .

Al restaurar la variable original  $z = 1/w$ , la región queda demarcada por una curva cerrada con tangencias en el origen a las rectas de argumento  $\pm 5/12m$ .

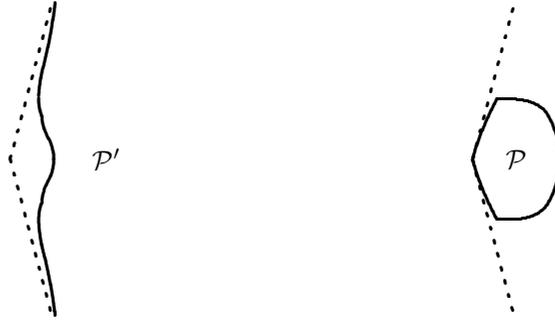


FIGURA 11. Los pétalos en las coordenadas  $w$  y  $z$ . Esta vez  $m$  vale 2.

En la coordenada  $z$  —o por consistencia, en cualquiera de las variables intermedias— esta región recibe el nombre de **pétalo atrayente** y es denotado por  $\mathcal{P}$ . Obsérvense las simetrías por reflexión sobre el eje atrayente. Como  $5/12m$ , el ángulo de apertura, está comprendido entre  $1/2m$  y  $1/4m$ , el pétalo abarca menos de  $1/m$  pero más de  $1/2m$  de la fracción del espacio útil alrededor del punto fijo.

Se llama pétalo porque disponemos de en total  $m$  direcciones atrayentes espaciadas simétricamente alrededor del punto parabólico donde prenderlos; en conjunto asemejarán una flor. Un detalle digno de apuntalar a riesgo de caer en lo repetitivo es que los  $m$  pétalos son calco uno del otro: para transitar de coordenada a coordenada con la región  $\mathcal{P}$  no se requiere nada de la teoría de sistemas dinámicos. En síntesis, aparecen  $m$  pétalos disjuntos, y en conjunto se poseionan de un tanto más del 50% de espacio que circunda al punto parabólico. Fuera de la flor queda cierta luz, digamos para justificar el estudio individualizado de las direcciones repelentes.

## Ejes

Tomemos cualquier punto  $y_0$  en la región  $\mathcal{P}$  y vislumbremos el destino que le aguarda. Por supuesto, la secuencia  $\{y_n\}$  enfilea hacia  $\infty$ : de acuerdo con el lema 12.13, de iterado a iterado se aprecia un desplazamiento persistente hacia la derecha, motivo por el cual, tarde o temprano la órbita abandona cualquier semiplano vertical izquierdo.

Ahora bien, lo anterior presagia una evolución monótona en las partes reales de los  $y_n$ . Pero, ¿qué hay de las partes imaginarias? Desafortunadamente, en este aspecto es poco lo que se puede prever. El lema 12.10 no descarta que esporádicamente la parte imaginaria de  $y_n$  pueda alzarse por sobre la parte imaginaria de su predecesor  $y_{n-1}$  hasta  $K/|y_{n-1}|^{1/m}$  unidades. También el lema 12.10 nos predispone a aceptar que las normas de  $|y_n|$  y de  $|n|$  son conmensurables. Esto es un problema: la diferencia entre la parte imaginaria de  $y_0$  e  $y_n$  bien puede acercarse a  $K \sum_{k < n} |k|^{1/m}$ , sumatoria divergente al tender  $n$  a  $\infty$ . Por supuesto, esto no es más que una antesala heurística, pero sirve para ponernos en vereda.

Si bien nunca habrá garantía de una convergencia hacia una asíntota horizontal, las inclinaciones mismas sí tienen una marcada tendencia.

**Lema 12.16.** *Para  $y_0 \in \mathcal{P}$  se satisface  $\lim y_n/|y_n| = 1$ .*

*Prueba.* La clave se encuentra bajo un resultado básico del análisis real: si  $\alpha_n$  es una secuencia de números complejos que converge a  $\alpha$ , entonces el promedio  $(1/n) \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_k$  también converge a  $\alpha$ . En nuestro caso por el lema 12.10 la diferencia  $y_{n+1} - y_n$  converge a 1. Por ello la suma telescópica

$$\frac{y_n - y_0}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k)$$

converge a 1. Sin embargo  $y_0/n$  converge a 0 y, en consecuencia, tanto  $y_n/n$  como  $|y_n|/n$  tienden a 1. De esto último se deriva el resultado.  $\square$

Este lema admite una interpretación transparente en  $z$ , el sistema inaugural.

**Proposición 12.17.** *Para  $z_0$  en el pétalo  $\mathcal{P}$  se tiene  $z_n \rightarrow 0$  y  $z_n/|z_n| \rightarrow 1$ .*

*Prueba.* Si  $y_n/|y_n|$  es cercano a 1, entonces  $w_n/|w_n| = (y_n/|y_n|)^{1/m}$  también es cercano a 1. De este modo  $z_n/|z_n|$ , que es igual a  $|w_n|/w_n$ , resulta cercano a 1.  $\square$

Conocido este atributo, construimos en la cuenca una curva invariante. Unimos  $y_0 \in V$  con  $y_1$  vía una curva diferenciable  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}$  de modo que se tenga  $\gamma'(1) = \tilde{F}'(y_0)\gamma'(0)$ . Al definir inductivamente  $\gamma(t+1) = \tilde{F}(\gamma(t))$ , la curva  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow V$  resulta diferenciable e invariante, con la tendencia señalada por el lema 12.16. Cuando retomamos la variable  $z$ , y recordamos que son en total  $m$  las direcciones atrayentes, tenemos una idea clara de la situación global.

**Teorema 12.18.** *En torno a un punto fijo parabólico de multiplicador 1 existen curvas invariantes que se acercan al punto parabólico en forma tangencial a cada una de las direcciones atrayentes.*

*Prueba.* Esto es asunto de traducir el análisis a la coordenada  $z$ . □

### Pétalos repelentes

Resulta una tentación definir un objeto repelente como el correspondiente objeto atrayente de la inversa. Este razonamiento tiene méritos y deméritos. La ventaja en este contexto es obvia: el trabajo tedioso ya fue efectuado con antelación. La desventaja es un tanto más sutil: ¿qué evidencia existe de que los iterados de un punto migren de una región que unilateralmente hemos declarado repelente?

Deducimos del lema 12.2 que las direcciones repelentes y las direcciones atrayentes de la inversa son las mismas, no hay duda de ello. Debemos, empero, reconstruir el trabajo para la inversa para así, créase o no, salir airosos. Además, ello ahorra discusiones estériles.

Sea  $\zeta_m$  una de las direcciones repelentes de

$$f(z) = z - z^{m+1}/m + a_{m+2}z^{m+2} + \dots$$

En este caso  $\zeta_m$  es un potencia impar de  $e^{2\pi i/2m}$  y por ello queda atada a  $\zeta_m^m = -1$ . Por tal motivo, al operarse el cambio de variables  $x = z/\zeta_m$  el sistema dinámico se cambia a

$$g(x) = f(\zeta_m x)/\zeta_m = x + x^{m+1}/m + b_{m+2}x^{m+2} + \dots$$

Con esto, el semieje real positivo se torna la dirección repelente.

En una nueva variable  $w = 1/x$  tendremos

$$G(w) = w(1 - 1/(mw^m) + c_{m+1}/w^{m+1} + \dots),$$

y de ahí, tras una inspección somera de los ángulos, con el mismo método de los lemas 12.7 y 12.8, podemos introducir  $y = w^m$  para conseguir

$$G(y) = y - 1 + \text{términos en potencias de } (1/y)^{1/m},$$

proceso convergente y reversible a la variable  $w$  en cuanto  $|w|$  sea grande y cumpla  $|\arg(w)| < 1/4m$ ; es decir, mientras  $|y|$  sea grande y satisfaga  $|\arg(y)| < 1/4$ . Esta última desigualdad está acorde con la exigencia  $\operatorname{re} y \geq R$  que impondremos a fin de extraer raíz  $m$ -ésima sin ambigüedad.

**Lema 12.19.** *Existe  $R$  para el cual se tiene  $|\tilde{G}(y) - (y - 1)| \leq 1/2$  cuando  $\operatorname{re} y \geq R$ .*

*Prueba.* Para cierto  $R > 0$  la condición  $\operatorname{re} y \geq R$  implica que  $|y|$  es grande y está sujeto a  $|\arg(y)| < 1/4$ . □

Así, mientras los puntos a iterar permanezcan en el semiplano  $\operatorname{re} y \geq R$ , se deslizarán al menos media unidad hacia la izquierda por iterado; es decir, son repelidos de esta “semivecindad” de  $\infty$ . Como este semiplano está contenido en el sector  $C_{1/2}$  en donde es posible el retroceso a la variable  $w$ , regresamos a la variable original  $z$  salteándonos la coordenada  $x$ . Si rastreamos la figura paso a paso, en la variable  $z$  obtenemos esta vez algo cabalmente parecido a un pétalo. Este será nuestro **pétalo repelente**. Si duplicamos el procedimiento por cada una de las  $m$  direcciones repelentes, habremos conseguido  $m$  pétalos, cada uno simétrico respecto a la dirección repelente que le dio comienzo. Estos quedan separados entre sí por  $1/m$  vueltas, y superpuestos invaden ligeramente un poco menos que la mitad del entorno circular.

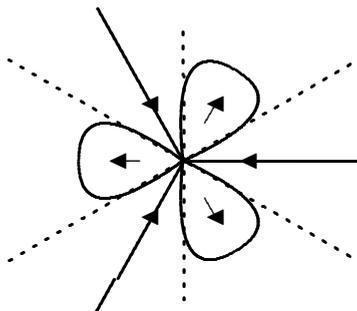


FIGURA 12. *Pétalos repelentes alrededor de un parabólico; las líneas sólidas señalan las direcciones atrayentes, las quebradas no acarrean significado dinámico.*

**Nota 12.20.** Si bien al iterar tarde o temprano abandonamos una pétalo repelente, una pregunta natural que flota en el ambiente es ¿y de ahí, a dónde pasamos? Este futuro incierto poco importa. No obstante, algo que queremos evitar a toda costa es saltar de un pétalo repelente a otro de un brinco.

Una manera de retardar artificialmente el escape de la zona de ascendencia de un pétalo se logra al trasladar la recta  $\operatorname{re} y = R$  unas cuantas unidades a la derecha. Así la imagen de un punto ubicado dentro del pétalo recortado cae dentro del pétalo primigenio, ligeramente más grande. Con este margen de una o dos unidades temporales, *se logra que la imagen de*

*un pétalo repelente sea disjunto de cualquier otro pétalo repelente perteneciente al mismo entorno parabólico.*

**Ejemplo 12.21.** Para el caso  $m = 1$ , la dirección atrayente (respectivamente repelente) surca los reales positivos (los negativos). El pétalo atrayente se abre 150 grados a ambos costados del semieje real positivo. Los pétalos repelentes, por su constitución, son más modestos: abarcan la mitad del espacio total, es decir, se recuestan sobre una recta, hacia la izquierda.

La interpretación es simple. El pétalo atrayente es invariante, y resulta impensable escabullirse de allá dentro. Por protocolo, en el pétalo repelente las cosas son al revés: poco a poco desalojan el lugar. ¿Y qué hay de la intersección? Pues las dos propiedades confluyen, y no hay engaño alguno.

El pétalo repelente se incrusta en una cuña de 300 grados; por ello su aspecto de cardioide. Esto se traduce en la componente de Fatou correspondiente en una configuración cuspidal. Este modelo es genérico y, escalas aparte, resulta relativamente indiferente al sistema particular por iterar.

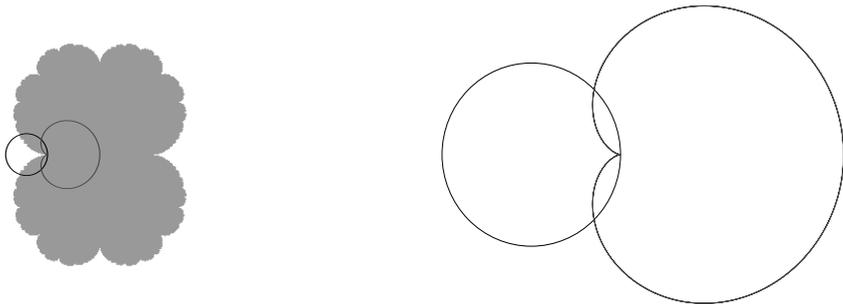


FIGURA 13. *Pétalos superpuestos al conjunto de Julia de  $z \mapsto P(z) = z - z^2$ , y modelo universal.*

Cuando  $m$  es mayor o igual a dos, el entorno del punto fijo se troza en  $m$  porciones, con ejes atrayentes separados entre sí por menos de 180 grados. Esto explica el aspecto normal, visualmente hablando, de las componentes. (Ver también figura 14.)

Somos testigos de una descripción local y no global, en ello insistimos: en un pétalo repelente puede haber (y de hecho hay) puntos pertenecientes tanto al conjunto de Julia como al de Fatou. En revancha, los pétalos atrayentes están siempre inmersos en una componente del conjunto de Fatou.

En lo colectivo, se distingue una alternancia de pétalos atrayentes y repelentes que conforman, al sobreponerse, una vecindad del punto parabólico. Esto es consistente con la teoría. Es más, la posibilidad de que algo se aleje pasajeraamente para luego retornar armoniza con el espíritu de los puntos parabólicos. La figura 4, en el capítulo 4, es evidencia de esta observación.

Como aplicación, confirmemos cómo los pétalos atrayentes son los canales de acceso exclusivo a los puntos parabólicos.

**Lema 12.22.** *Si una secuencia  $z_n$  de iterados bajo  $f$  es no estacionaria y converge a un punto fijo parabólico  $\hat{z}$  de multiplicador 1, entonces a partir de cierto instante todos los  $z_n$  pertenece a un mismo pétalo atrayente.*

*Prueba.* Sea  $W$  la unión de  $\{\hat{z}\}$  y sus pétalos atrayentes y repelentes, conjunto abierto que contiene a  $\hat{z}$ . Por convergencia, de un iterado en adelante todas las imágenes de  $z_n$  se localizan en  $W$ , es decir bien se cae en un pétalo atrayente o en uno repelente. Si a uno de estos iterados lo captamos en un pétalo atrayente, queda aprisionado allí dentro, y reafirmamos lo aseverado. De lo contrario centrémonos en un  $z_n$  que pertezca a un pétalo repelente. Sabemos que eventualmente escapa de este sin salir de  $W$ , conque deberá ser transferido a algún otro pétalo. Como hemos explicado en la nota 12.20, este no puede ser uno de los repelentes, por lo que deberá ser uno atrayente, del cual no se evadirá jamás.  $\square$

Este sucederse de pétalos facilita el atar cabos sueltos.

**Proposición 12.23.** *Tomemos un punto parabólico  $\hat{z}$  de multiplicador 1. Sea  $K$  compacto y conexo. Supongamos que para todo  $z_0 \in K$  la secuencia de iterados  $z_n$  no sea estacionaria y converja a  $\hat{z}$ . Entonces existe un pétalo atrayente  $\mathcal{P}$  y un  $N$  tal que para  $n \geq N$  se tiene  $f^{on}(K) \subset \mathcal{P}$ .*

*Prueba.* Todo punto en  $K$  satisface las premisas del lema 12.22, y, por consiguiente, de manera individual, sus iterados eventualmente quedan atrapados en único pétalo. Mostraremos que el pétalo es el mismo para todos los puntos de  $K$ . Sean  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m$  los pétalos atrayentes alrededor de  $\hat{z}$ . Los conjuntos

$$A_i = \{z \in K : \text{existe } n \text{ para el cual } f^{on}(z) \in \mathcal{P}_i\}$$

son relativamente abiertos gracias a la continuidad de  $f^{on}$ . También son disjuntos pues cuando se entra en un pétalo, se está condenado a permanecer en él. Gracias al lema 12.22

estos  $A_i$  cubren  $K$ . Como  $K$  es conexo, apenas uno de los  $A_i$ , digamos  $A_{i_0}$ , es no vacío. Así, todo  $K$  desfoga en  $\mathcal{P}_{i_0}$ .

Ahora toca decidir si el horario de arribo está, bien que mal, sincronizado. Para ello ponemos

$$K_n = \{z \in K : f^{\circ n}(z) \in \mathcal{P}_{i_0}\},$$

conjuntos relativamente abiertos por continuidad. También, al ser los pétalos invariantes por iteración, los  $K_n$  encajan uno dentro del siguiente. Por último, merced nuevamente del lema 12.22, queda determinada una cobertura de  $K$ . Al ser la cobertura ascendente, tenemos  $K \subset K_N$  para cierto  $N$ ; esto significa la inclusión  $f^{\circ N}(K) \subset \mathcal{P}_{i_0}$ . El resto de las propiedades son fruto de la invarianza.  $\square$

**Corolario 12.24.** *Cada pétalo atrayente pertenece a una distinta componente de Fatou.*

*Prueba.* Si unimos dentro de una componente de Fatou dos puntos de dos pétalos (iguales o distintos) mediante un arco, la imagen será eventualmente absorbida por un único petalo pues el arco es compacto y conexo. Es decir, cada pétalo ya determina una componente de Fatou.  $\square$

**Corolario 12.25.** *Sea  $\hat{z}$  un punto fijo parabólico de  $f$  con  $f'(\hat{z}) = 1$  y  $\gamma$  una curva sujeta a  $\gamma(t+1) = f(\gamma(t))$ , es decir, invariante a futuro. Si  $\hat{z}$  no pertenece a la imagen de  $\gamma$  pero cumple  $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \hat{z}$ , entonces  $\gamma(t)$  converge tangencialmente a  $\hat{z}$  a lo largo de una de las direcciones atrayentes.*

*Prueba.* Se toma en este caso el compacto  $K$  igual a  $\gamma([T, T+1])$  para cierto  $T$ . Para la propiedad suplementaria —acerca de la tangencia— se recurre a un argumento idéntico al que justificó la construcción del eje central.  $\square$

## Los parabólicos atraen puntos críticos

Si los puntos parabólicos lucen como puntos atractores degenerados, la calidad de asimilar puntos críticos debe ser alentada. La confirmación se hará por etapas.

**Teorema 12.26.** *Para una función racional de grado mayor o igual a 2, toda cuenca parabólica asociada con un punto fijo de multiplicador 1 contiene un punto crítico.*

Fijemos nomenclatura y convenciones. Sea  $f(z) = z - z^{m+1}/m + \dots$  una función racional de grado mayor o igual a 2 con punto fijo parabólico (normalizado) en el origen. Cuando  $R$  es pequeño, el sector

$$\mathcal{S}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R \text{ y } |\arg(z)| < 1/4m\}$$

es un subconjunto invariante a futuro de un pétalo atrayente  $\mathcal{P}_0$  contenido en una cuenca parabólica  $U$  en donde los sucesivos iterados de  $f$  convergen normalmente a 0. La meta es establecer que  $U$  contiene un punto crítico de  $f$ .

Por el absurdo demos pie a la posibilidad de que la cuenca parabólica no contribuya con puntos críticos. De ser así, sea  $\mathcal{P}_0 \subset U$  el pétalo atrayente mencionado arriba, conjunto simplemente conexo por constitución. Llamemos  $\mathcal{P}_1$  a la componente conexa de  $f^{-1}(\mathcal{P}_0)$  que contiene al conjunto invariante  $\mathcal{P}_0$ . Por la proposición 2.11, la restricción  $f : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_0$  es una función propia de grado finito. Si además se asume la ausencia de puntos críticos, estamos hablando de un recubrimiento. Pero conjuntos simplemente conexos como  $\mathcal{P}_0$  no admiten recubrimientos conexos no triviales, y concluimos que  $f : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_0$  es una equivalencia. De acá rescatamos algo significativo: primero, el conjunto  $\mathcal{P}_1$  es también simplemente conexo y, segundo, queda inequívocamente determinada  $f^{-1} : \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathcal{P}_1$ , una rama inyectiva de la inversa de  $f$ . Si inductivamente llamamos  $\mathcal{P}_{n+1}$  a la componente conexa de  $f^{-1}(\mathcal{P}_n)$  que contiene a  $\mathcal{P}_n$ , el mismo procedimiento nos exige a aceptar a  $f^{-1}$  como una equivalencia entre  $\mathcal{P}_n$  y  $\mathcal{P}_{n+1}$ . De este modo, la información cuadra dentro de una enorme secuencia

$$\mathcal{P}_0 \xrightarrow{f^{-1}} \mathcal{P}_1 \xrightarrow{f^{-1}} \dots \longrightarrow \mathcal{P}_n \xrightarrow{f^{-1}} \mathcal{P}_{n+1} \xrightarrow{f^{-1}} \dots$$

entre subconjuntos simplemente conexos de  $U$  inmersos uno dentro del otro. En lo sucesivo  $f^{-1}$  se referirá en exclusiva a esta rama de la inversa bien definida en todo  $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{P}_n$ .

Fijemos una órbita  $\alpha_n \rightarrow 0$  en  $U$  como referencial, con  $\alpha_0 \in \mathcal{P}_0$ .

**Lema 12.27.** *La secuencia  $\alpha_n/\alpha_{n+1} - 1$  tiende a 0.*

*Prueba.* La inversa de  $f$  se expresa cerca de 0 cual

$$f^{-1}(z) = z(1 + z^m/m) + \dots$$

Por tanto, de

$$\alpha_n = f^{-1}(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1}(1 + \alpha_{n+1}^m/m) + \dots$$

se pasa a

$$\alpha_n/\alpha_{n+1} - 1 = \alpha_{n+1}^m/m + \dots$$

y se concluye lo afirmado.  $\square$

Ahora pongamos

$$\psi_n(t) = \frac{\alpha_n}{1 + t(\alpha_n/\alpha_{n+1} - 1)}.$$

para  $t \in \mathbb{C}$ . Individualmente, esta función cumple  $\psi_n(0) = \alpha_n$  y  $\psi_n(1) = \alpha_{n+1}$ . Más importante todavía es la siguiente propiedad colectiva.

**Lema 12.28.** *Fijemos un compacto  $K \subset \mathbb{C}$ . Existe  $N$  tal que para todo  $n \geq N$  y  $t \in K$  se tiene  $\psi_n(t) \in \mathcal{S}_R$ .*

*Prueba.* Trivial pues por la proposición 12.17  $\alpha_n$  es pequeño y casi horizontal mientras  $1 + t(\alpha_n/\alpha_{n+1} - 1)$ , al ser cercano a 1, resulta también casi horizontal. Nos referimos, por supuesto, a cuando  $n$  es grande.  $\square$

**Proposición 12.29.** *La familia de funciones  $\varphi_n = f^{-n} \circ \psi_n$  es normal en  $\mathbb{C}$ .*

*Prueba.* Normalidad local implica normalidad global, así que nos contentamos con estudiar la secuencia en una vecindad compacta en la variable  $t$ . En este caso, por el lema anterior se tiene  $\psi_n(t) \in \mathcal{S}_R \subset U$  y con ello los valores  $\varphi_n(t) = f^{-n}(\psi_n(t)) \in U$  omitirán el exterior de  $U$ ; más de tres puntos en total pues el complemento de una componente de Fatou, por contener al conjunto de Julia, es infinito.  $\square$

*Prueba del Teorema 12.26.* Tras todos los preparativos, alguna subsecuencia de los  $\varphi_n$  convergerá a una función  $\varphi$  definida en todo  $\mathbb{C}$  por definición. Específicamente, para  $t = 0$  se tiene  $\varphi_n(0) = f^{-n}(\psi_n(0)) = f^{-n}(\alpha_n) = \alpha_0 \in U$ , y con ello se consigue  $\varphi(0) = \alpha_0$ . Como  $\alpha_0$  no pertenece a  $\partial U$ , por el lema 3.11 el límite  $\varphi$  toma valores en  $U$ , dominio hiperbólico. Por el teorema de Liouville, esta  $\varphi$  deberá ser constante. Esto es incongruente pues  $\varphi_n(1) = f^{-n}(\psi_n(1)) = f^{-n}(\alpha_{n+1}) = \alpha_1 \in U$  implica  $\varphi(1) = \alpha_1 \neq \alpha_0$ .

Debemos aceptar entonces que  $f$  acepte un punto crítico en  $U$ .  $\square$

## Uniformización parabólica

Estas funciones  $\psi_n$ , o para ser exactos sus inversas, si bien parecen improvisadas, son más naturales de lo que se insinúa. Su razón de ser es identificar parte de la cuenca parabólica  $U$  con la cuenca parabólica de  $t \mapsto t + 1$ .

Para aclarar este asunto, un estimado trivial viene al caso: cuando  $z, w$ , distintos, son cercanos a 0, entonces  $\frac{f(z) - f(w)}{z - w}$  es cercano a  $f'(0) = 1$ .

**Propiedad 12.30.** *Si  $z \in \mathcal{P}_0$  es distinto de  $\alpha_0$ , entonces se tiene*

$$\lim \frac{f^{\circ n+1}(z) - \alpha_{n+1}}{f^{\circ n}(z) - \alpha_n} = \lim \frac{f^{\circ n+1}(z)}{f^{\circ n}(z)} = 1.$$

*Prueba.* Ya se explicó por qué

$$\frac{f^{\circ n+1}(z) - \alpha_{n+1}}{f^{\circ n}(z) - \alpha_n} = \frac{f(f^{\circ n}(z)) - f(\alpha_n)}{f^{\circ n}(z) - \alpha_n}$$

debe ser 1 en el límite. El segundo límite se argumenta con  $w = 0$ . □

Obsérvese que el caso particular  $z = \alpha_1$  conduce a  $\lim \frac{\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} = 1$  y esto a su vez a  $\lim \frac{\alpha_{n+2} - \alpha_n}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} = 2$  al sumarle 1 (en la forma  $\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\alpha_{n+1} - \alpha_n}$ ) a  $\frac{\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1} - \alpha_n}$ .

La inversa de  $\psi_n$  está dada por  $\sigma_n(w) = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} \left( \frac{w - \alpha_n}{w} \right)$ . Para determinar el automorfismo  $\sigma_n \circ \psi_{n+1}$  requerimos tres evaluaciones. De manera rutinaria conseguimos  $\sigma_n \circ \psi_{n+1}(0) = \sigma_n(\alpha_{n+1}) = 1$  y  $\sigma_n \circ \psi_{n+1}(\infty) = \sigma_n(0) = \infty$  (y así  $\sigma_n \circ \psi_{n+1}$  será un polinomio). Por último, se satisface  $\sigma_n \circ \psi_{n+1}(1) = \sigma_n(\alpha_{n+2}) = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} \frac{\alpha_{n+2} - \alpha_n}{\alpha_{n+2}}$ .

**Propiedad 12.31.** *El automorfismo  $\sigma_n \circ \psi_{n+1}$  está dado por el polinomio*

$$\left( \frac{\alpha_{n+2} - \alpha_n}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+2}} - 1 \right) t + 1.$$

*Prueba.* Tal automorfismo polinomial es el único que carga con las responsabilidades en 0 y 1 ya mencionadas. □

**Propiedad 12.32.** *La familia  $\sigma_n \circ f^{\circ n}$  restringida a  $\mathcal{P}_0 - \{\alpha_0, \alpha_1\}$  es normal.*

*Prueba.* Restringido a  $\mathcal{P}_0$ , los iterados  $f^{\circ n}$  son inyectivos. Al quitar del medio a  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$ , es imposible alcanzar  $0, \alpha_n, \alpha_{n+1}$  desde  $\mathcal{P}_0 - \{\alpha_0, \alpha_1\}$ . Al aplicar  $\sigma_n$  los tres puntos omitidos serán  $\infty, 0, 1$  —en ese orden—.  $\square$

**Propiedad 12.33.** *La secuencia  $\frac{\sigma_n(f^{\circ n}(z))}{\sigma_{n+1}(f^{\circ n+1}(z))}$  converge a 1 en  $\mathcal{P}_0 - \{\alpha_0, \alpha_1\}$ .*

*Prueba.* Al escribir

$$\frac{\sigma_n(f^{\circ n}(z))}{\sigma_{n+1}(f^{\circ n+1}(z))} = \frac{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} \frac{f^{\circ n}(z) - \alpha_n}{f^{\circ n}(z)}}{\frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1}} \frac{f^{\circ n+1}(z) - \alpha_{n+1}}{f^{\circ n+1}(z)}}$$

la propiedad apacere como obvia si apelamos a aplicaciones en simultáneo de la propiedad 12.30 y las consecuencias anotadas a continuación de esta.  $\square$

Sea  $\Psi$  cualquier límite de  $\sigma_n \circ f^{\circ n}$ , función en principio definida apenas en  $\mathcal{P}_0 - \{\alpha_0, \alpha_1\}$ . Una consecuencia oblicua del siguiente ejercicio es el relevar que  $\Psi$  no es idénticamente igual a  $\infty$ .

**Ejercicio 12.34.** Demuestre que se cumple  $\Psi(\alpha_2) = 2$ .

Esto es deseable puesto que ahora  $\Psi = \lim \sigma_{n_k} \circ f^{\circ n_k}$  equivale, por la propiedad 12.33, a  $\Psi = \lim \sigma_{n_k+1} \circ f^{\circ n_k+1}$ . Esto coloca a  $\Psi$  en el epicentro de una relación funcional.

**Proposición 12.35.** *Para todo  $z \in \mathcal{P}$  se tiene  $\Psi(f(z)) = f(z) + 1$ .*

*Prueba.* Al cumplirse

$$\sigma_{n_k} \circ f^{\circ n_k}(f(z)) = \sigma_{n_k} \circ \psi_{n_k+1}(\sigma_{n_k+1} \circ f^{\circ n_k+1}(z)),$$

la propiedad 12.31 implica lo anunciado.  $\square$

En conclusión, imposible que  $\Psi$  sea constante. Esta  $\Psi$  es, en el fondo, una coordenada parabólica en la cuenca  $U$  en el sentido que es inyectiva en el pétalo y “linealiza” una parte de la dinámica.

**Teorema 12.36.** *Existe una función analítica  $\Psi : U \rightarrow \mathbb{C}$  inyectiva en el pétalo  $\mathcal{P}_0$  que satisface la relación funcional de Abel  $\Psi(f(z)) = f(z) + 1$ .*

*Prueba.* Que  $\Psi$  pueda extenderse a toda la componente es inmediato: para todo  $z \in U$ , existe  $m$  tal que  $f^{\circ m}(z) \in \mathcal{P}_0 - \{\alpha_0, \alpha_1\}$ ; basta definir  $\Psi(z) = \Psi(f^{\circ m}(z)) - m$ .

Como corolario de lo anterior obtenemos que  $\sigma_{n_k} \circ f^{\circ n_k}$  converge a  $\Psi$  en  $U$ , y la relación funcional se comprueba mediante continuación analítica.

Para ver que  $\Psi$  es inyectiva en  $\mathcal{P}_0$ , nos inspiramos en el lema 3.11. Si por el absurdo se tiene  $\Psi(a) = \Psi(b) = \hat{w}$ , con  $a, b \in \mathcal{P}_0$  distintos, entonces pequeñas curvas  $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b$  alrededor de estos puntos quedarían afectas a

$$\int_{\mathcal{C}_a} \frac{\Psi'(z)}{\Psi(z) - \hat{w}} dz > 0, \quad \int_{\mathcal{C}_b} \frac{\Psi'(z)}{\Psi(z) - \hat{w}} dz > 0.$$

Puesto que  $\Psi$  no es constante, el lema 3.11 llevaría a

$$\int_{\mathcal{C}_a} \frac{(\sigma_{n_k} \circ f^{\circ n_k})'(z)}{\sigma_{n_k} \circ f^{\circ n_k}(z) - \hat{w}} dz > 0, \quad \int_{\mathcal{C}_b} \frac{(\sigma_{n_k} \circ f^{\circ n_k})'(z)}{\sigma_{n_k} \circ f^{\circ n_k}(z) - \hat{w}} dz > 0;$$

lo cual es incorrecto pues al ser  $\sigma_{n_k} \circ f^{\circ n_k}$  inyectiva en  $\mathcal{P}_0$ , a lo mucho una de estas dos integrales es no nula.  $\square$

Por cierto, esta función  $\Psi$  es sobreyectiva. Ello, no obstante, está fuera de nuestras metas. El lector interesado puede hallar una demostración de este importante hecho en el libro de Milnor [5, Teorema 10.7].

## Demás parabólicos

Orientemos lo recién aprendido hacia el estudio de los puntos parabólicos en general. Si el multiplicador de  $f$  en un punto fijo parabólico es una  $k$ -raíz primitiva de la unidad, entonces el correspondiente multiplicador para el iterado  $f^{\circ k}$  vale 1, lo cual nos pone sobre la pista correcta. Sin embargo, se origina un pequeño inconveniente: si bien el punto fijo para  $f^{\circ k}$  admite por lo menos una dirección atrayente, una vez que regresamos a la función original ( $f$  en este caso), esta dirección es rotada por una fracción de círculo una y otra vez (realmente  $k$  veces pues en lo sucesivo se repiten). Así, alrededor de este punto fijo se avizoran al menos  $k$  componentes.

**Proposición 12.37.** *Si el multiplicador de un punto fijo parabólico es una raíz  $k$ -ésima primitiva de la unidad, entonces la cantidad de direcciones atrayentes de  $f^{\circ k}$  es un múltiplo de  $k$ .*

*Prueba.* Sea  $\zeta_k$  el multiplicador de tal punto fijo y  $m$  la cantidad de direcciones atrayentes de  $f^{ok}$ . Dada una dirección atrayente para  $f^{ok}$ , construimos un eje  $\gamma$  tangencial al punto fijo parabólico a lo largo de esta dirección, llamemósla  $v$ . Entonces  $f \circ \gamma$  es una curva invariante que converge al mismo punto fijo y hereda de  $\gamma$  su invarianza bajo  $f^{ok}$ ; esta vez con convergencia tangencial a  $v\zeta_k$ . Se sigue del corolario 12.25 que  $v$  y  $v\zeta_k$  son direcciones atrayentes del pétalo. Con ello  $m$  ha de ser múltiplo de  $k$ .  $\square$

**Ejemplo 12.38.** El polinomio  $f(z) = -z + iz^2 + z^3$  acoge en el origen un punto fijo parabólico de multiplicador igual a  $-1$ . Al iterar, el desarrollo

$$f^{\circ 2}(z) = z + 4z^5 - 6iz^6 + 6z^7 + 3iz^8 + z^9$$

exhibe 4 direcciones atrayentes y 4 repulsivas, fenómeno que no es legible de la inmediata presentación de  $f$ .



FIGURA 14. El barrido de puntos que tras 60 iterados permanecen en una región acotada. El obstáculo para una mayor resolución cerca del parabólico radica en lo parecido que es el cociente  $|f(z)/z|$  a 1.

En el ejemplo anterior los iterados a lo largo de las direcciones repulsivas migran a  $\infty$ . Esto no es una regla.

**Ejercicio 12.39.** La dinámica determinada por el polinomio  $P(z) = z + z^2 - z^3$  tiene un punto fijo doble en  $z = 0$  y uno simple en  $z = 1$ . El multiplicador en 0 es  $\lambda_0 = 1$  y en 1 es  $\lambda_1 = 0$ ; uno es parabólico y el otro, superatractor.

Este detalle puede ser tratado con herramientas de iteración de funciones de variable real: dibuje el gráfico de  $f$  y asegúrese de que por la izquierda el punto fijo parabólico es

atrayente mientras a su derecha, por la dirección repelente, los puntos marchan hacia el punto fijo superatractor.

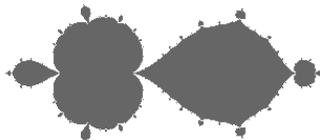


FIGURA 15. *Nada impide que el eje repelente incluso pertenezca al conjunto de Fatou.*

### **El caso parabólico general**

Cuando un punto periódico parabólico no es punto fijo, reemplazamos  $f$  por cierto iterado de  $f$  y reducimos el análisis a lo ya estudiado en este capítulo.

## 13 Densidad de puntos periódicos repelentes en el conjunto de Julia

Respecto a la influencia de los puntos periódicos en el conjunto de Fatou, sabemos que los atractores y los de Siegel se desempeñan en el interior, mientras los parabólicos, no obstante ellos mismos pertenecer al conjunto de Julia, tienen componentes de Fatou asociadas. Nos interesa determinar con qué frecuencia nos toparemos con uno u otro de estos tres tipos de órbita particular.

**Teorema 13.1.** *La dinámica de un polinomio de grado  $d \geq 2$  acepta apenas un número finito de órbitas periódicas cuyo multiplicador es, en norma, menor o igual a 1. En efecto, tal número de órbitas periódicas jamás supera  $3d - 3$ .*

*Prueba.* Sea  $P(z) = z^d + a_{d-2}z^{d-2} + \dots + a_0$  el polinomio en estudio una vez normalizado. A cada punto atractor, superatractor o parabólico con multiplicador de norma 1 asociamos al menos un punto crítico, por lo que suman cuanto mucho  $d - 1$  de ellos. Con ello en mente, consideremos elementos representativos  $q_1, \dots, q_k$  de las distintas órbitas finitas, de periodos mínimos  $n_1, \dots, n_k$ , respectivamente, todos de multiplicador  $\lambda_i$  en norma igual a 1, pero distinto de 1. Para establecer el teorema, acotaremos  $k$  por  $2d - 2$ .

Para tales puntos periódicos se tiene  $P^{n_i}(q_i) - q_i = 0$  y  $(P^{n_i})'(q_i) - 1 \neq 0$ . Si trabajamos con la familia de polinomios  $P_t(z) = z^d + t(a_{d-2}z^{d-2} + \dots + a_0)$ , con  $t \in \mathbb{C}$ , lo anterior significa al escribir  $F(z, t) = P_t^{n_i}(z) - z$  que se cumple

$$F(q_i, 1) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(q_i, 1) \neq 0.$$

Así, el teorema de la función implícita permite despejar  $z$  en función de  $t$  cerca de  $t = 1$ . En pocas palabras, existe una función holomorfa  $q_i(t)$  sujeta a  $q_i(1) = q_i$  que satisface  $F(q_i(t), t) = 0$ . Pero esto indica, ni más ni menos, que  $q_i(t)$  es una órbita de periodo  $n_i$  para el polinomio  $P_t$ . Su multiplicador está, por consiguiente, dado por  $\lambda_i(t) = (P_t^{n_i})'(q_i(t))$ . Afirmamos que esta función  $\lambda_i(t)$  no es localmente constante. Pues bien, el lugar geométrico de los puntos que satisfacen  $F(z, t) = 0$  es, en  $\mathbb{C}^2$ , unión de hipersuperficies irreducibles. En honor al análisis anterior, la superficie a la cual pertenece  $(q_i, 1)$  contiene también a  $(q_i(t), t)$  para  $t$  cercano a 1 y resulta, por dimensión, una hipersuperficie no vertical. En esta hipersuperficie (como en tantas otras), está bien definida la función racional

$$\lambda(z, t) = \frac{\partial F}{\partial z}(z, t) + 1 = (P_t^{n_i})'(z),$$

la misma que representa el multiplicador del punto  $z$  de periodo  $n_i$  bajo  $P_t$ . Si  $\lambda(z, t)$  fuese localmente constante, esta función valdría  $\lambda(q_i, 1) = \lambda_i$  en toda esta componente irreducible. Veamos brevemente por qué esto es imposible. Como la componente es no vertical, admite un punto de la forma  $(z_0, 0)$ . Reconocemos en  $z_0$  un punto de periodo  $n_i$  bajo  $z \mapsto z^d$  que, por consiguiente, tiene multiplicador de norma igual a 0 o  $d^{n_i}$ . De este modo se logra  $|\lambda(z_0, 0)| \neq 1 = |\lambda_i(q_i(1))|$ .

Conocido que el multiplicador no es constante, aplicamos el corolario 13.10 —al final del capítulo— al paquete de funciones  $\lambda_i(t)$  definidas en el párrafo anterior. Si hubiese  $2d - 1$  distintas órbitas finitas de multiplicador en norma igual a 1 pero distinto de 1, entonces cierta pequeña perturbación al parámetro  $t$  convertiría al menos la mitad más uno de ellas (es decir  $d$ ) en atractoras. Esto es imposible pues según el corolario 11.5 un polinomio de grado  $d$  cuenta, a lo sumo, con  $d - 1$  atractores periódicos.  $\square$

En realidad, para un polinomio de grado  $d \geq 2$ , la cota  $3d - 3$  es exagerada ya que el número de tales órbitas nunca excede  $d - 1$ . El establecer esto, empero, está fuera de nuestro control pues se requiere de técnicas avanzadas de “cirugía”. El detalle para nosotros recide en el hecho de que tales órbitas son escasas.

**Nota 13.2.** En el caso racional también se puede establecer vía métodos elementales una cota para el número de estas órbitas periódicas de multiplicador, en norma, menor o igual a 1. La cota “fácil” es esta vez  $6d - 6$ . La idea es similar: se conecta la función racional  $f$  de grado  $d$  en estudio con  $z \mapsto z^d$  a lo largo de una familia de funciones racionales  $f_t$  de variación holomorfa en el parámetro, y se constata que pequeñas deformaciones cerca de  $f$  tornan al menos la mitad de las órbitas indiferentes en atractoras. Los detalles pueden encontrarse en [5, lema 13.2] (o el lector puede atacarlos por su cuenta).

**Corolario 13.3.** *Fijado un polinomio, el número de atractores, superatractores, cuencas parabólicas y discos de Siegel es finito.*

*Prueba.* Ciertamente pues estos están asociados con distintas órbitas de multiplicador, en norma, menor o igual a uno. (Por supuesto, esto es válido también para funciones racionales si se acepta la observación.)  $\square$

**Corolario 13.4.** *Salvo por un número finito de excepciones, todos los puntos periódicos son repelentes.*  $\square$

## Densidad de los puntos periódicos repelentes en el conjunto de Julia

En el capítulo 4 vimos toda una batería de propiedades dinámicas satisfechas al elevar al cuadrado en el círculo unitario. Muchas de estas propiedades son emuladas en cualquier conjunto de Julia. Acá otro ejemplo.

**Proposición 13.5.** *Los puntos periódicos son densos en el conjunto de Julia.*

*Prueba.* Hay que hallar en todo subconjunto abierto del conjunto Julia un punto periódico. El corolario 13.4 legitimizará el resultado.

Sea  $z_0 \in J(P) \cap U$ , donde  $U$  es abierto. Si  $z_0$  es punto fijo, entonces no queda nada por probar. Consideremos  $z_{-1}$  una de las preimágenes de  $z_0$ , a la fuerza distinta de  $z_0$ . De ser necesario recortamos  $U$  para que  $U$  y  $P^{-1}(U)$  sean disjuntos y, aparte, se desentiendan de  $\infty$ . Ahora analicemos la familia

$$\varphi_n(z) = \frac{P^{\circ n}(z) - P(z)}{P^{\circ n}(z) - z},$$

para  $n \geq 2$ , restringida a  $P^{-1}(U)$ . Estas  $P^{\circ n}$  evitan en  $P^{-1}(U)$ , al menos en el caso de la dinámica polinomial, el valor  $\infty$ , y por consiguiente una forma indefinida de la forma  $\infty/\infty$  no aparecerá en la evaluación de  $\varphi_n$ . Tampoco debemos contrariarnos por cocientes tipo  $0/0$  pues ellos nos arrastrarían de inmediato a  $P(z) = P^{\circ n}(z) = z$ , con lo que  $z$  pertenecería a  $U \cap P^{-1}(U) = \emptyset$ .

Analicemos qué valores no asume  $\varphi_n$  ante una potencial ausencia de órbitas periódicas. Si se cumple  $\varphi_n(\hat{z}) = 0$ , entonces el numerador se anula y tendremos  $P^{\circ n}(\hat{z}) - P(\hat{z}) = 0$ ; es decir  $P(\hat{z}) \in U$  sería un punto de periodo  $n - 1$ . Por su parte  $\varphi_n(\hat{z}) = \infty$  indica que el denominador se anula y tendremos  $P^{\circ n}(\hat{z}) - \hat{z} = 0$ ; acá  $\hat{z} \in P^{-1}(U)$  tendrá periodo  $n$  al igual que su imagen  $P(\hat{z}) \in U$ . También, una solución de  $\varphi_n(\hat{z}) = 1$  estará subida de tono pues  $P^{\circ n}(\hat{z}) - P(\hat{z}) = P^{\circ n}(\hat{z}) - \hat{z}$  allana el camino a  $P(\hat{z}) = \hat{z} \in U \cap P^{-1}(U) = \emptyset$ .

Por este motivo, si los puntos periódicos no asomaran por  $U$ , la familia  $\varphi_n$  sería normal en  $P^{-1}(U)$  por evitar  $0, 1, \infty$ . Al despejar

$$P^{\circ n}(z) = \frac{z\varphi_n(z) - P(z)}{\varphi_n(z) - 1} = \frac{z - P(z)/\varphi_n(z)}{1 - 1/\varphi_n(z)},$$

la secuencia de iterados de  $P$  configuraría una familia normal en  $P^{-1}(U)$ , y con ello  $z_{-1}$  pertenecería al conjunto de Fatou; por invarianza, lo mismo sucedería con  $z_0 = P(z_{-1})$ . Esta es la contradicción buscada.  $\square$

**Ejercicio 13.6.** ¿Por dónde se desmorona la prueba anterior cuando  $P$  es una función racional arbitraria de grado mayor o igual a 2 en vez de un polinomio?

La solución al ejercicio la damos de inmediato.

*Prueba alternativa de la proposición 13.5.* Elijamos  $z_0 \in U \cap J(P)$  que no sea valor crítico (recuérdese que los puntos críticos son finitos en número y el conjunto de Julia no acoge puntos aislados), de modo que  $z_0$  tenga dos preimágenes distintas, digamos  $a$  y  $b$ . Al mermar  $U$  aparecen dos ramas bien definidas de la inversa de  $P$ , llamémoslas  $P_a^{-1}, P_b^{-1}$ , con  $P_a^{-1}(z_0) = a, P_b^{-1}(z_0) = b \in J(P)$ , y se puede coordinar para que  $U, P_a^{-1}(U)$  y  $P_b^{-1}(U)$  sean mutuamente disjuntos. Por comodidad, ninguno de estos tres conjuntos debe contener a  $\infty$ , lo cual se arregla vía un cambio de coordenadas. Exhibiremos un punto periódico en uno de los tres conjuntos  $U, P_a^{-1}(U)$  y  $P_b^{-1}(U)$ ; esto forzará el resultado.

Pongamos  $\psi = P_b^{-1} \circ P_a = P_b^{-1} \circ P$  función que viaja de  $P_a^{-1}(U)$  a  $P_b^{-1}(U)$  previa escala en  $U$ . Por construcción  $z, P(z)$  y  $\psi(z)$  son distintos entre sí y diferentes de  $\infty$ . Con estos ajustes definimos

$$\varphi_n(z) = \frac{P^{on}(z) - \psi(z)}{P^{on}(z) - z} \frac{P(z) - z}{P(z) - \psi(z)}$$

en  $P_a^{-1}(U)$ , para  $n \geq 2$ . Nosotros probaremos nuevamente que, sin puntos periódicos por delante, esta familia omite  $0, 1, \infty$ . Una observación preliminar ha lugar. De aparecer  $\infty$  en la evaluación directa de  $\varphi_n$  en  $\hat{z} \in P_a^{-1}(U)$ , provendrá de  $P^{on}(\hat{z}) = \infty$ , y llegaremos a

$$\varphi_n(\hat{z}) = \frac{1 - \psi(\hat{z})/P^{on}(\hat{z})}{1 - \hat{z}/P^{on}(\hat{z})} \frac{P(\hat{z}) - \hat{z}}{P(\hat{z}) - \psi(\hat{z})} = \frac{P(\hat{z}) - \hat{z}}{P(\hat{z}) - \psi(\hat{z})};$$

valor distinto de 0 (pues  $P(\hat{z}) \neq \hat{z}$ ), de 1 (pues  $\psi(\hat{z}) \neq \hat{z}$ ) y de  $\infty$  (pues  $P(\hat{z}) \neq \psi(\hat{z})$ ).

Por lo expuesto, de tenerse  $\varphi_n(\hat{z}) = 0$ , el numerador de  $\varphi_n$  se anulará, y se cumplirá  $P^{on}(\hat{z}) = \psi(\hat{z})$ . Esto bloquea el acceso a  $P^{on}(z) = z$ , y así el denominador no se hará cero. Con ello hemos verificado que  $\varphi_n(\hat{z}) = 0$  equivale a  $P^{on}(\hat{z}) = \psi(\hat{z})$ . Esto, por su parte, implica  $P^{on+1}(\hat{z}) = P(\psi(\hat{z})) = \hat{z}$ , y habremos detectado en  $U$  un punto estático no bien se cumpla  $\varphi_n(\hat{z}) = 0$ .

Ahora, si el denominador de  $\varphi_n$  se hace cero, se tendrá  $P^{on}(\hat{z}) = \hat{z}$ , y nuevamente  $P^{on+1}(\hat{z}) \in U$  será periódico.

Finalmente, cuando  $\varphi_n(\hat{z}) = 1$ , numerador y denominador son finitos, lo que nos permite igualar

$$(P^{on}(\hat{z}) - \psi(\hat{z}))(P(\hat{z}) - \hat{z}) = (P^{on}(\hat{z}) - \hat{z})(P(\hat{z}) - \psi(\hat{z}));$$

ecuación equivalente a

$$[\hat{z} - \psi(\hat{z})][P^{\circ n}(\hat{z}) - P(\hat{z})] = 0.$$

Acá el factor  $\hat{z} - \psi(\hat{z})$  es no nulo, con lo cual  $P(\hat{z}) \in U$  será un punto de periodo  $n - 1$ .

De insistir en que  $U$  no arrastre consigo puntos periódicos, desembocaremos pronto en un callejón sin salida. En tal caso la familia  $\varphi_n$  omitirá  $0, 1, \infty$  en  $P_a^{-1}(U)$ , y conformará una familia normal. Al igual que en la primera demostración, despejamos

$$P^{\circ n}(z) = \frac{\psi(z) - z \frac{P(z) - \psi(z)}{P(z) - z} \varphi_n(z)}{1 - \frac{P(z) - \psi(z)}{P(z) - z} \varphi_n(z)},$$

y exhibimos a los iterados de  $P$  cual familia normal. Esto riñe con la pertenencia de  $a$  al conjunto de Julia. □

Ahora fácilmente eclipsamos al corolario 9.7.

**Corolario 13.7.** *Si  $U$  es un abierto que se interseca con  $J(P)$ , entonces existe  $m_0$  para el cual se tiene*

$$J(P) = P^{\circ m_0}(U).$$

*Prueba.* Sea  $z_0$  un punto periódico repelente en  $U$ , digamos de orden  $k$ , elección cimentada en la proposición 13.5. Pongamos  $Q = P^{\circ k}$ , y beneficiémonos de la linealización de  $P$  cerca de  $z_0$  (ver por ejemplo corolario 11.3) para encontrar un abierto  $V \subset U$  en donde se tenga  $V \subset Q(V)$ . Ello implica la cadena de inclusiones

$$V \subset Q(V) \subset \dots \subset Q^{\circ n}(V) \subset Q^{\circ n}(U) = P^{\circ kn}(U).$$

Ahora, el corolario 9.7 indica que se cumple

$$J(P) = J(P^{\circ k}) = J(Q) \subset V \cup Q(V) \cup \dots \cup Q^{\circ n_0}(V)$$

para cierto  $n_0$ . Sin embargo, como los iterados de  $V$  bajo  $Q$  vienen encajados, el más antiguo absorbe todo, y obtenemos

$$J(P) = J(Q) \subset Q^{\circ n_0}(V) \subset Q^{\circ n_0}(U) = P^{\circ kn_0}(U).$$

□

## Casi medio círculo

Acá trataremos con el resultado utilitario invocado en la prueba del teorema 13.1. Para ello necesitamos de ciertos preparativos.

**Lema 13.8.** *Sea  $\varphi$  analítica y sujeta a  $\varphi(0) = 0$ . Si  $\varphi$  no es constante, entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe un radio  $R > 0$  para el cual el conjunto*

$$\{\theta \in [0, 2\pi] : \operatorname{im} \varphi(re^{i\theta}) > 0 \text{ para todo } r < R\}$$

*tiene medida de Lebesgue al menos  $\pi - \epsilon$ .*

*Prueba.* Una vez que escribimos

$$\varphi(z) = z^m(a_m + a_{m+1}z + \dots),$$

con  $a_m \neq 0$ , el resultado es inminente pues en la igualdad

$$\arg(\varphi(z)) = m \arg(z) + \arg(a_m + a_{m+1}z + \dots)$$

el argumento de  $a_m + a_{m+1}z + \dots$  es prácticamente constante.  $\square$

**Corolario 13.9.** *Sea  $\psi$  analítica y sujeta a  $\psi(0) \neq 0$ . Si  $\psi$  no es constante, entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe un radio  $R > 0$  para el cual el conjunto*

$$\{\theta \in [0, 2\pi] : |\psi(re^{i\theta})| < |\psi(0)| \text{ para todo } r < R\}$$

*tiene medida al menos  $\pi - \epsilon$ .*

*Prueba.* Esta  $\psi$  y la  $\varphi$  del lema anterior se correlacionan mediante  $\psi(z) = \psi(0)e^{i\varphi(z)}$ .  $\square$

**Corolario 13.10.** *Sean  $\psi_1, \dots, \psi_{2n+1}$  funciones analíticas no constantes que satisfacen  $|\psi_1(0)|, \dots, |\psi_{2n+1}(0)| = 1$ . Entonces existe  $\theta$  y  $R > 0$  tal que para todo  $r \leq R$  al menos  $n + 1$  entre los valores  $|\psi_1(re^{i\theta})|, \dots, |\psi_{2n+1}(re^{i\theta})|$  son estrictamente menores que 1.*

*Prueba.* Para  $k = 1, \dots, 2n + 1$ , y  $R > 0$  definimos la función medible

$$\chi_k(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\psi_k(r\theta)| < 1 \text{ para todo } r \leq R, \\ 0 & \text{por defecto.} \end{cases}$$

En este lenguaje comprobaremos la existencia de  $\theta$  sujeto a  $\sum_{k=1}^{2n+1} \chi_k(\theta) \geq n + 1$ .

Cuando se satisface  $|\psi_k(0)| = 1$ , el corolario anterior asegura que, dado  $\epsilon > 0$ , podemos tomar  $R$  suficientemente pequeño a fin de obtener  $\int_0^{2\pi} \chi_k(\theta) d\theta \geq \pi - \epsilon$ . En consecuencia, con la previsión de escoger  $\epsilon < \pi/(2n + 1)$ , tras aminorar el radio  $R$  de ser menester, logramos

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \int_0^{2\pi} \chi_k(\theta) d\theta \geq (2n + 1)(\pi - \epsilon) > 2\pi n.$$

Como el espacio de integración mide  $2\pi$  y la función  $\sum_{k=1}^{2n+1} \chi_k$  es no negativa, existirá  $\theta$  que obedece  $\sum_{k=1}^{2n+1} \chi_k(\theta) > n$ . Pero al ser este valor un entero mayor que  $n$ , forzosamente vale al menos  $n + 1$ . □



## 14 Productos de Blaschke

En esta sección estudiamos los sistemas dinámicos en  $\mathbb{D}$ , pero solo aquellos de grado bien definido. Gracias al teorema de uniformización, esto influirá en la dinámica de las componentes periódicas simplemente conexas, en especial las polinomiales. Articularemos técnicas generales con otras adaptadas a la coyuntura.

**Ejemplo 14.1** (Automorfismos de  $\mathbb{D}$ ). Cuando se tiene  $\alpha \in \mathbb{D}$ , la transformación

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

es un automorfismo de  $\mathbb{D}$ , y por consiguiente determina una función de grado 1 en  $\mathbb{D}$ . Efectivamente, el lema 1.26 establece que toda función de grado 1 del disco (es decir, todo automorfismo de  $\mathbb{D}$ ) cobra cuerpo en  $z \mapsto \lambda \varphi_\alpha(z)$ , con  $\alpha \in \mathbb{D}$  y  $|\lambda| = 1$ .

**Ejercicio 14.2.** Muestre que la derivada de  $\varphi_\alpha$  está dada por

$$\varphi_\alpha'(z) = \frac{1 - |\alpha|^2}{(1 - \bar{\alpha}z)^2} = \frac{1 - |\alpha|^2}{(z - \alpha)(1 - \bar{\alpha}z)} \varphi_\alpha(z).$$

**Ejemplo 14.3** (Productos de Blaschke). Dados  $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{D}$  y  $\lambda \in \mathbb{T}$ , la función racional

$$B_{\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_d}(z) = \lambda \varphi_{\alpha_1}(z) \cdots \varphi_{\alpha_d}(z) = \lambda \frac{z - \alpha_1}{1 - \bar{\alpha}_1 z} \cdots \frac{z - \alpha_d}{1 - \bar{\alpha}_d z},$$

de grado  $d$ , es llamada un **producto de Blaschke**.

Este producto hereda de sus  $d$  factores no constantes una peculiaridad: como  $|z| < 1$  implica  $|\varphi_{\alpha_i}(z)| < 1$ , al multiplicar todos los factores obtenemos

$$|B_{\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_d}(z)| = |\lambda| |\varphi_{\alpha_1}(z)| \cdots |\varphi_{\alpha_d}(z)| < 1.$$

El mismo razonamiento muestra que  $|z| = 1$  lleva a  $|B_{\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_d}(z)| = 1$  y  $|z| > 1$ , a  $|B_{\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_d}(z)| > 1$ . En consecuencia,  $\hat{\mathbb{C}}$  se reparte en tres conjuntos totalmente invariantes: el disco  $\mathbb{D}$ , su borde  $\mathbb{T}$  y  $\mathbb{D}_\infty$ , el exterior de la bola unitaria cerrada. Concluimos de inmediato que la acción de  $B_{\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_d}$  en  $\mathbb{D}$  es también de grado  $d$ .

Bajo la supervisión del teorema 2.9 el concepto de función propia y el de tener un grado finito bien definido son, en principio, intercambiables. Gracias a ello, disponemos de cierto margen de maniobrabilidad cuando operamos con ellas.

**Lema 14.4.** *El producto de dos funciones propias del disco es una función propia.*

*Prueba.* Sean  $\varphi, \psi$  las funciones propias. Para toda secuencia  $z_k \in \mathbb{D}$  que tienda a  $\partial_{\mathbb{D}}$ , el producto  $|\varphi(z_k)| |\psi(z_k)| = |\varphi(z_k)\psi(z_k)|$  tiende al producto de los límites, es decir a 1 según el ejercicio 2.2. El resultado se sigue de una segunda aplicación del ejercicio 2.2.  $\square$

**Corolario 14.5.** *Los productos de Blaschke son funciones propias de  $\mathbb{D}$ .*  $\square$

La conclusión del lema es hasta cierto punto un fenómeno fortuito: depende del hecho de que el producto de dos funciones con valores en  $\mathbb{D}$  toma valores nuevamente en  $\mathbb{D}$ .

**Ejemplo 14.6.** La función  $\psi(z) = z$  lleva  $\mathbb{H}$  en sí mismo, más la imagen de  $\mathbb{H}$  bajo  $\psi^2$  no está contenida en el semiplano superior.

Poniendo juntos ciertos detalles obtenemos el siguiente resultado.

**Proposición 14.7.** *Supongamos que para funciones holomorfas no constantes definidas entre  $\mathbb{D}$  y  $\mathbb{C}$  se tenga*

$$\varphi(z) = \psi_1(z)\psi_2(z).$$

*Si dos de estas son funciones propias de  $\mathbb{D}$  en  $\mathbb{D}$ , entonces la tercera también lo es. En este caso se tiene además que el grado de  $\varphi$  es la suma de los grados de  $\psi_1$  y  $\psi_2$ .*

*Prueba.* Si  $\psi_1, \psi_2$  son funciones propias de  $\mathbb{D}$  en sí mismo, por lema 14.4  $\varphi$  es propia. De ser así, la cantidad de soluciones de  $\varphi(z) = 0$  es la suma de la cantidad de soluciones de  $\psi_1(z) = 0$  y de  $\psi_2(z) = 0$ ; es decir, el grado de  $\varphi$  resulta ser la suma de los grados de  $\psi_1$  y de  $\psi_2$ . Esto zanja para siempre la discusión del grado.

Sean  $\varphi$  y  $\psi_1$  funciones propias de  $\mathbb{D}$ . La continuación nos recuerda la prueba del lema de Schwarz. Debemos establecer que  $\varphi_2$  toma valores exclusivamente en  $\mathbb{D}$ , y recién después delucidar si es propia o no.

Según el ejercicio 2.4, para cada  $\epsilon > 0$  cercano a 0 existe un  $r < 1$  para el cual la condición  $|z| \geq r$  implica  $|\psi_1(z)| \geq 1 - \epsilon$ . En especial,  $\psi_1(z)$  no se anula cuando  $|z| \geq r$ , y podemos dividir entre  $\psi_1$ . De este modo, para  $r \leq |z| < 1$  se cumple

$$|\psi_2(z)| = \frac{|\varphi(z)|}{|\psi_1(z)|} \leq \frac{1}{|\psi_1(z)|} \leq \frac{1}{1 - \epsilon}.$$

Si aplicamos el principio del módulo máximo, la misma cota seguirá activa incluso para  $|z| \leq r$ . De este modo hemos establecido que para todo  $\epsilon > 0$  se satisface

$$|\psi_2(z)| \leq \frac{1}{1 - \epsilon}.$$

Al hacer tender  $\epsilon$  a 0 obtenemos  $|\psi_2(z)| \leq 1$ . Sin embargo, por hipótesis  $\psi_2$  no es constante, y una nueva aplicación del principio de módulo máximo lleva a deducir que se cumple  $|\psi_2(z)| < 1$ .

Como  $\psi_2$  se puede escribir como el cociente de  $\varphi$  entre  $\psi_1$  cerca de  $\partial\mathbb{D}$ , que  $\psi_2$  sea propia se infiere al manipular una secuencia  $z_n \rightarrow \partial\mathbb{D}$ . □

El teorema 2.9 señala que los conceptos de funciones propias y funciones con un grado finito bien definido son permutables en  $\mathbb{D}$ . Por otro lado, la proposición 14.7 pertrecha el mecanismo para factorizar este tipo de funciones. Con esto en mano, ya estamos expeditos para caracterizar las funciones de  $\mathbb{D}$  en sí mismo de grado finito bien definido.

**Teorema 14.8.** *Toda función de grado  $d$  en el disco unitario es un producto de Blaschke. Cada función se construye como el producto de  $d$  automorfismos de  $\mathbb{D}$ .*

*Prueba.* En el ejemplo 14.1 se deja constancia de la validez de este resultado para grado 1. El caso general es una fácil inducción toda vez que ya contamos con la tecnología adecuada. Supongamos entonces válido el resultado hasta grado  $d$ .

Si  $\varphi$  tiene grado  $d + 1 \geq 2$ , tomamos como  $\alpha \in \mathbb{D}$  una de las preimágenes de 0 bajo  $\varphi$  (y la hipótesis suministra al menos dos). En este caso  $\psi(z) = \varphi(z)(1 - \bar{\alpha}z)/(z - \alpha)$  será una función holomorfa en todo  $\mathbb{D}$ , no constante además, pues tiene un número finito de ceros. Al reescribir esto como

$$\varphi(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \psi(z),$$

la proposición 14.7 descubre en  $\psi$  una función de grado  $d + 1 - 1$  en  $\mathbb{D}$ , es decir, un producto de Blaschke con  $d$  factores. □

Como hemos resuelto iterar también los productos de Blaschke, dejemos sentado que la composición de dos productos de Blaschke es un producto de Blaschke.

**Ejercicio 14.9.** Demuestre que la composición de un producto de Blaschke de grado  $d_1$  con un producto de Blaschke de grado  $d_2$  es un producto de Blaschke de grado  $d_1 d_2$ .

Si bien estamos estudiando la conducta de un producto de Blaschke en  $\mathbb{D}$ , este se extiende de manera automática a todo  $\hat{\mathbb{C}}$ . Nosotros queremos aprovechar esta característica inusitada; en particular, en lo que concierne a relaciones de simetría.

**Lema 14.10.** *Si  $B$  es un producto de Blaschke, entonces se tiene*

$$B(1/\bar{z}) = 1/\overline{B(z)}.$$

*Prueba.* Para  $\alpha \in \mathbb{D}$  se cumple trivialmente

$$\varphi_\alpha(1/\bar{z}) = \frac{1/\bar{z} - \alpha}{1 - \bar{\alpha}/\bar{z}} = \frac{1 - \alpha\bar{z}}{\bar{z} - \bar{\alpha}} = 1/\overline{\varphi_\alpha(z)}.$$

Al expandir  $B(z) = \lambda\varphi_{\alpha_1}(z) \cdots \varphi_{\alpha_d}(z)$  el resultado se sigue de lo anterior tan pronto recordamos que  $|\lambda| = 1$  implica  $\lambda = 1/\bar{\lambda}$ .  $\square$

Toda función racional de grado  $d$  tiene  $2d-2$  puntos críticos y  $d+1$  puntos fijos contados con multiplicidad. En este aspecto la simetría hace sentir su presencia. Por ejemplo, *si  $a$  es un punto fijo de  $B$ , entonces  $1/\bar{a}$  también lo es*, esto no trasciende un cálculo directo. Algo similar ocurre con los puntos críticos aunque esta vez haya que hilar más fino. *Si  $z_0$  es un punto crítico de  $B$ , entonces  $1/\bar{z}_0$  es un punto crítico de  $B$  de la misma multiplicidad*. Acá un argumento topológico es lo idóneo: la simetría implica que cuando  $B$  es  $k$  a 1 cerca de  $z_0$  entonces  $B$  es  $k$  a 1 cerca de  $1/\bar{z}_0$ .

Esta observación indica que los puntos fijos y puntos críticos fuera de  $\mathbb{T}$  aparecen por parejas; pero no dice nada concreto acerca de cómo se comportan tales puntos sobre  $\mathbb{T}$ . Sin embargo, como consecuencia tangencial del lema de Schwarz (ver corolario 1.28) un producto de Blaschke con dos puntos fijos en  $\mathbb{D}$  es la identidad. En compensación, veremos en un instante que los puntos críticos de  $B$  deben buscarse fuera del círculo unitario.

**Lema 14.11.** *Un producto de Blaschke de grado  $d$  tiene  $d-1$  puntos críticos en  $\mathbb{D}$ .*

*Prueba.* Solamente estamos colocando al lema 2.18 en contexto.  $\square$

**Corolario 14.12.** *Un producto de Blaschke no tiene puntos críticos en  $\mathbb{T}$ .*

*Prueba.* Como  $d-1$  puntos críticos se ubican en  $\mathbb{D}$ , los restantes  $d-1$ , en reciprocidad, se encuentran pasando  $\mathbb{T}$ .  $\square$

Si un producto de Blaschke de grado al menos 2 acoge un punto estable al interior de  $\mathbb{D}$ , podemos, mediante un automorfismo, reubicarlo en el origen y concluir, por el lema de Schwarz, que su multiplicador es en norma menor que 1; es decir, este punto es atractor y succiona todo  $\mathbb{D}$ . Por reacción  $\infty$  atrae todo lo ubicado fuera del círculo unitario. Sabido entonces que los puntos fijos interiores (o exteriores) son predecibles dinámicamente hablando, cabe indagar cuán complicados pueden ser los puntos periódicos en  $\mathbb{T}$ . Parte de esta interrogante puede responderse en toda generalidad.

**Lema 14.13.** *La derivada del producto de Blaschke  $B(z) = \lambda\varphi_{\alpha_1}(z) \dots \varphi_{\alpha_d}(z)$  está dada por*

$$B'(z) = \left( \sum \frac{1 - |\alpha_i|^2}{(z - \alpha_i)(1 - \bar{\alpha}_i z)} \right) B(z).$$

*Prueba.* Esto es la confluencia del ejercicio 14.2 y la regla del producto para derivadas.  $\square$

**Corolario 14.14.** *En un producto de Blaschke el multiplicador de toda órbita periódica ubicada sobre  $\mathbb{T}$  es un número real positivo.*

*Prueba.* Como los sucesivos iterados de un producto de Blaschke son productos de Blaschke, vale constatar lo afirmado en exclusiva para puntos fijos.

Cuando  $\hat{z}$  satisface  $B(\hat{z}) = \hat{z}$  y  $|\hat{z}| = 1$ , entonces cada sumando

$$\frac{B(\hat{z})(1 - |\alpha_i|^2)}{(\hat{z} - \alpha_i)(1 - \bar{\alpha}_i \hat{z})} = \frac{1 - |\alpha_i|^2}{|1 - \bar{\alpha}_i \hat{z}|^2}$$

de  $B'(\hat{z})$  resulta real y positivo (revisar también la prueba del lema 1.24); de ahí se sigue el resultado.  $\square$

**Ejercicio 14.15.** Demuestre que un producto de Blaschke no admite puntos periódicos superatractores en  $\mathbb{T}$ .

A partir de ahora hasta el final de este capítulo pensaremos en los productos de Blaschke de grado dos o más como funciones ligadas a un sistema dinámico racional.

**Proposición 14.16.** *Para todo producto de Blaschke los discos  $\mathbb{D}$  y  $\mathbb{D}_\infty$  pertenecen al conjunto de Fatou. Equivalentemente, el conjunto de Julia es un subconjunto de  $\mathbb{T}$ .*

*Si el conjunto de Julia es conexo, entonces coincide con  $\mathbb{T}$ ; de esta suerte el conjunto de Fatou  $F(B)$  consta exacto de dos componentes:  $\mathbb{D}$  y  $\mathbb{D}_\infty$ . En caso contrario, el conjunto de Fatou tiene una única componente.*

*Prueba.* Los conjuntos  $\mathbb{D}, \mathbb{D}_\infty$  son totalmente invariantes bajo  $B$  y omiten  $\mathbb{T}$ , por lo que pertenecen al conjunto de Fatou  $F(B)$ .

Queda por argumentar por qué cuando  $J(B)$  es conexo debe coincidir con  $\mathbb{T}$ . De no ser tal la situación,  $J(B)$  será homeomorfo a un intervalo compacto con exactamente dos puntos terminales, digamos  $a, b$ . Por hipótesis aparece un  $w$  en  $\mathbb{T} \cap F(B)$  —el cual no puede pertenecer a una órbita excepcional dado que no es crítico—. Tal como están dispuestos los conjuntos, para cualquier  $z \in J(B) - \{a, b\}$ , existe una vecindad  $V$  cuya intersección con  $F(B) \cap \mathbb{T}$  es nula. Esto es incorrecto pues, por el corolario 9.7, en  $V$  es posible encontrar una preimagen de  $w$ , la cual obligatoriamente, por invarianza, pertenece a  $F(B) \cap \mathbb{T}$ .  $\square$

**Ejemplo 14.17.** Lo de trabajar en  $\mathbb{D}$  tampoco es una obligación: es factible trasladar los acontecimientos a  $\mathbb{H}$ . En primer lugar, notemos que tanto  $z$ , la identidad, como  $z/(z+1)$  son automorfismos de  $\mathbb{H}$ . Por tal motivo su suma  $z(z+2)/(z+1)$  determina una función de grado 2 tanto en  $\mathbb{H}$ , su reflejo  $\overline{\mathbb{H}}$ , como en la recta real extendida  $\hat{\mathbb{R}}$ . Lo mismo ocurre para sus múltiplos  $\sigma_\alpha(z) = \alpha z(z+2)/(z+1)$ , siempre y cuando  $\alpha$  sea real y positivo. Esta familia goza de algunos atributos conjuntos: los puntos críticos están situados en  $-1 \pm i$ ; el punto fijo en 0 tiene multiplicador  $2\alpha$ ; el punto fijo en  $\infty$  tiene multiplicador  $1/\alpha$ .

Cuando  $\alpha$  es positivo y pequeño, por ejemplo igual a  $1/4$ , la función  $\sigma_\alpha$  tiene un punto fijo atractor en 0. De este modo 0 pertenece a la intersección de  $\hat{\mathbb{R}}$  con el conjunto de Fatou  $F(\sigma_\alpha)$ .

Para  $\alpha = 1/2$  el multiplicador vale 1, y estamos ante un punto fijo parabólico. ¿De qué orden? Esto es fácil de discernir: una función racional de grado 2 tiene exactamente tres puntos fijos contados con multiplicidad. Como en  $\infty$  hay uno, en 0 se acepta máximo un punto fijo doble, y en definitiva doble pues es múltiple. Esto significa —por equilibrio elemental— que las direcciones atrayentes y repulsoras se acomodan en  $\mathbb{R}$ , eje sobre el cual todo es simétrico. En efecto, la expansión local está dada por

$$\sigma_{1/2}(z) = \frac{z(2+z)}{2(1+z)} = \frac{2z+z^2}{2} (1 - z + z^2 + \dots) = z - \frac{1}{2}z^2 + \dots$$

Acá aparece una única cuenca.

En ningún caso (ni siquiera en  $\mathbb{D}$ ) un producto de Blaschke admite puntos periódicos “patológicos”, entiéndase estos como aquellos de multiplicador unitario distinto de 1.

**Proposición 14.18.** *Si un producto de Blaschke de grado al menos 2 admite un punto fijo interior, entonces todos los puntos periódicos de la frontera son repulsores.*

*Prueba.* Si el producto de Blaschke admite un punto fijo interior entonces, por el lema de Schwarz, este es atractor. Existe otro atractor fuera de  $\mathbb{D}$  para equilibrar, y así se originan dos cuencas distintas. De acuerdo con la proposición 14.16, el conjunto de Julia es todo  $\mathbb{T}$ . La frontera por consiguiente no se da abasto para nuevos puntos atractores o parabólicos. Al ser todos los multiplicadores de órbitas periódicas en la frontera números reales positivos, han de ser mayores que 1; repulsores.  $\square$

**Ejercicio 14.19.** En la proposición 14.8 reubique el punto atractor en 0 y, tras una rotación, el punto periódico en observación en  $z = 1$ . Utilice la fórmula del lema 14.13 para deducir directamente que el multiplicador de este último es mayor que 1.

La consigna inmediata es establecer que todo producto de Blaschke tiene un punto fijo atractor o en su defecto un punto fijo parabólico. Para esto, es bueno parametrizar los elementos de  $\mathbb{T}$  por su argumento.

Para mayor comodidad, notamos que  $B$  siempre admite un punto fijo en  $\mathbb{T}$ : esto es solo cuestión de contar. Si el grado  $d$  es al menos 2, hay  $d + 1$  puntos fijos. De haber uno al interior de  $\mathbb{D}$ , este no será parabólico y aportará una unidad al conteo total. Lo mismo vale en  $\mathbb{D}_\infty$ . Es decir, de los  $d + 1$  puntos, tenemos conocimiento del paradero de dos, los restantes  $d - 1 > 0$  estarán ubicados en  $\mathbb{T}$ . Cuando no hay puntos fijos al interior de  $\mathbb{D}$ , todos los puntos fijos están ya apostados sobre  $\mathbb{T}$ .

En resumen, como hay un punto fijo en  $\mathbb{T}$ , lo reubicamos en  $\hat{z} = 1$  por medio de una rotación. Así, para efectos dinámicos, siempre se puede asumir que  $z = 1$  es llevado en  $z = 1$ . Mientras tanto, ¿qué ocurre con los otros?

Para satisfacer nuestra curiosidad, volcamos todo a coordenadas polares. El iterado de  $z_0 = e^{2\pi i\theta_0}$  será  $z_1 = e^{2\pi i\theta_1} = B(e^{2\pi i\theta_0})$ . Esto puede entenderse mejor como

$$\theta_1 = v(\theta_0) = \frac{1}{2\pi i} \ln B(e^{2\pi i\theta_0}) \quad (\text{módulo } 1).$$

Si bien la ambigüedad inherente a la rama del logaritmo se diluye al obviar la parte entera de  $v(\theta)$ , desaparece por completo al considerar la derivada de  $v$ .

**Lema 14.20.** Para el producto de Blaschke  $B(z) = \lambda \varphi_{\alpha_1}(z) \dots \varphi_{\alpha_d}(z)$ , la derivada de  $v(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \ln B(e^{2\pi i \theta})$  cuando  $z = e^{2\pi i \theta}$  viene dada por

$$v'(\theta) = \frac{zB'(z)}{B(z)}$$

o lo que es lo mismo, por

$$\sum \frac{1 - |\alpha_i|^2}{|1 - \bar{\alpha}_i e^{2\pi i \theta}|^2} = \sum \frac{1 - |\alpha_i|^2}{|1 - \bar{\alpha}_i z|^2}.$$

*Prueba.* Por la regla de la cadena, la derivada vale

$$v'(\theta) = \frac{2\pi i e^{2\pi i \theta}}{2\pi i} \frac{B'(e^{2\pi i \theta})}{B(e^{2\pi i \theta})} = \frac{zB'(z)}{B(z)}.$$

Cancelamos constantes y revertimos a la variable  $z$  para, con el refuerzo del lema 14.13, obtener

$$v'(\theta) = \sum \frac{z(1 - |\alpha_i|^2)}{(z - \alpha_i)(1 - \bar{\alpha}_i z)} = \sum \frac{\bar{z}z(1 - |\alpha_i|^2)}{(\bar{z}z - \alpha_i \bar{z})(1 - \bar{\alpha}_i z)}.$$

El resto es cuestión de recordar que  $|z| = 1$  equivale a  $z\bar{z} = 1$ . □

**Proposición 14.21.** Existe una función biyectiva  $v : [0, 1] \rightarrow [0, d]$  de derivada positiva para la cual se tiene  $e^{2\pi i v(\theta)} = B(e^{2\pi i \theta})$ .

*Prueba.* Una función diferenciable  $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  sujeta a  $v(0) = 0$  para la cual se tiene  $e^{2\pi i v(\theta)} = B(e^{2\pi i \theta})$  se define mediante la fórmula

$$v(\theta) = \int_0^\theta \sum \frac{1 - |\alpha_i|^2}{|1 - \bar{\alpha}_i z|^2} d\theta = \int_0^\theta v'(\theta) d\theta,$$

donde  $z = e^{2\pi i \theta}$ . Como la norma de  $\bar{\alpha}_i z$  coincide con la norma de  $\alpha_i$ , la cual a su vez es menor que 1, los sumandos involucrados están adecuadamente definidos y son positivos. Por su parte,  $e^{2\pi i v(0)}$  y  $e^{2\pi i v(1)}$  representan el mismo número complejo, lo cual evidencia que  $v(1) - v(0)$  debe ser un entero positivo. Este número ha de valer exactamente  $d$  a fin de que  $B$  sea  $d$  a 1 sobre el círculo unitario. La sobreyectividad de  $v : [0, 1] \rightarrow [0, d]$  es consecuencia del teorema del valor intermedio. □

**Lema 14.22.** Si los puntos fijos de  $B$  sobre  $\mathbb{T}$  son todos repelentes, entonces hay  $d - 1$  en total.

*Prueba.* Haremos uso de la función  $v$  del lema anterior. Cuando  $z = e^{2\pi i\theta}$  es punto fijo de  $B$ , la igualdad  $B(z) = z = e^{2\pi i\theta} = e^{2\pi i v(\theta)}$  tiene dos consecuencias. En una mano se tiene  $v(\theta) = \theta + k$  para cierto  $k \in \{0, 1, \dots, d\}$ , y en la otra,  $v'(\theta) = B'(z)$ , esto último en uso del lema 14.20, ya que se cumple  $B(z) = z$ .

Definimos  $d$  “diagonales”

$$\Delta_i = \{(\theta, \theta + i) : \theta \in [0, 1]\},$$

para  $i = 0, \dots, d - 1$ . También subdividimos el rectángulo  $[0, 1] \times [0, d]$  en  $d + 1$  regiones cerradas mediante

$$\mathcal{R}_k = \{(\theta, y) \in [0, 1] \times [0, d] : \theta + k - 1 \leq y \leq \theta + k\},$$

para  $k = 0, \dots, d$ . La relevancia de estas regiones se aprecia en el cruce de  $\mathcal{R}_i$  a  $\mathcal{R}_{i+1}$  pues este se realiza atravesando  $\Delta_i$ . Es decir, para la función  $v$ , sus puntos fijos habilitan el paso de una región a otra. Esto ya demuestra una fracción del lema: son al menos  $d - 1$  los puntos fijos puesto que el camino entre  $(0, 0) \in \Delta_0$  y  $(1, d) \in \Delta_{d-1}$  debe cortar  $\Delta_1, \dots, \Delta_{d-2}$ : entre estos  $d$  “puntos fijos” hay precisamente una repetición dado que el punto fijo de argumento 0 y aquel de argumento 1 son el mismo punto fijo de  $B$ , ya asumido en  $z = 1$ .

Debemos mostrar que ellos son todos. Notemos antes que si se cumple  $v(\hat{\theta}) = \hat{\theta} + k$ , entonces cerca de  $\hat{\theta}$  se tiene  $v(\theta) < \theta + k$  para  $\theta < \hat{\theta}$  y,  $\theta + k < v(\theta)$  para  $\hat{\theta} < \theta$ . En efecto, por la continuidad de  $v'$  (recuérdese que  $B$  es analítica) cerca del “punto fijo” repulsor  $\hat{\theta}$  se tiene  $v'(\theta) > 1$ . Y con ello para  $\theta < \hat{\theta}$  se satisfará

$$\hat{\theta} + k - v(\theta) = v(\hat{\theta}) - v(\theta) = \int_{\theta}^{\hat{\theta}} v'(\tau) d\tau > \int_{\theta}^{\hat{\theta}} d\tau = \hat{\theta} - \theta,$$

de donde se concluye lo afirmado. Idéntica rutina conduce a  $v(\theta) < \theta + k$  para  $\theta < \hat{\theta}$ . De aquí es trivial concluir que la transición de  $\mathcal{R}_i$  a  $\mathcal{R}_{i+1}$  es transversal e irreversible.  $\square$

Podemos sintetizar los hallazgos de este capítulo en un único resultado.

**Teorema 14.23.** *Todo producto de Blaschke tiene un punto fijo atractor o uno parabólico.*

*Cuando tiene un punto fijo atractor, se abren dos posibilidades. Si el punto fijo se ubica en  $\mathbb{D}$ , entonces existe un segundo punto fijo atractor en  $\mathbb{D}_{\infty}$ , el conjunto de Julia es  $\mathbb{T}$  y el resto de puntos periódicos son repulsores. Si el punto fijo atractor está sobre  $\mathbb{T}$ , entonces el conjunto de Julia es un subconjunto disconexo de  $\mathbb{T}$  y el resto de puntos periódicos son repulsores.*

*Cuando tiene un punto fijo parabólico, este siempre se encuentra sobre  $\mathbb{T}$ , y surge una dicotomía. Si el punto fijo es triple, entonces los dos discos complementarios a  $\mathbb{T}$  son cuencas parabólicas una distinta de la otra, el conjunto de Julia es  $\mathbb{T}$  y el resto de puntos periódicos son repulsores. Mientras que si el punto parabólico fijo es doble, entonces el conjunto de Fatou consta de una única cuenca parabólica, el conjunto de Julia es un subconjunto disconexo de  $\mathbb{T}$  y el resto de puntos periódicos son repulsores.*

*Prueba.* Si  $B$  tiene puntos fijos en  $\mathbb{D}$ , entonces estos son atractores. Si  $B$  no cuenta con puntos fijos atractores, todos los puntos fijos están en  $\mathbb{T}$ . Pero  $B$  tiene  $d + 1$  puntos fijos contados con multiplicidad, y el lema 14.22 exige que al menos uno sea parabólico. El resto ha sido explicado a lo largo del capítulo.  $\square$

**Ejercicio 14.24.** Supongamos que un producto de Blashke no tenga un punto fijo atractor dentro de  $\mathbb{D}$ . Demuestre que existe una curva  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{D}$  invariante (en el sentido que cumple  $\gamma(t + 1) = B(\gamma(t))$ ) cuyo límite en  $t = \infty$  es un punto fijo ubicado en  $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ .

## 15 Componentes periódicas simplemente conexas

Como el título del capítulo sugiere, toca tratar la dinámica de las componentes de Fatou periódicas. Iniciamos el proceso con una situación inmejorable: la proposición 5.11 y el lema 6.6 reducen nuestro estudio a componentes invariantes.

Cuando  $f : U \rightarrow U$  es una función propia en un espacio hiperbólico simplemente conexo, tenemos en los productos de Blaschke un estereotipo. Si nos restringimos a  $\mathbb{D}$  hay dos tipos de productos de Blaschke: aquellos sin puntos críticos (los automorfismos) y los recubrimientos de grado  $d$  con  $d - 1$  puntos de ramificación.

Los automorfismos se subdividen en tres tipos: los de orden finito, aquellos con un punto fijo elíptico “irracional” y aquellos con un punto fijo en la frontera que arrastra hacia sí a todo el disco. El primer grupo queda eliminado de cuajo como modelo de  $f : U \rightarrow U$  pues  $f^{on}(z) = z$  en  $U$  implicaría por el teorema 1.12 que  $f^{on}$  es la identidad en todo  $\hat{\mathbb{C}}$ , lo cual no es posible. El segundo paquete, el de rotaciones de orden infinito, está asociado con los discos de Siegel. El tercer caso —también irrealizable pero al que recién renunciaremos después de un largo rodeo— corresponde a la situación cuando todo el disco converge normalmente a un punto fijo en la frontera.

Cuando  $f$  es un producto no trivial, ocurre una de dos: o bien  $f$  tiene un punto fijo interior de multiplicador en norma menor que 1 (es decir atractor), o en su defecto los iterados convergen normalmente a un punto fijo en  $\mathbb{T}$  que es de uno de tres tipos; a saber, atractor, parabólico doble o parabólico triple. El común denominador de los tres casos de la segunda variante es que los iterados nunca aceptan punto de acumulación interno.

**Proposición 15.1.** *Sea  $f$  una función racional de grado al menos 2 y  $U \subset \mathcal{F}(f)$  una componente de Fatou invariante simplemente conexa. Entonces se da una y solo una de las siguientes posibilidades excluyentes.*

- La componente  $U$  es un disco de Siegel;
- la componente  $U$  es una componente atractora o superatractora; o
- para todo  $z_0 \in U$  se tiene  $z_n = f^{on}(z_0) \rightarrow \partial_U$ .

*Prueba.* En los modelos canónicos hemos visto que cuando no existe un punto fijo interno, la secuencia nunca se acumula al interior de  $U$  (pues los iterados tienden a un punto en  $\partial\mathbb{D}$ ). Al retomar el lenguaje de  $U$ , la secuencia  $z_n$  no se acumulará en  $U$ , es decir, por definición tenderá a  $\partial_U$  (comparar sección 2, primera parte).  $\square$

La tercera opción se muestra aún elusiva. Por defecto abarca las cuencas parabólicas, pero es lógico preguntar si hay más. En primer instancia mostraremos que, al respecto, la convergencia es normal también hacia un punto fijo. Recién luego desentrañaremos sus características.

**Lema 15.2.** *Sea  $U \subset F(f)$  componente de Fatou invariante (simplemente conexa o no). Si para algún  $z_0 \in U$  existe una subsecuencia  $z_{n_k} = f^{n_k}(z_0)$  que converge puntualmente a  $\hat{z} \in \partial U$ , entonces  $\hat{z}$  es un punto fijo de  $f$  y los iterados  $f^{n_k}$  convergen uniformemente a  $\hat{z}$  en  $U$ .*

*Prueba.* Gratis los  $f^{n_k}$  configuran una familia normal pues  $U$  es hiperbólico. Organizamos la prueba propiamente dicha en dos estratos: mostraremos que los iterados  $f^{n_k}$  convergen uniformemente a  $\hat{z} \in \partial U$ , y luego que  $\hat{z}$  es punto fijo de  $f$ .

Como convergencia uniforme en compactos presupone una convergencia topológica, es suficiente mostrar que toda subsecuencia de  $f^{n_k}$  admite un refinamiento convergente a la función constante  $\hat{z}$ . Pero esto es básico. Toda subsecuencia de  $f^{n_k}$  admite, por definición de familia normal, un refinamiento convergente. Como en  $z_0$  este refinamiento ya converge a  $\hat{z} \in \partial U$ , por el lema 3.11 el límite global solo puede ser la constante  $\hat{z}$ .

Ahora, dado que  $z_0$  y  $f(z_0)$  pertenecen a  $U$ , de la primera parte deducimos que se cumple  $\lim f^{n_k}(z_0) = \hat{z} = \lim f^{n_k}(f(z_0)) = \lim f(f^{n_k}(z_0)) = f(\lim f^{n_k}(z_0)) = f(\hat{z})$ . donde nos hemos aprovechado de la continuidad de  $f$  en  $\hat{z}$ .  $\square$

La siguiente proposición muestra que a menudo el paso a un refinamiento es inmaterial.

**Lema 15.3.** *Sea  $U \subset F(f)$  una componente invariante (simplemente conexa o no). Si para algún  $z_0 \in U$  se tiene  $f^{n_k}(z_0) \rightarrow \partial U$ , entonces existe un punto fijo  $\hat{z} \in \partial U$  de  $f$  hacia el cual los iterados  $f^{n_k}$  convergen uniformemente.*

*Prueba.* Al aplicar el lema anterior a la hipótesis, toda la órbita  $\mathcal{O}(z_0)$  se acumula en  $\{\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_k\}$ , la colección de puntos fijos de  $f$  en  $\partial U$ . Alrededor de cada uno de estos tomemos una bola  $B_i$  de modo que tanto  $B_i$  como  $f(B_i)$  sean disjuntos de  $B_j$  y de  $f(B_j)$ . Notemos también que como  $\hat{z}_i$  es un punto fijo, se tiene  $\hat{z}_i \in B_i \cap f(B_i)$ .

Necesariamente existe  $N$  tal que  $n \geq N$  implica  $z_n \in B_1 \cup \dots \cup B_k$  pues de lo contrario cierta subsecuencia de los  $z_n$  se acumularía lejos de los puntos fijos, detalle que ya hemos descartado pueda ocurrir. Ahora,  $z_n \in B_i$  implica  $z_{n+1} \in f(B_i)$ , y por como han sido

diseñadas las vecindades se logra  $z_{n+1} \notin B_j$  para  $j \neq i$ . Y si se asume además  $n \geq N$ , concluimos se cumple  $z_{n+1} \in B_i$ : en palabras llanas, la secuencia  $z_n = f^{on}(z_0)$  converge a  $\hat{z}_i$ . Según el lema 15.2 la secuencia  $f^{on}$  entera converge normalmente a  $\hat{z}$  al ser restringida a  $U$ .  $\square$

A continuación mostramos que el límite debe ser parabólico. Para ello necesitamos recurrir al siguiente importante resultado cuya prueba posponemos unas líneas.

**Lema 15.4** (El lema del caracol). *Sea  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$  una curva invariante bajo  $f$  en el sentido que cumple  $\gamma(t+1) = f(\gamma(t))$ . Si  $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 0$ , entonces 0 es un punto fijo de  $f$  cuyo multiplicador  $\lambda$  satisface  $|\lambda| < 1$  o  $\lambda = 1$ .*

**Proposición 15.5.** *Sea  $U \subset F(f)$  una componente invariante (simplemente conexa o no). Si para algún  $z_0 \in U$  se tiene  $z_n = f^{on}(z_0) \rightarrow \partial U$ , entonces existe un punto fijo parabólico  $\hat{z} \in \partial U$  de  $f$ , de multiplicador igual a 1, hacia el cual convergen normalmente los iterados  $f^{on}$  en  $U$ .*

*Prueba asumiendo el lema del caracol.* El lema 15.3 asevera que los sucesivos iterados de  $f$  convergen a un punto fijo  $\hat{z}$ . Como este pertenece a  $\partial U \subset J(f)$ , no puede ser atractor. Acá acudimos al lema del caracol: unimos  $z_0 \in U$  con  $z_1 = f(z_0) \in U$  por una curva  $\gamma$  dentro de  $U$  y, como ya es usual, la extendemos recursivamente vía  $\gamma(t+1) = f(\gamma(t))$ , construcción que genera una curva invariante con límite  $\hat{z}$ . Si reubicamos  $\hat{z}$  en 0, el lema del caracol sentencia que  $\hat{z}$  ha de ser atractor o de multiplicador 1. Pero la primera opción fue rechazada de antemano.  $\square$

Esto tiene impacto directo en el modelo de Blaschke: las componentes parabólicas siempre atraen puntos críticos, así que las únicas componentes simplemente conexas donde  $f$  se comporta como automorfismo son los discos de Siegel.

**Teorema 15.6.** *Sea  $f$  una función racional de grado al menos 2. Toda componente de Fatou simplemente conexa e invariante es de uno de tres tipos: un disco de Siegel, una componente atractora o una componente parabólica.*  $\square$

Un bosquejo de la prueba del lema del caracol sigue este rumbo. Si  $\lambda$  fuese distinto de 1, el parecido de  $f$  con multiplicación por  $\lambda$  señalaría a  $\gamma$  como una espiral angosta

que se enrosca hacia el origen. Capitalizamos trazando un segmento radial diminuto entre dos revoluciones consecutivas a fin de que actúe como un tapón y selle una vecindad del punto en reposo. Al iterar la región encerrada, el contenido es empujado hacia adentro, y motivos topológicos (ver lema 11.1) alientan en el origen un punto fijo atractor.

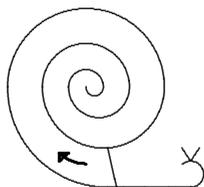


FIGURA 16. *El caracol con su concha a rastras.*

Este argumento, demás está mencionarlo, es un tanto flojo. Para empezar, la expresión “una espiral angosta” debe ser esclarecida. Incluso si nos la agenciamos para inyectar algo de rigor al argumento, la curva puede oscilar de tal modo que si bien en promedio serpentea en una dirección, de tanto en tanto surque largos tramos en sentido opuesto de forma que desate lo andado. Para remate, queda la duda de qué efecto surten las presumibles autointersecciones de  $\gamma$ . Demasiados puntos débiles como para aceptar la validez de una prueba de esta naturaleza. Parte significativa del embrollo, empero, se aliviará al transponer a coordenadas polares.

## Prueba del lema del caracol

El punto fijo del lema no puede ser repulsor pues una curva invariante rebota contra una vecindad donde el germen de  $f$  es linealizable. Por descarte asumimos  $|\lambda| = 1$  y  $\lambda \neq 1$ , y derivaremos una contradicción. Para completar la prueba se requiere paciencia.

Calibremos constantes y notación. Escribamos  $\lambda = e^{2\pi i \bar{\theta}}$  tentativamente. Acá  $\bar{\theta} \notin \mathbb{Z}$  es la tesis a refutar. Por el contrario, elijamos provisionalmente el argumento sujeto a  $0 < |\bar{\theta}| \leq 1/2$ . Como en  $f(z) = \lambda zh(z)$ , con  $h$  continua, la diferencia entre  $h(z)$  y 1 es insignificante, existe  $R$  para el cual se tiene  $|\arg(h(z))| < |\bar{\theta}|/4 \leq 1/8$  cuando  $|z| \leq R$ . Asimismo, dada la condición en el límite, existe  $T$  para el cual se tiene  $|\gamma(t)| \leq R$  cuando  $t \geq T$ . Acá desfasamos  $\gamma$  y trabajamos con  $T = 0$ . Además se puede asumir que  $\gamma(0)$  es un número real positivo sin desnaturalizar las convenciones anteriores (en concreto, al conjugar  $f$  con una rotación).

Traspasemos el problema a coordenadas polares (el recubrimiento universal de los discos agujereados), con proyección  $p : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$  dada por  $p(r, \theta) = re^{2\pi i\theta}$ . En este espacio trabajaremos con  $\text{Arg}(r, \theta) = \theta$  de haber razón para individualizar la componente angular.

Levantaremos  $\gamma$  y  $f$  al recubrimiento universal de modo armónico. De acuerdo con la proposición 2.29  $\gamma$  puede ser alzado a un único camino  $\Gamma$  sujeto a  $\Gamma(0) = (\bar{r}, 0)$ . Merced a los estimados preliminares,  $\Gamma$  queda encajonada en una banda de ancho  $R$ . Respecto a  $f$ , como se cumple  $f(\gamma(0)) = \gamma(1)$ , el teorema 2.41 proporciona un levantamiento  $F$  sujeto a  $F(\Gamma(0)) = \Gamma(1)$ . Además, puesto que  $f$  es invertible cerca de 0, es claro que  $F$  también ha de serlo. El punto delicado consiste en mostrar que la invarianza de  $\gamma$  ya induce invarianza en  $\Gamma$ , esta vez respecto a  $F$ . Para ello basta comprobar que las curvas  $t \mapsto \Gamma(t+1)$  y  $t \mapsto F \circ \Gamma(t)$  son ambos levantamientos de  $t \mapsto \gamma(t+1)$ , pues coinciden para  $t = 0$ . Notemos que  $\Gamma(t+1)$  proyecta sobre  $\gamma(t+1)$  mientras  $F(\Gamma(t))$  lo hace sobre  $p \circ F(\Gamma(t)) = f \circ p(\Gamma(t)) = f \circ \gamma(t)$ , curvas idénticas entre sí en mérito a la relación funcional  $\gamma(t+1) = f(\gamma(t))$ . Cuando no haya confusión pondremos  $\Gamma_t = \Gamma([t, \infty))$  para referirnos a la huella trazada por la curva  $\Gamma$  desde el instante  $t$ .

Midamos cuánto dista  $F$  de ser una translación (quizá no por  $\bar{\theta}$ , pero sí por  $\bar{\theta} + k$  para cierto entero  $k$ ); reflejo esto último del hecho de que  $f$  sea próxima a multiplicación por la constante  $\lambda$ . Al poner  $z = p(r, \theta)$ , de la igualdad  $f(z) = \lambda zh(z)$ , pasamos a

$$\arg(f(z)) = \arg(\lambda) + \arg(z) + \arg(h(z)) \approx \bar{\theta} + \theta,$$

pues ya se explicó arriba por qué el argumento de  $h(z)$  es despreciable. Esta relación implica, en el recubrimiento universal, que la función continua

$$\text{Arg}(F(r, \theta)) - \bar{\theta} - \theta - \arg(h(re^{2\pi i\theta}))$$

toma valores enteros. Pero una función continua en el dominio conexo  $(0, R) \times \mathbb{R}$  que toma solamente valores enteros es constante, digamos igual a  $k$ . Mejor incluso, de definir  $\hat{\theta} = \bar{\theta} + k$ , el valor

$$\text{Arg}(F(r, \theta)) - \hat{\theta} - \theta$$

será cercano a 0, específicamente, en norma no superará  $|\arg(h(z))| < |\bar{\theta}|/4 \leq 1/8$ . [De un raciocinio similar se rescata  $|f(z)| = |\lambda||z||h(z)| = |z||h(z)| \approx |z||h(0)| = |z| = r$  para los radios, información que tendrá poco uso pero que no ignoraremos del todo.]

**Propiedad 15.7.** *Existe una elección de  $\hat{\theta}$  en  $\lambda = e^{2\pi i \hat{\theta}}$  para la cual se tiene*

$$|\text{Arg}(F(r, \theta)) - \theta - \hat{\theta}| \leq |\arg(h(p(r, \theta)))| < |\bar{\theta}|/4 \leq 1/8.$$

*Con ella se satisface también  $\lim_{r \rightarrow 0} \text{Arg}(F(r, \theta)) = \hat{\theta} + \theta$ .*

*Prueba.* En el enunciado solo falta indicar que  $\lim_{r \rightarrow 0} \arg(h(p(r, \theta)))$  es el argumento de  $h(0)$ , es decir 0 grados.  $\square$

Como detalle menor, esto extiende  $F$  de manera natural y continua a la recta  $r = 0$  si asignamos  $F(0, \theta) = (0, \hat{\theta}) + (0, \theta)$ .

Para efectos dinámicos,  $\hat{\theta}$  es, como argumento de  $\lambda$ , la elección ideal. Acaso por ello sea conveniente borrar toda referencia a  $\bar{\theta}$  en la propiedad 15.7. La elección inicial de  $\bar{\theta}$  como ángulo asociado con  $\lambda$  fue efectuada a fin de minimizar el argumento angular de  $\lambda$  en valor absoluto; motivo por el cual se cumple  $|\bar{\theta}| \leq |\hat{\theta}|$ .

A partir de ahora asumiremos  $\hat{\theta} > 0$ . El caso  $\hat{\theta} < 0$  es análogo y su seguimiento no trasciende el cambiar el signo a los números o el orden de ciertas desigualdades acá o allá. Con esta convención reexpresamos primero la propiedad 15.7 e inmediatamente derivamos una consecuencia importante en lo que a iterados concierne.

**Propiedad 15.8.** *Para  $r \in [0, R]$  se cumple*

$$0 < 3\hat{\theta}/4 < \text{Arg}(F(r, \theta)) - \theta < 5\hat{\theta}/4.$$

*Prueba.* Puesto que ahora se cuenta con la desigualdad adicional  $|\bar{\theta}|/4 \leq \hat{\theta}/4$ , esto se deriva de la propiedad 15.7.  $\square$

**Propiedad 15.9.** *Mientras los iterados  $F^{\text{on}}(r, \theta)$  permanezcan en la banda  $[0, R] \times \mathbb{R}$  se cumplirá*

$$0 < 3n\hat{\theta}/4 < \text{Arg}(F^{\text{on}}(r, \theta)) - \theta < 5n\hat{\theta}/4.$$

*Prueba.* Como se tiene  $\theta = \text{Arg}(r, \theta)$ , esta propiedad es apenas la suma telescópica de  $n$  desigualdades extraídas de la propiedad 15.8.  $\square$

Acá observamos en  $F$  una marcada tendencia ascendente, siempre y cuando se nos ofrezca la ocasión de aplicar  $F$  de manera consecutiva. En general no hay razón para suponer que  $(r_0, \theta_0)$  (ó  $z_0$  en la proyección) pueda ser iterada indiscriminadamente por

$F$  (o por  $f$ ). Sin embargo, los puntos en  $\Gamma_0$ , la imagen de  $\Gamma$ , sí permanecen en la franja, con lo cual la propiedad 15.9 podrá ser empleada a voluntad para estimar el paradero de ciertos puntos en la curva.

Si bien la “altura” de  $\Gamma(1)$  se incrementa en cerca de  $\hat{\theta}$  unidades respecto a la de  $\Gamma(0)$ , en el trayecto  $\Gamma$  puede oscilar fuertemente. Al medir el vaiven de  $\Gamma$  en un intervalo compacto, determinaremos de manera vaga el paradero del resto de la curva.

**Propiedad 15.10.** *Cuando se cumple  $\text{Arg}(\Gamma([0, 3])) \subset [-K + 3\hat{\theta}/4, K + 5\hat{\theta}/4]$ , entonces para todo  $t_0 \geq 0$  se tiene  $\text{Arg}(\Gamma([t_0, t_0 + 1])) \subset [-K + 3t_0\hat{\theta}/4, K + 5t_0\hat{\theta}/4]$ .*

*Prueba.* Sea  $t_0 \in [n, n + 1)$ , de modo que se tenga  $t_0 = n + \alpha$  con  $\alpha \in [0, 1)$ . Estimaremos el argumento de  $\Gamma(n + \alpha + s)$ , donde  $s \in [0, 1]$ , por arriba y por abajo en dos distintas aplicaciones de la propiedad 15.9.

Por abajo tenemos

$$3n\hat{\theta}/4 < \text{Arg}(F^{on}(\Gamma(\alpha + s))) - \text{Arg}(\Gamma(\alpha + s)) = \text{Arg}(\Gamma(n + \alpha + s)) - \text{Arg}(\Gamma(\alpha + s)),$$

la cual deriva en

$$-K + 3t_0\hat{\theta}/4 < -K + 3\hat{\theta}/4 + 3n\hat{\theta}/4 \leq \text{Arg}(\Gamma(\alpha + s)) + 3n\hat{\theta}/4 < \text{Arg}(\Gamma(n + \alpha + s))$$

pues  $n + 1$  es mayor que  $t_0$  y  $\text{Arg}(\Gamma(\alpha + s))$  es mayor o igual que  $-K + 3\hat{\theta}/4$ .

En segundo lugar tenemos

$$\begin{aligned} \text{Arg}(\Gamma(n + \alpha + s)) - \text{Arg}(\Gamma(\alpha + s + 1)) &= \text{Arg}(F^{on-1}(\Gamma(\alpha + s + 1))) - \text{Arg}(\Gamma(\alpha + s + 1)) \\ &< 5(n - 1)\hat{\theta}/4, \end{aligned}$$

señal de  $\text{Arg}(\Gamma(n + \alpha + s)) \leq K + 5t_0\hat{\theta}/4$  pues esta vez  $n$  es menor que  $t_0$  y  $s + \alpha + 1$  cae dentro del intervalo  $[0, 3]$ .  $\square$

Para  $t_0$  entre 0 y 3 hay cierto grado de autorregulación en los estimados: cuando  $t_0$  es cercano a 0 la curva no está muy arriba, mientras para  $t_0$  cerca de 3 la curva no está muy abajo. Para tiempos arbitrarios, se obtienen dos estimados de carácter general.

**Propiedad 15.11.** *Para  $t \geq T$  se tiene  $-K + 3T\hat{\theta}/4 \leq \text{Arg}(\Gamma(t))$ .*  $\square$

**Propiedad 15.12.** *Si  $\text{Arg}(\Gamma(t)) \geq K + 5T\hat{\theta}/4$ , entonces  $t \geq T$ .*  $\square$

De la propiedad 15.11 podemos desglosar dos propiedades.

**Propiedad 15.13.** *Se tiene  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Arg}(\Gamma(t)) = +\infty$ .* □

**Propiedad 15.14.** *Para todo  $t_0 \geq 0$  la imagen  $\Gamma_{t_0} = \Gamma([t_0, \infty))$  es un subconjunto cerrado de  $[0, R] \times \mathbb{R}$ .* □

La elección de la constante  $K$  puede parecer un tanto arbitraria; pero permite una lectura interesante de la propiedad 15.10. Inicialmente, es decir cuando  $t_0 = 0$ , el compacto  $\Gamma([0, 1])$  se ubica entre alturas  $-K$  y  $K$ . A medida que el tiempo transcurre, la banda en donde es posible pronosticar caerá  $\Gamma([t_0, t_0 + 1])$  se centra en  $t_0 \hat{\theta}$  y se ensancha a  $2K + t_0 \hat{\theta}/2$  unidades: es decir, se desplaza hacia arriba con mayor velocidad de lo que aumenta la insertidumbre.

En la vertical conviven tres magnitudes: el número 1, la escala natural de una vuelta, mide precisamente ello y compatibiliza la información entre el recubrimiento universal y el espacio base; el valor  $\hat{\theta}$  es el promedio de vueltas que se gana (sea por intermedio de  $\gamma$  o de  $\Gamma$ ) por cada iterado; mientras  $2K$  es un crudo estimado de la fluctuación inicial de la curva.

Cuando la imagen de  $\Gamma$  se aparte del intervalo espacial  $[-K + 3\hat{\theta}/4, K + 5\hat{\theta}/4]$ , estaremos alejándonos del intervalo temporal  $[0, 3]$ . Veamos cuánto tiempo transcurrirá para ello.

**Propiedad 15.15.** *Para todo  $t \geq 3 + 3K/\hat{\theta}$  se tiene  $\text{Arg}(\Gamma(t)) > K + 2\hat{\theta}$ .*

*Prueba.* Esto es un caso concreto de la propiedad 15.11, de donde se obtiene por cierto  $\text{Arg}(\Gamma(t)) \geq 5K/4 + 9\hat{\theta}/4$  para  $t \geq 3 + 3K/\hat{\theta}$ . □

**Propiedad 15.16.** *Si  $\text{Arg}(\Gamma(t)) \geq 5K + 5\hat{\theta}$ , entonces  $t \geq 3 + 3K/\hat{\theta}$ .*

*Prueba.* Al reescribir

$$5K + 5\hat{\theta} = K + \frac{5\hat{\theta}}{4} \left[ \frac{16K}{5\hat{\theta}} + 4 \right],$$

se obtiene de la propiedad 15.12 la desigualdad

$$t \geq 16K/(5\hat{\theta}) + 4 > 3K/\hat{\theta} + 3.$$

□

La siguiente es una propiedad “obvia” que debe ser resaltada con estimados concretos: si llegado un momento el punto se aventura alto, entonces las características del problema poco le han de permitir descender de allí en lo sucesivo.

**Ejercicio 15.17.** Si  $\text{Arg}(\Gamma(t_0)) \geq 5K + 5\hat{\theta}$ , entonces  $\text{Arg}(\Gamma(t)) > K + 2\hat{\theta}$  para todo  $t \geq t_0$ .

Para  $\rho = 5K + 5\hat{\theta}$ , el conjunto  $T_\rho = \{t : \text{Arg}(\Gamma(t)) = \rho\}$  es cerrado pues la función  $\text{Arg}$  es continua, está contenido en el intervalo semiinfinito  $[3K/\hat{\theta} + 3, \infty)$  por la propiedad 15.16, es acotado según la propiedad 15.11 y es no vacío por el teorema del valor intermedio. En el compacto  $\{\Gamma(t) : t \in T_\rho\}$  existe un valor, digamos  $\Gamma(t_0)$ , más cercano a la vertical  $r = 0$  que el resto. (De haber dos o más elecciones para  $t_0$ , tomamos el menor tiempo). Denotemos por  $\mathcal{I}_\rho$  el segmento horizontal cerrado que une el punto  $(0, \rho)$  con  $\Gamma(t_0)$ .

Sea  $X$  el conjunto conexo formado por la unión de los cerrados  $\Gamma_1 = \Gamma([1, \infty))$  y  $\mathcal{I}_\rho$ . (Urge truncar en  $\Gamma_1$  a fin de mantener cierto manejo de la preimagen). Debido a la propiedad 15.13, este conjunto desconecta el espacio  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ . Sea  $A$  la componente que contiene a la semirrecta  $\{0\} \times \{\theta > \rho\}$  y  $B$  la componente conexa del complemento de  $\mathcal{I}_\rho \cup \Gamma_{t_0}$  que contiene a este mismo  $\{0\} \times \{\theta > \rho\}$ .

La siguiente serie de propiedades apuntan a demostrar que se cumple  $F(A) \subset A$ .

**Propiedad 15.18.** *Los conjuntos  $\mathcal{I}_\rho, F(\mathcal{I}_\rho), F^{-1}(\mathcal{I}_\rho)$  son disjuntos dos a dos.*

*Prueba.* Todos los miembros de  $\mathcal{I}_\rho$  tienen argumento igual a  $\rho$ . Por la propiedad 15.8 los de  $F(\mathcal{I}_\rho)$  tienen argumento al menos  $\rho + 3\hat{\theta}/4$  y los de  $F^{-1}(\mathcal{I}_\rho)$  a lo mucho  $\rho - 3\hat{\theta}/4$ .  $\square$

**Propiedad 15.19.** *El conjunto  $A$  está inmerso en  $B$ .*

*Prueba.* Como  $t_0 \geq 3 + 3K/\hat{\theta}$  implica  $\mathcal{I}_\rho \cup \Gamma_{t_0} \subset \mathcal{I}_\rho \cup \Gamma_1$ , para los complementos ocurre precisamente lo opuesto.  $\square$

**Propiedad 15.20.** *Para todo  $(r, \theta) \in B$  se tiene  $\theta > K + 2\hat{\theta}$ .*

*Prueba.* Tomemos  $(r, \theta) \in B$ . Como es  $B$  es un conjunto acotado inferiormente, el rayo  $(r, \sigma)$  con  $\sigma < \theta$  se topará con la frontera de  $B$ : existirá un punto tipo  $(r, \sigma)$  bien en  $\mathcal{I}_\rho$  o en su defecto en  $\Gamma_{t_0}$ . En el primer caso se concluye  $5K + 5\hat{\theta} = \rho = \sigma < \theta$ , y el resultado se sigue de la desigualdad  $5K + 5\hat{\theta} > K + 2\hat{\theta}$ . En el segundo tendremos que existe  $s \geq t_0$  para el cual se tiene  $(r, \sigma) = \Gamma(s)$ , y el ejercicio 15.17 se encarga de asegurar que se respeta  $\theta > \text{Arg}(\Gamma(s)) = \sigma \geq K + 2\hat{\theta}$ .  $\square$

**Propiedad 15.21.** *Para todo  $(r, \theta) \in A$  se tiene  $\theta > K + 2\hat{\theta}$ .*

*Prueba.* Esto es trivial al ser  $A$  subconjunto de  $B$  por la propiedad 15.19.  $\square$

El estimado anterior permite distanciar el compacto  $\Gamma([0, 1])$  de  $A$  y su frontera.

**Propiedad 15.22.** *Los conjuntos  $cl(A)$  y  $\Gamma([0, 1])$  son disjuntos.*

*Prueba.* La segunda coordenada (los argumentos) de los miembros del primer conjunto son mayores o iguales a  $K + 2\hat{\theta}$  por la propiedad 15.21, las del segundo son menores que  $K + 5\hat{\theta}/4$  por definición de  $K$ .  $\square$

**Propiedad 15.23.** *El conjunto  $F(A)$  es disjunto de  $\mathcal{I}_\rho \cup \Gamma_1$ .*

*Prueba.* El conjunto  $A$  no contiene ningún punto en  $\Gamma_1$  por definición, ni en  $\Gamma([0, 1])$  por la propiedad 15.22. Así, como es  $A$  disjunto de  $\Gamma_0 = \Gamma([0, \infty))$  y  $F$  es inyectiva,  $F(A)$  resulta disjunto de  $F(\Gamma_0) = \Gamma_1 = \Gamma([1, \infty))$ .

Por el absurdo supongamos exista un punto  $(\hat{r}, \rho) \in \mathcal{I}_\rho$  imagen bajo  $F$  de  $(s, \theta) \in A$ . Prescindimos del extremo izquierdo  $(0, \rho)$  pues  $(0, \rho - \hat{\theta})$  no pertenece a  $A$ . Tampoco podemos estar hablando de  $\Gamma(t_0)$ , al otro lado, pues en ese caso la preimagen sería  $\Gamma(t_0 - 1)$ , la cual no pertenece a  $A$  según lo prescrito en el primer párrafo. (Acá es clave el estimado  $t_0 \geq 3K/\hat{\theta} + 3 > 1$ ). Pero si el arco  $F^{-1}(\mathcal{I}_\rho)$  conecta un punto en  $A$  con el punto  $(0, \rho - \hat{\theta})$ , fuera de  $A$ , por el teorema del valor intermedio atravesará la frontera de  $A$ , la cual es subconjunto de  $\mathcal{I}_\rho \cup \Gamma_1$ . Por la propiedad 15.18, un cruce entre  $\mathcal{I}_\rho$  y  $F^{-1}(\mathcal{I}_\rho)$  es impensable, así que este solo podrá lograrse a lo largo de  $\Gamma_1$ , digamos en  $\Gamma(s)$ , con  $s \geq 1$ . Pero esto tampoco es posible pues en tal caso, el punto  $\gamma(s + 1) = F(\Gamma(s)) \in \mathcal{I}_\rho$  se ubicará más cerca al eje  $r = 0$  que  $\Gamma(t_0)$ , y esto contradice la definición de  $\Gamma(t_0)$ .  $\square$

Premio de este esfuerzo es la invarianza de la región  $A$  bajo iteración.

**Propiedad 15.24.** *Se tiene  $F(A) \subset A$ .*

*Prueba.* Por la propiedad 15.23  $F(A)$  no se interseca con  $\mathcal{I}_\rho \cup \Gamma_1$ . Al ser conexo, este conjunto está contenido de lleno en una componente del complemento de  $\mathcal{I}_\rho \cup \Gamma_1$ , la misma que solo puede ser  $A$  pues  $F(A)$  contiene al punto  $(0, \rho + 2\hat{\theta}) \in A$ .  $\square$

Con ello podemos iterar por siempre puntos en  $A$  y utilizar la propiedad 15.9.

**Propiedad 15.25.** Para  $(r, \theta) \in A$  se tiene  $0 < 3n\hat{\theta}/4 < \text{Arg}(F^{\text{on}}(r, \theta)) - \theta < 5n\hat{\theta}/4$ .  $\square$

Busquemos, en lo alto, un rectángulo pegado al eje  $r = 0$ . Este rectángulo proyectará al plano dinámico como un disco perfectamente redondo en la coordenada  $z$ .

**Propiedad 15.26.** Existe  $S \geq 0$  con el cual el rectángulo  $[0, S] \times [\rho+1, \rho+2]$  es subconjunto de  $A$ .

*Prueba.* El compacto  $\{0\} \times [\rho, \rho+1]$  y el conjunto cerrado  $\mathcal{I}_\rho \cup \Gamma_1$  son disjuntos. En gracia a la regularidad topológica existe una vecindad  $W$  del primero disjunta del segundo. Dentro de  $W$  efectuamos los ajustes pertinentes.  $\square$

Ahora recordemos que mientras  $\gamma$  se aproxima al origen,  $\Gamma$  se recuesta más y más hacia el eje imaginario.

**Propiedad 15.27.** Existe  $T_1$  tal que  $t \geq T_1$  implica  $|\gamma(t)| \leq S/3$ .

*Prueba.* Esto es consecuencia de que el límite de  $\gamma(t)$  valga 0.  $\square$

**Propiedad 15.28.** Existe  $\theta_1$  tal que  $\text{Arg}(\Gamma(t)) \geq \theta_1$  implica  $|\gamma(t)| \leq S/3$ .

*Prueba.* Definamos  $\theta_1 = 1 + \sup \text{Arg}(\Gamma([0, T_1]))$  donde  $T_1$  es como en la propiedad anterior. Por construcción  $\text{Arg}(\Gamma(t)) \geq \theta_1$  implica  $t \geq T_1$ , y ello termina en  $|\gamma(t)| \leq S/3$ .  $\square$

**Propiedad 15.29.** Con el  $\theta_1$  de la propiedad anterior se tiene

$$A \cap [0, \infty) \times [\theta_1, \infty) \subset [0, S/3] \times [\theta_1, \infty).$$

*Prueba.* Dada la confección de la región  $A$ , para  $(r, \theta) \in A$  existe un tiempo  $\hat{t}$  para el cual se tiene  $\text{Arg}(\Gamma(\hat{t})) = \theta$  y  $r \leq |\gamma(\hat{t})|$ . Si  $\theta \geq \theta_1$ , la propiedad 5.28 nos conduce directo a  $|\gamma(\hat{t})| \leq S/3$ .  $\square$

**Propiedad 15.30.** Existe  $n$  tal que  $F^{\text{on}}([0, S] \times [\rho+1, \rho+2]) \subset [0, S/3] \times [\theta_1, \infty)$ .

*Prueba.* Según lo concertado en la propiedad 15.29, basta encontrar  $n$  con el cual se tenga  $\text{Arg}(F^{\text{on}}([0, S] \times [\rho+1, \rho+2])) \geq \theta_1$ . Y para llegar de  $\rho+1$  a  $\theta_1$  en incrementos de  $3\hat{\theta}/4$  (ver propiedad 15.8), se elige  $n$  mayor que  $4(\theta_1 - \rho - 1)/(3\hat{\theta})$ .  $\square$

Pero la función  $F$  solo existe en nuestra imaginación. Al retomar la variable  $z$ , la lectura de la propiedad 13.30 es la conjeturada.

**Propiedad 15.31.** *El origen es un atractor topológico para  $f$ .*

*Prueba.* En efecto, hemos probado que la bola de radio  $S$  se encoge al ser llevada dentro de una bola cerrada de radio  $S/3$ . □

*Prueba del lema del caracol.* De acuerdo con el lema 11.1 el multiplicador de  $f$  en 0 es, en norma, menor que 1. Esta contradicción finaliza la prueba del lema del caracol. □

## 16 Componentes críticas periódicas

Este capítulo aborda las componentes periódicas de grado mayor o igual a 2, las **críticas**. Aquí encontramos las atractoras, las superatractoras y las parabólicas. Veremos en breve cómo esto agota las posibilidades aun cuando la componente no sea simplemente conexa. Como aplicación, delimitaremos el radio de alcance de las coordenadas uniformizantes. Para ello debemos entender antes cómo la cantidad de puntos críticos en una componente periódica afecta su grado y su topología.

### La naturaleza de las componentes críticas invariantes

El punto de partida para la clasificación de componentes críticas es la proposición 15.5. Mostraremos que toda componente crítica no parabólica contiene un punto fijo. De ahí, el lema 10.1 y el teorema 10.5 permitirán concluir que este punto fijo es atractor. En el proceso tropezaremos con algunos resultados de mérito propio.

El plan de acción es como siguiente. Tomemos cualquier punto en  $U$ , componente crítica no parabólica. De acuerdo con la proposición 15.5, su órbita admite un punto de acumulación interno, digamos  $\hat{p}$ . Un poco de manipulación topológica —donde intervendrá de manera indirecta la métrica hiperbólica— desenmascarará a este punto como un punto recurrente, es decir, como un punto sobre el cual su propia órbita se acumula. Gracias a ello será legítimo seleccionar una subsecuencia que converge a una función analítica  $g$  con  $\hat{p}$  y  $f(\hat{p})$  como puntos fijos. Por un lado los endomorfismos analíticos de una región hiperbólica con más de un punto fijo son automorfismos de orden finito (comparar proposición 2.61), mientras por otro, el límite  $g$  no es inyectivo (ver lema 16.1, abajo), y en consecuencia tampoco invertible. La única forma de evitar un conflicto entre estas dos consecuencias es reconocer igualdad entre  $\hat{p}$  y  $f(\hat{p})$ .

**Lema 16.1.** *Si  $f$  no es inyectiva en una componente invariante  $U$ , entonces ningún límite de subsecuencias convergentes de iterados  $f^{o n_k}$  será inyectiva (en  $U$ ).*

*Prueba.* Con  $f(z_0) = f(z_1)$  se tiene  $\lim f^{o n_k}(z_0) = \lim f^{o n_k}(z_1)$ . □

El siguiente lema es válido para toda componente invariante (crítica o no). Un punto es **recurrente** cuando sus iterados se acumulan sobre sí mismo; es decir, cuando se tiene  $\hat{p} = f^{o n_k}(\hat{p})$  para cierta subsecuencia  $n_k \rightarrow \infty$ . Por ejemplo, todo punto fijo es recurrente.

**Lema 16.2.** *Toda componente invariante no parabólica acepta puntos recurrentes.*

*Prueba.* Tomemos  $z_0$  en una componente invariante  $U$  no parabólica. Como los iterados  $z_n$  de  $z_0$  no tienden a la frontera (pues caso contrario  $U$  sería parabólica según la proposición 15.5), alguna subsucesión, digamos  $z_{n_k}$ , tiene límite  $\hat{p} \in U$ .

Definamos  $m_i = n_{i+1} - n_i$ , a fin de tener

$$z_{n_{i+1}} = f^{\circ n_{i+1}}(z_0) = f^{\circ n_{i+1} - n_i}(f^{\circ n_i}(z_0)) = f^{\circ n_{i+1} - n_i}(z_{n_i}) = f^{\circ m_i}(z_{n_i}).$$

La elección de  $\hat{p}$  implica  $f^{\circ m_i}(z_{n_i}) \rightarrow \hat{p}$ . Los iterados de orden  $m_i$  tornarán  $\hat{p}$  en un punto recurrente. Distinguimos dos casos: los  $m_i$  son acotados o no.

Cuando los  $m_i$  son acotados, un valor se repite infinitas veces, que sea  $N$ , y se tendrá

$$\hat{p} = \lim f^{\circ m_i}(z_{n_i}) = \lim f^{\circ N}(z_{n_i}) = f^{\circ N}(\hat{p})$$

a nivel de subsecuencias. De acuerdo con el corolario 9.19, un punto periódico en  $U$  es ya un punto fijo. Los puntos fijos son recurrentes.

Si los  $m_i$  tienden a  $\infty$ , trabajamos en el recubrimiento universal  $\pi : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (U, \hat{p})$ , con 0 emplazado sobre la fibra de  $\hat{p}$ . Levantemos  $f$  a  $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  en el recubrimiento universal. Para consolidar la propiedad  $f^{\circ m_k}(\hat{p}) \rightarrow \hat{p}$  será suficiente establecer que para  $k$  suficientemente grande el punto  $f^{\circ m_k}(\hat{p})$  pertenece a  $\pi(B_{2\epsilon})$ , la proyección de la bola de radio  $2\epsilon > 0$ , donde  $\epsilon > 0$  es arbitrariamente pequeño.

Como la proyección de la bola de radio  $\epsilon$ , es decir  $\pi(B_\epsilon)$ , es una vecindad de  $\hat{p} = \pi(0)$  y se cumple  $z_{n_i} \rightarrow \hat{p}$ , podemos asumir (una vez reemplazado  $z_0$  por un iterado  $z_{n_k}$ ) que se tiene  $z_{n_i} \in \pi(B_\epsilon)$  para todo  $i$ . En particular, existe  $w_0 \in B_\epsilon$  que desciende sobre  $z_0 \in U$ . Inductivamente buscamos puntos  $w_k \in B_\epsilon$  con proyección  $z_{n_k} \in \pi(B_\epsilon)$  por la ruta larga: dado que  $F^{\circ m_k}(w_k)$  proyecta sobre  $z_{n_{k+1}} = f^{m_k}(z_{n_k})$ , sale a nuestro auxilio una transformación de cubierta  $\psi_k$  con la cual se tiene  $w_{k+1} = \psi_k \circ F^{\circ m_k}(w_k) \in B_\epsilon$ .

Consideremos el automorfismo  $\varphi_k = \varphi_{w_k}$  de  $\mathbb{D}$  que reubica  $w_k$  en el origen y 0 en  $-w_k$ . La composición  $\varphi_{k+1} \circ \psi_k \circ F^{\circ m_k} \circ \varphi_k^{-1}$  lleva 0 en 0 y  $-w_k$  en  $\varphi_{k+1} \circ \psi_k(F^{\circ m_k}(0))$ . El lema de Schwarz exige entonces que la norma de  $\varphi_{k+1} \circ \psi_k(F^{\circ m_k}(0))$  sea a lo más  $|-w_k| \leq \epsilon$ . Con el concurso del lema 1.29 localizamos el punto  $\psi_k(F^{\circ m_k}(0))$ , de proyección  $f^{\circ m_k}(\hat{p})$ , a menos de  $2\epsilon$  unidades del origen, y confirmamos con ello la convergencia  $f^{\circ m_k}(\hat{p}) \rightarrow \hat{p}$ .  $\square$

Los puntos recurrentes irrumpen como potenciales puntos fijos de límites de secuencias de funciones.

**Lema 16.3.** *Sea  $U$  una componente de Fatou invariante y  $\hat{p} \in U$  un punto recurrente, por ejemplo sujeto a  $\hat{p} = \lim f^{om_k}(\hat{p})$ . Si  $f^{om_k}$  converge uniformemente a  $g$  en  $U$ , entonces todo punto de la órbita de  $\hat{p}$  bajo  $f$  es punto fijo de  $g$ .*

*Prueba.* Al tomar límites se obtiene  $g(\hat{p}) = \hat{p}$ , y así, según el lema 3.11, la función  $g$  toma valores en  $U$ . También, una vez asumida la convergencia  $f^{om_k}(\hat{p}) \rightarrow \hat{p}$ , la continuidad de  $g$  instiga de paso  $f^{om_k}(f^{oj}(\hat{p})) \rightarrow f^{oj}(\hat{p})$ . El resto es trivial.  $\square$

Estos resultados parciales pueden bien reinterpretarse a la luz del teorema 1.12.

**Lema 16.4.** *Restringida a una componente de Fatou  $U$  invariante no parabólica, atractora ni superatractora, existe una secuencia de iterados de  $f$  que converge normalmente a la identidad.*

*Prueba.* Si la componente no es parabólica, por el lema 16.2 muestran la cara puntos recurrentes. Al aparecer un punto recurrente  $\hat{p}$ , existe una elección de iterados  $f^{om_i}$  para el cual el límite  $g$  tiene en toda la órbita de  $\hat{p}$  puntos fijos. Como  $f$  no tiene puntos fijos en  $U$ , tampoco acepta puntos periódicos (ver corolario 9.19). De este modo la órbita de  $\hat{p}$  bajo  $f$  es infinita, y, lo que es vital, se amontona sobre sí misma. Ahora, como  $g$  satisface  $g(z) = z$  en un conjunto con punto de acumulación en  $U$ , es la identidad.  $\square$

**Ejemplo 16.5.** Cuando una componente invariante simplemente conexa no es parabólica ni atractora, entonces es, en concordancia con el teorema 15.6, un disco de Siegel. Allá dentro, claro, el movimiento angular es tal que cierta secuencia de iterados converge a la identidad.

El ejemplo anterior advierte que sorpresas, en lo que atañe a componente periódicas, no están del todo excluidas; estas, no obstante, están vedadas en dominios simplemente conexos. Con lo desarrollado estamos en capacidad de clasificar las componentes periódicas críticas.

**Proposición 16.6.** *Toda componente crítica e invariante es atractora, superatractora o parabólica.*

*Prueba.* De ponerse reparos en lo aseverado, alguna secuencia de iterados de  $f$  convergiría a la identidad según lo manifiesta el lema 16.4. Pero el lema 16.1 conduciría a que la identidad no es inyectiva: esto es imposible.  $\square$

## ¿Hasta dónde rigen las coordenadas uniformizantes?

Una propiedad inmanente a las componentes periódicas críticas es el aceptar coordenadas uniformizantes. En las cuencas superatractoras contamos con las coordenadas de Böttcher, en las meramente atractoras, con las de Koenings, mientras en las parabólicas se guarda la relación funcional de Abel. Una pregunta natural que surge es ¿hasta dónde esta asignación representa un sistema de coordenadas bien definido? o, lo que es equivalente, ¿qué impide que estas “coordenadas” sean globalmente inyectivas?

La respuesta a esta inquietud puede frasearse igual en los tres casos: la obstrucción para que este sistema local se convierta en global se halla en los puntos críticos que va incorporando.

Alrededor de un punto fijo atractor tenemos una vecindad  $V$  y una función inyectiva  $\Phi : V \rightarrow B_r$ , con  $B_r$  la bola de radio  $r$  centrada en el origen, donde, por el teorema 11.2, se satisface  $\Phi(f(z)) = \lambda\Phi(z)$ . Ejecutemos el cambio de variables  $w = \Phi(z)$  con inversa  $\Psi : B_r \rightarrow V$ . Sea  $V_1$  la componente conexa de  $f^{-1}(V)$  que contiene a  $V$ . Si  $f$  no adiciona puntos críticos a  $V_1$ , entonces, por Riemann-Hurwitz, se tiene

$$0 = \chi(V_1)k - \chi(V) = \chi(V_1)k - 1,$$

donde  $k$  es el grado de la restricción de  $f$  a  $V_1$ . De acá se pasa a  $\chi(V_1) = 1$  y  $k = 1$ . Por este motivo, la inversa  $\Psi$  puede extenderse a la bola de radio  $r/|\lambda|$  por medio de fórmula  $f^{-1}(\Phi(\lambda w))/\lambda$ . La conclusión es inminente: *el sistema es linealizable en tanto un punto crítico no interfiera.*

Esto es más revelador de lo que aparenta a golpe de vista: exhibe evidencia tajante de la presencia de puntos críticos en una olla atractora. Se argumenta así. La coordenada  $\Psi$  puede extenderse mientras no detectemos puntos críticos. De no haberlos, entonces la definición de  $\Psi$  se haría extensiva a la unión  $\bigcup B_{r/|\lambda|^n}$ , es decir, a todo  $\mathbb{C}$ . Esto entra en conflicto con el teorema de Liouville dado que  $\Psi$  no es constante pero toma valores en la componente hiperbólica  $U$ .

**Ejercicio 16.7.** Con las modificaciones de rigor, repita el argumento para las coordenadas parabólicas del teorema 12.36. Extraiga sus propias conclusiones. [Sugerencia: si se asume (y esto decididamente es cierto) que la imagen donde la coordenada es inyectiva contiene un semiplano del tipo  $\text{im } z \geq R$ , las conclusiones son elocuentes.]

En el caso superatractor, el punto fijo es crítico y la cuenca puede como que no contener puntos críticos accesorios. Cuando el grado del punto crítico pivote es  $k > 1$ , el sistema de

coordenadas  $\Phi : V \rightarrow B_r$ , esta vez con  $r < 1$ , queda sujeto a  $\Phi(f(z)) = \Phi(z)^k$ . Centremos nuestra atención en una inversa  $\Psi$  de  $\Phi$  y en la posibilidad de extenderla más allá de los linderos de  $B_r$ . Sea  $V_1$  la componente conexa de  $f^{-1}(V)$  que contiene a  $V$ . La cantidad de puntos críticos de  $f$  en  $V_1$  es  $\chi(V_1)k_1 - \chi(V) = \chi(V_1)k_1 - 1$ , donde el grado  $k_1$  es al menos  $k$ . Como  $k - 1$  corresponden a la criticidad del punto fijo superatractor, estarán debutando un total de  $\chi(V_1)k_1 - k$  puntos críticos adicionales. La conclusión es similar a la del análisis del atractor: como se tiene  $k_1 \geq k$ , no aparecen nuevos puntos críticos si y solo si  $V_1$  es simplemente conexa y se cumple  $k_1 = k$ . Pero si  $V_1$  es simplemente conexa, entonces  $f$  admite, por manifestación expresa de la proposición 2.66, una raíz  $k$ -ésima bien definida y, es lícito definir

$$\Psi(w) = \sqrt[k]{f(\Psi(w^k))},$$

en la bola de radio  $r^{1/k} > r$ . Recíprocamente, si  $\Psi$  se puede extender a  $B_{r^{1/k}}$ , entonces su imagen, es decir  $V_1$ , será simplemente conexa y se deslinda de nuevos puntos críticos. El balance será que *las coordenadas de Böttcher tendrán vigencia mientras no la entorpezcan nuevos puntos críticos*.

Nos preguntamos, por último, ¿qué sucede cuando la componente  $U$  se ve desierta de estos puntos críticos extraordinarios en el caso superatractor? De ser así, el territorio de la coordenada  $\Psi$  llega a  $\bigcup B_{r^{1/k^n}} = \mathbb{D}$  y dispondremos de coordenadas  $\Psi : \mathbb{D} \rightarrow U$  globales.



## 17 La estructura del conjunto de Fatou

Toca estudiar la estructura global del conjunto de Fatou. El conjunto de Fatou, de no ser vacío, es la unión de sus componentes. Estas son llevadas una en otra por la función original con un grado bien definido, y, a su modo, se ordenan dentro de un sistema dinámico discreto. Nueva información se gana con ello pues tarde o temprano todas desembocan en componentes periódicas.

### Inexistencia de dominios errantes

Una componente de Fatou  $V \subset F(f)$  es llamada **eventualmente periódica** si existe  $n$  tal que  $f^{\circ n}(V)$  es una componente periódica. En caso contrario,  $V$  es una **componente errante**. El nombre insinúa el hecho de que las regiones  $V, f(V), f^{\circ 2}(V), \dots$  son disjuntas dos a dos.

Afortunadamente las componentes errantes no existen, tal como demostró Sullivan [9]. Lamentablemente la prueba supera esta vez —por lo avanzada— los alcances de este libro. La enunciamos sin demostración. (Para la prueba ver [9].)

**Teorema 17.1.** *En la dinámica racional no existen componentes errantes.* □

### Sobre la cantidad de puntos críticos en una componente invariante

Existe interdependencia entre la fisonomía de una componente invariante, el grado de la restricción y la cantidad de puntos críticos ahí encontrados. Pongamos en limpio algunos aportes.

**Lema 17.2.** *Sea  $U$  una componente invariante de grado  $k$  con característica de Euler finita. Si  $U$  es simplemente conexa, entonces  $f$  admite  $k - 1$  puntos críticos en  $U$ . Si  $U$  no es simplemente conexa, entonces la restricción de  $f$  a  $U$  es un automorfismo (por lo tanto se tiene  $k = 1$ , y no existen puntos críticos).*

*Prueba.* Sea  $\alpha$  la cantidad de puntos críticos en  $U$ . Como  $U$  es tanto el conjunto de partida como el de llegada de  $f$  y se tiene  $1 \geq \chi(U) > -\infty$ , la fórmula de Riemann-Hurwitz entrega  $\alpha = \chi(U)(k - 1)$ . Si  $\chi(U)$  es 1, entonces  $\alpha$  vale  $k - 1$ , como afirma el enunciado. Si  $\chi(U) < 0$ , entonces se debe tener  $k = 1$  para evitar un  $\alpha$  negativo; con ello  $\alpha$  vale 0, es decir, resulta

igual a  $k - 1$ . Por último, si  $\chi(U)$  es 0, entonces  $\alpha$  es 0. De este modo  $U$  se inhibe de ser atractora, superatractora o parabólica, pues estas componentes siempre pescan puntos críticos; por la proposición 16.6 será de grado  $k = 1$ . Con ello nuevamente se obtiene  $\alpha = k - 1$ .  $\square$

**Nota 17.3.** La existencia o no de componentes de Fatou sujetas a  $0 \geq \chi(U) > -\infty$  aún nos elude. Veremos seguidamente que el caso  $\chi(U) = 0$  el es único viable si pretendemos además que  $U$  sea invariante.

### Clasificación de las componentes periódicas

Los dos capítulos previos fueron consagrados a una clasificación parcial de las componentes de Fatou invariantes. Toca completar el trabajo. La línea de base es una síntesis del teorema 15.6 y el lema 16.4.

**Lema 17.4.** *Si  $U$  es una componente de Fatou invariante que no es atractora, parabólica, ni un disco de Siegel, entonces  $U$  no es simplemente conexa, la restricción de  $f$  a  $U$  es un automorfismo de orden infinito sin puntos fijos y cierta subsecuencia  $f^{\circ n_k}$  converge uniformemente en compactos a la identidad en  $U$ .*

*Prueba.* El enunciado está inmerso dentro del teorema 15.6 y el lema 16.4 excepto por la parte que trata sobre la ausencia de puntos fijos en  $U$ . Para afrontar esta posibilidad, nos aferramos al teorema 10.1: un punto fijo en el conjunto de Fatou es de Siegel o un atractor.  $\square$

Asumamos entonces que  $U$  no es atractora, parabólica ni disco de Siegel, y tomemos una secuencia  $f^{n_k}$  que converja a la identidad en  $U$ . Fijemos de una vez por siempre un recubrimiento universal  $\pi : \mathbb{D} \rightarrow U$  con punto de referencia  $z_0 = \pi(0) \in U$ , elegido de modo aleatorio. Tomemos un radio  $R$  con el cual la proyección de la bola  $B_{10R}$  sea una vecindad distinguida de  $z_0$ . Como  $\pi(B_R)$  es abierto y contiene a  $z_0 = \pi(0)$ , desde cierto  $k$  en lo sucesivo los valores  $f^{n_k}(z_0)$  pertenecerán a  $\pi(B_R)$ . Sea  $w_k$  el elemento en  $B_R$  que cumple  $\pi(w_k) = f^{n_k}(z_0)$ . De acuerdo con el teorema 2.41 existe un único endomorfismo  $\psi_k$  de  $\mathbb{D}$  que levanta  $f^{n_k}$  y lleva 0 en  $w_k$ . Como  $f^{\circ n_k}$  es invertible,  $\psi_k$  es invertible por igual (con inversa el levantamiento de la inversa de  $f^{\circ n_k}$  que lleva  $w_k$  en 0). Por definición de vecindad distinguida se logra de paso  $w_k \rightarrow 0$ .

**Propiedad 17.5.** *La secuencia  $\psi_k$  converge uniformemente a la identidad.*

*Prueba.* Como la secuencia  $\psi_k$  ya constituye una familia normal, es suficiente probar que se satisface  $\psi_k(t) \rightarrow t$  puntualmente. Mejor, basta probar tal condición en un subconjunto abierto no vacío de  $\mathbb{D}$ .

Sea entonces  $t \in B_R$ . Pongamos  $t_k = \psi_k(t)$  y  $w_k = \psi_k(0)$ . Si  $\varphi_k$  es el automorfismo de  $\mathbb{D}$  que lleva  $w_k$  en 0 y 0 en  $-w_k$ , entonces  $\varphi_k \circ \psi_k$  lleva 0 en 0 y  $t$  en  $\varphi_k(t_k)$ . Según el lema de Schwarz, se tiene  $|\varphi_k(t_k)| \leq |t| \leq R$ . Por el lema 1.29 se concluye  $t_k \in B_{2R}$ . Ahora, como  $B_{2R}$  es un símil topológico de  $\pi(B_{2R})$ , la convergencia

$$\pi(t_k) = \pi(\psi_k(t)) = f^{\circ n_k}(\pi(t)) \rightarrow \pi(t)$$

equivale a  $t_k \rightarrow t$ , como era imperativo probar. □

El desafío actual es probar que  $f$  conmuta con todas las transformaciones de cubierta del recubrimiento universal. A ello va dirigido la siguiente secuencia de lemas.

**Lema 17.6.** *Dada una transformación de cubierta  $\sigma$ , la composición  $\psi_k \circ \sigma \circ \psi_k^{-1}$  es de cubierta.*

*Prueba.* Al proyectar a la base

$$\pi \circ \psi_k \circ \sigma \circ \psi_k^{-1} = f^{\circ n_k} \circ \pi \circ \sigma \circ \psi_k^{-1} = f^{\circ n_k} \circ \pi \circ \psi_k^{-1} = f^{\circ n_k} \circ (f^{\circ n_k})^{-1} \circ \pi,$$

lo innecesario desaparece. □

**Lema 17.7.** *Toda  $\sigma$  de cubierta conmuta con  $\psi_k$  para  $k$  suficientemente grande.*

*Prueba.* Como  $\psi_k$  converge normalmente a la identidad, por la proposición 3.12 los dos parámetros  $\lambda_n, \alpha_n$  que la determinan convergen a 1, 0, respectivamente. Por ello  $\psi_k(z)$  converge algebraicamente a  $z$ . Explotando esto, la transformación de cubierta  $\psi_k \circ \sigma \circ \psi_k^{-1}$  converge a  $\sigma$ .

Sin embargo, los grupos de cubierta son subgrupos discretos de  $\text{aut}(\mathbb{D})$ , y en estos toda sucesión convergente es estacionaria. Queda acreditado  $\sigma = \psi_k \circ \sigma \circ \psi_k^{-1}$  para  $k$  grande; o, lo que es lo mismo  $\sigma \circ \psi_k = \psi_k \circ \sigma$ . □

**Corolario 17.8.** *El grupo de cubierta de  $U$  es un grupo conmutativo no trivial.*

*Prueba.* El grupo es no trivial al no ser  $U$  simplemente conexo. Por ser los  $f^{nk}$  distintos de la identidad en  $U$ , lo mismo ocurre para  $\psi_k$  en  $\mathbb{D}$ . Como los  $f^{nk}$  carecen de puntos periódicos, igual sucede con los  $\psi_k$ .

Cuando  $\sigma$ , distinta de la identidad, conmuta con  $\psi_k$ , estos automorfismos, según lo estipulado por el teorema 1.44, comparten puntos fijos en  $\partial\mathbb{D}$ . Por la propiedad transitiva de las igualdades, a partir de cierto valor de  $k$  todos los  $\psi_k$  comparten puntos fijos. Si ahora tomamos otra transformación de cubierta  $\tau$  no trivial, en uso reiterado de la transitividad este automorfismo compartirá puntos fijos con  $\sigma$ . No solo eso, al compartir puntos fijos, el teorema 1.44 les demandará conmutar.  $\square$

En el capítulo 1 —más exacto en el teorema 1.47 y los ejemplos que gravitan en torno a este— clasificamos los subgrupos abelianos discretos que actúan en  $\mathbb{D}$  (realmente en  $\mathbb{H}$ , el gemelo).

El grupo de cubierta no puede ser un subgrupo parabólico pues, de ser así, el cociente  $U$  sería homeomorfo a  $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} - \{0\}$ , un disco agujerado. Esto implicaría, en uso de teoremas básicos de remoción de singularidades, que  $U$  es una vecindad agujereada de un  $W$  simplemente conexo, digamos  $U = W^* = W - \{p\}$ . Esto, con la injerencia de la proposición 9.9, descalificaría a  $p$  como punto de Julia, al quedar aislado.

La opción es según el ejemplo 1.49 que  $U$  sea un anillo topológico, un subconjunto abierto de  $\hat{\mathbb{C}}$  con característica de Euler 0. Por el lema 17.2, acá  $f$  se conduce como automorfismo. Investiguemos como cuál. Fijemos esta vez  $\mathbb{H}$  como recubrimiento universal con grupo de cubierta generado por  $z \mapsto M_r(z) = rz$ . Levantemos  $f$  a  $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ , transformación que por ser invertible pertenece a  $PSL_2(\mathbb{R})$ . Una réplica de la prueba del lema 17.6 indica que  $F \circ M_r \circ F^{-1}$  es de cubierta, es decir, cumple  $M_{r^n} \circ F = F \circ M_r$  para cierto  $n$ , distinto de 0 pues de lo contrario se tendría  $r^n = 1$  y junto con ello  $F = F \circ M_r$ , lo que entrañaría que  $M_r$ , multiplicación por  $r$ , sea la identidad.

Cuando  $F$  es un polinomio, digamos  $F(z) = sz + b$ , con  $s > 0$  y  $b$  real, la relación  $M_{r^n} \circ F = F \circ M_r$  deviene en  $r^n(sz + b) = srz + b$ . Como se ha asumido se cumple  $r^n \neq 1$ , obligatoriamente  $b$  valdrá 0. Pero  $sr = sr^n$  conduce a  $n = 1$ , lo cual no es noticia pues  $M_r$  siempre conmuta con  $F(z) = sz$ , para  $s$  arbitrario. El automorfismo  $F(z) = sz$  se manifiesta en el anillo  $U$  como una rotación.

Caso contrario, al poner  $F(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  sujetos a  $ad - bc = 1$ , el

automorfismo  $F$  tiene un polo en  $-d/c \in \mathbb{R}$ . Si bien la relación

$$r^n \frac{az + b}{cz + d} = \frac{arz + b}{crz + d}.$$

ha sido decretada válida en  $\mathbb{H}$ , por continuación analítica podemos evaluarla donde nos plazca, siempre que se respeten cuidados mínimos. En particular  $-d/c$ , el polo a la izquierda, concuerda con  $-d/(cr)$ , el polo a la derecha. Acá la ruta se bifurca: o bien  $d$  vale 0 o en su defecto  $r$  es igual a 1. Por supuesto el segundo caso queda descartado ya que multiplicación por 1 no genera un grupo infinito. Pero  $d = 0$  connota  $b, c \neq 0$ . Llegado este punto el producto cruzado lleva a la igualdad

$$r^n acrz^2 + r^n bcrz = arcz^2 + cbz.$$

Con  $a \neq 0$  nuevamente nos veremos en apuros pues  $r^n$  tendrá que valer 1; por tanto, se exige también  $a = 0$ . Inspección en grado 1 se reconcilia con  $r^{n+1} = 1$ , de donde se logra  $n = -1$ . Al colocar todo en su debido lugar se abre paso a  $F(z) = b/(cz)$  con  $-bc = 1$ , es decir, con  $s = -b/c$  negativo. Esto sin embargo no es deseable: todo automorfismo de la forma  $z \mapsto s/z$  con  $s < 0$  exhibe puntos fijos en  $\mathbb{H}$ .

La salida es que  $F$  sea de tipo  $F(z) = sz$ , con  $s$  positivo, con lo cual  $f$ , su proyección a  $U$ , será una rotación. Por el lema 17.2 esta ha de ser de orden infinito, de tipo “irracional”. A este tipo de componentes se le llama **anillos de Herman**.

**Teorema 17.9.** *En la dinámica racional un ciclo periódico de componentes de Fatou debe ser de uno de los siguientes cuatro tipos: un ciclo atractor (incluye superatractor), un ciclo parabólico, un ciclo de discos de Siegel o un ciclo de anillos de Herman.*  $\square$

Esto finaliza la clasificación de componentes periódicas de una función racional.

Hay un segundo resultado estructural que no probaremos pero que es indispensable enunciar.

**Teorema 17.10.** *La cantidad de componentes periódicas de una función racional es finita.*

Si pudieramos contar anillos de Herman este teorema estaría ya probado. En efecto, la nota 13.2 y el corolario 13.3 establecen una cota ineficiente, pero cota al fin, para la cantidad de cuencas atractoras, superatractoras, parabólicas y discos de Siegel. Shishikura en [8] produjo una cota para el número de anillos de Herman, y por consiguiente demostró el teorema anterior.

## La gran órbita de una componente

Hay diversos modos equivalentes de agrupar componentes de Fatou, mas todas revienten a la idea de conjuntos minimales totalmente invariantes. Para ser formales, diremos que dos componentes  $U, V$  del conjunto de Fatou de  $f$  son **componentes equivalentes** si existen  $n, m \geq 0$  con quienes se cumple  $f^{\circ n}(U) = f^{\circ m}(V)$ . Por supuesto,  $f^{\circ n}(U)$  y  $f^{\circ m}(V)$ , al ser componentes, conque se intersequen coincidirán. Con esto el conjunto de Fatou se reparte en clases, las **grandes órbitas** de las componentes. Ponemos  $\mathcal{G}(U)$  para mentar la gran órbita de la componente  $U$ , la cual, por ser la reunión disjunta de las componentes de  $F(f)$  cuyas trayectorias eventualmente colisionan con las de  $U$ , representa el menor conjunto totalmente invariante con  $U$  en su interior.

De haber necesidad de aludir a la función racional  $f$ , pondremos  $\mathcal{G}_f(U)$ . Esta distinción es necesaria pues si bien se cumple  $\mathcal{G}_{f^{\circ n}}(U) \subset \mathcal{G}_f(U)$ , la inclusión opuesta alberga pocas posibilidades de darse si no presentan una serie de factores favorables.

**Ejemplo 17.11.** La gran órbita bajo  $z \mapsto 1/z^2$  del disco unitario consta, exacto, de dos piezas: la pieza de adentro y la de afuera del círculo unitario.

A continuación algunas propiedades inmediatas. Con la primera se generaliza antiguos resultados (comparar lemas 7.6 y 7.7).

**Lema 17.12.** *La frontera de la gran órbita de una componente de Fatou coincide con el conjunto de Julia.*

*Prueba.* Supongamos, por el absurdo, que  $z \in \partial\mathcal{G}(U)$  no pertenezca al conjunto de Julia. Entonces existirá una componente de Fatou  $V$  para la cual se tiene  $z \in V$ . Por definición de frontera de  $\mathcal{G}(U)$ , la intersección  $V \cap \mathcal{G}(U)$  resulta no vacía. Concluimos que  $V$  está emparentada con  $U$ . Así,  $z$  es un punto interior a  $\mathcal{G}(U)$ , una contradicción.

Recíprocamente, si  $z$  está en el conjunto de Julia, cualquier vecindad  $V$  de  $z$ , por la proposición 9.6, se intersecará eventualmente con  $U$ . Es decir,  $V$  tiene contacto con  $\mathcal{G}(U)$ . Como  $V$  es arbitraria, ello ocurre solamente cuando  $z$  se localiza en  $\partial\mathcal{G}(U)$ .  $\square$

Ahora resaltemos otras propiedades oportunas.

**Proposición 17.13.** *Sea  $f$  racional de grado  $d \geq 2$ . La gran órbita de una componente de Fatou invariante  $U$  se compone de una componente si y solo si la restricción de  $f$  a  $U$  es de grado  $d$ .*

*Prueba.* Esto es trivial pues ambas condiciones afirman que  $U$  es totalmente invariante bajo  $f$ . □

La cuenca de atracción de  $\infty$  para los polinomios de grado al menos 2 es el arquetipo de componente totalmente invariante. En el extremo opuesto, ciertas componentes por características topológicas no pueden ser totalmente invariantes.

**Proposición 17.14.** *Una componente totalmente invariante tiene característica de Euler igual a 1 o  $-\infty$ .*

*Prueba.* Esto está implícito en el lema 17.2. □

La existencia misma de componentes totalmente invariantes tiene implicancias sobre el resto de las componentes de Fatou.

**Lema 17.15.** *Si la dinámica de  $f$  admite una componente de Fatou totalmente invariante, entonces el resto de componentes son simplemente conexas.*

*Prueba.* Esto es un corolario del lema 17.12. Si  $U$  es totalmente invariante, entonces  $\partial U$  coincide con  $J(f)$ . Sea  $V$  otra componente de  $F(f)$  y  $\gamma$  una curva cerrada simple en  $V$ . Entonces puesto que  $V$  y  $U$  no se intersecan,  $U$  queda atrapada a un lado de  $\gamma$ . A ese mismo lado hallamos luego a  $\partial U = J(f)$ . Por lo mismo, el interior en pleno de  $\gamma$  es subconjunto de  $V$ , y  $\gamma$  puede contraerse dentro de  $V$ ; inevitable que sea simplemente conexa. □

**Corolario 17.16.** *En la dinámica racional aparecen máximo dos componentes totalmente invariantes.*

*Prueba.* De haber más de una de ellas, entonces todas las componentes de Fatou serán simplemente conexas en cumplimiento de una aplicación múltiple del lema 17.15. De este modo, el lema 17.2 indica que cada componente invariante contiene  $d - 1$  puntos críticos. Por la proposición 2.17, dos es el tope. □

**Ejemplo 17.17.** El polinomio  $P(z) = z^2 + 1/4$  (ver ejemplo 9.15) ilustra de modo atípico el corolario anterior: una componente totalmente invariante es superatractora mientras la otra es parabólica.

Ahora contemos las componentes que conforman una gran órbita.

**Proposición 17.18.** *El conjunto de Fatou de una función racional está constituido por una, dos o infinitas componentes.*

*Prueba.* De existir una componente no periódica, al saltar de preimagen en preimagen hacia atrás contamos una cadena interminable de componentes.

La alternativa es que el resto de grandes órbitas sean periódicas. Tomando una de ellas, si reemplazamos  $f$  por cierto iterado, podemos asumir que varias sean invariantes. Según el corolario 17.16, dos es el límite.  $\square$

Una gran órbita con dos componentes aparece en el ejemplo 17.11.

## Cantidad y calidad de componentes en el caso polinomial

En el caso polinomial, la cuenca de atracción de  $\infty$  es única e inconfundible. Sin embargo, poco hemos hablado de su configuración topológica. Por otro lado, si bien las componentes finitas son todas simplemente conexas, jamás hemos tocado el tema de cuántas pueden ser.

**Teorema 17.19.** *Para un polinomio de grado al menos 2, la cuenca de atracción de  $\infty$  es simplemente conexa si y solo si no atrae ningún punto crítico convencional (es decir, finito). De no ser simplemente conexa, su característica de Euler vale  $-\infty$ .*

*Prueba.* En un polinomio de grado  $d$ , el punto  $\infty$  es un punto crítico de multiplicidad  $d - 1$ . De acuerdo con la proposición 17.14, la cuenca  $U_\infty$  —a la que pertenece  $\infty$ —, por ser totalmente invariante, es o bien simplemente conexa o en su defecto tiene característica de Euler  $-\infty$ . Sea  $x$  la cantidad de puntos críticos finitos atraídos por  $\infty$ .

Si la cuenca  $U_\infty$  es simplemente conexa, la fórmula de Riemann-Hurwitz entrega

$$d - 1 + x = d\chi(U_\infty) - \chi(U_\infty) = (d - 1)\chi(U_\infty) = d - 1$$

con lo cual  $x$  vale 0, es decir,  $\infty$  no se atrae ningún punto crítico finito.

A la inversa, supongamos que  $U_\infty$  no contenga puntos críticos finitos. Sea  $U$  la región simplemente conexa del lema 5.4. En este caso respecto a  $P^{-1}(U) \subset U_\infty$  conocemos tres propiedades. Primero, no posee puntos críticos más allá de  $\infty$ . Segundo, contiene a  $U$  por definición. Tercero, es conexo pues cada componente de  $P^{-1}(U)$  carga con una preimagen de  $\infty$ , mas  $\infty$  admite —físicamente hablando— una única preimagen que no

puede fragmentarse. Ahora, dado que  $P : P^{-1}(U) \rightarrow U$  es grado  $d$ , por Riemann-Hurwitz se tiene

$$d - 1 = \chi(U)d - \chi(P^{-1}(U)) = d - \chi(P^{-1}(U))$$

y se concluye que  $P^{-1}(U)$  es conexo y de característica de Euler 1, por dicho motivo, simplemente conexo. Si repetimos el procedimiento, en

$$U \subset P^{-1}(U) \subset \dots \subset P^{-n}(U) \subset \dots$$

aparece una colección creciente de abiertos simplemente conexos. Un argumento topológico conocido descubre en  $U_\infty = \bigcup P^{-n}(U)$  un espacio simplemente conexo.  $\square$

Desde el seno del conjunto lleno de Julia, la lectura no deja de ser elocuente.

**Teorema 17.20.** *Dado un polinomio  $P$  de grado mayor o igual a 2, el conjunto lleno de Julia  $K(P)$  y el conjunto de Julia  $J(P)$  son conexos si y solo si la órbita de todo punto crítico convencional es acotada. Es más, de ser el conjunto de Julia desconexo, tendrá infinitas componentes.*

*Prueba.* El enunciado sostiene que  $U_\infty$ , la cuenca de atracción de  $\infty$ , es simplemente conexa si y solo si no atrae a ningún punto crítico finito. Si  $U_\infty$  no fuese simplemente conexo, dado  $n$ , por el teorema anterior su complemento constaría de al menos  $n$  partes. Cada parte se intersecaría con  $J(P) = \partial U_\infty$ , con lo que  $J(P)$  tendría por lo pronto  $n$  componentes. Como  $n$  es arbitrario,  $J(P)$  tiene infinitas componentes.  $\square$

**Ejercicio 17.21.** Demuestre que la órbita de 0 en la dinámica de  $z \mapsto f(z) = z^2 - 6$  escapa a  $\infty$ . Concluya que el conjunto de Julia de este polinomio consta de infinitas componentes. [Sugerencia: piense en  $f$  como una función de variable real.]

La dinámica de  $z \mapsto z^2 - 2$  no admite componentes finitas, la de  $z \mapsto z^3$  admite una (el disco), la de  $z \mapsto z^2 - 1$  admite al menos 2 (ver figura 5).

**Teorema 17.22.** *El número de componentes de Fatou finitas para un polinomio de grado al menos 2 es cero, uno o infinito.*

*Prueba.* Si la cuenca de atracción de infinito va en cuenta aparte, esto es una lectura actualizada de la proposición 17.18.  $\square$



## 18 El conjunto de Mandelbrot

Ocasionalmente puede ser útil trabajar no con uno sino con múltiples sistemas dinámicos para especular acerca de propiedades conjuntas. Esto se concretiza en la práctica con la introducción de un parámetro en la función por iterar.

A modo de ejemplo, con  $c$  actuando de parámetro complejo, pensemos en la familia cuadrática de sistemas dinámicos  $z \mapsto P_c(z) = z^2 + c$ . Esta familia goza de la propiedad de tener un punto crítico colectivo en el origen. Por caracterizaciones anteriores (ver teorema 17.20), el conjunto de Julia  $J_c$  de  $P_c$  será conexo siempre y cuando la órbita de 0 por iteración no se escurra a  $\infty$ . Así, **el conjunto de Mandelbrot**  $\mathcal{M}$  lo definimos como el conjunto de parámetros complejos  $c$  para los cuales una iteración tipo  $z_{n+1} = z_n^2 + c$  activada desde el punto crítico  $z_0 = 0$  permanece acotada.



FIGURA 17. *El conjunto de Mandelbrot y detalles cerca de la cúspide  $c = 1/4$ .*

Cuando uno contempla figuras del conjunto de Mandelbrot (ver figura 17), resalta una región conexa (propiedad rigurosamente demostrable) constituida por “filamentos” y “burbujas”. Las componentes hábiles de ser captadas por algún procedimiento están siempre vinculadas a parámetros que albergan puntos periódicos atractores, las llamadas componentes hiperbólicas. Conjeturalmente ello es la constante, aunque la demostración de este hecho sigue eludiendo a todos los expertos del área.

El comportamiento cualitativo de los sistemas dinámicos que pertenecen a la misma componente conexa del conjunto de Mandelbrot es estructuralmente estable. Entre todos y cada uno de los parámetros de la misma componente —sea hiperbólica o no— se puede establecer una conjugación dinámica para todo  $z$  en el conjunto de Julia, es decir en  $J_c$ . Si bien esta manera de seguirle la pista a los puntos no es diferenciable, pone en evidencia

bondades analíticas que están más allá del quehacer continuo. Esto es así hasta tal punto que muchos autores interpretan el fenómeno como una suerte de teorema de la función implícita en la categoría cuasiconforme. Esto es válido en el caso hiperbólico y también en un —improbable— caso no hiperbólico.

Las primeras propiedades del conjunto de Mandelbrot son nada intrincadas y quedan como tarea para el lector.

**Ejercicio 18.1.** Demuestre que el conjunto de Mandelbrot es simétrico bajo reflexión en el eje real. [Sugerencia: ¿en qué se asemeja el conjunto de Julia de  $P_c$  al conjunto de Julia de  $P_{\bar{c}}$ ?]

**Ejercicio 18.2.** Demuestre que la intersección del conjunto de Mandelbrot con el eje real arroja el intervalo  $[-2, 0.25]$ . [Sugerencia: grafique la parábola  $y = P_c(x)$  y analice cuáles valores reales escapan a  $\infty$ .]

En la figura 17 enfoquémonos en la cardioide interna. Esta está asociada a parámetros que pertrechan un punto fijo atractor. Como los atractores capturan puntos críticos (y acá es donde entra a tallar  $P'(0) = 0$ ), estos parámetros pertenecen al conjunto de Mandelbrot.

Los puntos fijos de  $P_c$  están situados en  $1/2 \pm \sqrt{1-4c}/2$ , las soluciones de  $z^2 + c = z$ . En esta familia cuadrática el multiplicador en un punto fijo  $z_0$  está dado por  $P'(z_0) = 2z_0$ . Por consiguiente  $P_c$  admite un atractor simple si y solo si cumple  $1 \pm \sqrt{1-4c} = \lambda \in \mathbb{D}$ . Despejemos

$$c = \frac{1 - (1 - \lambda)^2}{4} = \frac{2\lambda - \lambda^2}{4},$$

en función del multiplicador. Por ejemplo  $\lambda = 0$  (el superatractor) figura en  $c = 0$ , mientras  $\lambda = 1$  (un parabólico), lo hace en  $c = 1/4$ . Por otro lado, con  $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ , se parametriza la cardioide vía  $\theta \mapsto (2e^{2\pi i\theta} - e^{4\pi i\theta})/4$ .

Otra componente de fácil descripción es aquella relacionada con atractores de periodo 2. Los puntos de periodo exactamente 2 son aquellos que satisfacen  $P^{\circ 2}(z) = z$  mas no así  $P(z) = z$ . Es decir, buscamos soluciones de la ecuación

$$z^2 + z + (c + 1) = \frac{(z^2 + c)^2 + c - z}{z^2 + c - z} = \frac{P^{\circ 2}(z) - z}{P(z) - z} = 0,$$

digamos  $z_0$  y  $z_1$ . Como  $z_0$  tiene periodo 2, su imagen comparte la misma propiedad. Sin embargo, en principio  $z_0$  no es un punto fijo, por lo que  $P(z_0)$ , su imagen, debe satisfacer

la misma ecuación de referencia, y resulta igual a  $z_1$ . Damos espacio a un solitario ciclo de orden 2 descrito explícitamente por  $z_0 \mapsto z_1 \mapsto z_0$ . El multiplicador en  $z_0$  vale

$$\lambda = (P^{\circ 2})'(z_0) = P'(z_0)P'(P(z_0)) = P'(z_0)P'(z_1) = 4z_0z_1 = 4(c+1),$$

donde la última igualdad refleja la propiedad que el producto de las raíces de la ecuación (es decir  $z_0z_1$ ) vale  $c+1$ . El conjunto de parámetros en el conjunto de Mandelbrot con un ciclo atractor de orden 2 viene dado por el disco  $|c+1| < 1/4$ .

El lector atento puede objetar que parte del análisis anterior se tambalea para el parámetro  $c = -3/4$ . Hagamos entonces un análisis independiente para él. La ecuación  $z^2 - 3/4 = z$  (la que detecta puntos fijos) arroja  $z = 3/2$  y  $z = -1/2$  como solución; por ahí no hay traba. La ecuación  $z^2 + z + 1/4$ , por su parte, arroja en  $z = -1/2$  solución doble. Queda entonces resuelto el enigma que representa  $-1/2$  como punto periódico parabólico. Como punto fijo, el multiplicador vale  $-1$  y se le invoca apenas una vez. Como punto de orden 2, empero, el multiplicador vale 1 y, por lo explicado en el encabezado del capítulo 12, debe ser contabilizado al menos dos veces como punto de periodo 2.

Ninguna otra componente está cercada por una curva de fórmula cerrada. Por ejemplo, la ecuación que define un punto de periodo 3 tiene, en nuestro caso, grado 8. No obstante, al  $P(z) - z$  representar un factor cuadrático de la ecuación, queda flotando un factor de grado 6. Las seis soluciones de esta ecuación, nos guste o no, configuran dos paquetes de tres ciclos periódicos cada uno. Por desgracia, ellos son imposibles de determinar salvo numéricamente, y ello siempre y cuando ya conozcamos el parámetro.

Estas componentes hiperbólicas están asociadas con multiplicadores  $\lambda$  sujetos a  $|\lambda| < 1$ . Para cierto parámetro dentro de ella este invariante valdrá 0. Pero ciclos superatractivos son órbitas de un punto crítico, y esto significa, para un ciclo de orden 3, que tal parámetro cae dentro de un lazo cerrado

$$0 \mapsto c \mapsto c^2 + c \mapsto (c^2 + c)^2 + c = 0,$$

y por tal razón es solución de

$$c(c^3 + 2c^2 + c + 1) = 0.$$

(El factor  $c$  es ubicuo: de cumplirse  $P_c^{\circ n}(0) = 0$  mas no  $P_c(0) = 0$ , tras dividir  $P_c^{\circ n}(0)$  entre  $P_c(0)$ , recién luego es confiable igualar a 0; algo similar ocurre si deseamos periodo 10 —pero no 5 ni 2—.)

Para no dilatar la trama, estas raíces están ubicadas en  $c \approx -0.12 \pm 0.74i$  y  $c \approx -1.76$ , aproximadamente. Con estos avatares ubicamos, en  $z_0 = 0 \mapsto z_1 = c \mapsto z_2 = c^2 + c \mapsto 0$ , una órbita periódica superatractora.

Ahora debemos recurrir al teorema de la función implícita para determinar la órbita atractora de orden 3 para cada  $c$  cercano a estos valores referenciales. En concreto, en la ecuación  $P_c^{\circ 3}(z) - z = 0$  nos compete despejar  $z$  (el punto de periodo 3) en función del parámetro  $c$  cerca de una solución conocida. Ello será una genuina aspiración en tanto se tenga

$$\frac{\partial}{\partial z}(P_c^{\circ 3}(z) - z) = (P_c^{\circ 3}(z) - z)' = 0$$

para una pareja  $c_0, z_0$  específica. Ello es bastante familiar: que la derivada de  $P_{c_0}^{\circ 3}(z)$  valga 1 en  $z_0$  es señal de que en  $z_0$  hay un punto parabólico de multiplicador igual a 1.

Lo positivo, a grandes rasgos, es reincidente. Las órbitas de periodo 3 superatractoras distan de ser parabólicas, y podremos seguir su huella mediante el teorema de la función implícita. Como el multiplicador depende de manera continua (incluso diferenciable) en las órbitas, y estas son sensibles al parámetro, podremos despejar el multiplicador en función de  $c$  tan pronto rehuyamos las órbitas parabólicas del mismo periodo.

Lo aparentemente negativo podemos voltearlo a nuestro favor. Indisputablemente, en ciertos puntos parabólicos de orden 3 no aplica el teorema de la función implícita, pues multiplicador 1 es síntoma de multiplicidad algebraica. Cabe preguntarnos entonces, ¿bajo qué circunstancias un punto de orden 3 es múltiple? Y hay dos respuestas que capturan nuestra atención: o bien los tres puntos de una misma órbita se amalgaman en uno solo, o en su defecto dos órbitas distintas de periodo 3 impactan y, debido a ello, se confunden.

En el primer caso, cuando un ciclo de orden 3 colapsa y se contrae a un punto, digamos  $\hat{z}$ , este súbitamente pasa a tener orden 1, es decir, tórnase punto fijo. Pongamos  $\lambda = P_c'(\hat{z})$ . Ya que  $\hat{z}$  como punto de periodo 3 cuenta por muchos, se ha de tener  $(P^{\circ 3})'(\hat{z}) = 1$ ; es decir se cumplirá  $\lambda^3 = 1$ . Acá aparecen tres posibilidades. Podemos descartar pronto  $\lambda = 1$  pues cuando el multiplicador de un punto fijo es 1, en gracia a la fórmula desplegada arriba,  $c$  vale  $1/4$  y el punto fijo se sitúa en  $\hat{z} = 1/2$ . Con todo, un ejercicio numérico (tedioso a no dudar) muestra que para este parámetro hay dos órbitas distintas de periodo 3, ambas simples. Por ello, este parámetro escapa a nuestra esfera de competencia. Para  $\lambda = e^{2\pi i/3}$  tenemos  $c \approx -0.125 + 0.649519i$ , y  $\hat{z} = \lambda/2$ . Este parámetro  $c$  pertenece a la clausura de la cardioide central del conjunto de Mandelbrot y, a su vez, a la adherencia de una de las componentes asociadas a ciclos atractores de orden 3. En la figura 18 podemos distinguir, a la izquierda, cómo luce el conjunto de Mandelbrot alrededor de este parámetro  $c$ , y en

la figura 19, el correspondiente conjunto lleno de Julia parabólico. Con  $\lambda = e^{-2\pi i/3}$  el parámetro es el conjugado complejo del recién analizado y no hay nada nuevo digno de ser agregado (comparar ejercicio 18.1).

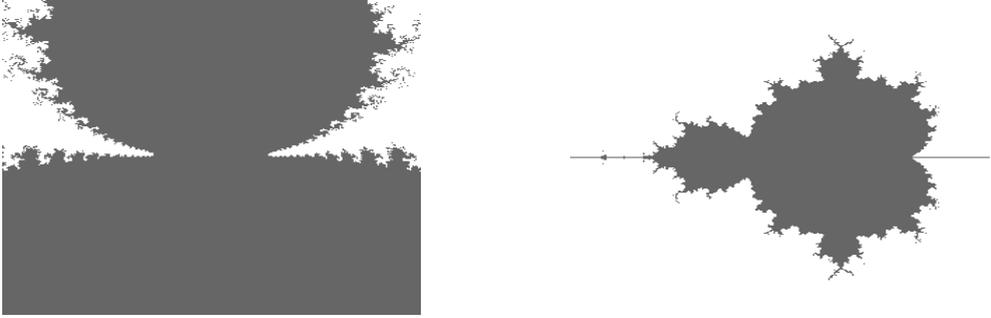


FIGURA 18. El conjunto de Mandelbrot magnificado cerca de  $c \approx -0.125 + 0.649519i$  y de  $c = -1.75$ . ¿Cualquier parecido con otra realidad será pura coincidencia?

La otra cara de la moneda muestra a dos órbitas de periodo 3 embistiendo una contra la otra. Ello ocurre para el parámetro  $c = -1.75$ . En esta ocasión, en la ecuación de grado 6 —que determina los puntos de periodo 3— aparecen tres raíces dobles. El polinomio es  $z^6 + z^5 - 4.25z^4 - 2.5z^3 + 4.9375z^2 + 0.5625z + 0.015625 = (z^3 + 0.5z^2 - 2.25z - 0.125)^2$ .

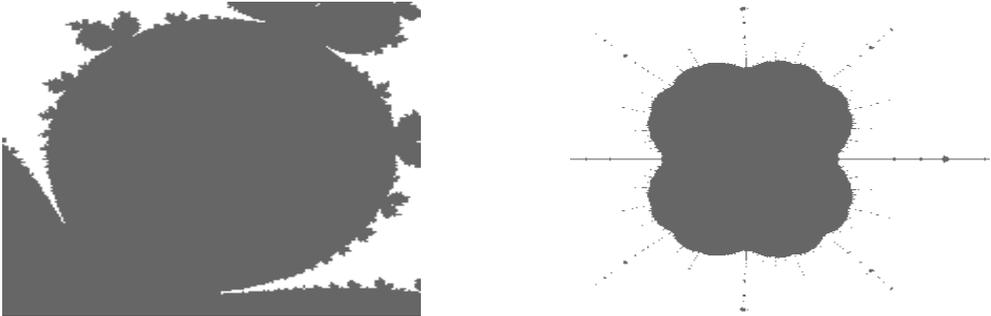


FIGURA 19. Un zoom alrededor de los valores críticos de los conjuntos llenos de Julia parabólicos con  $c \approx -0.125 + 0.649519i$  y  $c = -1.75$ .

Ahora una pregunta delicada. ¿Y si el periodo de interés fuese 10? Bueno, los puntos periódicos primitivos de orden 10 están impedidos de tener orden 1, 2 o 5.

**Ejercicio 18.3.** Justifique la siguiente línea argumental. La ecuación que define los puntos de orden  $n$  tiene grado  $2^n$ . Los puntos fijos son todos primitivos; por tanto la ecuación

primitiva para puntos fijos es de grado 2. Los puntos periódicos primitivos no tienen grado 1, y la ecuación primitiva para puntos de orden 2 es de grado  $4 - 2 = 2$ . Los puntos periódicos primitivos de grado 5 son las soluciones de una ecuación de grado  $2^5 - 2 = 30$ . Los puntos primitivos de grado 10 no tienen periodo 1,2,5, y aparecen en una ecuación de grado  $2^{10} - 2 - 2 - 30 = 1024 - 2 - 2 - 30 = 990$ .

Cuando  $n$  tiene muchos factores (incluso potencias de primos), ¿cómo generalizamos?

Definitivamente abundan las órbitas primitivas de orden 10. Pero, ¿qué colisiones entre ellas son admisibles? Distinguiamos dos tipos diferenciados: órbitas distintas estrellándose una contra otra y, admirablemente, una órbita estorbándose a sí misma, es decir, varios puntos de una órbita fusionándose en uno solo para reducir así el periodo efectivo. En el segundo caso, para orden 10 reconocemos tres subtipos: los diez puntos se asocian de a dos, de a cinco, o de a diez, para aparecer en 5, 2 o 1 grupos, respectivamente. Lo curioso es que todo esto se lee, con pericia, del conjunto de Mandelbrot.

Hay un sinnúmero de propiedades interesantes del conjunto de Mandelbrot. Muchas se basan en el conocimiento específico que poseamos de la estructura de los conjuntos llenos de Julia  $K(P_c)$ . Como muestra probamos algunos hechos concretos.

**Lema 18.4.** *Cuando  $|z| > 2$ , la condición  $|z| \geq |c|$  implica  $|P_c(z)| > |z|$ . De ser así, el punto  $z$  pertenece a la cuenca de atracción de  $\infty$ .*

*Prueba.* Al manipular las desigualdades  $|z| > 2$  y  $|c/z| \leq 1$  con la desigualdad triangular se pasa a  $|z + c/z| > 1$ , es decir a  $|P_c(z)| = |z^2 + c| > |z| > 2$ .

Para la segunda parte asumamos se tiene  $|z_0| > 2$  y  $|z_0| > c$ . Entonces, por inducción tenemos también  $|z_n| > \dots > |z_1| > |z_0| \geq \max\{2, |c|\}$ . Por ser creciente, la secuencia  $|z_n|$  converge, digamos a  $r \geq |z_0|$ . Si  $r$  es un valor finito, entonces podemos extraer una subsecuencia  $z_{n_k}$  convergente a  $\hat{z} \in \mathbb{C}$ , que, no obstante satisface  $|\hat{z}| = \lim |z_n| = r \geq |z_0|$ . Esto es imposible pues por la primera parte debemos tener  $|P_c(\hat{z})| > |\hat{z}| = r$ , mientras por la definición de  $r$  logramos  $|P_c(\hat{z})| = \lim |z_{n_k+1}| = r$ . En consecuencia  $r$  debe ser infinito.  $\square$

**Corolario 18.5.** *El conjunto de Mandelbrot cae en el disco cerrado de radio 2.*

*Prueba.* Cuando se satisface  $|c| > 2$ , el lema anterior es aplicable con  $z = c$ , y  $c$  es atraído a  $\infty$ . Pero  $c = P_c(0)$  cae en la esfera de influencia de  $\infty$  si y solo si lo mismo sucede con el punto 0.  $\square$

El siguiente lema técnico es indispensable para probar que el conjunto de Mandelbrot es compacto.

**Proposición 18.6.** *Un parámetro  $c$  pertenece a  $\mathcal{M}$  si y solo si la órbita bajo iteración del punto crítico está contenida en el disco cerrado de radio 2.*

*Prueba.* Sea  $0, c = P_c(0), P_c^{\circ 2}(0), \dots$  la órbita del punto crítico. Si  $|c|$  es mayor que 2, entonces  $c$  no pertenece al conjunto de Mandelbrot. Si  $|c|$  es menor o igual 2 y alguno de estos valores, digamos  $P_c^{\circ n}(0)$ , satisface  $|P_c^{\circ n}(0)| > 2$ , entonces se tiene  $|P_c^{\circ n}(0)| > 2 \geq |c|$ . Impulsada por el lema 18.4, la secuencia  $P_c^{\circ n}(0)$  escapa a  $\infty$ . Así,  $c$  no pertenece a  $\mathcal{M}$ .

Recíprocamente, si la órbita del punto crítico cae en el disco de radio 2, entonces resulta acotada, y  $c$ , por definición, pertenece al conjunto de Mandelbrot.  $\square$

**Corolario 18.7.** *El conjunto de Mandelbrot es cerrado.*

*Prueba.* Sea  $c_k \in \mathcal{M}$  una secuencia que converge a  $c$ . Por el criterio de la proposición 18.6 es suficiente constatar que para todo  $n$  el iterado  $P_c^{\circ n}(0)$  es menor o igual, en norma, a 2. Pero esto es sencillo: por continuidad, para un  $n$  fijo se tiene que  $P_{c_k}^{\circ n}(0)$  converge a  $P_c^{\circ n}(0)$  (con  $k$ ). Como por la proposición 18.6 se cumple  $|P_{c_k}^{\circ n}(0)| \leq 2$ , hemos confirmado lo anunciado.  $\square$

Podemos relatarles mucho de la dinámica polinomial, pero en algún momento hay que poner un punto final. Este es el momento esperado. Confiamos en haber creado la atmósfera propicia para picar la curiosidad del lector con esta introducción al tema.



# Índice temático

Anillo de Herman	183
Atractor	74, 78, 95, 107, 115, 117, 119, 173, 189
Cardioide	133, 190, 192
Componente de Fatou	92, 102, 108, 128, 133, 161, 175, 179, 180, 184
Componente invariante	108, 161, 173, 184, 186
Conjunto de Julia	91, 95, 101-108, 143-147, 184, 189
Conjunto de Fatou	91, 95, 107, 112, 134, 179
Conjunto de Mandelbrot	189-195
Conjunto excepcional	101-103, 156
Conjunto invariante	29, 83, 114, 120, 123, 127, 131, 133, 184, 186
Conjunto lleno de Julia	83, 86, 89, 91, 187
Conjunto totalmente invariante	72, 77, 83, 84, 88, 92, 93, 95, 101, 151
Coordenada de Böttcher	119, 177
Coordenada de Koenigs	115
Cuenca	72, 77, 83, 84, 95, 107, 115, 123, 156, 176, 183, 186
Discos de Siegel	111, 143, 161, 175, 183
Dominio errante	179
Espacio de parametros	45, 144, 189
Espacio de recubrimiento	47-62, 68, 109, 112, 119, 136, 161, 174, 181
Familia normal	65, 91
Fórmula de Riemann-Hurwitz	42, 176, 186
Función analítica	15-17
Función de Lattès	109
Función propia	37-47, 136, 151, 161
Grado local	31, 42
Gran órbita	83-85, 101, 104, 184
Lema de Schwarz	20, 111, 115, 152
Lema del caracol	163-172
Linealización	111, 115, 117, 140, 147, 164, 176
Método de Newton	97-99

Multiplicador	34, 76, 79, 93, 106, 111, 163, 190, 192
Multiplicidad	17, 31, 44, 47, 66, 80, 98, 123, 154, 192
Neutral	94, 106, 112, 144
Órbita	83, 101, 108, 113, 130, 162, 173, 187, 189
Órbita periódica	35, 93, 96, 102, 106, 115, 123, 143, 191
Pétalo	129-135, 136, 140
Producto de Blashke	151-160, 161
Punto atractor	79, 81, 83, 94, 136, 143, 144
Punto crítico	31, 32, 42, 44, 94, 98, 101, 111, 113, 117, 119, 136, 154, 161, 176, 186, 189, 195
Puntos de Cremer	112
Puntos de Siegel	112, 142, 180
Punto fijo	20, 34, 55, 77, 79, 80, 86, 95, 105, 111, 154, 161, 164, 173, 190
Punto parabólico	79, 94, 104, 106-107, 112, 123-142, 144, 163, 192
Punto periódico	34, 93-96, 104-106, 108, 112, 143-147, 155, 174, 191
Punto repulsor	78, 94, 96, 109, 115, 117, 157
Relación funcional de Abel	139
Superatractores	71, 74, 77, 94, 115, 119, 192
Teorema de Montel	63-70, 91, 102, 174
Teorema de uniformización de Riemann	19, 47, 58
Transformación de Möbius	20-31, 58, 63
Transformaciones de cubierta	54-58, 174, 181-182

## Referencias

- [1] L. Carleson & T. Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer, 1993.
- [2] R. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, 1989.
- [3] H. Farkas & I. Kra, *Riemann Surfaces*, Springer, 1980.
- [4] S. Lang, *Complex Analysis*, Addison-Wesley, 1977.
- [5] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable, Introductory Lectures*, Vieweg, 1999.
- [6] J. Munkres, *Topology: A first course*, Prentice-Hall, 1975.
- [7] A. Poirier, *Aspectos geométricos del análisis complejo*, Fondo Editorial PUCP, 2005.
- [8] M. Shishikura, *On the quasiconformal surgery of rational functions*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **20**, 1-29.
- [9] D. Sullivan, *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I, solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains*, Ann. Math. **122**, 401-418.

Se terminó de imprimir en  
los talleres gráficos de  
Tarea Asociación Gráfica Educativa  
Psje. María Auxiliadora 156, Breña  
Correo e.: [tareagrafica@tareagrafica.com](mailto:tareagrafica@tareagrafica.com)  
Teléfono: 332-3229 Fax: 424-1582  
Se utilizaron caracteres  
CMR10 en 11 puntos  
para el cuerpo del texto  
febrero 2016 Lima - Perú