DEPARTAMENTO
DE CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

CÁLCULO 3

TEXTO GUÍA DEL CURSO

Norberto Jaime Chau Pérez

2013

Cálculo 3. Texto guía del curso
Norberto Jaime Chau Pérez

Revisado por:
El Director y la Comisiónde Publicaciones del Departamento Académico de Ciencias

Av. Universitaria 1801, San Miguel
Teléfono: 6262000
Correo electrónico: publicacionesdac@pucp.edu.pe
http://www.pucp.edu.pe

Primera edición: Febrero de 2013
500 ejemplares

ISBN: **978-612-46343-1-4**
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú: **2013-02946**

Impreso en Editorial Moshera S.R.L.
Jr. Tacna 2969, San Martín de Porres
Telefax: 567-9299

Índice

Presentación

El texto ha sido diseñado para brindar a los estudiantes de carreras de ciencias e ingeniería una revisión de conceptos básicos que serán requisitos para futuros cursos de varias variables. La finalidad del mismo es que el estudiante adquiera las herramientas necesarias para aplicar, en la resolución de ejercicios y problemas, los conceptos y propiedades básicas de la Geometría analítica vectorial, Introducción al Álgebra Lineal y Cálculo Diferencial e Integral en varias variables.

Este libro se caracteriza por brindar un tratamiento dinámico a los contenidos matemáticos lo que see refleja al anteponer, en lo posible, a las definiciones formales, situaciones que justifiquen su presentación y la formalización de los objetos matemáticos involucrados. Luego de este acercamiento a las definiciones y propiedades, se trabajan problemas de mayor complejidad para cuya solución se requiere la comprensión, conexión y aplicación de los resultados anteriores.

Este libro de Cálculo vectorial elaborado a partir de mis notas de clases, para alumnos de Cálculo 3 del tercer ciclo de Estudios Generales Ciencias de la PUCP, tienen una gran variedad y profundidad de problemas en cada capítulo, gráficos, demostración de los teoremas básicos, muchos ejemplos relacionados con la teoría, apéndices para reforzar temas teóricos de la geometría analítica vectorial en le espacio,del Análisis Matemático en varias variables y uso de las computadoras en la gráfica de funciones cn todas sus características.

Todos los ejemplos y problemas se basan en evaluaciones pasadas del curso de Cálculo 3 y Análisis Matemático 3 de Estudios Generales Ciencias. Existen muchos problemas basados en gráficos que enfatizan la comprensión conceptual y el uso de las computadoras. Los ejemplos y problemas de ingeniería, geometría y física tienen un papel predominante.

Se cuenta con bastantes ejemplos desarrollados paso a paso a través de los cuales el estudiante identificará las técnicas a seguir para resolver los tipos de tareas propuestas, así como las justificaciones para cada una de ellas.

Norberto Chau Pérez
Julio de 2012

Capítulo 1

Geometría vectorial en el espacio

1.1 Introducción al espacio $\mathbb{R}^n$

1.1.1 Vectores en $\mathbb{R}^n$.

El conjunto de las n-uplas de número reales, $n \geq 1$, se representa por $\mathbb{R}^n$; es decir

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ para } i = 1, ..., n\}.$$

Los elementos de $\mathbb{R}^n$ serán llamados *vectores* y al vector $(a_1, ..., a_n)$ lo denotaremos por A. El número a_i se llama i-ésima componente del vector A.

En $\mathbb{R}^n$ definimos una relación de igualdad y dos operaciones:

1. *Igualdad de vectores.* Si $A = (a_1, ..., a_n)$ y $B = (b_1, ..., b_n)$ son vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces
$$A = B \Leftrightarrow a_i = b_i \text{ para todo } i = 1, ..., n$$

2. *Adición de vectores.* Si $A = (a_1, ..., a_n)$ y $B = (b_1, ..., b_n)$ son vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces
$$A + B = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n).$$

3. *Multiplicación de vectores por escalares.* Si α es un número real y $A = (a_1, ..., a_n)$ es un vector en $\mathbb{R}^n$, entonces
$$\alpha A = (\alpha a_1, ..., \alpha a_n).$$

Proposición 1.1 *El conjunto $\mathbb{R}^n$ con la relación de igualdad y las operaciones de adición de vectores y multiplicación de vectores por números reales, se llama espacio vectorial real n-dimensional.*

1.$\forall A, B \in \mathbf{R}^n$ *se cumple que* $A + B \in \mathbf{R}^n$.

2.$\forall A, B \in \mathbf{R}^n$, $A + B = B + A$.

3.$\forall A, B, C \in \mathbf{R}^n$, $A + (B + C) = (A + B) + C$.

4.$\exists ! \theta \in \mathbf{R}^n, \forall A \in \mathbf{R}^n$:
$$A + \theta = A.$$

El elemento θ de $\mathbf{R}^n$, llamado vector cero, está dado por

$$\theta = (0, ..., 0).$$

5.$\forall A \in \mathbf{R}^n, \exists ! \, (-A) \in \mathbf{R}^n$:
$$A + (-A) = \theta.$$

El vector $-A$, llamado opuesto de A, es

$$-A = (-1)\,A.$$

6. $\forall A \in \mathbf{R}^n, \forall \alpha \in \mathbf{R},\ \alpha A \in \mathbf{R}^n.$

7. $\forall A \in \mathbf{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R},\ (\alpha + \beta)\,A = \alpha A + \beta A.$

8. $\forall A, B \in \mathbf{R}^n, \forall \alpha \in \mathbf{R},\ \alpha\,(A + B) = \alpha A + \alpha B.$

9. $\forall A \in \mathbf{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R},\ \alpha\,(\beta A) = (\alpha\beta)\,A.$

10. $\forall A \in \mathbf{R}^n : 1A = A.$

La expresión *espacio vectorial* $\mathbf{R}^n$ se referirá, al espacio $(\mathbf{R}^n, +, \mathbf{R}, \cdot)$ con las operaciones definidas anteriormente. Observar que para $n = 1, 2, 3$ tenemos los conocidos $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ respectivamente.

La sustracción de vectores puede ser definida en términos de la adición del siguiente modo.

Definición 1.1 *Para $A, B \in \mathbb{R}^n$ cualesquiera*

$$A - B = A + (-B)$$

es decir,

$$A - B = (a_1 - b_1, ..., a_n - b_n)\,.$$

Definición 1.2 *Si $A_1, ..., A_m$ son vectores en $\mathbf{R}^n$ y $\alpha_1, ..., \alpha_m$ son escalares, el vector*

$$\alpha_1 A_1 + ... + \alpha_m A_m$$

se llama combinación lineal de los vectores A_i con coeficientes α_i.

En la siguiente proposición, enunciamos algunas propiedades básicas.

Proposición 1.2 *Demostrar que*

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha\theta = \theta,$

2. $\forall A \in \mathbb{R}^n : 0A = \theta,$ *y*

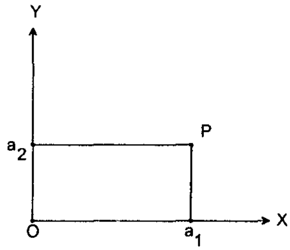
3. $\alpha A = \theta \Rightarrow \alpha = 0$ *o* $A = \theta.$

Representación geométrica de vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

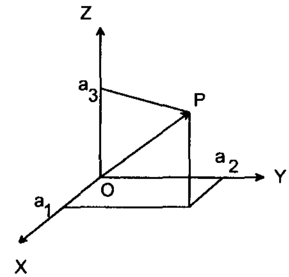
Representación geométrica de un vector. Cada vector en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ puede ser representado gráficamente en el plano o el espacio de la siguiente manera:

a. Como un punto.

b. Como un radio vector. Es decir como flechas con origen en el origen de coordenadas y su extremo en un punto del plano o del espacio con coordenadas las componentes del vector

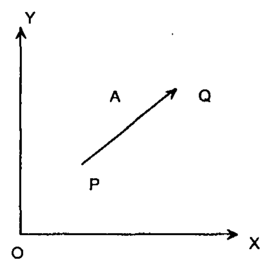


$P = (a_1, a_2)$



$P = (a_1, a_2, a_3)$

c. Como una flecha o segmento dirigido. El origen es un punto P cualquiera y el extremo será el punto Q tal que $A = Q - P$. Por ejemplo, en el plano se tiene



$A = Q - P$

1.1.2 Paralelismo de vectores.

Definición 1.3 *Sean A y B dos vectores en $\mathbb{R}^n$, decimos que A es paralelo a B, si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $B = \alpha A$.*

Observemos que el vector cero es paralelo a todos los vectores, pues $\theta = 0A$ para todo $A \in \mathbf{R}^n$.

Definición 1.4 *Sean A y B dos vectores no nulos en $\mathbb{R}^n$, si A es paralelo a B decimos que:*

1. *tienen sentidos iguales si $B = \alpha A$ donde $\alpha > 0$, y*
2. *tienen sentidos opuestos si $B = \alpha A$ con $\alpha < 0$.*

1.1.3 Producto escalar y norma.

Definición 1.5 *Dados los vectores $A = (a_1, ..., a_n)$ y $B = (b_1, ..., b_n)$ en $\mathbb{R}^n$, el producto escalar de A y B, representado por $A \cdot B$, es el número real*

$$A \cdot B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

En particular, si $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$ en $\mathbb{R}^2$

$$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

y si $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ en $\mathbb{R}^3$

$$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Nótese que el producto escalar de dos vectores es un número real y no es un vector. Las propiedades fundamentales del producto escalar son:

Teorema 1.1 *Para $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$*

1. $A \cdot B = B \cdot A$

2. $\alpha (A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = \alpha (A \cdot B)$

3. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

4. $A \cdot A \geq 0$, $A \cdot A = 0$ *si y sólo si* $A = \theta$

Definición 1.6 *La norma (o módulo) de un vector $A = (a_1, ..., a_n)$ en $\mathbb{R}^n$, representada por $\|A\|$, es el número real*

$$\|A\| = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

En particular, si $A = (a_1, a_2)$ en $\mathbb{R}^2$

$$\|A\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

y si $A = (a_1, a_2, a_3)$ en $\mathbb{R}^3$

$$\|A\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

A $\mathbb{R}^n$ con la norma que acabamos de definir se le llama *espacio vectorial euclideano n-dimensional.* Las propiedades fundamentales de la norma de un vector son enunciadas a continuación.

Proposición 1.3 *Para $A, B \in \mathbb{R}^n$ y para $\alpha \in \mathbb{R}$ cualesquiera se cumplen:*

1. $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$.

3. (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

$$|A \cdot B| \leq \|A\| \, \|B\| .$$

4. (Desigualdad triangular)

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| .$$

La desigualdad triangular corresponde al teorema geométrico: la longitud de un lado de un triángulo no degenerado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados.

Definición 1.7 *1. Un vector de norma igual a la unidad se llama vector unitario.*

2. El versor de un vector es un vector unitario con la misma dirección y sentido del vector.

Proposición 1.4 *Si A es un vector no nulo en $\mathbb{R}^n$, su versor es el vector*

$$U_A = \frac{A}{\|A\|}.$$

1.1.4 Ortogonalidad de vectores.

Sean A y B dos vectores no nulos en $\mathbb{R}^n$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz $\left(\frac{|A\cdot B|}{\|A\|\|B\|}\right)^2 \leq 1$, de donde $-1 \leq \frac{A\cdot B}{\|A\|\|B\|} \leq 1$. Por lo tanto, existe un único ángulo $\varphi \in [0,\pi]$ tal que $\cos(\varphi) = \frac{A\cdot B}{\|A\|\|B\|}$.

Definición 1.8 *El ángulo que forman los vectores no nulos A y B en $\mathbb{R}^n$, es el número real $\varphi \in [0,\pi]$ tal que*

$$\cos(\varphi) = \frac{A\cdot B}{\|A\|\,\|B\|}.$$

Definición 1.9 *Sean A y B dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$. Decimos que A es ortogonal a B, si el ángulo que forman es $\frac{\pi}{2}$.*

De acuerdo con la definición de ángulo entre dos vectores,

$$A \text{ es ortogonal a } B \Longleftrightarrow A\cdot B = 0$$

Como $A\cdot B = B\cdot A$, es claro que A ortogonal a B implica que B es ortogonal a A. Por esta razón se usa con frecuencia la expresión *mutuamente ortogonales.* Diremos también que A y B son ortogonales. El vector cero tiene la propiedad de ser ortogonal a todo los vectores.

1.1.5 Proyección ortogonal y componentes.

Definición 1.10 *Sean A y B vectores en $\mathbb{R}^n$ con $B \neq 0$. La proyección ortogonal de A sobre B, denotada $Proy_B A$, es el vector*

$$Proy_B A = \left(\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right) B$$

Definición 1.11 *El número $\dfrac{A\cdot B}{\|B\|}$ se llama componente de A en la dirección de B y se denota $Comp_B A$, es decir*

$$Comp_B A = \frac{A\cdot B}{\|B\|}$$

En consecuencia, la relación entre la proyección y la componente es

$$\text{Proy}_B A = (\text{Comp}_B A)\, U_B,$$

es decir,

1. Si $\text{Comp}_B A > 0$, entonces $\text{Proy}_B A$ tiene el mismo sentido que B, y
2. Si $\text{Comp}_B A < 0$ entonces $\text{Proy}_B A$ y B tiene sentidos opuestos.
3. Si $\text{Comp}_B A = 0$ entonces A y B son ortogonales.

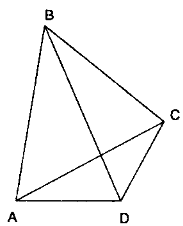
Ejercicios Propuestos

1. Probar que si $A, B \in \mathbb{R}^n$ son vectores no paralelos y
$$\alpha A + \beta B = \theta,$$
entonces $\alpha = \beta = 0$.

2. Sean $A, B \in \mathbb{R}^n$ vectores no paralelos dados, $C = (\alpha + \beta - 1) A + (\alpha + \beta) B$ y $D = (\alpha - \beta) A + (2\alpha - \beta) B$. Hallar los valores de α y β para que se cumpla la relación $C = 3D$.

3. Demuestre que el vector $\|A\| B + \|B\| A$ es paralelo a la bisectriz del ángulo que forman A y B. Hallar un vector unitario en la dirección de dicha bisectriz.

4. En el tetraedro de la figura



$a_1 = \overrightarrow{AD}$, $a_2 = \overrightarrow{CB}$, $a_3 = \overrightarrow{BD}$, $a_4 = \overrightarrow{AC}$, $a_5 = \overrightarrow{CD}$ y $a_6 = \overrightarrow{BA}$. Demostrar que
$$a_1 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_4 + a_5 \cdot a_6 = 0.$$

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$, demostrar que:
   (a) $\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$
   (b) $\|a + b\| \|a - b\| \leq \|a\|^2 + \|b\|^2$
   (c) $\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$
   (d) $\|a + b\| \|a - b\| \leq \|a\|^2 + \|b\|^2$

6. Sean A y B dos vectores unitarios que forman un ángulo θ. Demuestre que $\|A - B\| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$.

7. Halle un vector unitario que forme un ángulo de 45° con el vector $(2, 2, -1)$ y un ángulo de 60° con el vector $(0, 1, -1)$.

8. Los vectores $A, B \in \mathbb{R}^n$ forman un ángulo de 45° y $\|A\| = 3$. ¿Cuál debe ser el valor de $\|B\|$ para que:
   (a) $A - B$ sea perpendicular a A?
   (b) $A + B$ forme un ángulo de 30° con A?

9. Demostrar que dos vectores A y B en $\mathbb{R}^n$ son ortogonales si y sólo si
$$\|A + B\| = \|A - B\|$$

10. **(Teorema de Pitágoras).** Dos vectores A y B en $\mathbb{R}^n$ son ortogonales si y sólo si
$$\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2.$$

1.1.6 Producto vectorial y producto mixto en $\mathbb{R}^3$.

En esta sección introducimos el concepto de producto vectorial entre dos vectores de $\mathbb{R}^3$. Este concepto juega un papel importante en el electromagnetismo como también en la mecánica de fluídos cuando estudiamos los rotacionales de campos vectoriales.

Definición 1.12 *Dados los vectores $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$, el producto vectorial de A y B en ese orden, es el vector $A \times B$ definido por*

$$A \times B = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Proposición 1.5 *$A \times B$ es ortogonal tanto al vector A como al vector B.*
1.$A \times B = -B \times A$
2.$(\alpha A) \times B = \alpha (A \times B)$
3.$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
4.$(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$
5.$\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 - (A \cdot B)^2$
6.$\|A \times B\| = \|A\| \|B\| \sin(\varphi)$ donde φ es el ángulo que forman A y B.
El número $\|A \times B\|$ representa el área del paralelogramo determinado por los vectores A y B.

Proposición 1.6 *Los vectores A y B son paralelos si, y sólo si $A \times B = \theta$.*

Proposición 1.7 *Para $A, B, C \in \mathbf{R}^3$ cualesquiera*

$$A \times (B \times C) = (C \cdot A) B - (B \cdot A) C.$$

Corolario 1.2 *Si A, B y N son vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $A \perp N$ y $B \perp N$, entonces $A \times B \parallel N$.*

Definición 1.13 *Dados los vectores A, B y C, el producto mixto de A, B y C en ese orden, es el número real $[A, B, C]$ definido por*

$$[A, B, C] = (A \times B) \cdot C.$$

Proposición 1.8 *1.Si $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ y $C = (c_1, c_2, c_3)$, entonces*

$$[A, B, C] = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

2.$[A, B, C] = [B, C, A] = [C, A, B]$.
3.$A \cdot (B \times C) = (A \times B) \cdot C$

Proposición 1.9 *1.Si $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ y $C = (c_1, c_2, c_3)$, entonces*

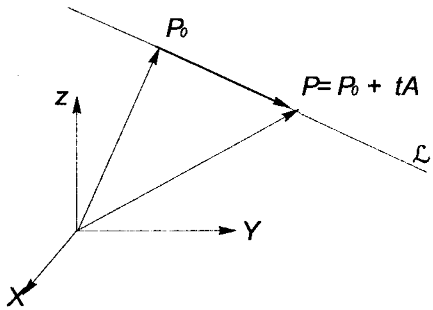
$$[A, B, C] = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

2.$[A, B, C] = [B, C, A] = [C, A, B]$.
3. $A \cdot (B \times C) = (A \times B) \cdot C$

El número $|[A, B, C]|$ representa el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores A, B y C.

1.1.7 Rectas en $\mathbb{R}^3$

Sea A un vector no nulo en $\mathbb{R}^3$. Si P_0 es un punto dado, entonces existe una única recta $\mathcal{L}$ que pasa por P_0 y tiene la dirección de A.



Sea P un punto genérico de la recta $\mathcal{L}$. Se verifica que

$$P = P_0 + \overrightarrow{P_0P}$$

y como $\overrightarrow{P_0P}$ es equivalente a t_0A, para algún $t_0 \in \mathbb{R}$, resulta que

$$P = P_0 + t_0A.$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$ se tiene un punto perteneciente a la recta $\mathcal{L}$. Así

$$\mathcal{L} = \left\{P \in \mathbb{R}^3 : P = P_0 + tA,\ t \in \mathbb{R}\right\}$$

y

$$\mathcal{L} : P = P_0 + tA,\ t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

es la *ecuación vectorial* de la recta $\mathcal{L}$.

Si asumimos que $P = (x, y, z)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $A = (a_1, a_2, a_3)$, sustituyendo en (1) tenemos

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t\,(a_1, a_2, a_3)\,,\ t \in \mathbb{R}$$

de donde

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$$

las que se denominan *ecuaciones paramétricas* de la recta $\mathcal{L}$.

Si las componentes a_1, a_2 y a_3 son distintas de cero, eliminando a t, se obtiene

$$\mathcal{L} : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

que es la *ecuación simétrica de la recta.*

Definición 1.14 *Sean las rectas*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &: P = P_0 + tA,\ t \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{L}_2 &: P = Q_0 + tB,\ t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.Las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas si A es paralelo a B.
2.Las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son perpendiculares si A es ortogonal a B.

Observación 1.1 *1.Si $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$, entonces $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \phi$ o $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$.*
2.Si $\mathcal{L}_1$ no es paralela, entonces $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{Punto\}$ o $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \phi$.

Definición 1.15 *Si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se intersecan, definimos el ángulo entre las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, al ángulo formado por sus respectivos vectores de dirección, es decir,*

$$\theta = \measuredangle(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \measuredangle(A, B)$$

El ángulo θ se calcula mediante la siguiente relación:

$$\cos\theta = \frac{A \cdot B}{\|A\| \, \|B\|}, \quad 0 \leq \theta < \pi.$$

Ejemplo 1.1 *Hallar la ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $Q = (3, 4, 0)$ y corta al eje Z, si se sabe que la distancia del origen de coordenadas a dicha recta $\mathcal{L}$ es 4 unidades.*

Solución
Considere $S = (0, 0, z_0)$ un punto del eje Z.
Sea $\mathcal{L}$ la recta pedida que tiene como vector de dirección $\overrightarrow{QS} = S - Q = (-3, -4, z_0)$.
Por condición del problema:

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}(O) &= 4 \Longleftrightarrow \frac{\left\|\overrightarrow{QO} \times \overrightarrow{QS}\right\|}{\left\|\overrightarrow{QS}\right\|} = 4 \Longrightarrow \frac{\|(-3,-4,0) \times (-3,-4,z_0)\|}{\|(-3,-4,z_0)\|} = 4 \\ \frac{\|(-4z_0, -3z_0, 0)\|}{\sqrt{z_0^2 + 25}} &= 4 \Longrightarrow \frac{\sqrt{25 z_0^2}}{\sqrt{z_0^2 + 25}} = 4 \Longrightarrow z_0 = \pm\frac{20}{3}. \end{aligned}$$

Así, $\overrightarrow{QS} = \left(-3, -4, \pm\frac{20}{3}\right) = -\frac{1}{3}(9, 12, \pm 20)$.
Luego, las ecuaciones de las rectas son :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &: \; P = (3,4,0) + t(9,12,20), t \in \mathbf{R} \\ \text{o} \quad \mathcal{L}' &: \; P = (3,4,0) + t(9,12,-20), t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2 *Un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia*

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z = 3 \\ x + y + z = 1 \end{cases}.$$

tiene un vértice en la recta

$$\mathcal{L} : P = \left(-1, 1, \frac{1}{3}\right) + t \; (2, -1, 1), t \in \mathbf{R}.$$

Hallar dos de sus vértices del triángulo.

Solución

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}.$$

Sea $P_1 \in \mathcal{L}$ vértice del triángulo: $P_1 = \left(-1 + 2t, 1 - t, \frac{1}{3} + t\right)$.
$P_1 \in \mathcal{P} : x + y + z = 1$,entonces $-1 + 2t + 1 - t + \frac{1}{3} + t = 1$, de donde $t = \frac{1}{3}$.Así, $P_1 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.Se observa que $P_1 \in \mathcal{E} : (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 6$, esfera con centro $C = (-1, -1, -1)$.

Considere la recta

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_N &: P = C + t\,N, t \in \mathbf{R},\\
\mathcal{L}_N &: P = (-1,-1,-1) + t\,(1,1,1), t \in \mathbf{R}.
\end{aligned}$$

Sea P_0 el centro de la circunferencia $-$.

$P_0 \in \mathcal{L}_N : P_0 = (-1+t, -1+t, -1+t) \in \mathcal{P} : x+y+z = 1$, de donde $-1+t-1+t-1+t = 1$ entonces $t = \frac{4}{3}$. Así, $P_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Sea $P_2 = (a,b,c) \in \Gamma : \begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 1 \\ a+b+c = 1 \Longrightarrow c = 1-a-b \end{cases}$.

Luego, $\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = \left(a+\frac{1}{3}, b-\frac{2}{3}, c-\frac{2}{3}\right)$

$\overrightarrow{P_1P_0} = P_0 - P_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(2,-1,-1)$ forma un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ con el vector $\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = \left(a+\frac{1}{3}, b-\frac{2}{3}, c-\frac{2}{3}\right)$. Luego,

$$\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}}{\left\|\overrightarrow{P_1P_0}\right\|\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\|} \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(2,-1,-1)\cdot\left(a+\frac{1}{3}, b-\frac{2}{3}, c-\frac{2}{3}\right)}{\|(2,-1,-1)\|\left\|\left(a+\frac{1}{3}, b-\frac{2}{3}, c-\frac{2}{3}\right)\right\|}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2a-b-c+2}{\sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}a-\frac{4}{3}b-\frac{4}{3}c+\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{1}+1}} \Longrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2a-b-(1-a-b)+2}{\sqrt{6}\sqrt{\frac{2}{3}a-\frac{4}{3}b-\frac{4}{3}(1-a-b)+2}}$$

$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a+1}{\sqrt{6}\sqrt{2a+\frac{2}{3}}} \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a+1}{\sqrt{6}\frac{\sqrt{2}\sqrt{3a+1}}{\sqrt{3}}} \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a+1}{2\sqrt{3a+1}} \Longrightarrow$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{3a+1} \Longrightarrow a = \frac{2}{3}.$$

Luego, $P_2 = \left(\frac{2}{3}, b, 1-\frac{2}{3}-b\right) = \left(\frac{2}{3}, b, \frac{1}{3}-b\right)$pertenece a $\Gamma : x^2+y^2+z^2 = 1$, de donde $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + b^2 + \left(\frac{1}{3}-b\right)^2 = 2b^2 - \frac{2}{3}b + \frac{5}{9} = 1 \Longrightarrow 9b^2 - 3b - 2 = 0 : b = -\frac{1}{3}$ o $b = \frac{2}{3}$.

Por tanto, $P_2 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ o $P_2' = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Ejemplo 1.3 *Sea $\mathcal{L}$ la recta que pasa por el punto $M = (12,0,5)$ e interseca al eje Y en el punto N. Hallar la ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}$ si la distancia del origen de coordenadas a dicha recta $\mathcal{L}$ es 12 unidades.*

Solución

Considere $N = (0, y_0, 0)$ un punto del eje Y.

Sea $\mathcal{L}$ la recta pedida que tiene como vector de dirección $\overrightarrow{MN} = N - M = (0,y_0,0) - (12,0,5) = (-12, y_0, -5)$.

Por condición del problema:

$$\begin{aligned}
d_{\mathcal{L}}(O) &= 12 \Longleftrightarrow \frac{\left\|\overrightarrow{MO}\times\overrightarrow{MN}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|} = 12\\
&\Longrightarrow \frac{\|(-12,0,-5)\times(-12,y_0,-5)\|}{\|(-12,y_0,-5)\|} = 12\\
\frac{\|(-5y_0, 0, -12y_0)\|}{\sqrt{y_0^2+169}} &= 12 \Longrightarrow \frac{\sqrt{169y_0^2}}{\sqrt{y_0^2+169}} = 12 \Longrightarrow y_0 = \pm\frac{156}{5}.
\end{aligned}$$

Así, $\overrightarrow{MN} = (-12, y_0, -5) = \left(-12, \pm\frac{156}{5}, -5,\right)$.

Luego, las ecuaciones de las rectas son :

$$\mathcal{L} \quad : \quad P = (12,0,5) + t\left(-12, \frac{156}{5}, -5,\right), t \in \mathbb{R} \quad \text{o}$$

$$\mathcal{L}' \quad : \quad P = (12,0,5) + t\left(-12, -\frac{156}{5}, -5,\right), t \in \mathbb{R}$$

1. Sean

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &: P = P_0 + tA,\ t \in \mathbb{R}\\ \mathcal{L}_2 &: P = Q_0 + tB,\ t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

   Demostrar que $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ si, y sólo si $P_0 \in \mathcal{L}_2$ y A es paralelo a B.

2. Si P_0 y Q_0 son puntos distintos, demostrar que la recta

$$\mathcal{L} : P = P_0 + t\,(Q_0 - P_0)\,,\ t \in \mathbb{R}$$

   pasa por P_0 y Q_0, siendo la única con esta propiedad.

3. Sea $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ un vector no nulo, probar que si B es ortogonal al vector A, entonces $B = \alpha\,(-a_2, a_1)$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Dado el vector $A = (a_1, a_2)$, el vector $(-a_2, a_1)$ será llamado *ortogonal* de A, y se representará por $A^\perp$. Así tenemos que la ecuación de la recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por el punto P_0 y tiene la dirección del vector A también se puede escribir en la forma $\mathcal{L} : (P - P_0) \cdot A^\perp = 0$.

4. La recta $\mathcal{L} : 2x = 4z + 3,\ y = 2z - 5$ se proyecta (ortogonalmente) sobre los planos coordenados. Halle las ecuaciones de las rectas resultantes.

5. Halle la intersección de las rectas $\mathcal{L}_1 : P = (2,1,3) + t\,(1,2,1)$ y $\mathcal{L}_2 : P = (3,1,2) + s\,(-1,1,2)$.

6. Halle la ecuación vectorial de la recta que satisface las tres condiciones siguientes:

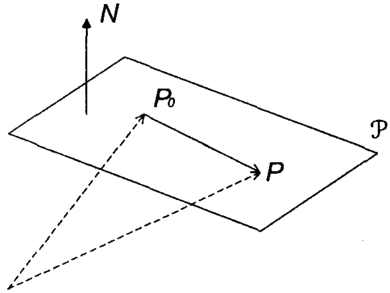
   (a) Pasa por el punto $(3, 4, -5)$.

   (b) Intersecta a la recta $P = (1, 3, -2) + t\,(4, 3, 2)$.

   (c) Es perpendicular a la recta $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-2}{3}$, $z = 5$.

1.1.8 Planos en $\mathbb{R}^3$

Sea N un vector no nulo en $\mathbf{R}^3$. Si P_0 es un punto dado, entonces existe un único plano $\mathcal{P}$ que pasa por P_0 y tiene normal N.



Sea P un punto genérico del plano $\mathcal{P}$. Se verifica que

$$\overrightarrow{P_0P} \perp N$$

y como $\overrightarrow{P_0P} = P - P_0$, resulta que

$$(P - P_0) \cdot N = 0.$$

Así

$$\mathcal{P} = \left\{P \in \mathbb{R}^3 : (P - P_0) \cdot N = 0\right\}$$

y

$$\mathcal{P} : (P - P_0) \cdot N = 0 \tag{2}$$

es la *ecuación normal* del plano $\mathcal{P}$.

Si asumimos que $P = (x, y, z)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $N = (n_1, n_2, n_3)$, sustituyendo en (2) tenemos

$$[(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] \cdot (a, b, c) = 0$$

de donde se obtiene

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$$

que se denomina *ecuación cartesiana* del plano $\mathcal{P}$.

Definición 1.16 *Dada la recta $\mathcal{L} : P = P_0 + tA$, $t \in \mathbb{R}$ y el plano $\mathcal{P} : (P - P_0) \cdot N = 0$. Decimos que la recta $\mathcal{L}$ es paralela al plano*
$\mathcal{P}$ si y solo si A es ortogonal a N.

Observación 1.2 *1.Si $\mathcal{L}$ es paralela al plano $\mathcal{P}$ se tienen los casos :*
(i) $\mathcal{L} \cap \mathcal{P} = \mathcal{L}$
(ii) $\mathcal{L} \cap \mathcal{P} = \phi$.
2. Si $\mathcal{L}$ no es paralela al plano $\mathcal{P}$, entonces $\mathcal{L} \cap \mathcal{P} = \{Punto\}$

Definición 1.17 *Sean los planos $\mathcal{P}_1 : (P - P_0) \cdot N_1 = 0$ y $\mathcal{P}_2 : (P - Q_0) \cdot N_2 = 0$. Decimos que :*
(a)$\mathcal{P}_1$ es paralela al plano $\mathcal{P}_2$ si y solo si N_1 es paralelo a N_2.
(b)$\mathcal{P}_1$ es perpendicular al plano $\mathcal{P}_2$ si y solo si N_1 es ortogonal a N_2.

Observación 1.3 *Si $\mathcal{P}_1$ no es paralela a $\mathcal{P}_2$ entonces $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{L}$.*

Ejemplo 1.4 *Hallar la ecuación cartesiana del plano que interseca a la recta*

$$\mathcal{L} : P = (1, 3, -3) + t\,(2, 1, -2)\,, t \in \mathbf{R}$$

en el punto $(m, 0, n)$ *y es perpendicular a otro plano* $\mathcal{P} : 3x - 3y + z = 2$. *Se sabe que el punto* $Q = (1, 1, 2)$ *está en la intersección de ambos planos.*

Solución

Sea π el plano buscado, entonces $Q = (1, 1, 2) \in \pi$. Bastará hallar el vector normal $n = (a, b, c)$

$n_P = (3, -3, 1) \to n_P \cdot n = 0 \to 3a - 3b + c = 0$ (condición 1)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L} : x = 1 + 2t\ ; y = 3 + t\ ; z = -3 - 2t\\
&\mathcal{L} \cap \pi = (m, 0, n) \to y = 0 \to t = -3 \to x = -5, z = 3\\
&\to R = (-5, 0, 3) \in \pi\\
&Q - R = (6, 1, -1) \perp n \to 6a + b - c = 0 \to c = 6a + b \text{ (cond.2)}
\end{aligned}$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned}
3a - 3b + (6a + b) &= 0 \Longrightarrow 9a - 2b = 0 \to a = \frac{2}{9}b \to c = 6(\frac{2}{9}b) + b \to c = \frac{7}{3}b\\
(\frac{2}{9}b, b, \frac{7}{3}b) &= \frac{1}{9}b(2, 9, 21) \to n = (2, 9, 21)\\
\pi &: 2x + 9y + 21z + d = 0\\
Q &= (1, 1, 2) \in \pi \to 2(1) + 9(1) + 21(2) + d = 0 \to d = -53\\
\pi &: 2x + 9y + 21z - 53 = 0
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.5 *Hallar la ecuación cartesiana de un plano* $\mathcal{P}$ *que pasa por los puntos* $Q = (0, 7, 0)$ *y* $R = (1, 5, 2)$, *y forma un ángulo de* $\frac{\pi}{4}$ *con el plano* $\mathcal{P}_1 : x + y - 4z + 5 = 0$.

Solución

Sea $N = (a, b, c)$ la normal del plano $\mathcal{P}$ buscado .

Consideren $Q = (0, 7, 0)$ y $R = (1, 5, 2)$ entonces $\overrightarrow{QR} = R - Q = (1, 5, 2) - (0, 7, 0) = (1, -2, 2)$ es el vector que está contenido en el plano $\mathcal{P}$.

Como $\overrightarrow{QR}$ está contenido en el plano $\mathcal{P}$ entonces $\overrightarrow{QR}$ es perpendicular al vector normal del plano $\mathcal{P}$. Así :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{QR} \quad \perp \quad & N \Longleftrightarrow N \cdot \overrightarrow{QR} = 0\\
\Longleftrightarrow \quad & (a, b, c) \cdot (1, -2, 2) = 0\\
\Longrightarrow \quad & a - 2b + 2c = 0 \Longrightarrow a = 2b - 2c
\end{aligned}$$

Por tanto, $N = (2b - 2c, b, c)$.

Si $N_1 = (1, 1, -4)$ y N son los vectores normales de $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}$, respectivamente.

Luego, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{N_1 \cdot N}{\|N_1\|\,\|N\|}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{(1, 1, -4) \cdot (2b - 2c, b, c)}{\|(1, 1, -4)\|\,\|(2b - 2c, b, c)\|}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{3b - 6c}{3\sqrt{2}\sqrt{5b^2 + 5c^2 - 8bc}} \Longleftrightarrow 1 = \dfrac{b - 2c}{\sqrt{5b^2 + 5c^2 - 8bc}}$

$\Longrightarrow 5b^2 + 5c^2 - 8bc = b^2 + 4c^2 - 8bc$

$\Longrightarrow 4b^2 - 4bc + c^2 = 0 \Longrightarrow (2b - c)^2 = 0 \Longrightarrow c = 2b.$

Luego, $a = 2b - 2c = a = 2b - 2\,(2b) = -2b$

Así, $N = (-2b, b, 2b) = -b\,(2,-1,-2) \parallel (2,-1,-2)$.
Luego la ecuación del plano buscado es.:

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &: 2x-y-2z+d=0\\ Q &= (0,7,0)\in\mathcal{P}\to 2(0)-7-2(0)+d=0\to d=7.\end{aligned}$$

Así, $\mathcal{P}: 2x-y-2z+7=0$.

Ejemplo 1.6 (*a*) *Dadas dos rectas* ***no paralelas*** *que se* ***cruzan*** *(no se intersectan)*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &: P = P_0 + t\overrightarrow{a},\ t\in\mathbf{R}\\ \mathcal{L}_2 &: P = Q_0 + r\overrightarrow{b},\ r\in\mathbf{R}\end{aligned}$$

contenidas en los planos paralelos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ respectivamente. Demostrar que la distancia entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ está dada por:

$$d\,(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2) = \frac{\left|\overrightarrow{P_0Q_0}\cdot\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right\|}$$

b) Hallar la ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $P_0 = (1,3,-1)$, es paralela al plano $\mathcal{P}: x+z-2=0$ y dista 3 unidades de la recta

$$\mathcal{L}_0 : \begin{cases} x-y-z=2\\ x-z=2\end{cases}$$

Solución

(a)Construimos dos planos paralelos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ que contengan a $\mathcal{L}_1$ y a $\mathcal{L}_2$ respectivamente. Puesto que $N = \overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ es normal a ambos planos entonces es perpendicular a los vectores de dirección de $\mathcal{L}_1$ y a $\mathcal{L}_2$.

Así, $d\,(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2) = \left\|Proy_{\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}}\overrightarrow{P_0Q_0}\right\| = \left|Comp_{\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}}\overrightarrow{P_0Q_0}\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{P_0Q_0}\cdot\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right\|}$.

(b)Sea $A = (a,b,c)$ el vector de dirección de $\mathcal{L}$. Como $\mathcal{L}\parallel\mathcal{P}$, entonces $A\cdot N = 0$, donde $N = (1,0,1)$ es el vector del plano $\mathcal{P}$. Entonces $(a,b,c)\cdot(1,0,1) = 0$, de donde $a+c=0$ y así, $c=-a$. Luego, $A = (a,b,-a)$.

De $\mathcal{L}_0 : \begin{cases} x-y-z=2\\ x-z=2\end{cases}$. ,se tiene: $y=0$.

Parametrizando $\mathcal{L}_0$: sea $z=t$, $x=2+t$. Así, $\mathcal{L}_0 : P = (2,0,0) + t\underbrace{(1,0,1)}_{B}, t\in\mathbf{R}$.

$\mathcal{L}$ no es paralela a $\mathcal{L}_0$, por condición del problema se tiene:

$$3 = d(\mathcal{L},\mathcal{L}_0) = \frac{\left|\overrightarrow{P_0Q_0}\cdot(A\times B)\right|}{\|(A\times B)\|}$$

$\overrightarrow{P_0Q_0} = Q_0 - P_0 = Q_0 = (2,0,0)-(1,3,-1) = (1,-3,1)$
$A\times B = (a,b,-a)\times(1,0,1) = (b,-2a,-b)$.
Así,

$$3 = d\,(\mathcal{L},\mathcal{L}_0) = \frac{\left|\overrightarrow{P_0Q_0}\cdot((A\times B))\right|}{\|(A\times B)\|} = \frac{|(1,-3,1)\ \cdot(b,-2a,-b)|}{\|(b,-2a,-b)\|} = \frac{|6a|}{\sqrt{4a^2+2b^2}},$$

de donde $b=0$.

Así, $A = (a, 0, -a) = a\,(1, 0, -1)$. Por tanto, la recta

$$\mathcal{L} : P = (1, 3, -1) + t\ \ (1, 0, -1)\,, t \in \mathbf{R}.$$

Ejemplo 1.7 *Sean el plano* $\mathcal{P}_1 : 3x+2y-z-5 = 0$ *y la recta* $\mathcal{L} : P = (1, -2, 2)+t(2, -3, 2)$, $t \in \mathbb{R}$. *Hallar:*

(a)*El punto de intersección de la recta con el plano* $\mathcal{P}_1$.

(b)*La ecuación cartesiana del plano* $\mathcal{P}_2$ *que contiene a la recta* $\mathcal{L}$ *y es perpendicular a* $\mathcal{P}_1$.

(c)*La ecuación vectorial de la recta* $\mathcal{L}_1$ *que contenida en* $\mathcal{P}_1$ *y* $\mathcal{P}_2$.

Solución

(a)Sea $\mathcal{L} : P = (1, -2, 2) + t(2, -3, 2) = (1 + 2t, -2 - 3t, 2 + 2t)$, $t \in \mathbf{R}$
$Q \in \mathcal{L}$ entonces $Q = (1 + 2t, -2 - 3t, 2 + 2t) \in \mathcal{P}_1 : 3x + 2y - z - 5 = 0$:
$3\,(1 + 2t) + 2(-2 - 3t) - (2 + 2t) - 5 = 0 \Longrightarrow -2t - 8 = 0 \Longrightarrow t = -4.$
Por tanto, $Q = (-7, 10, -6)$.

(b)Sea $N_2 = A \times N_1 = (2, -3, 2) \times (3, 2, -1) = (-1, 8, 13)$ la normal del plano buscado. Luego la ecuación del plano es

$$\mathcal{P}_2 : x - 8y - 13z + d = 0$$

puesto que $P_0(1, -2, 2) \in \mathcal{P}_2 : x-8y-13z+d = 0$ entonces $1-8\,(-2)-13\,(2)+d = 0$,de donde $d = 9$.

Por lo tanto,

$$\mathcal{P}_2 : x - 8y - 13z + 9 = 0.$$

(c)Sea $\mathcal{L}_1 : \begin{cases} 3x + 2y - z - 5 = 0....\,(4) \\ x - 8y - 13z - 9 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 12x + 8y - 4z = 20 \\ x - 8y - 13z = 9 \end{cases}$,
se tiene : $13x - 17z = 29$.
Parametrizando $\mathcal{L}_1$: sea $z = t$, $x = \frac{29}{13} + \frac{17}{13}t$.
De $3x+2y-z-5 = 0$, se tiene $2y = z+5-3x = t+5-3\left(\frac{29}{13} + \frac{17}{13}t\right) \Longrightarrow y = -\frac{19}{13}t - \frac{11}{13}$.
Así, $\mathcal{L}_1 : P = \left(\frac{29}{13}, -\frac{11}{13}, 0\right) + t\underbrace{\left(\frac{17}{13}, -\frac{19}{13}, 1\right)}_{B}, t \in \mathbf{R}.$

Ejemplo 1.8 *Dado un punto* $P_0 = (1, 1, 1)$. *Hallar la ecuación cartesiana de los planos* $\mathcal{P}$ *tales que* $d\,(P_0, \mathcal{P}) = \sqrt{10}$ *y es ortogonal a la recta*

$$\mathcal{L} : P = (0, 1, 2) + t(1, 0, 3), t \in \mathbb{R}.$$

Solución

Se observa que $P_0 = (1, 1, 1) \notin \mathcal{L} : P = (0, 1, 2) + t(1, 0, 3), t \in \mathbb{R}$.
Considere la recta

$$\mathcal{L}_N : P = (1, 1, 1) + t(1, 0, 3), t \in \mathbb{R}.$$

Sea $Q \in \mathcal{L}_N$ entonces existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que $Q = (1 + t, 1, 1 + 3t)$.
Sea $d\,(P_0, \mathcal{P}) = d\,(P_0, Q) = \left\|\overrightarrow{P_0Q}\right\| = \|(t, 0, 3t\| = \sqrt{10t^2} = \sqrt{10} \Longrightarrow t = \pm 1.$
Si $t = 1 : Q = (2, 1, 4)$
La ecuación del plano es, $\mathcal{P} : (x - 2, y - 1, z - 4) \cdot (1, 0, 3) = 0$
Por tanto $\mathcal{P} : x + 3z - 14 = 0$.
Si $t = -1 : Q = (0, 1, -2)$
La ecuación del plano es, $\mathcal{P} : (x, y - 1, z + 2) \cdot (1, 0, 3) = 0$
Por tanto $\mathcal{P} : x + 3z + 6 = 0$

Ejemplo 1.9 *Dadas las rectas*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &: P=(2,3,-3)+t\ (13,1,-4)\,,t\in\mathbb{R}\\ \mathcal{L}_2 &: P=(5,6,-3)+r\ (-13,-1,4)\,,t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

(a)Hallar la ecuación cartesiana del plano $\mathcal{P}$ que contiene a las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.

(b)Hallar la ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}$ que corta perpendicularmente a la recta $\mathcal{L}_1$ en el punto $Q=(2,3,-3)$ y es paralela al plano $\pi: 2x-z+3=0$.

Solución

(a)Se observa que $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$
Sea $A=(13,1,-4)$ el vector de dirección de $\mathcal{L}_1$.
$\overrightarrow{P_0Q_0}=Q_0-P_0=(5,6,-3)-(2,3,-3)=(3,3,0)$.
Sea $N=A\times\overrightarrow{P_0Q_0}=(13,1,-4)\times(3,3,0)=(12,-12,36)=12\,(1,-1,3)$
$N=(1,-1,3)$ la normal del plano buscado. Luego la ecuación del plano es

$$\mathcal{P}: x-y+3z+d=0$$

puesto que $P_0\,(2,3,-3)\in\mathcal{P}: x-y+3z+d=0$ entonces $\mathcal{P}: 2-3+3\,(-3)+d=0$, de donde $d=10$.

Por lo tanto,

$$\mathcal{P}: x-y+3z+10=0.$$

(b)Sea $u=(a,b,c)$ el vector de dirección de $\mathcal{L}$.

Si $\mathcal{L}\perp\mathcal{L}_1$, entonces $u=(a,b,c)\perp A=(13,1,-4)\Longrightarrow(a,b,c)\cdot(13,1,-4)=0\Longrightarrow 13a+b-4c=0\Longrightarrow b=4c-13a$.

Así, $u=(a,4c-13a,c)$

Por otro lado, $\mathcal{L}\|\pi$, entonces $u\perp N=(2,0,-1)\Longrightarrow(a,4c-13a,c)\cdot(2,0,-1)=0\Longrightarrow c=2a$. Luego,
$u=(a,4\,(2a)-13a,2a)=(a,-5a,2a)=a\,(1,-5,2)\parallel(1,-5,2)$.
Por lo tanto,

$$\mathcal{L}: P=(2,3,-3)+t\,(1,-5,2)\,,t\in\mathbb{R}$$

Ejemplo 1.10 *Considere los planos $\mathcal{P}_1: x-y+z=0$ y $\mathcal{P}_2: x+y-z=2$.*

(a)Hallar la ecuación de la recta $\mathcal{L}$ que es intersección de $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$.

(b)Hallar la ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}_1$ que pasa por el punto $(2,1,3)$ y no corta a ninguno de los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$.

Solución

(a)Sea $P\in\mathcal{L}:=\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2:\left\{\begin{array}{l}x-y+z=0\cdots(1)\\ x+y-z=2\cdots(2)\end{array}\right.$
Sumanado (1) y (2) : $2x=2\Longrightarrow x=1$.
De $x-y+z=0\Longrightarrow 1-y+z=0\Longrightarrow z=y-1$.
Sea $y=t\Longrightarrow z=t-1$.
Por lo tanto,

$$\mathcal{L}: P=(1,t,t-1)=(1,0,-1)+t\,(0,1,1)\,,t\in\mathbb{R}$$

(b)Es claro que $(2,1,3)$ no se encuentra en ninguno de los planos dados.
Basta elegir una recta $\mathcal{L}_1$ pasando por $(2,1,3)$ y sea paralela a $\mathcal{L}$. Por lo tanto,

$$\mathcal{L}_1: P=(2,1,3)+r\,(0,1,1)\,,r\in\mathbb{R}.$$

Ejemplo 1.11 *Sean* $\mathcal{P}_1 : x + 2y - 3z + 2 = 0$ *y* $\mathcal{P}_2 : -x + z = 0$.

(a)*Hallar la proyección ortogonal de la recta* $\mathcal{L}$, *que es intersección de* $\mathcal{P}_1$ *con* $\mathcal{P}_2$ *sobre el plano coordenado* XY.

(b)*Hallar el área del triángulo que dicha proyección forma con los ejes* X, Y.

Solución

(a)Sea $P \in \mathcal{L} := \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 : \begin{cases} x + 2y - 3z + 2 = 0 \cdots (1) \\ -x + z = 0 \cdots (2) \end{cases}$

De $(2) : -x + z = 0 \Longrightarrow z = x = t$,

En $(1) : x + 2y - 3z + 2 = 0 \Longrightarrow t + 2y - 3t + 2 = 0 \Longrightarrow y = t - 1$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L} : P = (t, t-1, t) = (0, -1, 0) + t\,(1, 1, 1)\,, t \in \mathbb{R}$$

Sea la recta $\mathcal{L}_{\mathcal{R}} : P = Q + t\ \overrightarrow{QP_0'},\ t \in \mathbb{R}$ que resulta de hacer la proyección ortogonal de la recta $\mathcal{L}$ sobre el plano coordenado XY,

donde $Q \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}_{XY}$, $P_0' = \Pr oy_{XY} P_0$

Sea $Q \in \mathcal{L}$, entonces existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que $Q = (t, t-1, t) \in \mathcal{P}_{XY} : z = 0 \Longrightarrow t = 0$.

Luego, $Q = (0, -1, 0)$.

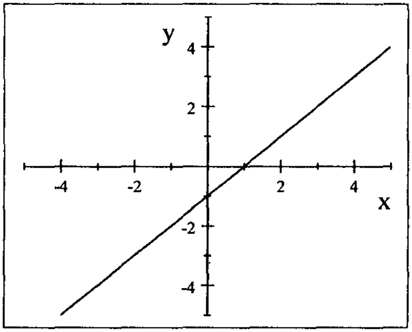
Sea $P_0 = (1, 0, 1) \in \mathcal{L}$ entonces $P_0' = (1, 0, 0)$

$\overrightarrow{QP_0'} = P_0' - Q = (1, 0, 0) - (0, -1, 0) = (1, 1, 0)$

Por tanto,

$$\mathcal{L}_{\mathcal{R}} : P = (0, -1, 0) + t\,(1, 1, 0)\,, t \in \mathbb{R}.$$

$(b)\, \mathcal{L}_{\mathcal{R}} : \begin{cases} x = t \cdots (1) \\ y = -1 + t \cdots (2) \\ z = 0 \cdots (3) \end{cases} \Longrightarrow y = -1 + x$ es una recta en el plano XY.



Sea $A = \mathcal{L}_{\mathcal{R}} \cap X$: haciendo $y = z = 0$, de donde $A = (1, 0, 0)$,

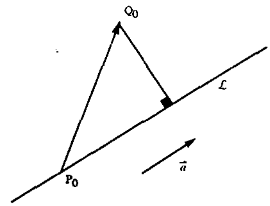
$B = \mathcal{L}_{\mathcal{R}} \cap Y$: haciendo $x = z = 0$, de donde $B = (0, -1, 0)$.

Por tanto el área del triángulo OAB es: $A\,(\triangle OAB) = \frac{1}{2}u^2$.

Ejemplo 1.12 *Sea* $\mathcal{L} : P = P_0 + t\ \overrightarrow{a},\ t \in \mathbb{R}$ *una recta en* $\mathbb{R}^3$ *y* $Q_0 \in \mathbb{R}^3$. *Demostrar que*

$$d\,(Q, \mathcal{L}) = \frac{\|(Q_0 - P_0) \times \overrightarrow{a}\|}{\|\overrightarrow{a}\|}$$

Solución



En el triángulo P_0HQ_0 de la figura, (H es el pie de la perpendicular trazada), se tiene que:

$$d(Q_0,P_0)=\left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\| \quad \text{y} \quad d(P_0,H)=\left|\text{Comp}_A\overrightarrow{P_0Q_0}\right|.$$

Por el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{L}}^2(Q_0) &= d^2(Q_0,P_0)-d^2(P_0,H)=\left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\|^2-\left|\text{Comp}_{\vec{a}}\overrightarrow{P_0Q_0}\right|^2 \\ &= \left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\|^2-\left[\frac{\overrightarrow{P_0Q_0}\cdot\vec{a}}{\|\vec{a}\|}\right]^2=\left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\|^2-\frac{\left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\|^2\|\vec{a}\|^2\cos^2\theta}{\|A\|^2} \\ &= \left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\|^2\left(\frac{\|\vec{a}\|^2-\|\vec{a}\|^2\cos^2\theta}{\|\vec{a}\|^2}\right)=\left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\|^2\|\vec{a}\|^2\frac{\sin^2\theta}{\|\vec{a}\|^2}, \end{aligned}$$

siendo θ el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{P_0Q}$ y A. Tomando raíz cuadrada en ambos miembros

$$d_{\mathcal{L}}(Q_0)=\frac{\left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\|\|\vec{a}\|\sin\theta}{\|\vec{a}\|}=\frac{\left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\times\vec{a}\right\|}{\|\vec{a}\|}.$$

Ejemplo 1.13 *Sea* $\mathcal{L}: P=(1,-2,3)+t\,(-1,2,-4)\,, t\in\mathbb{R}$. *Hallar* $Q\in\mathbb{R}^3$ *tal que* $d(Q,\mathcal{L})=\sqrt{\frac{24}{21}}$ *y* Q *es un punto de la recta*

$$\mathcal{L}_1:\left\{\begin{array}{l} z=2x+1 \\ y=-2 \end{array}\right. .$$

Solución

Sea $Q=(x,y,z)$ tal que $d(Q,\mathcal{L})=\sqrt{\frac{24}{21}}$, entonces

$$\begin{aligned} d(Q,\mathcal{L}) &= \frac{\|((x,y,z)-(1,-2,3))\times(-1,2,-4)\|}{\|(-1,2,-4)\|} \\ &= \frac{\|(x-1,y+2,z-3)\times(-1,2,-4)\|}{\|(-1,2,-4)\|} \\ d(Q,\mathcal{L}) &= \frac{\|(-4y-2z-2,4x-z-1,2x+y)\|}{\sqrt{21}}=\sqrt{\frac{24}{21}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(4y+2z+2)^2+(4x-z-1)^2+(2x+y)^2} &= \sqrt{24}\Longrightarrow \\ (4y+2z+2)^2+(4x-z-1)^2+(2x+y)^2 &= 24\cdots(*) \end{aligned}$$

Como $Q\in\mathcal{L}_1$ entonces de $(*)$ se tiene :

$(4(-2)+2\,(2x+1)+2)^2+(4x-(2x+1)-1)^2+(2x-2)^2=24\Longrightarrow 24\,(x-1)^2=24$, de donde $x=0,x=2$

Si $x = 0 : Q = (0, -2, 1)$,
Si $x = 2 : Q = (2, -2, 5)$.

Ejemplo 1.14 *Dado el plano* $\pi : kx - y + 2z + 1 = 0$ *y el punto* $M = (0, 1, 0)$.

(a) Hallar el valor de k sabiendo que el plano π es paralelo a la recta

$$\mathcal{L} : P = (1, 2, 3) + t\ (1, 0, -1), t \in \mathbb{R}$$

(b) Hallar las ecuaciones cartesianas de aquellos planos $\mathcal{P}$ paralelos al plano π tales que la distancia del punto M al plano $\mathcal{P}$ es 2.

Solución

(a) Si π es paralelo a la recta $\mathcal{L}$ entonces $u = (1, 0, -1) \perp N = (k, -1, 2) \Longrightarrow (1, 0, -1) \cdot (k, -1, 2) = 0 \Longrightarrow k = 2$.

(b) Si $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ es paralelo al plano $\mathcal{P}$ entonces la ecuación del plano $\mathcal{P}$: $2x - y + 2z + d = 0$.

Por condición se tiene:

$$\begin{aligned} 2 &= d(M, \pi) = \frac{|2\,(0) - (1) + 2\,(0) + d|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|d-1|}{3} \Longrightarrow |d-1| = 6 \\ d - 1 &= 6 \vee d - 1 = -6 \Longrightarrow d = 7 \vee d = -5. \end{aligned}$$

Por tanto, los planos son :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &: 2x - y + 2z + 7 = 0, \\ \mathcal{P}' &: 2x - y + 2z - 5 = 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.15 *Dado el plano* $\mathcal{P} : x + y - z = 0$ *y la recta*

$$\mathcal{L} : \begin{cases} y + 2z = 8 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Hallar las ecuaciones vectoriales de las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ que están contenidas en el plano $\mathcal{P}$, tales que $\mathcal{L}_1$ es
perpendicular a $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_2$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{L}$ sobre el plano $\mathcal{P}$.

Solución

Parametrizando $\mathcal{L} : \begin{cases} y + 2z = 8 \\ 2x - y = 0 \Longrightarrow y = 2x \end{cases}$.

Sea $x = t$ entonces $y = 2t$.

De $y + 2z = 0$ se tiene $2t + 2z = 8 \Longrightarrow z = 4 - t$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L} : P = (t, 2t, 4 - t) = (0, 0, 4) + t\,(1, 2, -1), t \in \mathbb{R}$$

Hallando Q.

Sea $Q \in \mathcal{L}$ entonces existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que $Q = (t, 2t, 4 - t) \in \mathcal{P} : x + y - z = 0$, entonces $t + 2t - (4 - t) = 0$, de donde $t = 1$. Así, $Q = (1, 2, 3)$.

Hallando $\mathcal{L}_1$.

Como $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}$ entonces $A_1 \perp A = (1, 2, -1)$

$\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{P}$ entonces $A_1 \perp N = (1, 1, -1)$

Entonces $A_1 \| A \times N = (1, 2, -1) \times (1, 1, -1) = (-1, 0, -1)$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}_1 : P = (1, 2, 3) + t\,(-1, 0, -1), t \in \mathbb{R}$$

Hallando $\mathcal{L}_2$.

Sea la recta $\mathcal{L}_2 : P = Q + t\,\overrightarrow{QP_0'}$, $t \in \mathbb{R}$

que resulta de hacer la proyección ortogonal de la recta $\mathcal{L}$ sobre el plano coordenado $\mathcal{P}$, $P_0' = \operatorname{Pr} oy_{\mathcal{P}} P_0 = \mathcal{L}_N \cap \mathcal{P}$,

$\mathcal{L}_N : P = (0,0,4) + t\,(1,1,-1)\,, t \in \mathbb{R}$

Sea $P_0' \in \mathcal{L}_N$, entonces existe un $t \in \mathbb{R}$ tale que $P_0' = (t,t,4-t) \in \mathcal{P} : x + y - z = 0 \Longrightarrow t + t - 4 + t = 0 \Longrightarrow t = \frac{4}{3}$.

Luego,$P_0' = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

$\overrightarrow{QP_0'} = P_0' - Q = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right) - (1,2,3) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\,(1,-2,-1)$

Por tanto,

$$\mathcal{L}_2 : P = (1,2,3) + t\,(1,-2,-1)\,, t \in \mathbb{R}$$

Ejercicios Propuestos

1. Un rayo luminoso sale del punto $P_0 = (0,-2,0)$ según la dirección del vector $A = (1,2,2)$ e incide en el espejo plano $\mathcal{P} : 3x + 4y - 5z = 0$. Halle la recta que contiene al rayo reflejado.

2. Identifique los conjuntos solución de cada una de las siguientes ecuaciones:

   (a) $A \times P = B$ siendo A y B vectores dados.

   (b) $(P - P_1) \times (P_2 - P_1) = \theta$ siendo P_1 y P_2 puntos distintos dados.

3. Hallar la ecuación del plano π que es perpendicular al plano

$$\mathcal{P} : 3x - 4y - 2z = 3$$

   y que contiene a la recta

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x - 4y + 2z = 3 \\ 2x + y - 4z = 4 \end{cases}.$$

4. Sean U, V y W tres vectores no coplanares y no nulos tales que sus representaciones como segmentos dirigidos tienen un punto inicial común. Demostrar que el plano que pasa por los puntos finales de dichos segmentos dirigidos, es perpendicular al vector $U \times V + V \times W + W \times U$.

5. Determine si existe un plano que contiene a las rectas $\mathcal{L}_1 : P = (2,-1,3) + t\,(1,2,1)$ y $\mathcal{L}_2 : P = (2,-1,33) + s\,(3,-1,4)$.

6. Similar al ejercicio 5 para las rectas $\mathcal{L}_1 : P = (4,1,0) + t\,(1,2,1)$ y $\mathcal{L}_2 : P = (-2,-3,2) + s\,(2,-1,3)$.

7. Halle la ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto $(-1,-1,2)$ y es perpendicular a los planos $x - 2y + z = 0$, $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

8. Halle la intersección de la recta $\mathcal{L} : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+3}{3}$ con el plano $\mathcal{P} : 2x + y - z = 0$.

9. Si los vectores $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ son representados por segmentos coplanarios, demuestre que:

$$(A \times B) \times (C \times D) = \theta$$

   ¿Es verdadero el resultado recíproco?

10. Hallar el plano bisector del diedro agudo formado por los planos $6x+9y+2z+18=0$, $x-8y+4z-20=0$.

11. Halle la distancia del centro de gravedad del triángulo formado por las rectas

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &: P=(5,11,-2)+r\,(0,8,-1)\,,\ r\in\mathbb{R}\\ \mathcal{L}_2 &: P=(8,-23,3)+s\,(3,-10,-4)\,,\ s\in\mathbb{R}\\ \mathcal{L}_3 &: P=(8,1,-6)+t\,(3,-2,5)\,,\ t\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

al plano $5x+12z+14=0$.

12. Halle la distancia del punto $(1,-2,1)$ al plano determinado por los puntos $(2,4,1)$, $(-1,4,2)$ y $(-1,0,1)$.

13. Sean $P_1=(1,2,3)$ y $P_2=(4,5,6)$ los vértices de un cuadrado. Sabiendo que P_2 pertenece a la recta real $\mathcal{L}: P=(4,5,6)+t\,(1,0,-1)$, $t\in\mathbb{R}$, hallar los otros vértices del cuadrado(dos soluciones).

14. Hallar las ecuación del plano π que contiene a la recta

$$\mathcal{L}:\begin{cases} x+y+3z=0\\ 3x+2y-z=0\end{cases}.$$

y es perpendicular al plano $2x+y-z+1=0$.

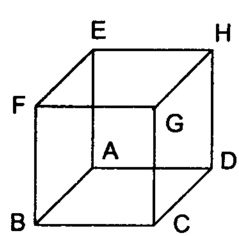
15. El punto $Q=(-4,2,1)$ se proyecta ortogonalmente sobre los planos $\pi_1: 3x+y-z=0$ y $\pi_2: -x+y+z+5=0$ determinado por los puntos A y B respectivamente.Hallar la distancias entre A y B.

16. Dadas las rectas

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &: P=(-1,3,-1)+t\,(3,1,2)\,,\ t\in\mathbb{R}\\ \mathcal{L}_2 &: P=(0,0,-11)+r\,(1,2,6)\,,\ r\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

   (a) hallar el punto Q que es intersección de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.
   (b) hallar el punto R simétrico de $(-1,-9,-1)$ respecto a la recta $\mathcal{L}_2$.
   (c) hallar la ecuaciones paramétricas de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por Q y R.

17. En un paralelepípedo $ABCDEFGH$ como en la figura, sean P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 y P_6 los opuntos medios de las aristas FE, EH, HD, CB y BF respectivamente. Analizar si los seis puntos mencionados están en un mismo plano o no.



18. Dadas las rectas

$$\mathcal{L}_1 : P = (1, -2, 5) + t\,(2, 3, -4)\,,\ t \in \mathbb{R}$$
$$\mathcal{L}_2 : x - 2,\ y - 1 = \frac{z + 2}{2}$$

Hallar la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $(-1, 2, 0)$, si la recta es perpendicular a $\mathcal{L}_1$ y corta a $\mathcal{L}_2$.

19. Dados los planos :

$$\pi_1 : x - 2y + z = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 : x - 2y - 2z - 4 = 0.$$

(a) Hallar una ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}$ que está contenida en ambos planos.

(b) Sea $\pi : ax + by + cz + d = 0$ un plano tal que la recta $\mathcal{L}$ de la parte (a) está contenida en π y la distancia de $P_1 = (1, -1, 0)$ a π es 1. Hallar una ecuación normal para π.

20. Hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por $P_0 = (1, 0, 0)$, sabiendo que la recta $\mathcal{L} : x - 5 = \dfrac{z + 5}{-1}$, $y = 1$ dista una unidad de dicho plano.

21. Sea $P = (x, y, z)$ un punto de $\mathbb{R}^3$.

(a) Calcular la distancia de P a los ejes coordenados X e Y.

(b) Analizar la verdad o falsedad de los siguientes enunciados :

i. La distancia de $P = (x, y, z)$ al eje X es igual a la distancia de $Q = (x, -y, -z)$ al eje X,

ii. La superficie determinada por los puntos de $\mathbb{R}^3$ tales que las distancias a los ejes X e Y son iguales, es un único plano,

iii. La ecuación cartesiana de la superficie S determinada por los puntos de $\mathbb{R}^3$ cuya distancia al eje X es el doble de su distancia al eje Y es $2x^2 - y^2 + 6z^2 = 0$.

22. Hallar el punto $P(a, b, c)$ con $c > 1$, que pertenece a la recta

$$\mathcal{L} : x - 1 = \frac{y + 2}{2} = \frac{z}{3}$$

tal que las distancias de P a los planos

$$\mathcal{P}_1 : x + 2y + z - 1 = 0 \quad y \quad \mathcal{P}_2 : 2x + y - z - 3 = 0$$

son iguales.

23. Sea π un plano que pasa por el origen y contiene a la recta $\mathcal{L} : P = (1, 2, 3) + t\,(1, -1, -1)$, $t \in \mathbb{R}$. Hallar una ecuación cartesiana de dicho plano.

24. Considerar los planos

$$\pi_1 : 2x + 3y - z + 1 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 : x - y + 2z + 3 = 0.$$

(a) Halle la ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}$ contenida en π_1 y π_2.

(b) Halle la ecuación cartesiana de un plano que contiene a la recta $\mathcal{L}$ y que forma un ángulo de $\dfrac{\pi}{3}$ con el plano π_1.

25. Halle las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(-1,2,-3)$, es perpendicular al vector $\overrightarrow{v}=(6,-2,-3)$ e interseca a la recta

$$\mathcal{L}: P=(1,-1,3)+t(3,2,-5), t\in\mathbb{R}.$$

26. Dadas dos rectas oblicuas en $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &: P=P_0+tA,\ t\in\mathbb{R}\\ \mathcal{L}_2 &: P=Q_0+rB,\ r\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

hallar una fórmula para calcular la distancia entre las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.

27. Determine la ecuación de la recta que intercepta a las rectas

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &: \quad P=(1,-1,1)+t(1,0,-1),\ t\in\mathbb{R}\\ \mathcal{L}_2 &: \quad Q=(1,0,0)+s(-1,1,1),\ s\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

en los puntos A y B, respectivamente, de tal manera que la longitud del segmento $\overline{AB}$ sea mínima.

28. ¿Para qué valores de a y b, la recta $\mathcal{L}$: $P=(2,-1,5)+t(a,4,-3),\ t\in\mathbb{R}$ es perpendicular al plano

$$\pi: 3x-2y+bz+1=0\,?$$

29. Considere la recta

$$\mathcal{L}: P=(1,2,3)+t\ (0,1,1), \quad t\in\mathbb{R} \quad .$$

Hallar la ecuación del plano $\mathcal{P}$ que contiene a la recta $\mathcal{L}$ y cuyas intersecciones del plano $\mathcal{P}$ con los planos coordenados XY e YZ forman un ángulo $\frac{\pi}{3}$.

30. Dadas las rectas

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &: \quad P=(1,1,3)+t(-4,10,-1),\ t\in\mathbb{R}\\ \mathcal{L}_2 &: \quad Q=(2,1,-2)+s(7,-2,7),\ s\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Hallar la ecuación de la recta que pasa por la intersección y es perpendicular a ambas.

31. Considere la recta

$$\mathcal{L}: P=(1,2,3)+t\ (0,1,1), \quad t\in\mathbb{R} \quad .$$

Hallar la ecuación del plano $\mathcal{P}$ que contiene a la recta $\mathcal{L}$ y cuyas intersecciones del plano $\mathcal{P}$ con los planos coordenados XY e YZ forman un ángulo $\frac{\pi}{3}$.

32. Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por la intersección y es perpendicular a ambas.

    (a) Hallar la ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por los puntos $(2,3,1)$ y $(-1,4,1)$.

    (b) Uno de los puntos $R(5,2,1)$ y $Q(3,1,2)$ pertenece a $\mathcal{L}$. Hallar la ecuación simétrica de la recta perpendicular a $\mathcal{L}$ que pase por el punto que no pertenece a la recta $\mathcal{L}$.

33. Sean $S=(1,-1,2)$ y $R=(1,0,1)$.

   (a) Hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos S y R , y es paralelo a la recta
   $$\mathcal{L}: P=(1,5,1)+t\ (1,1,1)\ , \quad t\in\mathbb{R}$$

   (b) Sea M el punto medio entre S y R.Hallar el punto de la recta $\mathcal{L}$ más cercano a M.

34. Sean los planos
   $$\mathcal{P}_1 : x+y-z+1=0 \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_2 : x-y+2z+5=0.$$

   (a) Hallar la ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $(0,0,1)$, está contenida en el plano $\mathcal{P}_1$ y forma un ángulo $\dfrac{\pi}{4}$ con el plano $\mathcal{P}_2$.

35. Sean $\mathcal{L}: P=(-3,-3,5)+t(1,2,-2)$, $t\in\mathbb{R}$ una recta y $\mathcal{P}$, un plano que pasa por los puntos $Q=(2,-1,2)$, $R=(3,1,-1)$ y $S=(2,3,1)$.Desde el punto $B=(2,-2,3)$ se trazan rectas que cortan a la recta $\mathcal{L}$ e intersectan al plano $\mathcal{P}$ en puntos que se alinean formando otra recta al que llamaremos $\mathcal{L}_1$.Hallar la ecuación cartesiana de $\mathcal{L}_1$.

1.2 Superficies Notables en $\mathbb{R}^3$

Varias superficies notables intervienen en las aplicaciones del cálculo diferencial e integral para funciones de dos variables.Por ello es necesario identificarlas desde el punto de vista geométrico y, vía un sistema de coordendas retangulares (s.c.r.) en el espacio, mediante una ecuación de la forma
$$f\ (x,y,z)=0 \tag{1}$$
donde x,y,z son las cooordenadas rectangulares de un punto generador P de la superficie.

1.2.1 Esferas

Definición 1.18 *Dados un punto P_0 en R^3 y un número real positivo r, el conjunto de todos los puntos P de R^3 cuyas distancias a P_0 son iguales a r se llama la esfera de centro P_0 y de radio r*
$$\mathcal{E}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : d\,(P,P_0)=r\right\}$$

Ecuación.

Sea $P\,(x,y,z)$ cualquier punto de la esfera $\mathcal{E}$ de centro $P_0\,(x_0,y_0,z_0)$ y de radio $r>0$, entonces
$$d\,(P,P_0)=r \Longleftrightarrow \mathcal{E}:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2 \tag{2}$$
a esta ecuación se le llama *forma ordinaria de la ecuación de la esfera.*

1. Si se desarolla la ecuación (2) ,y se ordena los términos, se obtiene una ecuación de la forma
   $$\mathcal{E}: x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz+G=0. \tag{3}$$
   La ecuación (3) se llama *forma general de la ecuación de la esfera.*

2. Completando cuadrados en la ecuación (3) se recupera la ecuación (2). Es decir , se puede expresar en la forma

$$\mathcal{E} : (x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = \lambda \tag{4}$$

3. No toda ecuación de la forma (4) corresponde a una esfera. Es decir,

   (a) si $\lambda > 0, (4)$ representa a una esfera de centro $C\,(h,k,l)$ y de radio $\sqrt{\lambda}$,

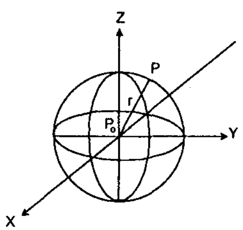
   (b) si $\lambda = 0, (4)$ representa al punto $C\,(h,k,l)$,

   (c) si $\lambda < 0, (4)$ representa al conjunto vacío.

Plano tangente a una esfera

Es aquel plano que interseca a la esfera en un único punto (llamado *punto de tangencia*).

Observación 1.4 *Sea $\mathcal{P}$ un plano con vector normal N y $\mathcal{E}$ una esfera de centro P_0 y radio r. Si $\mathcal{P}$ es tangente a la esfera entonces :*
(i)La normal N es paralelo al vector $\overrightarrow{P_0Q}$, siendo Q el punto de tangencia.
(ii)La distancia de P_0 al plano $\mathcal{P}$ es igual a r.



Si $\mathcal{E}$: $(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$ es la ecuación de la esfera centrada en $C = (h,k,l)$.

Ejemplo 1.16 *(a)Demostrar que la ecuación del plano tangente a $\mathcal{E}$ en el punto $Q = (x_0, y_0, z_0)$ es dada por*

$$\mathcal{P} : (x_0 - h)(x - x_0) + (y_0 - k)(y - y_0) + (z_0 - l)(z - z_0) = 0.$$

(b)Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera

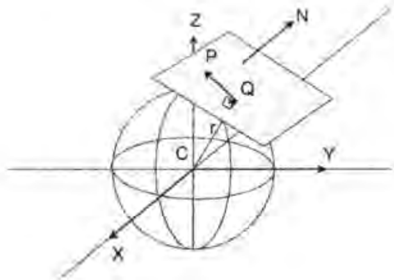
$$\mathcal{E} : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y = 0$$

que contiene a la recta

$$\mathcal{L} : \begin{cases} 2x + z = 5 \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Solución.
(a)Sea P un punto arbitrario del plano tangente $\mathcal{P}$ a $\mathcal{E}$ en $Q = (x_0, y_0, z_0)$. Como $\mathcal{P}$ es tangente a $\mathcal{E}$ en Q, es perpendicular a la recta que pasa por Q y el centro $C = \left(1, -\frac{1}{2}, 0\right)$

de $\mathcal{E}$. Por lo tanto, se cumple lo pedido, esto es



$$\begin{aligned} \mathcal{P} &: (Q-C).(P-Q)=0 \\ \mathcal{P} &: (x_0-h)(x-x_0)+(y_0-k)(y-y_0)+(z_0-l)(z-z_0)=0. \end{aligned}$$

(b)Si en la ecuación de la recta dada, hacemos $z=0$, se obtiene $(\frac{5}{2},0,0)$ como punto de paso de $\mathcal{L}$. Luego,

$$\mathcal{L}: P=(\frac{5}{2},0,0)+t(-1,-2,2), t\in R.$$

De la parte (a) del problema se tiene que si P es un punto arbitrario del plano tangente $\mathcal{P}$ a $\mathcal{E}:(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{5}{4}$, se cumple

$$\mathcal{P}:(Q-C).(P-Q)=0.$$

En particular se cumplirá para el punto $P=(\frac{5}{2},0,0)$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{2}-x_0,-y_0,-z_0\right)\cdot\left(x_0-1,y_0+\frac{1}{2},z_0\right) &= 0 \Longrightarrow \\ \frac{3}{2}x_0-\frac{5}{2}+\frac{y_0}{2}-\left(x_0^2+y_0^2+z_0^2-2x_0+y_0\right) &= 0 \Longrightarrow y_0=5-3x_0.\cdots(1) \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CQ} \quad \perp \quad \mathcal{P} &\Longrightarrow \overrightarrow{CQ}\perp(-1,-2,2) \Longleftrightarrow \overrightarrow{CQ}\cdot(-1,-2,2)=0 \\ &\Longleftrightarrow \left(x_0-1,y_0+\frac{1}{2},z_0\right)\cdot(1,-2,2)=0 \\ &\Longrightarrow z_0=\frac{10-5x_0}{2}\cdots(2). \end{aligned}$$

Así, $Q=(x_0,y_0,z_0)=(x_0,y_0=5-3x_0,\frac{10-5x_0}{2})$.
Finalmente, como $r=d(C,Q)$, entonces

$$(x_0-1)^2+\left(y_0+\frac{1}{2}\right)^2+z_0^2=\frac{5}{4}$$

de manera que al sustituir(1) y (2), se tiene $13x_0^2-48x_0+44=0$, entonces

$$x_0=2 \ \vee \ x_0=\frac{22}{13}.$$

Resultando, dos soluciones,

$$\mathcal{P}: 2x+2y+3=0,\ \mathcal{P}': 18x+11y+20z-45=0$$

Ejemplo 1.17 *Dados los planos*

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &: x+y+z=1,\\ \mathcal{P}_2 &: x+z=1\end{aligned}$$

Hallar todas las ecuaciones cartesianas de la esfera $\mathcal{E}$ de radio 3 tales que $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son planos tangentes a $\mathcal{E}$
con centro en el primer octante.

Solución
La ecuación de la esfera $\mathcal{E}: (x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=9$, con centro en $C=(h,k,l)\,; h,k,l\geq 0$.
Por condición del problema:

$$\begin{aligned}d(C,\mathcal{P}_1) &= \frac{|h+k+l-1|}{\sqrt{3}}=3 \Longrightarrow |h+k+l-1|=3\sqrt{3}\\ d(C,\mathcal{P}_2) &= \frac{|h+k-1|}{\sqrt{2}}=3 \Longrightarrow |h+k-1|=3\sqrt{2}\end{aligned}$$

Consideremos dos casos:
(i) Si $h+k\geq 1$ tenemos
$h+k-1=3\sqrt{2}\cdots(1) \Longrightarrow k=1+3\sqrt{2}-h$
$h+k+l-1=3\sqrt{3}\cdots(2)$, pues $h+k+l\geq h+k\geq 1$.
Restando (2) en $(1): l=3\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$.
Así, $C=(h,k,l)=C=\left(h,1+3\sqrt{2}-h,l\right), h\leq 1+3\sqrt{2}$
(ii) Si $h+k<1$ tenemos

$$-(h+k-1)=3\sqrt{2}\Longrightarrow h+k-1=-3\sqrt{2}\Longrightarrow h+k=1-3\sqrt{2}<0,$$

no puede ser, pues $h+k\geq 0$.
Por tanto la ecuación de la esfera es

$$\mathcal{E}: (x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=9,$$

con centro en $C=\left(h,1+3\sqrt{2}-h,3\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right), 0\leq h\leq 1+3\sqrt{2}$.

Ejemplo 1.18 *Sea $\mathcal{P}$ un plano tangente a la esfera*

$$\mathcal{E}: x^2+y^2+z^2-2x+6y+2z+8=0\ ,$$

que contiene a la recta

$$\mathcal{L}: P=(4,1,1)+t(4,3,1), t\in \mathbf{R}.$$

(a) Hallar la ecuación cartesiana del plano tangente $\mathcal{P}$.
(b) Si la esfera $\mathcal{E}$ interseca al plano $\mathcal{P}: x-y+z-1=0$ en una circunferencia C, hallar el centro y el
radio de C.

Solución.
(*a*)**Punto de tangencia.**

Sea Q un punto que pertenece a la recta $\mathcal{L}$ y a la esfera $\mathcal{E}$, entonces $Q=(4+4t,1+3t,1+t)$ para algún t. Además Q pertenece a la esfera $\mathcal{E}:(x-1)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=3$, entonces

$$\begin{aligned}(4+4t-1)^2+(1+3t+3)^2+(1+t+1)^2 &= 3\\ (4t+3)^2+(3t+4)^2+(t+2)^2 &= 3\\ 26t^2+52t+26 &= 0\\ 26(t+1)^2 &= 0\\ t &= -1.\end{aligned}$$

Así, $Q=(0,-2,0)$.

Ecuación del plano.

Sea $C=(1,-3,-1)$ el centro de la esfera $\mathcal{E}$, entonces
$\overrightarrow{CQ}=Q-C=(0,-2,0)-(1,-3,-1)=(-1,1,1)=-(1,-1,-1)\parallel(1,-1,-1)=N$.
Sea $\mathcal{P}$ el plano con vector normal $N=(1,-1,-1)$ entonces su ecuación es:

$$\mathcal{P}:x-y-z+d=0$$

como $Q(0,-2,0)$ pertenece al plano,$0+2-0+d=0$, de donde $d=-2$.Por tanto,

$$\mathcal{P}:x-y-z-2=0.$$

(b)Sea $\mathcal{L}$ la recta que pasa por el centro $C(1,-3,-1)$ de la esfera $\mathcal{E}$ y tiene como vector dirección el vector normal $N=(1,-1,1)$ del plano $\mathcal{P}:x-y+z-1=0$.

$$\mathcal{L}:P=(1,-3,-1)+t(1,-1,1)\ ;t\in\mathbb{R}.$$

Centro de la circunferencia $\mathcal{C}$.

Sea Q_0 el centro de la circunferencia $\mathcal{C}$, entonces $Q_0\in\mathcal{L}\cap\mathcal{P}$, entonces
$Q_0=(1+t,-3-t,-1+t)$ para algún t.Pero $Q_0\in\mathcal{P}$, entonces

$$1+t-(-3-t)+(-1+t)-1=0,$$

de donde $t=-\dfrac{2}{3}$. Así, $Q_0=\left(1-\dfrac{2}{3},-3+\dfrac{2}{3},-1-\dfrac{2}{3}\right)=\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{7}{3},-\dfrac{5}{3}\right)$.

Radio de la circunferencia $\mathcal{C}$

$\overrightarrow{QC}=C-Q=(1,-3,-1)-\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{7}{3},-\dfrac{5}{3}\right)=\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$,

$\left\|\overrightarrow{QC}\right\|=\left\|\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)\right\|=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$.

En el triángulo rectángulo CQ_0T, por el teorema de Pitágoras, se tiene :

$$\begin{aligned}OC^2 &= CQ^2+QT^2;\ R=\sqrt{3}\text{ radio de }\mathcal{E}\\ 3 &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2+r^2,\end{aligned}$$

de donde $r=\sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

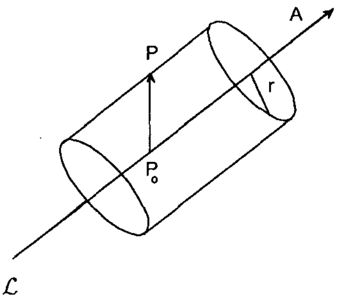
1.2.2 Cilindros

El mas conocido es el :

1.2.3 Cilindro circular recto

Definición 1.19 *Dada una recta $\mathcal{L}$ y un número real positivo r, el conjunto $\mathcal{S}$ formado por todos los puntos P que están a una distancia r de $\mathcal{L}$ se llama* cilindro circular recto *de radio r y eje $\mathcal{L}$*

$$\mathcal{E} = \left\{ P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : d_P(\mathcal{L}) = r \right\}$$



Ecuación.

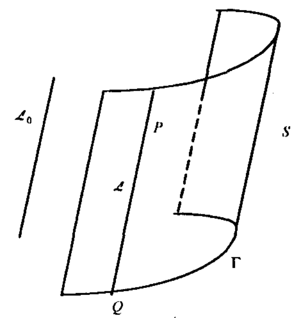
Dada la ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L} : P = P_0 + tA$, $t \in \mathbb{R}$, y un punto generador del cilindro es P, la ecuación cartesiana (1) del cilindro circular recto de eje $\mathcal{L}$ y radio r se obtiene usando la fórmula de la distancia de un punto a una recta :

$$d_{\mathcal{L}}(P) = r \iff \frac{\|A \times (P - P_0)\|}{\|A\|} = r \tag{5}$$

Notemos que el cilindro de ecuación (5) también es la reunión de todas las rectas paralelas al vector A y que pasan por una de las circunferencias C del cilindro. Si la circunferencia C se cambia por cualquier otra curva plana Γ, obtenemos un :

1.2.4 Cilindro general

Definición 1.20 *Dados una curva plana Γ y un vector no nulo A que no es paralelo al plano de Γ, la reunión S de todas las rectas $\mathcal{L}$ que son paralelas al vector A y que intersectan a Γ se llama* cilindro *(*o una superficie cilíndrica*) con* curva de base*(o* curva directriz*) Γ y eje $\mathcal{L}_0$ paralelo al vector A. Cada recta $\mathcal{L}$ recibe el nombre de* generatriz *del cilindro.*



Observación 1.5 *Se verá más adelante que una curva Γ en el espacio, puede ser definida por una de las dos formas siguientes:*

1.Mediante tres ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \\ z = k(t) \end{cases} \quad , t \in I \tag{6}$$

2.Mediante dos ecuaciones cartesianas

$$\begin{cases} g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Ecuación del cilindro. Sea $\mathcal{L}$ una generatriz arbitraria que interseca a Γ en el punto $Q\left(x', y', z'\right)$ y tomemos en $\mathcal{L}$ un punto $P(x, y, z)$. Entonces se cumple :

$$Q = P + tA, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

La ecuación del cilindro S se obtiene eliminando las variables auxiliares x', y', z', t ; usando las ecuaciones (8) y (6) o (8) y (7) según sea el caso.

Ejemplo 1.19 *Sean $Q = (1, 2, 1)$ y $R = (-1, 3, 0)$ dos puntos simétricos respecto a una recta $\mathcal{L}$, la cual es paralela a la recta*

$$\mathcal{L}_1 : x - 1 = y - 1 = 1 - z.$$

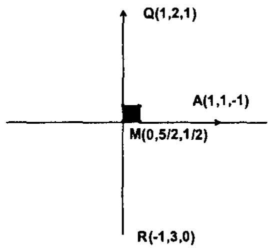
Hallar la ecuación cartesiana del cilindro circular recto cuyo eje es $\mathcal{L}$ y que contiene a los puntos Q y R.

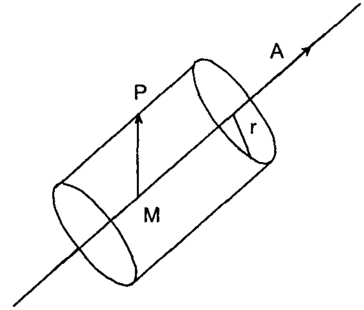
Solución.

Ecuación del eje del cilindro:

Como M es punto medio de $\overline{QR}$ entonces $M = (0, \frac{5}{2}, \frac{1}{2})$. Sea M el punto de paso de la recta $\mathcal{L}$ y $A = (1, 1, -1)$, el vector de dirección paralelo al vector dirección de la recta $\mathcal{L}_1$. Así,

$$\mathcal{L} : P = (0, \tfrac{5}{2}, \tfrac{1}{2}) + t(1, 1, -1), \quad t \in \mathbf{R}$$





Radio del cilindro

$$r = d(Q, M) = \sqrt{(1-0)^2 + \left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Ecuación del cilindro:
Sea $P(x, y, z)$ un punto generador del cilindro $\mathcal{S}$, entonces se tiene :

$$\mathcal{S} \quad : \quad d_{\mathcal{L}}(P) = r \Longleftrightarrow \frac{\left\|\overrightarrow{MP} \times A\right\|}{\|A\|} = r$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathcal{S} : \frac{\left\|\left(x, y - \frac{5}{2}, z - \frac{1}{2}\right) \times (1,1,-1)\right\|}{\|(1,1,-1)\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\mathcal{S} \quad : \quad \frac{\left\|\left(-y - z + 3, x + z - \frac{1}{2}, x - y + \frac{5}{2}\right) \times (1,1,-1)\right\|}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Longrightarrow$$

$$\mathcal{S} \quad : \quad (-y - z + 3)^2 + \left(x + z - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Así,

$$\mathcal{S} := \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (-y - z + 3)^2 + \left(x + z - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}\right\}$$

Ejemplo 1.20 *Hallar la ecuación del cilindro circular recto que cumple las tres siguientes condiciones:*
i)Es tangente al plano $\mathcal{P} : 3x + 2y - 2z + 22 = 0$ *, a lo largo de una generatriz* $\mathcal{L}$.
ii)$\mathcal{L}$ *pasa por el punto* $(2, -11, 3)$.
iii)El eje $\mathcal{L}_1$ *del cilindro pasa por el punto* $(3, 4, 11)$.

Solución.
Se observa que el punto $(2, -11, 3) \in \mathcal{P} : 3x + 2y - 2z + 22 = 0$. Sea $P_0 = (3, 4, 11)$ el punto de paso de la recta $\mathcal{L}_1$, entonces

$$r = d_{\mathcal{P}}(P_0) = \frac{|3(3) + 2(4) - 2(11) + 22|}{\|(3, 2, -2)\|} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17},$$

Sea $\mathcal{L}^*$ la recta que pasa por el punto de tangencia Q , el centro de la circunferencia C y tiene dirección el vector normal $N = (3, 2, -2)$ del plano $\mathcal{P}$,

$$\mathcal{L}^* : P = (2, -11, 3) + t\,(3, 2, -2)\ , \quad t \in \mathbb{R}$$

Ecuación del eje del cilindro:
Sea $C \in \mathcal{L}^*$entonces $C = (2+3t, -11+2t, 3-2t)$ para algún t.
Pero $\overrightarrow{CP_0} \perp N \Longrightarrow \overrightarrow{CP_0} \cdot N = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{CP_0} = (1-3t, 15-2t, 8+2t)$
$\Longrightarrow (1-3t, 15-2t, 8+2t) \cdot (3,2,-2) = 0 \Longrightarrow 17-17t = 0,\ t = 1.$
Así, $\overrightarrow{CP_0} = (-2, 13, 10)$.
Sea $P_0 = (1,-2,2)$ el punto de paso de la recta $\mathcal{L}$ .entonces

$$r = \frac{\left\|\overrightarrow{P_0Q} \times A\right\|}{\|A\|},$$

donde ,
$\left\|\overrightarrow{CP_0}\right\| = \|(-2,13,10)\| = \sqrt{273}, \overrightarrow{PP_0} = (x-3, y-4, z-11)$
$\overrightarrow{PP_0} \times \overrightarrow{CP_0} = (10y - 13z + 103, 52 - 2z - 10x, 13x + 2y - 47)$
Ecuación del cilindro:
Sea $P(x,y,z)$ un punto generador del cilindro $\mathcal{S}$, entonces se tiene :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} \quad &: \quad d_{\mathcal{L}}(P) = r \Longleftrightarrow \frac{\left\|\overrightarrow{PP_0} \times \overrightarrow{CP_0}\right\|}{\left\|\overrightarrow{CP_0}\right\|} = r \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\|(10y - 13z + 103, 52 - 2z - 10x, 13x + 2y - 47)\|}{\sqrt{273}} = \sqrt{17} \Longrightarrow \\
\mathcal{S} \quad &: \quad (10y - 13z + 103)^2 + (52 - 2z - 10x)^2 + (13x + 2y - 47)^2 = 4641.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.21 *Sea $\mathcal{S}$ el cilindro circular recto cuyo eje $\mathcal{L}$ pasa por el origen de coordenadas y tal que su intersección con el plano $\mathcal{P} : x+y+z = 3$ es la circunferencia Γ que pasa por $Q = (0,1,2)$. Hallar*
(a)La ecuación del eje del cilindro.
(b)El centro de la circunferencia Γ.
(c)La ecuación cartesiana del cilindro.

Solución
(a)La normal $N = (1,\ 1,\ 1)$ del plano $\mathcal{P}$ es un vector dirección del eje del cilindro $\mathcal{S}$.
Como el eje del cilindro $\mathcal{S}$ pasa por el origen de coordenadas, entonces se tiene que la ecuación del eje del cilindro $\mathcal{S}$ es

$$\mathcal{L} : P = t\,(1,\ 1,\ 1)\,;\ t \in \mathbf{R}.$$

(b)Sea C el centro de Γ, entonces C está en $\mathcal{L}$, el eje del cilindro $\mathcal{S}$.
Como $C \in \mathcal{L}, C$ es de la forma $C\,(t,\ t,\ t)$, para algún $t \in R$. Además C está en el plano $\mathcal{P} : x+y+z = 3$, entonces $t+t+t = 3$, luego resulta $t = 1 \Rightarrow C\,(1,1,1)$.
(c)El radio de la circunferencia Γ es

$$r = d\,(C,\ Q) = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{3}.$$

Si $P\,(x,\ y, z)$ es un punto arbitrario de $\mathcal{S}$, entonces la ecuación de $\mathcal{S}$ es

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} \quad &: \quad \frac{\left\|\overrightarrow{CP} \times N\right\|}{\|N\|} = \sqrt{3} \Longrightarrow \frac{\|(x-1, y-1, z-1) \times (1,1,1)\|}{\|(1,1\ ,\ 1)\|} = \sqrt{3} \\
&\Longrightarrow \quad \mathcal{S} : \frac{\|(y-z, z-x, x-y)\|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación pedida es

$$\mathcal{S} : (y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2 = 9.$$

Ejemplo 1.22 *Una generatriz $\mathcal{L}$ de un cilindro es paralela a la recta*

$$\mathcal{L}_0 : P = t\,(3,2,-1)\,, t \in \mathbf{R}.$$

Hallar la ecuación de dicho cilindro si una de sus directrices es la curva base

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 &= 5 \\ x - y + 2z &= 0 \end{cases}$$

Solución

Sea $P(x,y,z)$ un punto generador del cilindro $\mathcal{S}$, entonces existe una recta $\mathcal{L}$ (generatriz) paralela al vector
$A = (3,2,-1)$ tal que

$$\begin{array}{ll} P \in \mathcal{L} : P^* = P + tA, & t \in \mathbf{R} \\ \mathcal{L} : P^* = (x,y,z) + t\,(3,2,-1)\ , & t \in \mathbf{R} \\ \mathcal{L} : P^* = (x+3t, y+2t, z-t)\ , & t \in \mathbf{R} \end{array}$$

Sea $Q(x_0,y_0,z_0)$ el punto de intersección de la curva Γ con la generatriz $\mathcal{L}$ del cilindro $\mathcal{S}$ que pasa por P.Es decir,
$Q = \mathcal{L} \cap \Gamma$ entonces $Q \in \mathcal{L} \Rightarrow \exists\ t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $Q(x_0,y_0,z_0) = (x+3t_0, y+2t_0, z-t_0)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_0 &= x + 3t_0 \\ y_0 &= y + 2t_0 \\ z_0 &= z - t_0 \end{cases} \quad \cdots (1)$$

Como el punto $Q(x_0,y_0,z_0)$ está en Γ, se cumplen las ecuaciones

$$\Gamma : \begin{cases} x_0^2 - y_0^2 + z_0^2 &= 5 \cdots (2) \\ x_0 - y_0 + 2z_0 &= 0 \cdots (3) \end{cases}$$

Reemplazando (1) en (3) se tiene:

$$\begin{aligned} (x+3t_0) - (y+2t_0) + 2\,(z-t_0) &= 0 \Longrightarrow x - y + 2z - t_0 = 0 = 0 \\ &\Longrightarrow t_0 = x - y + 2z \end{aligned}$$

Luego en (1), resulta : $\begin{cases} x_0 &= x + 3\,(x-y+2z) = 4x - 3y + 6z \\ y_0 &= y + 2\,(x-y+2z) = 2x - y + 4z \\ z_0 &= z - (x-y+2z) = y - x - z \end{cases} \quad \cdots (*)$

Reemplazando $(*)$ en (2) se concluye :

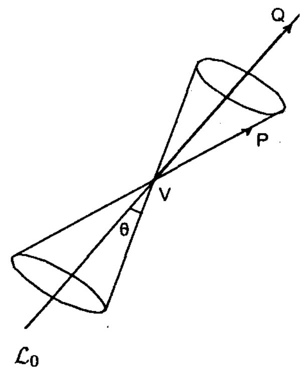
$$\begin{aligned} \mathcal{S} &: \ x_0^2 - y_0^2 + z_0^2 = 0 \\ \mathcal{S} &: \ (4x - 3y + 6z)^2 - (2x - y + 4z)^2 + (y - x - z)^2 = 5. \end{aligned}$$

1.2.5 Cono

Cono circular recto

Sean dados una circunferencia $\mathcal{C}$ y un punto V que no está en el plano $\mathcal{P}$ de la circunferencia y cuya proyección ortogonal sobre dicho plano es el centro de la circunferencia.

Definición 1.21 *La reunión $\mathcal{S}$ de todas las rectas $\mathcal{L}$ que pasan por V y que que intersectan a $\mathcal{C}$ se llama un* cono circular recto *de vértice V y eje $\mathcal{L}_0$, donde $\mathcal{L}_0$ es la recta que une V con el centro de la circunferencia.*



Ecuación. Conocidos un punto $Q \neq V$ del cono y el (coseno del) ángulo θ que forman cualquier generatriz con el eje, la ecuación que satisfacen los puntos P del cono se obtiene de la fórmula del ángulo entre dos vectores :

$$\cos\theta = \frac{(P-V)\cdot(Q-V)}{\|P-V\|\,\|Q-V\|}$$

Para considerar las dos hojas del cono, incluído el vértice, escribimos la ecuación del cono en la forma :

$$(\cos\theta \ \|P-V\| \ \|Q-V\|)^2 = [(P-V)\cdot(Q-V)]^2 .$$

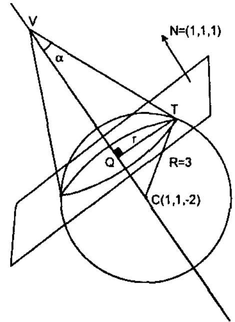
Si la circunferencia $\mathcal{C}$ se cambia por cualquier otra curva plana Γ, obtenemos un cono general.

Ejemplo 1.23 *Hallar la ecuación cartesiana del cono circular recto $\mathcal{S}$ con vértice en el punto $V = (7,7,4)$ y cuya directriz (sección transversal perpendicular al eje) es la circunferencia*

$$\Gamma : \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2y+4z & = & 3 \\ x^2+y^2+z^2-x-y+5z & = & 6 \end{cases}$$

Solución
Al reescribir el sistema anterior se obtiene

$$\Gamma : \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2 & = & 9 \\ x+y+z & = & 3 \end{cases}$$



Sea L el eje del cono $\mathcal{S}$, recta que pasa por el centro $C = (1,1,-2)$ de la esfera E: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ y es perpendicular al plano P: $x+y+z-3=0$ (normal $N = (1,1,1)$).

$\mathcal{L} : P = C + t\ N = (1,1,-2) + t\ (1,1,1)\ ; t \in \mathbb{R}$

Ecuación del cono $\mathcal{S}$:

Sea $P(x,y,z)$ un punto generador del cono $\mathcal{S}$.

Como el cono es circular recto :

(i)El centro Q de la circunferencia Γ es la proyección ortogonal del vértice V sobre el plano P: $x+y+z=3$.

(ii)El vértice V, el punto de tangencia T y el centro C forma un triángulo rectángulo VQT recto en Q.

$$\begin{aligned} Q &\in \mathcal{L} : Q = (1+t, 1+t, -2+t) \in \mathcal{P} : x+y+z = 3 \Longrightarrow \\ (1+t)+(1+t)+(-2+t) &= 3 \Longrightarrow t = 1, Q = (2,2,-1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CQ} &= Q - C = (2,2,-1) - (1,1,-2) = (1,1,1)\,. \\ \left\|\overrightarrow{CQ}\right\| &= \sqrt{3}. \\ \overrightarrow{VQ} &= Q - V = (2,2,-1) - (7,7,4) = (-5,-5,-,5) \\ \left\|\overrightarrow{VQ}\right\| &= \|(-5,-5,-,5)\| = 5\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ahora, por el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo CQT se tiene :

$$\left\|\overrightarrow{CT}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{CQ}\right\|^2 + r^2 \Longrightarrow 9 = 3 + r^2 \Longrightarrow r = \sqrt{6}.$$

En el triángulo rectángulo VQT recto en Q. Por Pitágoras se tiene :

$$d^2(V;T) = d^2(V;Q) + r^2 = \left(5\sqrt{3}\right)^2 + 6 = 81 \Longrightarrow d(V;T) = 9.$$

Ecuación del cono $\mathcal{S}$:

Considere α el ángulo que forma el eje $\mathcal{L}$ del cono con cualquiera de las generatrices.

Sea $P = (x, y, z)$ un punto que pertenece al cono $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} \quad : \quad \cos\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{9} = \left| \frac{\overrightarrow{VP} \cdot N}{\left\|\overrightarrow{VP}\right\| \|N\|} \right| = \frac{|(x-7, y-7, z-4) \cdot (1,1,1)|}{\sqrt{3}\,\|(x-7, y-7, z-4)\|}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{S} : \frac{5}{3} = \frac{|x+y+z-18|}{\sqrt{(x-7)^2 + (y-7)^2 + (z-4)^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{S} : 25\left[(x-7)^2 + (y-7)^2 + (z-4)^2\right] = 9\,(x+y+z-18)^2 .$$

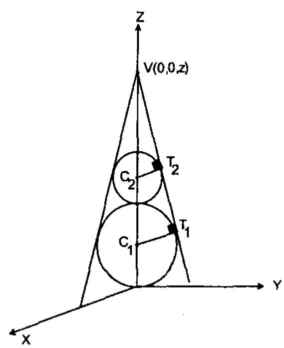
Es la ecuación pedida del cono.

Ejemplo 1.24 *El eje de un cono circular recto es $\mathcal{L} : P = (1, 2, 8) + t\ (2, 3, 4)$, $t \in R$. Una generatriz del cono está contenida en el plano XY. ¿Cuál es el vértice del cono? ¿Cuál es el ángulo agudo formado por el eje del cono y dicha generatriz?*

Solución
Una curva generatriz es $\Gamma :\ 4y^2 - 9z^2 = 1,\ x = 0$.
Ecuaciones paramétricas de $\mathcal{L} :\ x = 1 + 2t,\ y = 2 + 3t,\ z = 8 + 4t,\ t \in R$.
$\mathcal{L}$ corta al plano XY cuando $z = 8 + 4t = 0$, esto es, $t = -2$. Así $V = (-3, -4, 0)$.
Considere θ el ángulo agudo que forma el eje $\mathcal{L}$ del cono con la generatriz.
Ahora, $\cos\theta = \dfrac{|(2,3,4) \cdot (2,3,0)|}{\|(2,3,4)\|\,\|(2,3,0)\|} = \dfrac{13}{\sqrt{13}\sqrt{29}} = \sqrt{\dfrac{13}{29}}$.
Por tanto, el ángulo agudo $\theta = Arc\cos(\sqrt{\dfrac{13}{29}})$.

Ejemplo 1.25 *Dadas dos esferas $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ tangentes exteriores de radios $r_1 = 3$ y $r_2 = 1$ respectivamente. Si $\mathcal{E}_1$ está sobre el plano XY y $\mathcal{L}$ la recta que pasa por los centros de $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ es el eje Z. Hallar la ecuación del cono circular recto que* ***circunscribe*** *a las dos esferas, si el vértice V está en el eje positivo de Z.*

Solución.



Como el cono es tangente a las esferas :
(i)El eje del cono $\mathcal{L}$ pasa por los centros de las esferas $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$.
(ii)El vértice V, los puntos de tangencias T_1 y T_2 , los centros C_1 y C_2 de $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ forman triángulos rectángulos VC_1T_1 y VC_2T_2 rectos en T_1 y T_2 respectivamentes.
(iii)El vértice V está en el eje $\mathcal{L}$:=Eje Z (positivo), entonces $V(0, 0, z_0)$
Por semejanza de triángulos rectángulos :$\triangle VT_1C_1 \sim \triangle VT_2C_2$

$$\frac{VC_2}{C_2T_2} = \frac{VC_1}{C_1T_1} \Longleftrightarrow \frac{VC_2}{1} = \frac{VC_2 + 4}{3} \Longrightarrow VC_2 = 2.$$

Luego $z_0 = 7 + VC_2 = 9$. Así, $V(0,0,9)$.
Ahora, por Pitágoras se tiene :

$$\begin{aligned}(VC_2)^2 &= (VT_2)^2 + (C_2T_2)^2 \\ 4 &= (VT_2)^2 + 1 \Longleftrightarrow VT_2 = \sqrt{3}\end{aligned}$$

Considere θ el ángulo que forma el eje $\mathcal{L}$ del cono con cualquiera de los generadores. Por tanto,

$$\cos\theta = \frac{VT_2}{VC_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ecuación del cono $\mathcal{S}$:
Sea $P(x,y,z)$ un punto generador del cono $\mathcal{S}$, excepto en el vértice , entonces

$$\mathcal{S} \quad : \quad |\cos\theta| = \left|\frac{\overrightarrow{VP}\cdot\overrightarrow{VC_1}}{\left\|\overrightarrow{VP}\right\|\left\|\overrightarrow{VC_1}\right\|}\right| \ ;$$

$$\text{donde } \overrightarrow{VP} = (x,y,z-9)\ ,\ \overrightarrow{VC_1} = (0,0,-6)\,,\ \left\|\overrightarrow{VC_1}\right\| = 6.$$

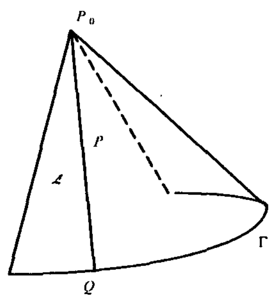
$$\Longleftrightarrow \quad \mathcal{S} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \left|\frac{\overrightarrow{VP}\cdot\overrightarrow{VC_1}}{\left\|\overrightarrow{VP}\right\|\left\|\overrightarrow{VC_1}\right\|}\right| = \left|\frac{(x,y,z-9)\cdot(0,0,-6)}{6\sqrt{(x)^2+(y)^2+(z-9)^2}}\right|$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathcal{S} := \left|\frac{-6\,(z-9)}{6\sqrt{(x)^2+(y)^2+(z-9)^2}}\right| \Longleftrightarrow \mathcal{S} : 3\left[x^2+y^2+(z-9)^2\right] = 4\,(z-9)^2$$

$$\therefore \quad \mathcal{S} : 3x^2 + 3y^2 = (z-9)^2\,.$$

Cono general

Definición 1.22 *Sean Γ una curva plana y P_0 un punto que no está contenido en el plano de Γ. La reunión $\mathcal{S}$ de todas las rectas $\mathcal{L}$ que pasan por P_0 y que intersectan a Γ se llama un* cono*(*o una superficie cónica*) con* curva de base*(o* curva directriz*) Γ de vértice P_0 y eje $\mathcal{L}$.*



Ecuación. Sea $\mathcal{L}$ una generatriz arbitraria que pasa por P_0 y que se interseca a Γ en el punto $Q\left(x',y',z'\right)$ y tomemos en $\mathcal{L}$ un punto $P(x,y,z)$ entonces se cumple :

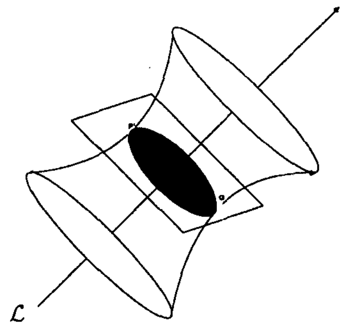
$$P = P_0 + t\ \ (Q - P_0)\,,\quad t \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

La ecuación del *cono* $\mathcal{S}$ se obtiene eliminando las variables auxiliares x', y', z', t , usando las ecuaciones (8) y (6) o (8) y (7) según sea el caso.

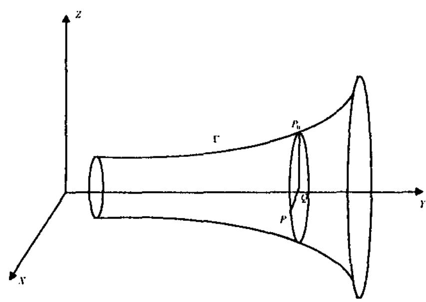
Cada recta $\mathcal{L}$ recibe el nombre de *generatriz* del cono.

1.2.6 Superficie de revolución

Definición 1.23 *Sean Γ una curva plana y $\mathcal{L}$ una recta en el plano de la curva. La superficie $\mathcal{S}$ generada por la rotación de Γ alrededor de $\mathcal{L}$ se llama una superficie de revolución de generatriz Γ y eje $\mathcal{L}$.*



Ecuación de una superficie de revolución con generatriz en el plano YZ y eje = eje Y.



Supongamos

$$\Gamma : \begin{cases} f(y,z) = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

Sean $P = (x, y, z)$ un punto de la superficie de revolución $\mathcal{S}$ y $P_0 = (0, y, z_0)$ el punto de Γ asociado con P_0. Entonces

$$d(P,Q) = d(P_0,Q)$$

de donde, siendo $Q = (0, y, 0)$,

$$x^2 + z^2 = z_0^2. \tag{10}$$

Como $P_0 \in \Gamma$, entonces

$$f\ (y, z_0) = 0. \tag{11}$$

De (10) y (11),

$$\mathcal{S} : f\ \left(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}\right) = 0.$$

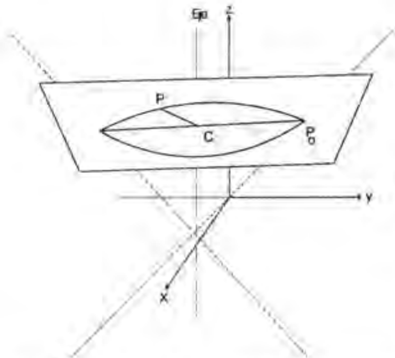
Ejemplo 1.26 *Hallar la ecuación cartesiana de la superficie $\mathcal{S}$ de revolución con generatriz, la recta*

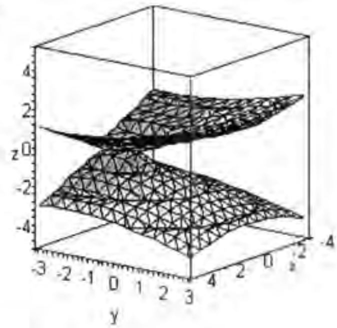
$$\Gamma : \begin{cases} y &= 3z \\ x &= 0 \end{cases},$$

y con eje de rotación la recta

$$\mathcal{L}:\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & -3 \end{array}\right. .$$

Solución.





Sea $\mathcal{L}:\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & -3 \end{array}\right.$ el eje de rotación de la superficie $\mathcal{S}$.

$\mathcal{L}: P=(0,-3,z)$, $z\in\mathbf{R}$, $\mathcal{L}$ es paralela al eje Z.

La generatriz $\Gamma:\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 3z \\ x & = & 0 \end{array}\right.$ $\Gamma: P=(0,3z,z)$, $z\in\mathbf{R}$

Sea $P(x,y,z)$ un punto generador de la superficie de revolución de $\mathcal{S}$. A través de P se hace pasar un plano $\mathcal{P}$ perpendicular al eje de revolución $\mathcal{L}$. Es decir $\mathcal{P}\perp\mathcal{L}$, $\mathcal{P}: z=z_0$. La intersección de la superficie $\mathcal{S}$ con el plano $\mathcal{P}$ es una circunferencia $\mathcal{C}$, es decir, $\mathcal{C}:=\mathcal{P}\cap\mathcal{S}$.

Sea C el centro de $\mathcal{C}$, el punto de intersección de este plano $\mathcal{P}$ con el eje $\mathcal{L}$, entonces $C:=\mathcal{P}\cap\mathcal{L}$, entonces $C(0,-3,z_0)$ y sea $P_0(x_0,y_0,z_0)$ el punto de intersección de este plano $\mathcal{P}$ con la curva generatriz Γ, es decir, $P_0\in\mathcal{P}\cap\Gamma$ entonces:

$$\mathcal{P}: z=z_0 y\ \Gamma:\left\{\begin{array}{lcl} y_0 & = & 3z_0 \\ x_0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Así, $P_0(0,y_0,z)=(0,3z,z)$.

$$\text{Sea } P\in\mathcal{S}: d(P,C)=d(P_0,C)$$

$$\mathcal{S}:\sqrt{x^2+(y+3)^2+(z-z)^2}=|3z+3|$$

$$\therefore \mathcal{S}: x^2+(y+3)^2=9(z+1)^2$$

Ejemplo 1.27 *Dadas la curva* $-:\left\{\begin{array}{lcl} z & = & 4+y^2 \\ x & = & 0 \end{array}\right.$, $y\geq 0$

y la recta $\mathcal{L}: P=t\ (0,0,1)$, $t\in\mathbb{R}$. *Hallar la ecuación de la superficie* $\mathcal{S}$ *obtenida al girar* Γ *alrededor de*

$\mathcal{L}$.*¿Es* S *una superficie cuadrática?.En caso afirmativo, identificarla.*

Solución

Sea $P(x,y,z)$ un punto arbitrario de la superficie de revolución $\mathcal{S}$ y $P_0(0,y_0,z_0)$ un punto de la curva Γ, tales que P *y* P_0

se encuentran en una misma circunferencia, entonces: $x_0 = 0,\ z_0 = z,\ y_0^2 = z_0 - 4 = z - 4$. Así $P_0\left(0, y_0, z\right)$.

Si C es el centro de la circunferencia descrita anteriormente, entonces $C\left(0,0,z_0\right) = (0,0,z)$.

$$P\left(x,\ y,\ z\right) \in \mathcal{S} : d\left(P, C\right) = d\left(P_0, C\right)$$

$$\mathcal{S} : \sqrt{x^2+y^2} = |y_0| \Longrightarrow \mathcal{S} : x^2+y^2 = y_0^2$$

$$\therefore \mathcal{S} : x^2+y^2 = z-4.$$

Ejemplo 1.28 *Sea C la curva contenida en el plano YZ, dada por las ecuaciones:*

$$\begin{cases} z &= \ln\left(1-y\right) - c,\ y < 1 \\ x &= 0 \end{cases}$$

donde c es una constante.

(a)Hallar la ecuación de la superficie de revolución S,obtenida al girar C alrededor de la recta

$$\mathcal{L} : \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 1 \end{cases}$$

(b)Si la superficie S contiene al punto $\left(1, 0, \dfrac{\ln 2}{2} - 1\right)$, hallar el valor de c.

Solución.

(a) Sea $\mathcal{L} : P = (0, 1, z),\ z \in \mathbb{R},\ \mathcal{L}$ es paralela al eje Z.

Sea $P\left(x, y, z\right)$ un punto arbitrario de la superficie $\mathcal{S}$ y $P_0\left(0, y_0, z_0\right)$ un punto de la curva $\mathcal{C}$, tales que P *y* P_0 se encuentran

en una misma circunferencia, entonces: $z = z_0, z_0 = \ln\left(1 - y_0\right) - c$.

Pero:

$$\begin{aligned} z &= \ln\left(1-y_0\right) - c \Longrightarrow \ln\left(1-y_0\right) = z + c \Longrightarrow \\ 1 - y_0 &= e^{z+c} \Longrightarrow y_0 = 1 - e^{z+c} y P_0\left(0, 1 - e^{z+c}, z\right) \end{aligned}$$

Si Q es el centro de la circunferencia descrita anteriormente, entonces $Q\left(0,1,z_0\right) = (0,1,z)$.

$$\text{Sea } P \in \mathcal{S} : d\left(P, Q\right) = d\left(P_0, Q\right)$$

$$\mathcal{S} : \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \left|\left(1 - e^{z+c}\right) - 1\right|$$

$$\therefore \mathcal{S} : x^2 + (y-1)^2 = e^{2(z+c)}$$

(b)Como $\left(1, 0, \dfrac{\ln 2}{2} - 1\right) \in \mathcal{C} \Longrightarrow 2 = e^{\ln 2 - 2 + 2c} \Longrightarrow c = 1$.

La ecuación de la superficie es, $\mathcal{S} : x^2 + (y-1)^2 = e^{2(z+1)}$.

Ejemplo 1.29 *La superficie obtenida es un paraboloide con eje de revolución el eje Z.*

¿Para que valores positivos de a la superficie $\mathcal{S} : 4y^2 - \dfrac{x^2}{a^2} - 9z^2 = 1$ es una superficie de revolución?. Dar la ecuación de una curva generatriz.

Solución

Escribimos $\mathcal{S} : \dfrac{y^2}{\frac{1}{4}} - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{\frac{1}{9}} = 1$

$\mathcal{S}$ es una superficie de revolución si $a = \dfrac{1}{3}$.

Esferas

1. Si el plano $\mathcal{P} : 2x - 6y + 3z - 49 = 0$ es tangente a la esfera $\mathcal{E} : x^2 + y^2 + z^2 = 49$, hallar las coordenadas del punto de tangencia.

2. Hallar la ecuación de la esfera que pasa por el punto $Q = (-1, 6, -3)$ y es tangente al plano $\mathcal{P} : 4x + 4y + 7z = 81$ en el punto $(7, 8, 3)$.

3. Una esfera $\mathcal{E}$ que pasa por el punto $(1, 3, -3)$ es tangente al plano
$$\mathcal{P} : x - 2y + 3z - 21 = 0.$$
Asimismo, la recta $\mathcal{L}$ pasa por el centro de $\mathcal{E}$, por el punto de tangencia Q y por el punto $(2, 1, 0)$.
   (a) Hallar la ecuación cartesiana de la esfera.
   (b) ¿Es el punto $(2, 1, 0)$ interior o exterior a la esfera?.Justificar su respuesta.

4. Una esfera $\mathcal{E}$ tiene centro en el punto de intersección de las rectas
$$\mathcal{L}_1 : P = (2, 2, 4) + t(6, 6, 7)\ ,\ t \in \mathbf{R},\quad \mathcal{L}_2 : P = (20, -10, 5) + r(-2, 3, 1)\ ,\ r \in \mathbf{R}$$
y es tangente al plano $\mathcal{P} : 4x - 2y + 3z = 0$.Hallar
   (a) La ecuación cartesiana de la esfera $\mathcal{E}$.
   (b) El centro de la circunferencia Γ, que es la intersección de $\mathcal{E}$ con un plano $\mathcal{P}'$ paralelo a $\mathcal{P}$, tal que el centro de $\mathcal{E}$ dista $\dfrac{25}{\sqrt{29}}$ unidades de $\mathcal{P}'$.

5. El plano $\mathcal{P} : x - 3y + 2z = 14$ corta a la esfera $\mathcal{E}$ de radio 6 y centro en el origen de coordenadas en una circunferencia $\mathcal{C}$. Hallar
   (a) El centro y el radio de $\mathcal{C}$.
   (b) La ecuación cartesiana del lugar geométrico descrito al desplazar $\mathcal{C}$ paralelamente al plano $\mathcal{P}$, manteniendo el centro en la recta que une los centros de la circunferencia $\mathcal{C}$ y de la esfera $\mathcal{E}$.

6. Hallar la ecuación de la esfera $\mathcal{E}$ de radio mínimo tangente a las rectas
$$\mathcal{L}_1 : P = (-2, 7, 2) + t(3, -4, 4), t \in \mathbf{R},\quad \mathcal{L}_2 : Q = (5, 6, 1) + s(-3, 4, 1), s \in \mathbf{R}.$$

7. Un foco luminoso debe emitir un rayo de luz desde el punto $P_0 = (4, -2, 3)$ hacia un punto P_1 de la esfera
$$\mathcal{E}\ : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 55 = 0,$$
según la dirección del vector $A = (1, -2, 1)$, de modo que llegue a P_1 en el menor tiempo posible. Hallar el punto P_1 y el sentido de la dirección del rayo.

8. El plano
$$\mathcal{P} : 2x - 6y + 3z + d = 0,\quad d < 0,$$

es tangente a la esfera

$$\mathcal{E} : x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 48$$

en el punto T.

(a) Hallar las coordenadas del punto T.

(b) Si $\mathcal{P}_1$ es un plano paralelo a $\mathcal{P}$, dista de T 8 unidades e interseca a $\mathcal{E}$ en una circunferencia Γ, hallar las coordenadas del centro de la circunferencia Γ y su radio.

9. Hallar la ecuación de la esfera que está entre los planos paralelos

$$\mathcal{P}_1 : 6x - 3y - 2z - 35 = 0, \quad \mathcal{P}_2 : 6x - 3y - 2z + 63 = 0,$$

si el punto $Q = (5, -1, -1)$ es punto de tangencia de uno de ellos.

Cilindro circular recto

1. Encontrar la ecuación cartesiana del cilindro circular tangente exterior a la esfera

$$\mathcal{E} : (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 4,$$

cuyo eje es paralelo a la recta $\mathcal{L} : P = t\,(1, 2, 3)\,,\ t \in \mathbf{R}$.

2. Hallar la ecuación del cilindro circular recto cuya directriz es la intersección de las esferas

$$\mathcal{E}_1 : x^2 + y^2 - 4y + z^2 + 3 = 0 \quad , \quad \mathcal{E}_2 : x^2 + 2x + y^2 - 2y + z^2 - 2z + 2 = 0.$$

3. Sean $Q = (1, 2, 1)$ y $R = (-1, 3, 0)$ dos puntos simétricos respecto a una recta $\mathcal{L}$, la cual es paralela a la recta

$$\mathcal{L}_1 : x - 1 = y - 1 = 1 - z.$$

Hallar la ecuación cartesiana del cilindro circular recto cuyo eje es $\mathcal{L}$ y que contiene a los puntos Q y R.

4. Una generatriz $\mathcal{L}$ del cilindro circular recto S es paralelo al plano XY, pasa por el punto $Q = (4, 0, 1)$ e interseca a la recta

$$\mathcal{L}_1 : P = (3, 2, -1) + t(1, -2, 5), t \in \mathbf{R}.$$

Hallar la ecuación del cilindro S sabiendo que su eje pasa por el origen de coordenadas.

5. Cada uno de los planos

$$\mathcal{P}_1 : x + y + 2z = 1, \quad \mathcal{P}_2 : x - 2y + z = 2$$

interseca a un cilindro circular recto en una generatriz diferente. Si además se sabe que el eje del cilindro pasa por el punto $Q = (3, -2, 5)$, hallar la ecuación cartesiana de dicho cilindro.

Cono circular recto

1. Hallar la ecuación cartesiana del cono circular recto de vértice $V = (-5, 5, 5)$, si sus generatrices son tangentes a la esfera

$$\mathcal{E} : x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

2. El cono circular recto $\mathcal{S}$ tiene por eje la recta

$$\mathcal{L} : P = (1, 11) + r\,(0, 1, 0)\,,\ r \in \mathbf{R}.$$

Si la recta

$$\mathcal{L}' : P = (-3, 2, -3) + t\,(2, -1, 2)\,,\ t \in \mathbf{R},$$

es una generatriz de $\mathcal{S}$, hallar

(a) El vértice de $\mathcal{S}$.

(b) La ecuación cartesiana de $\mathcal{S}$.

3. Hallar la ecuación cartesiana de un cono circular recto cuyo vértice es el punto $V = (4, 8, 2)$ y tal que su intersección con el plano

$$\mathcal{P} : x + y + z = 2$$

determina una circunferencia Γ de radio 2.

4. Hallar la ecuación del cono circular recto que tiene vértice en el origen, directriz o curva base una circunferencia en el plano

$$\mathcal{P} : 3x - 4y + z = 9$$

y una de sus generatrices es la recta

$$\mathcal{L} : P = t\,(7, 4, 4)\,,\ t \in \mathbf{R}.$$

5. Sean $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ dos esferas tangentes exteriores de radios $r_1 = 3$ y $r_2 = 1$ respectivamentes. Si $\mathcal{E}_1$ está sobre el plano XY y $\mathcal{L}$ la recta que pasa por los centros de $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ es el eje Z. Hallar la ecuación del cono circular recto que circunscribe a las dos esferas, si su vértice V está en el eje positivo de Z.

6. Hallar la ecuación cartesiana del cono circular recto S cuya directriz o curva base es la circunferencia

$$\mathcal{C} : \left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 8 = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{array} \right.$$

y cuyo vértice pertenece al plano $\mathcal{P} : 4x + 2y - 3z - 3 = 0$.

Superficie de revolución

1. Dada la curva Γ: $\left\{ \begin{array}{lcl} z & = & 0 \\ x & = & a - \sqrt{a^2 - y^2} \end{array} \right.$ con $y \geq 0$, $a > 0$.

Hallar la ecuación cartesiana de la superficie de revolución $\mathcal{S}$ generada cuando Γ gira alrededor del eje Y.

2. Hallar la ecuación cartesiana de la superficie de revolución S generada por la rotación de la elipse

$$\mathcal{E}:\begin{cases} x^2+\dfrac{y^2}{4}=1 \\ z=0\end{cases},$$

alrededor del eje X.

3. Hallar la ecuación cartesiana de la superficie de revolución S con generatriz

$$\Gamma:\begin{cases} y &= 3z \\ x &= 0\end{cases}$$

y eje de rotación el eje Z.

1.2.7 Superficies cuadráticas

Una *superficie cuadrática* es un conjunto de puntos $P\,(x,y,z)$ que satisfacen una ecuación(cuadrática)de la forma

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+K=0, \tag{1}$$

en donde, por lo menos uno, de los seis coeficientes A, B, C, D, E y F es diferente de cero.

Se puede demostrar que, mediante una transformación de coordenadas, la ecuación (1) se reduce (en las nuevas coordenadas, que las seguiremos denotando por x,y,z) a una de las siguientes dos ecuaciones :

$$Mx^2+Ny^2+Pz^2=Q \tag{2}$$

$$Mx^2+Ny^2=Pz. \tag{3}$$

en donde todos los coeficientes son diferentes de cero.

Observación 1.6 *Hay otras ecuaciones de la forma* (3) *que se obtienen permutando cíclicamente las variables.*

Ejercicio 1.Escribir las otras dos ecuaciones de la forma (3).

Es evidente que el origen $0=(0,0,0)$ es un punto de simetría para las *cuadráticas* con ecuación (2) ; por esto, estas superficies se llaman *cuadráticas con centro.* Las superficies con ecuaciones de la forma (3) no tienen centro y se llaman *cuadráticas sin centro.*

1.2.8 Superficies cuadráticas con centro

Vamos a considerar ahora las superficies cuadráticas representadas por la ecuación

$$Mx^2+Ny^2+Pz^2=Q,$$

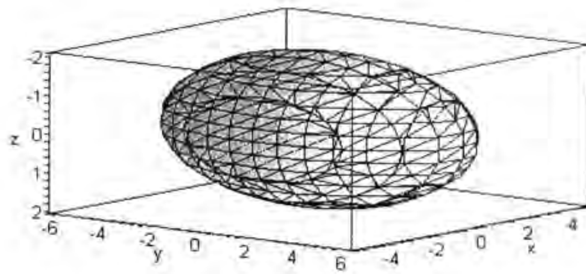
en donde todos los coeficientes son diferentes de cero.

Según los signos de los coeficientes, tenemos los siguientes prototipos :

1. *Elipsoide.*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

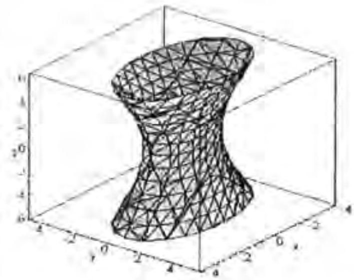
Su gráfica es de la forma :



2. *Hiperboloide de una hoja.*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Su gráfica es de la forma :



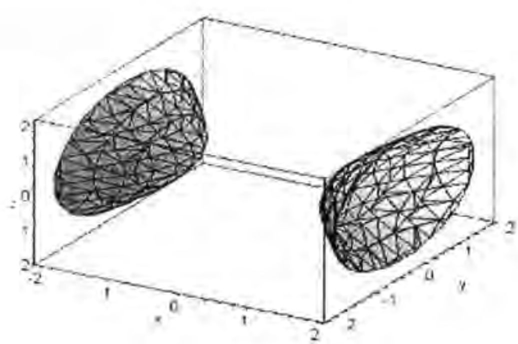
Cabe señalar que, según la ubicación del signo menos, hay otras dos ecuaciones de hiperboloides de una hoja.

Ejercicio 2. Escribir las otras dos ecuaciones de hiperboloides de una hoja.

3. *Hiperboloides de dos hojas.*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Su gráfica es de la forma :



En este caso, también hay otras dos ecuaciones de hiperboloides de dos hojas.

Ejercicio 3. Escribir las otras dos ecuaciones de hiperboloides de dos hojas.

1.2.9 Superficies cuadráticas sin centro

Vamos a considerar ahora las superficies cuadráticas representadas por la ecuación

$$Mx^2 + Ny^2 = Pz,$$

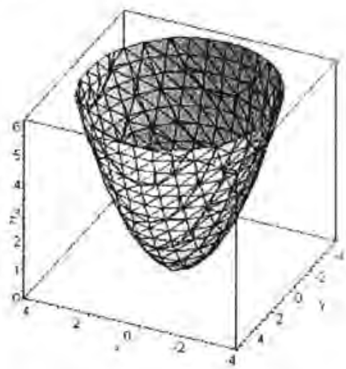
en donde todos los coeficientes son diferentes de cero.

Según los signos de los coeficientes, tenemos los siguientes prototipos :

1. *Paraboloide elíptico.*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

Su gráfica es de la forma :

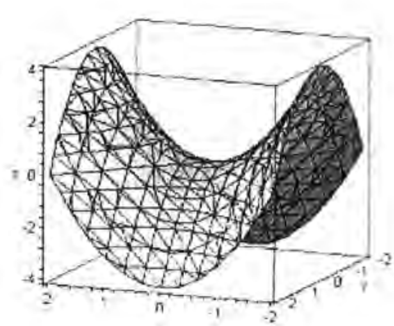


Ejercicio 4. Escribir las otras dos ecuaciones de paraboloides elipticos.

2. *Paraboloide hiperbólico.*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$$

Su gráfica es de la forma :



Ejercicio 5. Escribir las otras dos ecuaciones de hiperboloides de dos hojas.

1.2.10 Cuádricas degeneradas

Entre las cuadráticas degeneradas están las del tipo:

$$Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = Q \tag{2}$$

$$Mx^2 + Ny^2 = Pz. \tag{3}$$

Dentro de las superficies cuádricas centradas degeneradas se encuentran conos, cilindro elíptico, cilindro hiperbólico, planos dobles. Y entre las no centradas y degeneradas se encuentra el cilindro parabólico.

1.2.11 Degeneradas centradas

Cono:

Su ecuación canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz^2$$

Las intersecciones dan:

-Con $z = k$: , son elipses con semidiámetros crecientes y que se reducen a un punto cuando $k = 0$.

-Con $x = k$ e $y = k$ las intersecciones son hipérbolas de eje vertical.

Si $a = b$ las trazas con los planos paralelos al plano xy son circunferencias, por lo tanto sería un cono circular.

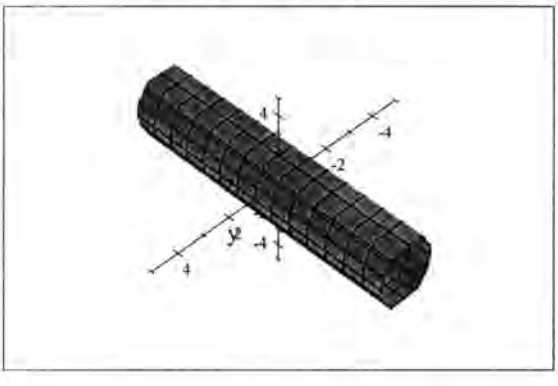
1.2.12 Cilindro elíptico:

Su ecuación canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

o también

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1; \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$



Si $z = k$, las intersecciones son elipses con semidiámetros constantes, si $a = b$ será un cilindro circular.

Con $x = k$ e $y = k$ las intersecciones son líneas rectas separadas a igual distancia del centro del cilindro.

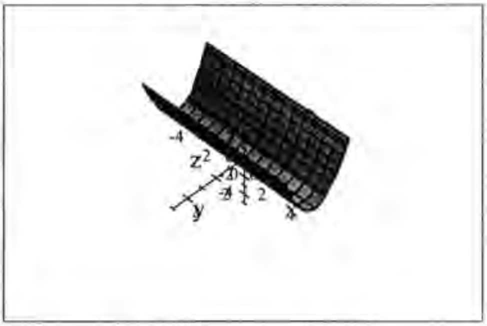
1.2.13 Cilindro hiperbólico:

Su ecuación canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(ó también

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1; \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1)$$



Si $z = k$ las intersecciones son hipérbolas constantes.

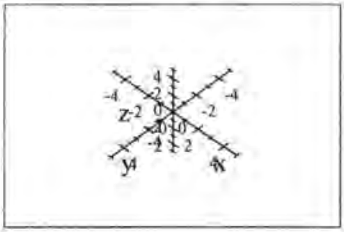
1.2.14 Planos dobles:

Su ecuación canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

o también

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 0; \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 0)$$



1.2.15 Degeneradas no centradas

Cilindro parabólico

Su ecuación canónica es: $Mx^2 = Sz$ (ó también $Ny^2 = Sz$)

Las intersecciones dan:
-Con $y = k$: $Mx^2 = Sz$, son parábolas crecientes si M y Z son mayores que 0.

1.2.16 Superficies paramétricas

Una superficie paramétrica es la imagen de una función o transformación r definida en una región R de un plano uv y que tiene valores en el espacio xyz. La imagen bajo r en cada punto (u,v) en R es el punto del espacio xyz con vector de posición.

$r(u,v) = \langle x(u,v), y(u,v), z(u,v) \rangle$

Dado que una superficie paramétrica es una imagen de una transformación en el espacio, es posible por lo tanto tomar coordenadas cilíndricas y esféricas, para expresar la superficie con otros parámetros distintos a los rectangulares.

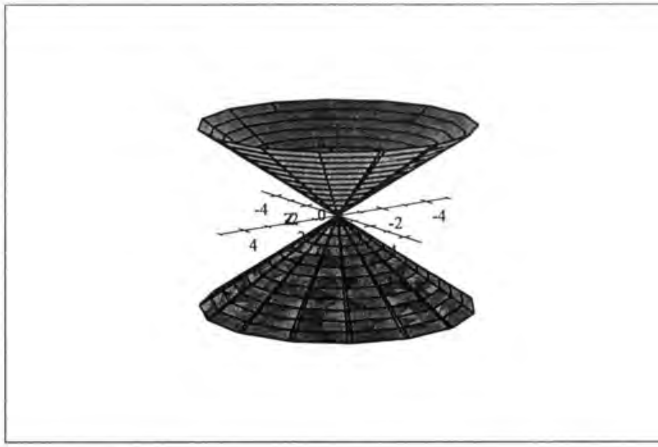
Algunos ejemplos de superficies paramétricas:

Cilindro circular

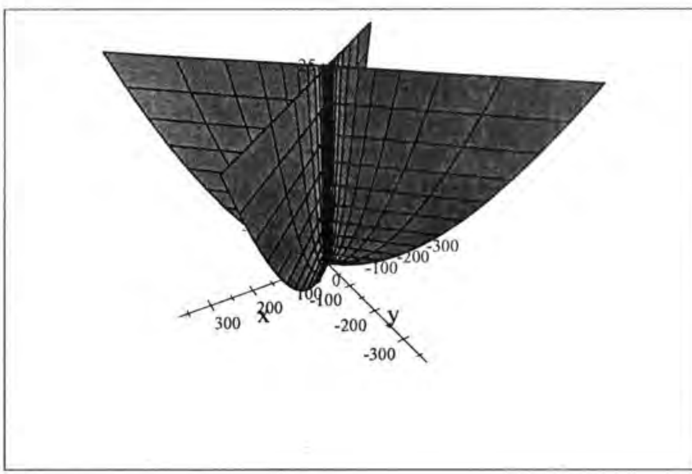
$[\cos u, \sin u, v]$

Cono circular

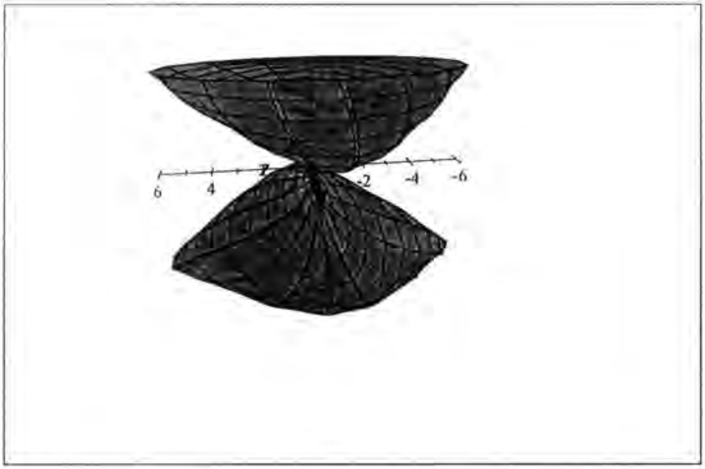
$[v \cos u. \ v \sin u, v]$



$[u \cosh v, u \sinh v, u^2]$



$[(u - \sin u)\cos v, (1 - \cos u)\sin v, u]$



$[u^2 + vu, u + vu^2, v]$(superficie reglada)

Ejemplo 1.30 *Sea la superficie* $S : \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} = z.$
(a)*Hallar las intesecciones de* S *con los planos coordenados.*
(b)*Hallar las secciones planas correspondientes a los planos :* $z = 4$, $z = -4$.
(c)*Graficar* S, *indicando los elementos hallados en* (a) *y* (b).

Solución.
(a)Sea $S : \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} = z$
Intesecciones de S con los planos coordenados:

Al plano XY, $T_{XY} := S \cap \mathcal{P}_{XY} : \begin{cases} \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} &= z \\ z &= 0 \end{cases}$

Así, $T_{XY} = \begin{cases} y = \pm\frac{2}{3}x \\ z = 0 \end{cases}$.

Al plano XZ, $T_{XZ} := S \cap \mathcal{P}_{XZ} : \begin{cases} \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} &= z \\ y &= 0 \end{cases}$

$$T_{XZ} : \begin{cases} z = -\dfrac{x^2}{9} \\ y = 0 \end{cases}$$

Al plano YZ, $T_{YZ} := S \cap \mathcal{P}_{YZ} : \begin{cases} \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} &= z \\ x &= 0 \end{cases}$

$$T_{YZ} : \begin{cases} z = \dfrac{y^2}{4} \\ x = 0 \end{cases}$$

(b)**Secciones planas :**

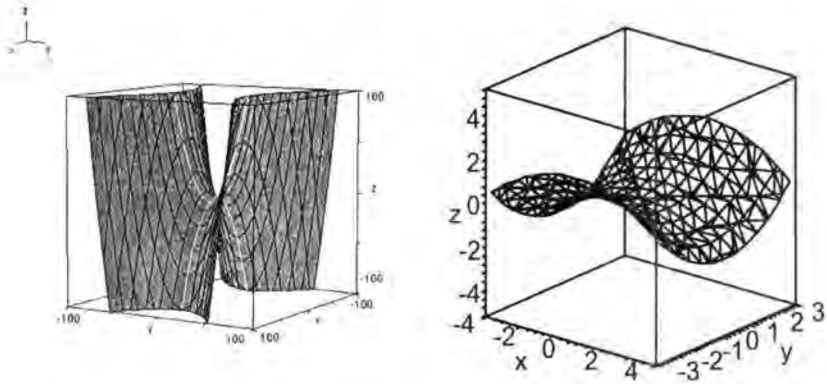
Al plano $z = 4$, $\Gamma_4 := S \cap \mathcal{P}_{z=4} : \begin{cases} \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} &= z \\ z &= 4 \end{cases}$

$$\Gamma_4 : \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{36} & = & 1 \\ z & = & 4 \end{array} \right. = 1 \text{ familia de hipérbolas}$$

Al plano $z = -4$, $\Gamma_{-4} := \mathcal{S} \cap \mathcal{P}_{z=-4} : \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} & = & z \\ z & = & -4 \end{array} \right.$

$$\Gamma_{-4} : \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{16} & = & 1 \\ z & = & -4 \end{array} \right. \quad \text{familia de hipérbolas}$$

(c)



Ejemplo 1.31 *Esbozar la gráfica de la superficie $\mathcal{S}$ cuya ecuación es*

$$9x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 0,$$

indicando sus trazas a los planos coordenados y las secciones planas paralelas a los ejes coordenados.

Solución.
Sea $\mathcal{S} : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = \dfrac{z^2}{4}$

Trazas con los planos coordenados:

Al plano XY, $T_{XY} := \mathcal{S} \cap \mathcal{P}_{XY} : \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} & = & \dfrac{z^2}{4} \\ z & = & 0 \end{array} \right.$

$$x = y = 0. \text{Así, } T_{XY} = \{(0,0,0)\}.$$

Al plano XZ, $T_{XZ} := \mathcal{S} \cap \mathcal{P}_{XZ} : \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} & = & \dfrac{z^2}{4} \\ y & = & 0 \end{array} \right.$

$$T_{XZ} : \left\{ \begin{array}{l} z = \pm x \\ y = 0 \end{array} \right.$$

Al plano YZ, $T_{YZ} := \mathcal{S} \cap \mathcal{P}_{YZ} : \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} & = & \dfrac{z^2}{4} \\ x & = & 0 \end{array} \right.$

$$T_{YZ} : z = \pm \frac{2}{3} y$$

Secciones transversales(o secciones planas paralelas a los ejes coordenados)

Al plano XY, $\Gamma_{Z=k} := \mathcal{S} \cap \mathcal{P}_{Z=k} : \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} &= \frac{z^2}{4} \\ z &= k \end{cases}$

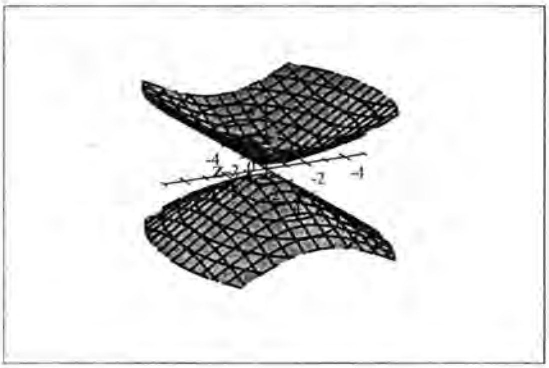
$$\Gamma_{Z=k} : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{k^2}{4} \quad \text{familia de elipses}$$

Al plano XZ, $\Gamma_{Y=k} := \mathcal{S} \cap \mathcal{P}_{Z=k} : \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} &= \frac{z^2}{4} \\ y &= k \end{cases}$

$$\Gamma_{Y=k} : \frac{z^2}{4} - \frac{x^2}{4} = \frac{k^2}{9} \quad \text{familia de hipérbolas}$$

Al plano YZ, $\Gamma_{X=k} := \mathcal{S} \cap \mathcal{P}_{X=k} : \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} &= \frac{z^2}{4} \\ x &= k \end{cases}$

$$\Gamma_{X=k} : \frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{9} = \frac{k^2}{4} \quad \text{familia de hipérbolas.} 9x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 0$$



Ejemplo 1.32 *Sea la superficie* $S : z^2 - x^2 - 2y^2 = 1$.

(a) *Hallar las intersecciones de* S *con los planos coordenados.*

(b) *Hallar las secciones planas correspondientes a los planos :* $z = 2$, $z = -2$.

(c) *Graficar* S, *indicando los elementos hallados en* (a) *y* (b).

Solución.

(a)Sea $\mathcal{S} : z^2 - x^2 - 2y^2 = 1$.

Intesecciones de S con los planos coordenados:

Al plano YZ, $T_{YZ} := \mathcal{S} \cap \mathcal{P}_{YZ} : \begin{cases} z^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} &= 1 \\ x &= 0 \end{cases}$

Al plano XZ, $T_{XZ} := \mathcal{S} \cap \mathcal{P}_{XZ} : \begin{cases} z^2 - x^2 &= 1 \\ y &= 0 \end{cases}$

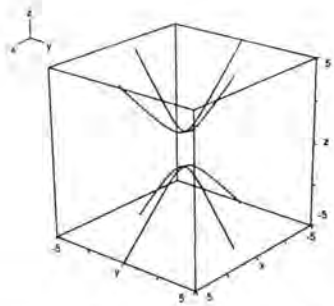
Al plano XY, $T_{XY} := \mathcal{S} \cap \mathcal{P}_{XY} : z = 0$, no intersecta al plano XY.

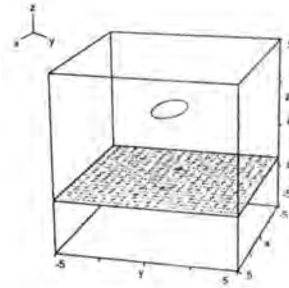
(b)**Secciones planas :**

Al plano $z = 2$, $\Gamma_2 := \mathcal{S} \cap \mathcal{P}_{z=2} : \begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{\frac{3}{2}} &= 1 \\ z &= 2 \end{cases}$

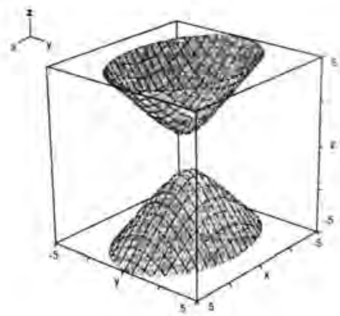
Al plano $z = -2$, $\Gamma_{-2} := \mathcal{S} \cap \mathcal{P}_{z=-2} : \begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{\frac{3}{2}} &= 1 \\ z &= -2 \end{cases}$

(c)





(c) La gráfica es un hiperboloide de dos hojas



1. Ejercicios Propuestos

1. Discutir y bosquejar la gráfica de la superficie cuadrática cuya ecuación es $36x^2 - 9y^2 - 4z^2 = 36$.

2. Demostrar que el hiperboloide
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$
donde $a > b > c > 0$ interseca a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en dos curvas planas las cuales son, por lo tanto, circunferencias. Hallar los centros de dichas circunferencias.¿Puede hallar los radios?

3. Determinar las posibles ternas (a, b, c) de números reales positivos tales que ambas superficies :
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} + 4y^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ ,$$
son superficies de revolución, no necesariamente con el mismo eje de revolución.

4. Hallar la ecuación cartesiana del lugar geométrico de los puntos en $\mathbf{R}^3$ que son equidistantes del plano YZ y de la recta $\mathcal{L} : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$. Bosquejar la gráfica .

5. Determinar la ecuación cartesiana e identificar el lugar geométrico de los puntos de $\mathbf{R}^3$ equidistantes del punto $Q\,(1, 2, -1)$ y del plano $\mathcal{P} : z = 1$.

6. Esbozar la gráfica de la superficie cuya ecuación
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1,$$
justificando su procedimiento.

   (a) Dar la ecuación de una curva Γ y de una recta $\mathcal{L}$ contenida, en el plano de Γ , de modo que la superficie de la parte (a) se pueda obtener al girar Γ alrededor de $\mathcal{L}$.

   (b) Demostrar que
   $$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1,$$
   es una superficie de revolución.

7. Sea $H : \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{12} = 1$.

   (a) Graficar H indicando simetrías, trazas(intersecciones con los planos coordenados) y secciones transversales (intersecciones con planos paralelos a los planos coordenados).

   (b) Hallar la recta que pasa por $(1, 0, 3)$ y está contenida completamente en H.

Capítulo 2

Introducción al álgebra lineal

2.1 Matrices. Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 2.1 *Una* matriz de orden $m \times n$ *es un arreglo rectangular de mn números acomodados o dispuestos en m filas y n columas.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Los elementos $a_{11}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{R}$, y se conocen como las entradas de la matriz A; el elemento de A ubicado en la intersección de la i-ésima fila y la j-ésima columna se denota por a_{ij}. La matriz A se denota brevemente por $A = [a_{ij}]$. La i-ésima fila de A se denota por $A_{(i)} = [a_{i1}, \ldots, a_{in}]$ y puede considerarse como un vector de, la j-ésima columna de A se representa por

$$A^{(j)} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

y puede considerarse como un vector de $\mathbb{R}^m$

Las matrices se denotan por letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$,etc.

Observación 2.1 *Si $m = n$,se dice que la matriz es* cuadrada.

En lo que sigue una matriz de m filas y n columnas será denotada por $A_{m \times n} = [a_{ij}]$ o simplemente por A.

Ejemplo 2.1

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

es una matriz de orden 2×4 y

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es una matriz cuadrada de orden 3.

Definición 2.2 *(Igualdad de matrices). Dos matrices A y B del mismo orden son iguales si todos sus elementos correspondientes son iguales. En tal caso se usa la notación $A = B$.*

En símbolo:

Dos matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$, del mismo tamaño, son iguales si y solo si $a_{ij} = b_{ij}$, para cada $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Denotemos por $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices de orden $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$.

2.1.1 Adición de matrices

Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ dos matrices en $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, entonces

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

2.1.2 Multiplicación de un escalar por una matriz

El producto de un escalar k por una matriz A es otra matriz kA la cual se obtiene multiplicando cada elemento de A por k.

$k.A = k.[a_{ij}] = [k\, a_{ij}]$, $k \in \mathbb{R}$.

Por ejemplo, si k es un escalar y $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ entonces

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{bmatrix}$$

Propiedades

Para A, B y C matrices de orden $m \times n$ cualesquiera y para $r, s \in \mathbb{R}$, se cumplen

1. $r(A + B) = rA + rB$
2. $(r + s)A = rA + sA$
3. $r(sA) = (rs)A$
4. $1A = A$.

2.1.3 Multiplicación de matrices

El producto de dos matrices no está definida de manera obvia; esto es, el producto de dos matrices *no* se obtiene multiplicando sus componentes correspondientes.

Antes de definir la multiplicación matricial, se requiere una definición previa.

Definición 2.3 *Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$ una matriz o vector fila $n-$dimensional y sea*

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

una matriz o vector columna $n-$dimensional. Entonces el producto, AB, de A y B está dado por

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ . \\ . \\ . \\ b_{n1} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + ... + a_{1n}b_{n1} \end{aligned}$$

Obsérvese que el producto de un vector fila y un vector columna no se puede definir a menos que sean de tamaños compatibles. Además, el vector fila debe escribirse a la izquierda.

Ejemplo 2.2 *El producto de* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ *es*

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\,(4) + 2\,(3) + 5\,(2) = 12 + 6 + 10 = 28.$$

Usando la definición de un vector fila por un vector columna se puede definir la multiplicación matricial.

Definición 2.4 *Dadas las matrices*

$$A = [a_{ij}] \text{ de orden } m \times \boxed{p}$$

y

$$B = [b_{ij}] \text{ de orden } \boxed{p} \times n;$$

el producto $A \times B$, en ese orden, es la matriz $C = [c_{ij}]$ de orden $m \times n$ cuya componente

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

es el producto de la fila i de A y la columna j de B.

Ejemplo 2.3 *Determinar el elemento de la segunda fila y la tercera columna del producto AB de las matrices* $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Solución El elemento a determinar, c_{23}, se obtiene multiplicando la fila 2 de A por la columna 3 de B.

$$c_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2.2 + 5.1 = 9.$$

Ejemplo 2.4 *Calcular el producto $AB = C$ donde*

$$A_{2\times3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B_{3\times2} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución La matriz producto C es de orden 2×2, esto es, tiene 4 elementos.

$$\begin{aligned}
c_{11} &= (\text{fila 1 de } A)\times(\text{columna 1 de } B) = 2\,(3) + 1\,(2) + (-3)1 = 5 \\
c_{12} &= (\text{fila 1 de } A)\times(\text{columna 2 de } B) = 2(-1) + 1\,(4) + (-3)5 = -13 \\
c_{21} &= (\text{fila 2 de } A)\times(\text{columna 1 de } B) = 4\,(3) + (-5)2 + 1\,(1) = 3 \\
c_{22} &= (\text{fila 2 de } A)\times(\text{columna 2 de } B) = 4(-1) + (-5)4 + 1\,(5) = -19
\end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -13 \\ 3 & -19 \end{bmatrix}$.

Observación 2.2 *Dadas dos matrices, por ejemplo, $A_{3\times 3}$ y $B_{3\times 4}$ es posible efectuar $AB = C_{3\times 4}$,debido a que sus tamaños son compatibles, es decir, el número de columnas de A es igual al número de filas de B; sin embargo, no es posible calcular BA.*

Ejemplo 2.5 *Hallar todas las matrices cuadradas A de orden 2×2 que conmutan con la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solución
Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Entonces $AB = BA$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} a+2b & -b \\ c+2d & -d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b \\ 2a-c & 2b-d \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

de donde

$$\left\{ \begin{array}{c} a + 2b = a \cdots (1) \\ -b = b \cdots (2) \Longrightarrow b = 0 \\ c + 2d = 2a - c \cdots (3) \\ -d = 2b - d \cdots (4) \end{array} \right.$$

De $(3) : c + 2d = 2a - c \Longrightarrow d = a - c$
$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a-c \end{bmatrix}$, $a, c \in \mathbb{R}$.

2.1.4 Matrices especiales

1. **Matriz diagonal.** Es la *matriz cuadrada* $A_{n\times n} = [a_{ij}]$ definida por

$$a_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_i \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{array} \right.$$

en donde $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Es decir

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Es decir, los valores λ_i se ubican en la diagonal principal.

2. **Matriz identidad.-** Llamada también matriz unidad, es un caso particular de matriz diagonal, en la cual los elementos de la diagonal principal son iguales a 1. Se representa por I_n o simplemente por I.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Propiedad fundamental

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

3. **Matriz triangular superior.-** Es la matriz cuadrada que verifica $a_{ij} = 0$, $\forall i > j$.

Ejemplo 2.6

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{bmatrix},$$

es una matriz triangular superior.

4. **Matriz inversa** Sea A una matriz cuadrada de orden n . Se dice que A *es invertible* si existe una matriz cuadrada B de orden n tal que: $AB = BA = I$.

   B se llama inversa de A y se denota por $B = A^{-1}$

   A se llama inversa de B y se denota por $A = B^{-1}$

Ejemplo 2.7 *Si* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix}$ *entonces* $AB = BA = I$, *por lo que* $B = A^{-1}$

Los métodos para determinar la inversa de una matriz se verán más adelante, sin embargo se debe tener en cuenta que no toda matriz cuadrada A es inversible.

Propiedades

Supongamos que existen las inversas de A y B, entonces se cumplen

1. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$, $k \neq 0$ (k escalar)

2.1.5 Transformaciones elementales con las filas de una matriz

Son operaciones con matrices que no modifican ni su orden ni su rango. Son transformaciones elementales las siguientes.

1. El intercambio de la fila i y la fila j. Se denota por f_{ij}.

2. El producto de todos los elementos de la fila i por una constante $k \neq 0$.Se denota por kf_i.

3. La suma de los elementos de la fila i con los correspondientes de la fila j multiplicados por una constante $k \neq 0$. Se denota por $f_i + kf_j$.

Ejemplo 2.8 *Con la matriz* $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$ *e pueden efectuar las transformaciones*

1. $f_{23} : \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$ *2.* $4f_2 : \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 16 & 36 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ *3.* $f_3 - 2f_1 : \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 9 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

2.1.6 Rango de una matriz

El rango de una matriz A_{mxn} es el número real r si el determinante de al menos uno de sus menores cuadrados de orden r es distinto de cero,siendo nulos los correspondientes a todos los menores cuadrados de orden $r+1$, si es que existen.

Definición 2.5 *El rango de* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ *es igual a 2, ya que el determinante de* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ *es distinto de cero,*

siendo $|A| = 0$. *En realidad, el cálculo del rango de una matriz mediante la definición anterior puede ser muy laborioso si aumenta el orden de la matriz, de ahí que es conveniente encontrar algún método que simplifique estos cálculos, para lo cual es necesario conocer los siguientes conceptos.*

2.1.7 Matrices Equivalentes

Dos matrices A y B se llaman equivalentes,lo que se denota por $A \sim B$, si una de ellas se obtiene a partir de la otra mediante un número finito de transformaciones elementales filas.

Propiedad 1 Las matrices equivalentes tienen el mismo orden y el mismo rango.

Ejemplo 2.9 *A partir de la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ *se puede obtener la matriz* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ *mediante dos transformaciones elementales:* $f_2 - 2f_1$ *y* $f_3 - f_1$ *por lo que* $A \sim B$ *y* $rango(A) = rango(B)$.

2.1.8 Matriz escalonada

Una matriz está en su *forma escalonada* si verifica las siguientes condiciones:

1. La primera componente distinta de cero de cualquier fila no nula es $\boxed{1}$.

2. Todas las componentes que se encuentran debajo de $\boxed{1}$ son iguales a cero.

3. El número de ceros que preceden a $\boxed{1}$ aumenta conforme las filas aumentan.

4. Todas las filas nulas (si en caso existen) se ubican en la parte inferior de la matriz.

Observación 2.3 *Si en la segunda condición además se verifica que las componentes que se encuentran sobre* $\boxed{1}$ *son ceros, entonces se dice que la matriz está en su forma* escalonada reducida.

Ejemplo 2.10 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; *en cambio la matriz* $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ *no está en la forma escalonada.*

Propiedad 2 Toda matriz A puede reducirse a una forma escalonada, mediante transformaciones elementales por filas.

Ejemplo 2.11 *Reducir la matriz* $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 & 25 \\ 2 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ *a la forma escalonada.*

Solución

Operaciones: 1) f_{12} : $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 25 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ 2) $\frac{1}{2}f_1$ *y* $\frac{1}{5}f_2$: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

3)$f_3 - 3f_2$: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -15 \end{bmatrix}$ 4) $\frac{-1}{2}f_3$: $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{2} \end{bmatrix}$.

En la última matriz el rango se puede calcular directamente. Basta observar que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, por lo que $rango(B) = 3$. Además como A *y* B son matrices equivalentes, se concluye que $rango(A) = 3$. Este procedimiento se puede generalizar a todo tipo de matrices, obteniéndose la siguiente.

Propiedad 3 El rango de una matriz A es igual al número de filas no nulas de cualquier matriz escalonada B equivalente a A.

Ejemplo 2.12 *Hallar el rango de la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -6 & 7 \end{bmatrix}$.

Solución Primero se escalona la matriz, mediante transformaciones elementales filas.

$$f_2 - 2f_1,\ f_3 - f_1 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \sim \frac{1}{5}f_2 , \frac{-1}{5}f_3 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{5} \end{bmatrix} \sim$$

$$f_3 - f_2 : B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz B tiene dos filas no nulas y es equivalente a A, de donde se concluye que $rango(A) = 2$.

2.1.9 Sistemas de ecuaciones lineales

En álgebra se han estudiado sistemas de ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x + 7y - z = -2 \\ 3x - 4y + 6z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}.$$

Ahora, tales sistemas pueden escribirse en forma matricial. El primer sistema es equivalente a

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 7 & -1 \\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$A_{3\times3} \cdot X_{3\times1} = B_{3\times1}$$

El segundo sistema se puede representar mediante

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$A_{3\times4} \cdot X_{4\times1} = B_{3\times1}.$$

Estos casos particulares se pueden generalizar a sistemas de m ecuaciones con n variables (incógnitas), en tal caso se usará la notación $A_{m\times n} \cdot X_{n\times1} = B_{m\times1}$ o simplemente $AX = B$.

Notar que en esta representación A es la matriz de los coeficientes, X es la matriz de las variables y B es la matriz de los términos independientes del sistema. La resolución de sistemas escritos en su forma matricial, exige el uso de *la matriz ampliada del sistema,* la cual se representa por $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$.

Ejemplo 2.13 *La matriz ampliada del primer sistema es*

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & -1 & -2 \\ 3 & -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observar que cada una de las filas de la matriz anterior es una representación abreviada de dicho sistema; para leer la ecuación de una fila basta con añadir apropiadamente las incógnitas y los signos $+, -, =$.

Sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

El objetivo general de este tema es discutir y resolver sistemas de ecuaciones lineales, haciendo abstracción del tipo de problemas que origina su planteamiento.

Discutir un sistema consiste en averiguar si tiene o no tiene solución y, en caso de tenerla, saber si es única o si no lo es.

Resolver un sistema es calcular su solución (o soluciones).

Los casos más sencillos (2 ecuaciones con 2 incógnitas, 3 ecuaciones con 3 incógnitas, ...). Aquí, analizaremos el caso general: número arbitrario de ecuaciones y número de incógnitas.

Definición 2.6 *Un Sistema de m ecuaciones con n incógnitas ,es :*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde,
x_j *son las incógnitas,* $(j = 1, 2, ..., n)$.
a_{ij}*son los coeficientes,* $(i = 1, 2, ..., m)(j = 1, 2, ..., n)$.
b_i *son los términos independientes,* $(i = 1, 2, ..., m)$.

Los números m y n son enteros positivos : $m > n$, $m = n$ ó $m < n$.
Los escalares a_{ij}y b_i son números reales.
El escalar a_{ij}es el coeficiente de x_j en la i-ésima ecuación.
Cuando n es pequeño, es usual designar a las incógnitas con las letras $x, y, z, t, \ldots\ldots\ldots$
Obsérvese que el número de ecuaciones no tiene por qué ser igual al número de incógnitas.
Cuando b_i=0 para todo i, el sistema se llama *homogéneo.*

Definición 2.7 *Una Solución de un sistema es una n-upla* $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *de números reales que satisface a todas las ecuaciones.*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (*)$$

Es decir,

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n = b_m \end{cases}$$

Definición 2.8 *El sistema* $(*)$ *se llama* compatible *si admite por lo menos una solución, y se denomina* incompatible *en caso contrario.*

Un sistema compatible se llama determinado *si admite solamente una solución, y se llama* indeterminado *si tiene infinitas soluciones.*

Observación 2.4 *Es evidente que todo sistema homogéneo es compatible ya que por lo menos admite la solución* $(0, 0, \cdots, 0)$, *llamada solución trivial.*

2.1.10 Método de Gauss-Jordan.

Para *resolver sistemas de ecuaciones* usamos el método de Gauss-Jordan. Este se sustenta en el uso de la matriz ampliada sustituyéndose la matriz A por una matriz escalonada reducida equivalente, C, aplicando transformaciones elementales de fila.

Ejemplo 2.14 *Resolver el sistema*

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ 4x - 3y - z = 3 \\ 2x + 4y + 2z = 4 \end{cases}$$

Solución. La matriz ampliada

$$[A\ B]=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\3&1&-2&1\\4&-3&-1&3\\2&4&2&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&-5&-5&-5\\0&-11&-5&-5\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&1\\0&-11&-5&-5\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&1\\0&0&6&6\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Por consiguiente el sistema tiene por solución:

$$\begin{aligned}x_1&=2\\x_2&=0\\x_3&=1\end{aligned}$$

En la matriz terminal del sistema se observa que *rango* $[A\ B]$ = *rango* $[A] = 3 =$ número de variables ($n = 3$), concluyéndose que el sistema tiene solución única. En general la solución de un sistema de ecuaciones depende de la relación existente entre el rango de la matriz ampliada y el rango de la matriz de los coeficientes, la cual es consecuencia de la definición de matrices equivalentes. Antes de enunciar la relación mencionada es oportuno conocer lo siguiente.

Definición 2.9 *El sistema $AX = B$ se llama* compatible *si admite por lo menos una solución, y se denomina* incompatible *en caso contrario.*

Definición 2.10 *Un sistema compatible puede tener* solución única *(sistema determinado) o* infinitas soluciones *(sistema indeterminado).*

Definición 2.11 *El sistema $AX = B$ se llama* homogéneo, *cuando $B = 0 =$ matriz nula.*

Observación 2.5 *Todo sistema homogéneo es compatible ya que admite por lo menos la solución: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, llamada solución trivial (ST).*

Como se anotó anteriormente, existen resultados que simplifican la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, los cuales se pueden resumir en la siguiente.
Propiedad Si $A_{m\times n}.X_{n\times 1} = B_{m\times 1}$ es un sistema m de ecuaciones con n incógnitas, entonces

1. La condición necesaria y suficiente para que el sistema sea compatible es que *rango* $[A\ B]$ = *rango* $[A]$.

2. Si *rango* $[A\ B]$ = *rango* $[A] = n =$número de incógnitas, entonces el sistema tiene solución única.

3. Si *rango* $[A\ B]$ = *rango* $[A] = r < n$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones. En este caso se pueden elegir $n-r$ variables libres a las cuales se les llama parámetros. Al asignar valores arbitrarios a estas $n - r$ incógnitas, las otras r quedan perfectamente determinadas.

4. La condición necesaria y suficiente para que el sistema sea incompatible es que $rango[A\ B] \neq rango[A]$.

Ejemplo 2.15 *Resolver el sistema*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$$

Solución. Se considera la matriz ampliada del sistema

$$[A\ B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

la que debe escalonarse.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix} \sim f_2 - f_1 \ y \ f_3 - f_1 : \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} ; \sim$$

$$\frac{-1}{2} f_2 \ y \ \frac{1}{4} f_3 : \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim f_3 - f_2 : \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se observa que rango$[A\ B] = 2 =$rango$[A] < n = 4$. Según la propiedad anterior el sistema tiene infinitas soluciones con $n - r = 2$ parámetros. La última matriz se puede leer de la siguiente manera: $x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1$, $x_4 = 1$, $0 = 0$, de donde se tiene $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. En esta ecuación se pueden tomar como parámetros $x_2 = s$ y $x_3 = t$, obteniéndose $x_1 = 2s - t$. Las soluciones del sistema se pueden expresar como

$$x_1 = 2s - t \ , \ x_2 = s \ , \ x_3 = t \ , \ x_4 = 1,$$

con s y t números reales.

Ejemplo 2.16 *Resolver el sistema*

$$\begin{cases} x + 4y - z + 3w = 10 \\ x + y - 7z = 22 \\ x + 8y + 4z - 8w = 3 \\ 5x + 17y - 5z + 13w = 44 \end{cases}$$

Solución. La matriz ampliada del sistema es

$$[A\ B] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & -7 & 0 & 22 \\ 1 & 8 & 4 & -8 & 3 \\ 5 & 17 & -5 & 13 & 44 \end{bmatrix}$$

Escalonando la matriz anterior se obtienen las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & 12 \\ 0 & 4 & 5 & -11 & -7 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 5 & -11 & -7 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -15 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & -18 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & -18 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -24 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se deduce que $rango[A\ B] = rango[A] = 4$ =número de incógnitas, por lo que el sistema tiene solución única. Tal solución se obtiene leyendo la última matriz, obteniéndose
$x = -1 \quad y = 2 \quad z = -3 \quad w = 0$

Ejemplo 2.17 *La Texas Electronics Inc. (TEI) produce tres modelos de computadoras: 1, 2 y 3. Como parte del proceso de elaboración, estos productos pasan por la planta técnica de la empresa y se emplean 30, 12 y 36 minutos por unidad de los modelos 1, 2 y 3, respectivamente. Se sabe que, durante el mes, en total se emplearon 116 horas para el respectivo chequeo técnico de las computadoras.En el proceso de ensamblaje de estos productos se requirieron en total 740 horas durante ese mes. Se empleó una hora para ensamblar cada computadora del modelo 1 y cuatro horas para ensamblar cada computadora del modelo 2 y del modelo 3.¿Cuántas unidades de cada modelo produjo la empresa si obtuvo una utilidad mensual de 37 500 dólares, sabiendo que las ganancias obtenidas por la venta de los modelos 1, 2 y 3 fueron de 200, 50 y 100 dólares por cada unidad, respectivamente? Resolver el problema empleando el método de eliminación gaussiana.*

Solución

Sean las cantidades de computadoras, x, y, z de los modelos 1, 2 y 3 respectivamente, entonces de los datos se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 0,5x + 0,2y + 0,6z = 116 \\ x + 4y + 4z \qquad = 740 \\ 200x + 50y + 100z \quad = 37500 \end{cases}$$

La matriz ampliada, después de multiplicar por 10 la primera fila y luego, permutar la primera fila con la segunda, es

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 740 \\ 5 & 2 & 6 & 1160 \\ 20 & 5 & 10 & 3750 \end{bmatrix}$$

Después de las operaciones elementales sobre las filas de la matriz ampliada, resulta

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 740 \\ 0 & 1 & \frac{7}{9} & \frac{1270}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 40 \end{bmatrix}$$

Y sustituyendo, se obtiene $z = 40$, $y = 110$, $x = 140$.

Ejemplo 2.18 *Micaela desea cubrir sus requerimientos vitamínicos semanales de exactamente 13 unidades de vitamina A, 22 de vitamina B y 31 de vitamina C.Existen disponibles tres marcas de cápsulas vitamínicas en el mercado. La marca I contiene 1 unidad de cada una de las vitaminas A, B y C por cápsula; la marca II contiene 1 unidad de vitamina A, 2 de B y 3 de C, y la marca III contiene 4 unidades de A, 7 de B y 10 de C.*

Si las cápsulas de la marca I cuestan 50 céntimos cada una, las de la marca II cuestan 70 céntimos cada una y las de la marca III, 2 soles cada una, ¿qué combinación de cápsulas de las marcas I, II y III producirá exactamente las unidades de vitaminas deseadas y le ocasionará menor gasto semanal a Micaela? Emplear eliminación gaussiana.

Solución. Sean:
x = número de cápsulas de la marca I
y = número de cápsulas de la marca II
z = número de cápsulas de la marca III

$$\begin{cases} x + y + 4z = 13 \\ x + 2y + 7z = 22 \\ x + 3y + 10z = 31 \end{cases}$$

Resolviendo usando el método de Gauss Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 13 \\ 1 & 2 & 7 & 12 \\ 1 & 3 & 10 & 22 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 6 & 18 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema equivalente es

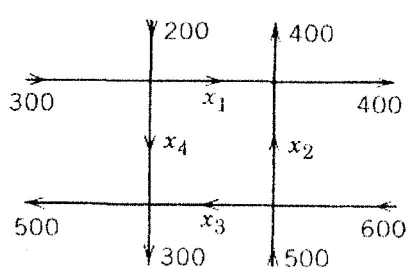
$$\begin{cases} x + y + 4z = 13 \\ y + 3z = 9 \end{cases}$$

El sistema es consistente con más de una solución
Si $z = t$, entonces $y = 9 - 3t$, reemplazando en la ecuación $x + y + 4z = 13$ obtenemos $x = 4 - t$
Soluciones posibles:

x	y	z	Costo= $0,5x + 0,7y + 2z$
4	9	0	8,3 soles
3	6	1	7,9 soles
2	3	2	7,1 soles
1	0	3	6,5 soles

El costo es mínimo cuando $x = 1$,$y = 0, z = 3$.

Ejemplo 2.19 *En la siguiente figura se ilustra una red de calles y los números indican la cantidad de autos por hora que salen o entran (según sea el sentido de las flechas) de las intersecciones. Así por ejemplo, en una de las intersecciones, en una hora, ingresan x_1 y x_2 autos y salen 400 autos por una de las calles y 400 por otra.*



Solución

(a) Sistema por resolver:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 500 \\ x_1 + x_2 = 800 \\ x_3 + x_4 = 800 \\ x_2 + x_3 = 1100 \end{cases}$$

(b) Planteando la matriz y realizando las operaciones filas elementales:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 500 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 800 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1100 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 500 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1100 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 800 \end{bmatrix}$$

de donde resulta un sistema con infinitas soluciones de la forma:

$$\begin{aligned} x_3 &= 800 - x_4 \\ x_2 &= x_4 + 300 \\ x_1 &= 500 - x_4 \end{aligned}$$

con $x_4 \geq 0$ y entero.

Ejemplo 2.20 *La ecuación lineal $ax + by + cz = d$ en las variables x, y y z corresponde a la ecuación de un plano en un sistema coordenado tridimensional. Es posible que dados tres planos, estos:*

Se corten solo en un punto: *Se corten en infinitos puntos:* *No se corten*

Considerando los planos :

$$\pi_1 : 2x - 3y + 5z = 1$$

$$\pi_2 : x - 4y + 3z = -4$$

$$\pi_3 : x - 3y + cz = -6$$

Señalar si es posible encontrar valores para c de modo que los planos no se corten.

Señalar si es posible encontrar valores para c de modo que los planos se corten en un único punto.

Señalar si es posible encontrar valores para c de modo que los planos se corten en infinitos puntos.

Solución

Realizando operaciones fila elementales, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & c & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & c-3 & -2 \\ 0 & 0 & 14-2c & 19 \end{bmatrix}$$

Para que los planos no se corten, basta exigir que $14 - 5c = 0$, $c = 14/5$.

Para que el sistema tenga solución única, basta exigir $14 - 5c \neq 0$, $c \neq 14/5$

Y no es posible hallar valores de c para los que el sistema tiene infinitas soluciones pues eso implicaría que $c = 14/5$ y

$19 = 0$.

Ejemplo 2.21 *Un proveedor de productos para el campo tiene cuatro tipos de fertilizantes A, B, C y D que tienen contenidos de nitrógeno de 30%, 20%, 15% y 60% respectivamente. Se ha planeado mezclarlas para obtener 700 kg. de fertilizante con un contenido de nitrógeno de 30%. Esta mezcla debe contener 100 kg. más del tipo C que del tipo B y además la cantidad que intervenga del tipo A debe ser exactamente igual a la suma de las cantidades de los tipos C y D con el doble del tipo B. Hallar por métodos matriciales la cantidad de kg. que se deben usar por cada tipo.*

Solución.Sean

x : cantidad de kg. a emplearse del tipo A.

y : cantidad de kg. a emplearse del tipo B.

z : cantidad de kg. a emplearse del tipo C.

t : cantidad de kg. a emplearse del tipo D.

De las condiciones del problema se forma el siguiente sistema

$$\begin{cases} x + y + z + t &= 700, \\ 0.3x + 0.2y + 0.15z + 0.6t &= 210, \\ y - z &= -100, \\ x - 2y - z - t &= 0. \end{cases}$$

En la segunda ecuación, tener en cuenta que se trabaja con porcentajes(30% de 700=210)

La tercera ecuación es consecuencia de $z = y + 100$ y la cuarta es consecuencia de $x = 2y + z + t$.

Se forma la matriz ampliada del sistema y se escalona mediante transformaciones elementales filas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 700 \\ 0.3 & 0.2 & 0.15 & 0.6 & 210 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -100 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 700 \\ 0 & -1 & -1.5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -100 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & -700 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 700 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -100 \\ 0 & -1 & -1.5 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & -700 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 700 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & -2.5 & 3 & -100 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -200 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 700 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-6}{5} & 40 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -1000 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 700 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-6}{5} & 40 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -800 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 700 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-6}{5} & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 100 \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene que $t = 100$, $z = 160$, $y = 60$, $x = 380$.

2.2 Determinantes

Los determinantes de las matrices pueden ser considerados como funciones que cumplen cuatro propiedades básicas. En este capítulo veremos que cualquier función del álgebra de matrices cuadradas $\mathcal{M}_n(K)$(en el cuerpo K que cumpla dichas propiedades es necesariamente la función determinante. Nuestra primera lección esta dedicada al estudio de las propiedades básicas.

Definición 2.12 *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K, una función multilineal de m argumentos sobre el espacio V es una función*

$$D : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{\text{m}-\text{veces}} \to K$$

que es lineal en cada argumento, es decir, D satisface las siguientes condiciones:
a)$D(v_1, \ldots, v_i + u_i, \ldots, v_m) = D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_m) + D(v_1, \ldots, u_i, \ldots, v_m)$,
para cada $1 \leq i \leq m$.
b)$D(v_1, \ldots, a \,.\, v_i, \ldots, v_m) = a \,.\, D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_m)$,
para cada $1 \leq i \leq m$.
c) D es alternada si D cumple la siguiente condición:

$$D(v_1, \ldots, v_i, v_i, \ldots, v_m) = 0$$

para cada $1 \leq i \leq m-1$. Es decir, D es alternada si D se anula cuando dos argumentos consecutivos
coinciden.
Sea D una función multilineal alternada de m argumentos sobre un espacio V. Entonces se puede demostrar facilmente que D satisface las siguientes propiedades.
d)Si se intercambian dos argumentos de D el signo cambia, es decir,
$D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_m) = -D(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_m)$,
para cualquier par $i \neq j$.
e) Si existe un par $i \neq j$ tal que $v_i = v_j$, entonces
$D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_m) = 0$
f) Si a un argumento le sumamos otro multiplicado por un escalar, entonces el valor de la función D no cambia. Es decir,
$D(v_1, \ldots, v_i + a \,.\, v_j, \ldots, v_m) = D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_m)$,
para cada par $i \neq j$ y cada escalar $a \in K$.
g) Si un argumento de D es nulo, entonces D se anula, es decir,
$D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, 0, \ldots, v_m) = 0$.

Cada fila de una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(K)$ puede considerarse como un vector de K^n de tal forma que podemos definir funciones multilineales de $\mathcal{M}_n(K)$ en K.
Según la Proposición de la lección anterior, cada función multilineal alternada $D : \mathcal{M}_n(K) \to K$ queda completamente determinada por su acción sobre los vectores de una base. Esto permite definir el concepto de función determinante de la siguiente manera.

Sea $\mathcal{M}_n(K)$ el álgebra de matrices cuadradas de tamaño $n \geq 1$ y sea $X = \{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de K^n. Se define la función determinante como la única función multilineal alternada

$$\det : \mathcal{M}_n(K) \to K$$

que satisface la condición $\det(e_1, \ldots, e_n) = 1$, es decir, $\det(E) = 1$, donde E es la matriz idéntica de orden n.

Si $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(K)$, entonces cada fila $A_{(i)}$ de A puede expresarse en la forma $A_{(i)} = a_{i1} . e_1 + \cdots + a_{in} . e_n$ y, de acuerdo a la prueba de la Proposición , necesariamente se tiene que

$$\det(A) = [\textstyle\sum_{f \in S} signo(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}] \det(e_1, \ldots, e_n),$$

es decir,

$$\det(A) = [\textstyle\sum_{f \in S} signo(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}],$$

donde S es el conjunto de funciones biyectivas de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en si mismo. El signo de la función f fue definido en al prueba de la Proposición . Cualquier función multilineal alternada D de $\mathcal{M}_n(K)$ en K tal que $D(E) = 1$ coincide con la definición anterior de la función det.

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(K).$$

A partir de la definicón de la función det demuestre que

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

Teniendo en cuenta que la función determinante es multilineal y alternada respecto de sus filas, entonces tiene las propiedades que se enuncian a continuación. Sea A una matriz cuadrada de orden $n \geq 1$.

a)

$$\det \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} + u_i \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix} = \det(A) + \det \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix},$$

donde $u_i \in K^n$.

b)

$$\det \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ a \,.\, A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix} = a \det A.$$

par $i \neq j$ tal que $A_{(i)} = A_{(j)}$, entonces $\det(A) = 0$.

De donde .

$$\det \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix},$$

para cada par $i \neq j$.

e)

$$\det \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} + a\,.\,A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix} = \det(A),$$

para cada par $i \neq j$.

f)

$$\det \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{bmatrix} = 0.$$

Además de las propiedades anteriores se tienen las siguientes.

g) La matriz A se dice que es triangular superior si $a_{ij} = 0$ para $i > j$, es decir, A tiene el siguiente aspecto

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{in} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Si A es una matriz triangular superior, entonces $\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$, es decir, el determinante de A es el producto de los elementos de la diagonal.

h) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

i) Si A es una matriz invertible, entonces $\det(A) \neq 0$, y además, $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.

j) Si A es similar a B, entonces $\det(A) = \det(B)$.

k) Sea $T : V \to V$ una transformación lineal de un espacio de dimensión finita $n \geq 1$. Entonces el determinante de T se define como el determinante de la matriz de T en cualquier base (véase en el próximo Capítulo).

l) $\det(A^t) = \det(A)$.

Determinante de Vandermonde. Sean $x_1, \ldots, x_n \in K$, entonces

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i).$$

Sea A una matriz de orden n, B una matriz de orden m y C un matriz de orden $n \times m$. Entonces

$$\det \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \det(A)\det(B).$$

Sea A, B y C como en el ejercicio anterior. Entonces

$$\det \begin{bmatrix} C & A \\ B & 0 \end{bmatrix} = (-1)^{nm}\det(A)\det(B).$$

La teoría de determinantes puede ser emprendida por medio de los llamados menores de una matriz. La definición de una nueva función det en este caso se hace por inducción sobre el tamaño de las matrices.

Definimos

$$\begin{aligned} \det_1 : \mathcal{M}_1(K) &\to K \\ [a] &\mapsto \det_1(a) = a \\ \det_2 : \mathcal{M}_2(K) &\to K \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &\mapsto a_{11}Det_1[a_{22}] - a_{21}Det_1[a_{12}] \\ &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \end{aligned}$$

La función $\det_{n-1} : \mathcal{M}_{n-1}(K) \to K$ se supone definida y queremos construir la función

$$\det = \det_n : M_n(K) \to K\ .$$

Sea $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(K)$, para el elemento a_{ij} definimos la matriz $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$ suprimiendo la i-ésima fila y la j-ésima columna de A, es decir,

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

La imagen de A_{ij} a través de la función $\det_{n-1}$ se conoce como el menor del elemento a_{ij} y se denota por M_{ij}, es decir,

$$M_{ij} = \det_{n-1}(A_{ij}).$$

det se define entonces por

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} \qquad (1).$$

det es una función multilineal alternada sobre las filas de las matrices de orden n que cumple además la condición $\det(E) = 1$.

Se dice que la fórmula (1) define la función determinante por los menores de la primera columna, adaptando esta fórmula a cualquier otra columna se puede probar también la proposición anterior, además, como $\det(A^T) = \det(A)$, entonces se tienen las siguientes igualdades:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} \qquad (2)$$

para cada $1 \leq i, j \leq n$. Estas fórmulas pueden usarse para probar la regla de Crammer que estudiaremos enseguida.

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden n, se define la matriz de cofactor de A por

$$Cof(A) = [(-1)^{i+j}M_{ij}].$$

La regla de Crammer está entonces dada por el siguiente teorema.

Teorema 2.1 *Sea A una matriz cuadrada de orden $n \geq 1$. Entonces,*

$$ACof(A)^T = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{bmatrix} = Cof(A)^T A.$$

Una consecuencia importante de este útil teorema es el siguiente corolario.

Sea A una matriz de orden $n \geq 1$. Entonces, A es invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$. En tal caso, $A^{-1} = (\det(A))^{-1}Cof(A)^T$.

Ejemplo 2.22 *Hallar el valor de x tales que*

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4x & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución

Primera forma:

$$\det\left|\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4x & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} 4x+25 & 31 & 8x+4 & 13 & 14 \\ 3x+9 & 13 & 4x & -1 & -1 \\ -12 & -13 & -4 & -15 & -16 \\ -23 & -25 & -4x-8 & -29 & -31 \\ -30 & -31 & -12 & -33 & -34 \end{vmatrix} = 16\,(9x+1)\,(2x-5) = 0,$$

la Solución es: $x = -\frac{1}{9}, x = \frac{5}{2}$

Segunda forma:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4x & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-1)(-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 2(-1)(-1)(-2) = -4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 3(-1)(-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1)(-1)(-2) = -6$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}\right) = 4(-4) - 3(-6) = 2$$

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4x & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4x & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4x & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 4x\begin{vmatrix} 4x & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} - 2.5\begin{vmatrix} 4x & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 4x(36x+4) - 10(36x+4) = (4x-10)(36x+4)$$

$$2(4x-10)(36x+4) = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{9}, x = \frac{5}{2}.$$

Ejemplo 2.23 *Calcular el determinante de* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & k+2 \\ 2 & -3 & 2k \\ 1 & -k & k^2+k-3 \end{bmatrix}$

Solución

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & k+2 \\ 2 & -3 & 2k \\ 1 & -k & k^2+k-3 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 1.\begin{vmatrix} -3 & 2k \\ -k & k^2+k-3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 2k \\ 1 & k^2+k-3 \end{vmatrix} + (k+2)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -k \end{vmatrix}$$

$$\det A = -k^2 - 3k + 9 + 2\left(2k^2 - 6\right) + (k+2)(3-2k) = k^2 - 4k + 3 = (k-1)(k-3)$$

Ejemplo 2.24 *Dado el sistema de ecuaciones lineales en las variables* x, y, z :

$$\begin{cases} x - 2y + (k+2)z = 5 \\ 2x - 3y + 2kz = 8 \\ x - ky + \left(k^2+k-3\right)z = 3k \end{cases}.$$

Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ *para que dicho sistema :*

(a)*tenga una única solución*
(b)*tenga infinitas soluciones.*
(c)*no tenga solución*

Solución
Trabajando en la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k+2 & 5 \\ 2 & -3 & 2k & 8 \\ 1 & -k & k^2+k-3 & 3k \end{array}\right] \begin{array}{c} F_2 \longleftrightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \longleftrightarrow F_3 - F_1 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k+2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 2-k & k^2-5 & 3k-5 \end{array}\right] \quad F_3 - (2-k)F_2 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k+2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & k^2-4k+3 & k-1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k+2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & (k-1)(k-3) & (k-1) \end{array}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x - 2y + (k+2)z = 5 \\ y - 4z = -2 \\ (k-3)(k-1)z = (k-1) \end{array} \right.$$

(a)Si $k \neq 1$ y $k \neq 3$, el sistema tiene solución única.
$C.S. = \left\{ (x,y,z) = \left(\frac{3}{k-3}, -\frac{2k-10}{k-3}, \frac{1}{k-3} \right) : k \neq 1, k \neq 3 \right\}.$
(b)El sistema tiene infinitas soluciones si $k = 1$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x - 2y + 3z = 5 \\ y - 4z = -2 \longrightarrow y = -2 + 4z \end{array} \right.$$

De : $x - 2y + 3z = 5 \longrightarrow x = 2y - 3z + 5 = 2(-2+4z) - 3z + 5 = 1 + 5z$
$C.S. = \{(x,y,z) = (1+5z, -2+4z, z) : z \in \mathbb{R}\}.$
(c)El sistema no tiene solución si $k = 3$, pues

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \Longrightarrow 0 = -2.$$

Otra forma: Sea
Si $\det A = (k-1)(k-3) \neq 0 \Longrightarrow k \neq 1$ y $k \neq 3$.Entonces el sistema tiene solución única.
Si $\det A = 0 \Longrightarrow k = 1$ o $k = 3$.
Si $k = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} F_2 \longleftrightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \longleftrightarrow F_3 - F_1 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \end{array}\right] \quad F_3 \longleftrightarrow F_3 - F_2 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x - 2y + 3z = 5 \\ y - 4z = -2 \longrightarrow y = -2 + 4z \end{array} \right.$$

De : $x - 2y + 3z = 5 \longrightarrow x = 2y - 3z + 5 = 2(-2+4z) - 3z + 5 = 1 + 5z$
$C.S. = \{(x,y,z) = (1+5z, -2+4z, z) : z \in \mathbb{R}\}.$
Si $k = 3$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & -3 & 6 & 8 & 8 \\ 1 & -3 & 9 & 9 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{c} F_2 \longleftrightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \longleftrightarrow F_3 - F_1 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \end{array}\right] \quad F_3 \longleftrightarrow F_3 + F_2 \ \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \Longrightarrow 0 = -2.$$

El sistema no tiene solución.

Ejemplo 2.25 *Sea* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{bmatrix}$

(a)*Hallar todos los valores de a para las cuales existe* A^{-1}.
(b)*Calcular* A^{-1}.
(c)*Hallar la inversa de*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Solución
(a)Existe A^{-1}si $\det A \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} F_2 \longleftrightarrow F_2 - aF_1 \\ F_3 \longleftrightarrow F_3 - a^2F_1 \\ F_4 \longleftrightarrow F_3 - a^3F_1 \end{array} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & -a^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & a & 1 & -a^3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} F_3 \longleftrightarrow F_3 - aF_2 \\ F_4 \longleftrightarrow F_4 - a^2F_2 \end{array} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & -a^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F_4 \longleftrightarrow F_4 - aF_3 \ \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 \end{bmatrix}$

(c)Si $a = \sqrt{2}$, entonces $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$

Ejemplo 2.26 *Sabiendo que*

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 3 & x & 2 & 0 \\ 0 & 2 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = (x^m - 1)(x^m - 3^m)$$

Hallar m.

Solución

Sea $|A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 3 & x & 2 & 0 \\ 0 & 2 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ 2 & x & 3 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & x & 3 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}$

$|A| = x\left(x.\begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & x \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & x \end{vmatrix}\right) - \left(3\begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & x \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & x \end{vmatrix}\right) : 0$

$|A| = x\left(x\left(x^2 - 3\right) - 2(2x)\right) - \left(3\left(x^2 - 3\right) - 2(0)\right) : x^3 - 7x$

$|A| = x(x^3 - 7x) - \left(3x^2 - 9\right) = x^4 - 10x^2 + 9 = (x-1)(x+3)(x-3)(x+1)$

$|A| = \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 3^2\right)$,de donde $m = 2$

Ejemplo 2.27 *Sabiendo que* $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = k(a-b)(a-c)(b-c)$

Hallar el valor de k.

Solución

$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4(a+1) \\ b^2 & 2b+1 & 4(b+1) \\ c^2 & 2c+1 & 4(c+1) \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & a+1 \\ b^2 & 2b+1 & b+1 \\ c^2 & 2c+1 & c+1 \end{vmatrix}$

$\Delta = 4\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & a+1 \\ b^2 - a^2 & 2(b-a) & b-a \\ c^2 - a^2 & 2(c-a) & c-a \end{vmatrix} = 4(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & a+1 \\ b+a & 2 & 1 \\ c+a & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$\Delta = 4(b-a)(c-a)\left[a^2(0) - (2a+1)(b-c) + 2(a+1)(b-c)\right]$

$\Delta = 4(b-c)(a-c)(a-b)$, de donde $k = 4$.

Ejemplo 2.28 *Sea la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$ *la matriz* A *tiene inversa y hallar dicha matriz.*

Solución

Puesto que :

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, entonces A tiene inversa para todo $x \in \mathbb{R}$.

Usando el método de Gauss -Jordan:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F_2 \longleftrightarrow F_2 - xF_1 \ \sim$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{x^2}{2} & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_2 \longleftrightarrow F_2 - \frac{x^2}{2}F_3 \\ F_1 \longleftrightarrow F_1 - xF_3 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 & x & 1 & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\text{Por tanto, } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x \\ x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicios Propuestos: Matrices y determinantes

1. Hallar todas las matrices cuadradas de orden 2, tales que:

   (a) Sus cuadrados son iguales a la matriz identidad

   (b) Sus cubos son iguales a la matriz nula.

2. Sea E_{pq} la matriz de orden $m \times n$ que contiene 1 en el lugar $pq-$ésimo, y el número cero en los demás lugares.

   (a) Obtenga las matrices $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ todas ellas de orden 2×2

   (b) Exprese la matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ como una suma

   $$aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22},$$

   donde a, b, c y d son escalares apropiados.

3. Si $A = [a_{ij}]_{4\times5}$ es una matriz tal que la suma de los elementos de la diagonal principal de $A^t \cdot A$ es 0. Halle la matriz A.

4. Dadas las matrices

   $$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \\ 6 & 7 & d \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -b & 4 \\ 6 & 7 & -d \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & e \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

   Hallar a, b, d, e y la matriz X, sabiendo que $AX = BX + I \quad$ y $XC = I$.

5. Hallar la matriz inversa de A en los siguientes casos:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, donde $ad - bc \neq 0$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

6. Hallar la matriz incógnita X a partir de la siguiente ecuación

   $$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

7. Se sabe que A es una matriz cuadrada tal que $A^n = 0$. Demuestre que $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + ... + A^{n-1}$.

8. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

tales que $A.X = B$, hallar la matriz X.

9. Considerar la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

   (a) Determinar la matriz $B = A^2 - 2A$

   (b) Determinar los valores de λ para que la matriz B tiene inversa.

   (c) Calcular B^{-1}para $\lambda = 1$.

10. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} m & -1 & 4 \\ 3 & m & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, donde $m \in \mathbb{R}$.

   (a) Determinar para qué valores de m la matriz A tiene inversa.

   (b) para $m = 1$, resolver el sistema de ecuaciones lineales : $A.X = B$, con $B = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   (c) Calcular $C - A^{-1}B$, siendo $C = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ y B definida en el apartado anterior.

11. Si $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 6 \\ 8 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$, calcule el determinante de A.

12. Dada la matriz $A = [a_{ij}]$ de orden 4, tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} ij + 2 & si\ i \geq j \\ ij - 2 & si\ i < j \end{cases}$$

Calcular el determinante de A.

Encontrar, si existe, la inversa de A.

13. Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   (a) Hallar la matriz AB^T, donde B^T indica la matriz transpuesta de B.¿Es inversible?

   (b) Calcular $M = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ que verifique la ecuación $(AB^T + C).M = E$.

14. Si $A = \begin{bmatrix} 1+x & 1+x & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 2-2x & 0 \\ 2 & 1-2x & 2-2x & 0 \\ -2x & 1-2x & 2-2x & 0 \end{bmatrix}$

(a) Halle los valores de x para los cuales $|A| = 0$.

(b) ¿Para qué valores de x, A es inversible?

15. Dada la matrices : $A = \begin{bmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

(a) Calcular el determinante de la matriz $3A$ y obtener el valor de x para que dicho determinante sea 162.

(b) Demostrar que la matriz B no tiene inversa.

16. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcular el valor del siguiente determinante : $\begin{vmatrix} 5a & -5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

2.3 Espacio vectorial

Definición 2.13 *Un espacio vectorial sobre un cuerpo K (los elementos de K se llamarán escalares) es un conjunto V(cuyos elementos se llamarán vectores) dotados de dos operaciones. una de ellas interna (adición):*

$$\begin{array}{rcl} + & : & K \times V \to V \\ (u,v) & \mapsto & u+v \end{array}$$

respecto de la que V es un grupo conmutativo.
Una Operación externa, multiplicación por un escalar

$$\begin{array}{rcl} K \times V & \to & V \\ (a,v) & \mapsto & a.v \end{array}$$

que verifican los siguientes axiomas:
Para cualesquiera escalares $r, s \in K$ y cualesquiera vectores $u, v \in V$.
Adición:
Conmutativa.$u+v=v+u$
Asociativa.$u+(v+w)=(u+v)+w$
Elemento neutro de la adición. $u+e=e+u=u$
Elemento opuesto de la adición.$u+u^*=u^*+u=e$
Multiplicación por un escalar:
$r.(u+v)=r.u+r.v$
$(r+s).v=r.v+s.v$
$(rs).v=r.(s.v)$
$1.v=v$

Es costumbre denotar el espacio vectorial $(V,+,\cdot,\mathbb{R})$ simplemente por V; también se dice que V es un K-espacio vectorial.

Ejemplo 2.29 *El plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ de puntos de la forma (x,y) con $x, y \in \mathbb{R}$, es un espacio vectorial real respecto de las siguientes operaciones:*

$$\begin{array}{rcl} (x_1,y_1)+(x_2,y_2) & = & (x_1+x_2, y_1+y_2) \\ r.(x,y) & = & (rx, ry) \end{array}$$

El conjunto $\mathbb{R}^n$ con la relación de igualdad y las operaciones de adición de vectores y multiplicación de vectores por números reales. En $\mathbb{R}^n$ definimos una relación de igualdad y dos operaciones:

Igualdad de vectores. Si $A=(a_1,...,a_n)$ y $B=(b_1,...,b_n)$ son vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$A=B \Leftrightarrow a_i=b_i \text{ para todo } i=1,...,n$$

Adición de vectores. Si $A=(a_1,...,a_n)$ y $B=(b_1,...,b_n)$ son vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$A+B=(a_1+b_1,...,a_n+b_n).$$

Multiplicación de vectores por escalares. Si α es un número real y $A=(a_1,...,a_n)$ es un vector en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\alpha A=(\alpha a_1,...,\alpha a_n).$$

Proposición 2.1 *El conjunto $\mathbb{R}^n$ se llama espacio vectorial real n-dimensional:*
1.$\forall A, B \in \mathbb{R}^n$ *se cumple que* $A + B \in \mathbb{R}^n$.
2.$\forall A, B \in \mathbb{R}^n$, $A + B = B + A$.
3.$\forall A, B, C \in \mathbb{R}^n$, $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Proposición 2.2 *4.*$\exists! \theta \in \mathbb{R}^n, \forall A \in \mathbb{R}^n$:

$$A + \theta = A.$$

El elemento θ de $\mathbb{R}^n$, llamado vector cero, está dado por

$$\theta = (0, ..., 0).$$

5.$\forall A \in \mathbb{R}^n, \exists! (-A) \in \mathbb{R}^n$:

$$A + (-A) = \theta.$$

El vector $-A$, llamado opuesto de A, es

$$-A = (-1) A.$$

6.$\forall A \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha A \in \mathbb{R}^n$.
7.$\forall A \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$.
8.$\forall A, B \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$.
9.$\forall A \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha (\beta A) = (\alpha\beta) A$.
10.$\forall A \in \mathbb{R}^n : 1A = A$.

Ejemplo 2.30 *El conjunto R[x] de polinomios reales en la indeterminada x con las operaciones habituales de adición y multiplicación de real por polinomio, es un espacio vectorial real.*

Si cambiamos $\mathbb{R}$ por un cuerpo cualquiera K obtenemos el K-espacio vectorial $K[x]$ de polinomios con coeficientes en K.

Ejemplo 2.31 *Sea $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices de orden $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales de adición y multiplicación de de matriz por escalar conforma un espacio vectorial sobre los reales.*

Ejemplo 2.32 *Sea S un conjunto no vacío en $\mathbb{R}$. El conjunto $\mathbb{R}^S$ de todas las funciones de S en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial real bajo las siguientes operaciones:*

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (r.f)(x) &= rf(x) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.33 ***Ejemplo 2.34*** ***Ejemplo 2.35*** *El espacio vectorial* $\mathbb{R}[t]$

Define una estructura de

Ejemplo 2.36 ***Ejemplo 2.37*** *espacio vectorial* en el conjunto $\mathbb{R}[t]$ de polinomios en t con coeficientes en $\mathbb{R}$.

Soluión. Si $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ and $q(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n$ son dos polinomios en $\mathbb{R}[t]$, entonces las definiciones:

$$\begin{aligned} p(t) + q(t) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n \\ ap(t) &= aa_0 + aa_1 t + \cdots + aa_n t^n \\ \mathbf{0} &= 0 \end{aligned}$$

proporcionan la estructura del espacio vectorial deseado.♦

Ejemplo 2.38 *Algunos ejemplos de espacios vectoriales son los siguientes:*
(a)El espacio vectorial trivial es el conjunto V ={0}, con respecto a cualquier
(b)Los conjuntos de polinomios $\mathbb{Q}[x]$*,* $\mathbb{R}[x]$ *y* $\mathbb{C}[x]$ *son espacios vectoriales con cuerpo de escalares, respectivamente,* $\mathbb{Q}$*,* $\mathbb{R}$ *y* $\mathbb{C}$*.*

Proposición 2.3 *Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo K, se tienen las siguientes:*
1.Si $ru = 0$ *entonces* $r = 0$ *o* $u = 0$*.*
2.$(-r)v = r(-v) = -rv$*.*

Subespacio vectorial

Dados un V sobre un cuerpo K y un subconjunto no vacío S de V, resulta interesante preguntarse si S bajo la misma adición de vectores y la misma acción de escalares sobre vectores, conforma un espacio vectorial sobre K. En caso afirmativo, se dice que S es un Subespacio del espacio V. Esta relación se denota por $S \leq V$. Según esta definición, si deseamos establecer que $S \leq V$ deberíamos verificar el cumplimiento cuatro axiomas para la adición de vectores y cuatro axiomas para la acción de escalares sobre vectores. Sin embargo, solo es necesario verificar el cumplimiento de dos condiciones, como lo muestra la siguiente
proposición.

Proposición 2.4 *Un subconjunto W no vacío de V se dice un subespacio de él si W con las operaciones de suma y producto por un escalar real es un espacio vectorial. Para probar que W es un subespacio vectorial de V solo es suficiente verificar que se satisfacen las dos leyes de clausura, esto es:*
Si v,w en W entonces v+w en W y si $\lambda \in \mathbb{R}$ *entonces* $\lambda w \in W$*.*

Ejemplo 2.39 *En el plano cartesiano el subconjunto* $S = \{(x, y), |y = mx\}$*, donde* $m \in \mathbb{R}$ *es una constante, representa una recta que pasa por el origen y conforma un subespacio de* $\mathbb{R}^2$*.*

Ejemplo 2.40 *En el espacio de polinomios reales el subconjunto* $\mathbb{R}_n[x]$ *de polinomios de grado* $\leq n$ *conforma un subespacio.*

Ejemplo 2.41 *En el espacio de funciones de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *la colección de funciones continuas de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *conforma un subespacio. Se tienen dos subespacios notables:* $C^n(a,b)$ *conformado por todas las funciones de (a,b) en* $\mathbb{R}$ *cuyas primeras n derivadas son continuas, y* $C^\infty(a,b)$ *constituido por las funciones de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *para las cuales las derivadas de cualquier orden son continuas. Similarmente, se tienen los subespacios* $C^n(a,b)$ *y* $C^\infty(a,b)$ *de* $C(\mathbb{R})$*. También, en el espacio de sucesiones reales la colección de sucesiones convergentes es un subespacio. Una sucesión* $\{a_n\}$ *se dice que es polinómica si existe un entero positivo m tal que* $a_n=0$ *para cada* $n \geq m$*. Es claro que el conjunto de sucesiones polinómica es un subespacio del espacio de sucesiones convergentes.*

Ejemplo 2.42 *En cada espacio vectorial V se tienen dos subespacios propios: 0={0} y V.*

Proposición 2.5 *La intersección de dos subespacios es un subespacio. Más generalmente, la intersección de cualquier familia no vacíaa de subespacios de un espacio vectorial es un subespacio.*

Definición 2.14 *Sea* V *un espacio vectorial y* S *un subconjunto no vacío de* V*; nótese que el subespacio más* pequeño *de* V *que contiene a* S *es la intersección de todos los subespacios de* V *que contienen a* S*. Este subespacio se denota por* $< S >$ *y se conoce como el* subespacio generado por S.

A continuación veremos que $< S >$ puede describirse en términos de combinaciones lineales de elementos de S. Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ elementos del espacio V, una *combinación lineal* de estos elementos es un vector $v \in V$ de la forma $v = a_1.v_1 + \cdots + a_n.v_n$, donde $a_1, \ldots, a_n$ son escalares del cuerpo K. Se puede entonces afirmar lo siguiente.

Proposición 2.6 *Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K y sea S un subconjunto no vacío de V. Entonces $< S >$ coincide con el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales realizadas con elementos de S.*
Más exactamente,

$$< S >= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.v_i \mid \lambda_i \in K\,, v_i \in S\,, n \geq 1 \right\}$$

Esta presentación permite identificar a $< S >$ como la *envolvente lineal* de S. Si $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es finito, entonces

$$< S >= \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.v_i \mid \lambda_i \in K\}\,.$$

En cada espacio vectorial existen ciertos subconjuntos conocidos como bases; la importancia de estos subconjuntos radica en que cada elemento del espacio puede ser representado de manera única a través de sus elementos. El propósito de la presente lección es explicar en detalle la noción de base, la cual es fundamental en álgebra lineal.

Ejemplo 2.43 *Analizar si el subconjunto*

$$H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\right\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$con las operaciones usuales de la adición y multiplicación por un escalar.

Solución
Como $(0,0,0) \in H : 0 + 2.0 + 3.0 = 0, H \neq \phi$.
i) Sean $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in H$, entonces

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Luego,

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) &= x_1 + 2y_1 + 3z_1 + x_2 + 2y_2 + 3 + z_2 \\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

Por tanto $u + v \in H$
ii)Sea $u = (x, y, z) \in H$, y sea $c \in \mathbb{R}$ entonces

$$cu = (cx, cy, cz)$$

Luego,

$$\begin{aligned}(cx) + 2(cy) + 3(cz) &= c(x + 2y + 3z) \\ &= c0 = 0\end{aligned}$$

Por tanto $cu \in H$.
H es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2.44 *Sea $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, el conjunto de los polinomios de grado ≤ 3, con coeficientes reales, con las operaciones usuales de adición de polinomios y multiplicación de polinomios por un número real. Demostrar que el conjunto*

$$W = \{p(x) \in V : p(x) = ax^3 + bx^2 + (a+b)x + 2b, \quad a, b \in \mathbb{R}\},$$

es un subespacio vectorial de V.

Solución
$W \neq \phi$, pues $0(x) \in W : 0(x) = 0x^3 + 0x^2 + (0+0)x + 2(0)$
(i) Sean $p(x), q(x) \in W$ entonces

$$\begin{aligned} p(x) &= ax^3 + bx^2 + (a+b)x + 2b, \ a, b \in \mathbb{R} \\ q(x) &= a'x^3 + b'x^2 + (a'+b')x + 2b', \ a', b' \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= \left(a + a'\right)x^3 + \left(b + b'\right)x^2 + (a + a' + b + b')x + 2\left(b + b'\right), \ a, b, \ a', b' \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow \ p(x) + q(x) \in W \end{aligned}$$

(ii)Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $(\lambda p)(x) = \lambda p(x) = \lambda\left(ax^3 + bx^2 + (a+b)x + 2b\right) = \lambda ax^3 + \lambda bx^2 + (\lambda a + \lambda b)x + 2(\lambda b)$
$\Longrightarrow (\lambda p)(x) \in W$

Ejemplo 2.45 *Sea $\mathbb{R}^3$el espacio vectorial con las operaciones usuales. Analizar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.*
$(a)\, S = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$.
$(b)\, T = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$.

Solución
$(a)\, S \neq \phi$, pues $(0,0,0) \in S : 0 = 0 = 0$
$(R1)$ Sean $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in S$ entonces $u = (x_1, x_1, x_1), v = (x_2, x_2, x_2) \Longrightarrow$
$u + v = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2) \in S$
$(R2)$Sean $u = (x, y, z) \in S$ y Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $u = (x, x, x)$
$\lambda u = (\lambda x, \lambda x, \lambda x) \in S$
Por tanto S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.
$(b)\, T \neq \phi$, pues $(0,0,0) \in S : 0 = 0^2 + 0^2$
$(R1)$ Sean $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in T$ entonces $z_1 = x_1^2 + y_1^2$, $z_2 = x_2^2 + y_2^2$
Entonces $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
$z_1 + z_2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 \neq (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = \left(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + + y_2^2\right) + 2x_1x_2 + + 2y_1y_2$
Por ejemplo:
$(R1)$Sean $u = (1, 1, 2), v = (-1, -1, 2) \in T \Longrightarrow u + v = (0, 0, 4) \notin T$, pues $4 \neq 0^2 + 0^2$
o
$(R2)$Sean $u = (1, 1, 2) \in T$ y Sea $\lambda = 2$ entonces $\lambda u = 2u = (2, 2, 4) \notin T$, pues $4 \neq 2^2 + 2^2$
Por tanto T no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2.46 *Analizar si los siguientes subconjuntos del espacio vectorial V (con las operaciones usuales) son subespacios.*
$(a)\, S = \left\{A = (a_{ij})_{2\times 2} \in V : a_{11} + a_{22} = 0\right\}$,
donde $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$, es el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden 2×2.

$(b)\, \mathcal{T} = \{f \in V : \exists k \geq 0;\ |f\ (t)| \leq k,\ \forall t \in \mathbb{R}\}$,
donde V, *es el conjunto de las funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Solución
$(a)\, \mathcal{S} \neq \phi$, pues $(0,0,0) \in \mathcal{S}$.
$(R1)$ $A = (a_{ij})_{2\times 2}$, $B = (b_{ij})_{2\times 2} \in S$ entonces $a_{11} + a_{22} = 0, b_{11} + b_{22} = 0 \Longrightarrow$
$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{2\times 2}$
$(a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}) = (a_{11} + a_{22}) + (b_{11} + b_{22}) = 0$
Por tanto, $A + B \in \mathcal{S}$.
$(R2)$Sea $A = (a_{ij})_{2\times 2} \in \mathcal{S}$ y Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $a_{11} + a_{22} = 0$
$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{2\times 2}$
$\lambda a_{11} + \lambda a_{22} = \lambda\,(a_{11} + a_{22}) = 0$
Por tanto, $\lambda A \in \mathcal{S}$.
Por tanto $\mathcal{S}$ es un subespacio vectorial de V.
$(b)\, \mathcal{T} \neq \phi$, pues $f = 0 \in \mathcal{T}$.
$(R1)$ Sean $f, g \in \mathcal{T}$: existen $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$ tales que $|f\ (t)| \leq k_1$, $\forall t \in \mathbb{R}$,
$|g\,(t)| \leq k_2$, $\forall t \in \mathbb{R}$
Luego, $|f\ (t) + g\,(t)| \leq |f\ (t)| + |g\,(t)| \leq k_1 + k_2 = k$,
existe un $k > 0 : |f\ (t) + g\,(t)| \leq k, \forall t \in \mathbb{R}$.
Por tanto, $f + g \in \mathcal{T}$.
$(R2)$Sea $f \in \mathcal{T}$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\exists k \geq 0;\ |f\ (t)| \leq k$, $\forall t \in \mathbb{R}$
$|(\lambda f)\ (t)| = |\lambda|\,|f\ (t)| \leq |\lambda|\,k = k' \Longrightarrow \exists k' \geq 0;\ |(\lambda f)\ (t)| \leq k'$, $\forall t \in \mathbb{R}$
Luego, $\lambda f \in \mathcal{T}$.
Por tanto $\mathcal{T}$ es un subespacio vectorial de V.

Ejercicios propuestos:Espacios vectoriales y subespacios vectoriales

1. Sea $\mathcal{M}_{2\times 2}$ el conjunto de las matrices reales de orden 2×2. Si $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se definen las operaciones $\oplus$ y $\odot$ del siguiente modo.

$$\begin{aligned} A \oplus B &= AB \text{ (producto usual de matrices)} \\ \alpha \odot A &= \alpha A \text{ (producto usual de un escalar por una matriz)} \end{aligned}$$

   Determinar, justificando su respuesta, cuales de los 10 axiomas de espacio vectorial se cumplen para estas operaciones.

2. Demostrar que $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial real con la adición definida por

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1)$$

   y la multiplicación por un escalar definida por

$$\alpha \odot (x_1, y_1) = (\alpha + \alpha x_1 - 1, \alpha + \alpha y_1 - 1)$$

3. Sea $V = \{(e^x, e^y) :\ x, y \in \mathbb{R}\}$ provisto de las operaciones siguientes:

$$\begin{aligned} (e^{x_1}, e^{y_1}) \oplus (e^{x_2}, e^{y_2}) &= (e^{x_1 + x_2}, e^{y_1 + y_2}) \\ \alpha \odot (e^x, e^y) &= (e^{\alpha x}, e^{\alpha y}) \end{aligned}$$

   Demostrar que V con estas operaciones es un espacio vectorial real.

4. En los siguientes casos determinar si el conjunto dado es o no un espacio vectorial. si no lo es, enuncie los axiomas que no se cumplen

(a) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tal que $x = y = z\}$ con las operaciones usuales de adición de vectores y multiplicación de un vector por un escalar.

(b) $F = f : f$ es una función cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y su rango es un subconjunto de $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales de adición de funciones y multiplicación de una función por un escalar.

(c) $E = \mathcal{P}_n$, el conjunto de los polinomios de grado $\leq n$, con coeficientes reales, con las operaciones usuales de adición de polinomios y multiplicación de polinomios por un número real

5. Sea $E = \mathcal{C}[0,1]$ el conjunto de las funciones $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, tales que f es continua en $[0,1]$

   (a) Verificar que E con las operaciones usuales de adición y multiplicación de funciones por un número real, es un espacio vectorial

   (b) Si se consideran

$$F_1 = \{f \in E : f(0) = f(1) = 0\}, \quad F_2 = \{f \in E : f(0) = 2\}$$

   Analizar si F_1 y F_2 son subespacios de E.

6. Determinar, justificando su respuesta, cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de los espacios vectoriales que los contienen.
   (Asumimos que son espacios vectoriales bajos las operaciones usuales)

   (a) $H_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 - y^2 = 0\}$
   (b) $H_2 = \{(x - 2y, x, 2y, -y) \in \mathbb{R}^4 : \; x, y \in \mathbb{R}\}$
   (c) $H_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; \max\{x, y\} = x\}$
   (d) $H_4 = \{(x, y, x - y) \in \mathbb{R}^3 : \; x, y \in \mathbb{R}\}$
   (e) $H_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x \text{ es racional}\}$
   (f) $H_6 = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} : \; \mathrm{tr}(A) = 0\}$
   (g) $H_7 = \{p \in \mathcal{P}_3 : \; p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \; a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R} \text{ y } a_1 \neq 0\}$
   (h) $H_8 = \{p \in \mathcal{P}_2 : \; p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \; a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R} \text{ y } a_2a_1 = 0\}$

7. Sean $F_1 = \{v = (x, x, x), \, x \in \mathbb{R}\}$ y $F_2 = \{w = (x, y, 0); \, x, \, y \in \mathbb{R}\}$. Demostrar que F_1 y F_2 son subespacios de $\mathbb{R}^3$.

8. Sean S y T dos subespacios de un espacio vectorial V. Definimos el conjunto

$$S + T = \{v \in V : \; v = s + t, \, s \in S \text{ y } t \in T\}$$

   El conjunto $S + T$ se llama suma de los subespacios S y T. Pruebe que $S + T$ es un subespacio de V.

   Hallar e identificar la suma de los subespacios de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} S &= \{(t, 2t, 3t) \in \mathbb{R}^3 : \; t \in \mathbb{R}\} \\ T &= \{(3s, 2s, -5s) \in \mathbb{R}^3 : \; s \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

9. Responder con verdadero o falso

   (a) El conjunto X formado por los vectores $v = (x, y, z)$ tales que $z = 3x$, $x = 2y$, es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

(b) El conjunto Y formado por los vectores $v = (x, y, z)$ tales que $xy = 0$, es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

(c) El conjunto L formado por los vectores $v = (x, 2x, 3x, ..., nx)$, es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

2.3.1 Bases y dimensión del espacio vectorial

Definición 2.15 *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y S un subconjunto no vacío de V, se dice que S* genera *V si la* envolvente lineal *de S coincide con V, es decir, $< S >= V$. El espacio V se dice finitamente generado si existe en V un subconjunto finito S de generadores.*

Definición 2.16 *Sea $X = \{x_1, \ldots , x_n\}$ un subconjunto finito de V, se dice que X es un conjunto de vectores linealmente independientes (L I) si la única combinación lineal nula con los elementos de X es a través de escalares nulos. Más exactamente, los vectores de X son linealmente independientes si para cualesquiera escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ se cumple que*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i . x_i = 0 \Longleftrightarrow \lambda_i = 0,\ 1 \leq i \leq n.$$

Por definición asumimos que el conjunto vacío es L I. Un subconjunto cualquiera X de V es L I si cada subconjunto finito de X es L I. X es linealmente dependiente (L D) si no es L I.

La siguiente proposición reune algunas propiedades básicas sobre dependencia e independencia lineal.

Proposición 2.7 *Sea V un K-espacio y $\phi \neq V$. Entonces*

(a) S es L D si y solo si existe $x \in S$ tal que $x \in < S' >$, donde $S' = S - \{x\}$.

(b) Si $0 \in S$ entonces S es L D.

(c) Si S es L I entonces cada subconjunto de S es L I.

(d) Si S es finito con $n \geq 0$ elementos, entonces cada conjunto de $n + 1$ elementos de $< S >$ es L D.

Ejercicios

1. Demuestre que en el espacio de funciones el conjunto $\beta = \{e^{nx} \,|\, n \in \mathbf{N}\}$ es L I.
2. Demuestre que dos vectores de $\mathbb{R}^2$ son L D si y solo si pertenecen a misma recta que pasa por el origen.

Ya estamos en capacidad de presentar la noción de base. $\beta \subset V$ es una *base* para V si se cumplen dos condiciones:

(a) $< \beta >= V$

(b) β es L I.

Ejemplo 2.47 *En $\mathbb{R}^n$ los vectores*

$$e_i = (0, \ldots , 1 , \ldots , 0) , \qquad 1 \leq i \leq n$$

constituyen la llamada base canónica *(1 se encuentra en la i-ésima entrada de la n-upla). Cambiando $\mathbb{R}$ por cualquier cuerpo K obtenemos la base canónica de K^n.*

Ejemplo 2.48 *En el espacio de polinomios el conjunto de polinomios $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ constituye su base canónica. En el subespacio de polinomios de grado $\leq n$ la base canónica es $\{1, x, x^2, x^3, \ldots , x^n\}$.*

Ejemplo 2.49 *En el espacio $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio de matrices reales 2×2 se tiene la siguiente base canónica:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.50 *En el espacio de sucesiones reales la colección de sucesiones*

$$e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0, \ldots), \, i \geq 1$$

conforman la base canónica para el subespacio de sucesiones polinómicas.

Ejemplo 2.51 *El conjunto ϕ es, por definición, la única base del espacio nulo* $0 = \{0\}$.

Terminamos esta lección con una de las principales caracterizaciones del concepto de base.

Proposición 2.8 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio y β un subconjunto no vacío de V. β es una base de V si y solo si cada elemento $v \in V$ tiene una representación única (salvo sumandos nulos) como combinación lineal de elementos de β en la forma:*

$$v = \lambda_1.v_1 + \cdots + \lambda_n.v_n, \qquad \lambda_i \in K, \, v_i \in \beta, 1 \leq i \leq n.$$

Ejemplo 2.52 *Determine los valores de $c \in \mathbb{R}$ para que el siguiente conjunto de vectores,*

$$\mathcal{S} = \{u = (1, -1, 2), v = (2, 3, 1), w = (4, c, 5)\}$$

del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, sea linealmente dependiente.

Solución.
$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & c \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 3c - 3 = 0$, de donde $c = 1$.

Ejemplo 2.53 *En el espacio de polinomios de grado menor o igual que 3, $\mathcal{P}_3$.Analizar si el conjunto dado de vectores $\mathcal{T} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, donde $p_1(x) = x^3$, $p_2(x) = (x-1)^3$, $p_3(x) = (x-2)^3$, $p_4(x) = 1 + x^3$, es linealmente dependiente o linealmente*

Solución.
Considere la ecuación $c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) + c_3 p_3(x) = 0$
expandiendo la ecuación

$$c_1 x^3 + c_2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + c_3(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3,$$

se tiene que el sistema de ecuaciones resultante está dado por:

$$\begin{cases} 1c_1 + 1c_2 + 1c_3 = 0 \\ 0c_1 - 3c_2 - 6c_3 = 0 \\ 0c_1 + 3c_2 + 12c_3 = 0 \\ 0c_1 - 1c_2 - 8c_2 = 0 \end{cases}$$

La matriz aumentada en su forma original y en los sucesivos pasos de escalonamiento están dadas por

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 12 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 12 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{bmatrix}$$

Evidentemente, el sistema de ecuaciones tiene una única solución, la trivial, y el conjunto formado por $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ es linealmente independiente.

Ejemplo 2.54 *Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \cdots .v_n\}$ es una base para un espacio vectorial V. Analizar para que valores de $n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathcal{B}' = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \cdots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1\}$$

es una base de V.

Solución. Si

$$\lambda_1 (v_1 + v_2) + \lambda_2 (v_2 + v_3) + \lambda_3 (v_3 + v_4,) + \cdots + \lambda_{n-1} (v_{n-1} + v_n) + \lambda_n (v_n + v_1) = 0$$

$$(\lambda_1 + \lambda_n) v_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) v_2 + (\lambda_2 + \lambda_3) v_3 + \cdots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n) v_n = 0$$

$$\lambda_1 = -\lambda_n, \lambda_2 = \lambda_n, \cdots, \lambda_{n-1} = (-1)^{n-1} \lambda_n, \lambda_{n-1} = -\lambda_n$$

De donde se tiene que n es un número par natural.

Ejemplo 2.55 *En $\mathbb{R}^3$, sean los subconjuntos*

$$\begin{aligned} S &= \{(1,2,0), (1,0,1)\} \\ T &= \{(1,2,0), (2,0,2), (3,2,2)\} \end{aligned}$$

(a) Demostrar que los subespacios generados por S y T son iguales. Es decir, $\langle S \rangle = \langle T \rangle$.
(b) Representar graficamente el subespacio hallado en la parte (a) y hallar una base de dicho subespacio.

Solución.
(a) $\langle S \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = t(1,2,0) + r(1,0,1); t, r \in \mathbb{R}\}$,
Se observa que $(3,2,2) = (1,2,0) + 2(1,0,1)$;
$\langle T \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = t(1,2,0) + r(1,0,1); t, r \in \mathbb{R}\}$
De donde $\langle S \rangle = \langle T \rangle$.
(b) $\langle S \rangle$, $\langle T \rangle$ representan planos que pasan por el origen de cooordenadas.
$\langle S \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) . (1,2,0) \times (1,0,1) = 0\}$
$\langle S \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \cdot (2, -1, -2) = 0\}$
$\langle S \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - 2z = 0\}$
Sea $v = (x, y, z) \in \langle S \rangle : 2x - y - 2z = 0 \Longrightarrow y = 2x - 2z$
$\langle S \rangle = \{(x, y, z) = (x, 2x - 2z, z) = x(1,2,0) + z(0,-2,1) : x, z \in \mathbb{R}\}$
$\langle S \rangle = \langle\{(1,2,0), (0,-2,1)\}\rangle$, además $(1,2,0)$ y $(0,-2,1)$ son linealmente independientes.
$\beta_{\langle S \rangle} = \{(1,2,0), (0,-2,1)\}$ es una base para $\langle S \rangle$.

Ejemplo 2.56 *Sea $V = \mathcal{P}_2$ el espacio vectorial de todos los poliniomios de grado ≤ 2.*
Considere $S = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$, donde $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 1 + x$, $p_3(x) = (1 + x)^2$. Analizar si S es una base de $\mathcal{P}_2$.

Solución
(i) S es linealmente independiente
Si

$$\begin{aligned} c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) + c_3 p_3(x) &= 0 \\ c_1(1) + c_2(1 + x) + c_3(1 + x)^2 &= 0 \\ c_3 x^2 + (+c_2 + 2c_3) x + c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c_3 = 0 \\ c_2 + 2c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 \end{cases}.$$

Trabajando en la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad F_1 \longleftrightarrow F_3 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad F_2 \longleftrightarrow F_2 + (-2)\,F_3 \quad \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad F_1 \longleftrightarrow F_1 + (-1)\,F_3 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}.$$

Por tanto S es linealmente independiente.

(ii) S Generan $\mathcal{P}_2$

Sea $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2$, entonces existen escalares c_1, c_2, c_3 tales que

$$p(x) = c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) + c_3 p_3(x)$$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= c_1(1) + c_2(1+x) + c_3(1+x)^2 \\ ax^2 + bx + c &= c_3 x^2 + (+c_2 + 2c_3)\,x + c_1 + c_2 + c_3 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c_3 = a \\ c_2 + 2c_3 = b \\ c_1 + c_2 + c_3 = c \end{cases}$$

Trabajando en la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right] \quad F_1 \longleftrightarrow F_3 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right] \quad F_2 \longleftrightarrow F_2 + (-2)\,F_3 \quad \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right] \quad F_1 \longleftrightarrow F_1 + (-1)\,F_3 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 1 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right] \quad F_1 \longleftrightarrow F_1 + (-1)\,F_2 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c-a-(b-2a) = a-b+c \\ 0 & 1 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = a-b+c \\ c_2 = b-2a \\ c_3 = a \end{cases}$$

Luego S genera $\mathcal{P}_2$.

Por tanto S es una base de $\mathcal{P}_2$.

Dimensión de un espacio vectorial

En esta lección discutiremos los siguientes aspectos relativos a las bases: existencia, unicidad y cardinalidad (= cantidad de elementos). Comenzamos con el siguiente teorema sobre existencia de bases en cualquier espacio vectorial. La prueba de este teorema se apoya en el Lema de Zorn (axioma de elección), el cual representa uno de los supuestos básicos de la teoría clasica de conjuntos. El lector no interesado en la prueba puede simplemente asumir el Teorema 1 como un axioma.

Teorema 2.2 *Todo espacio vectorial posee al menos una base.*

Con respecto a la unicidad de las bases podemos decir que, en general, un espacio vectorial tiene infinitas bases. Pensemos por ejemplo que el espacio V es no nulo (si V es nulo su única base es $\emptyset$); si β es una base cualquiera de V y v es un elemento de β, entonces cambiando v por $\lambda.v$ en β, con cada $\lambda \in K - \{0\}$, obtendremos bases diferentes en V. Cuando K es infinito esta colección de bases es infinita. En realidad, el único espacio con base única es el espacio nulo.

Mucho más interesante que la pregunta sobre la unicidad de las bases es el problema sobre el tamaño de éstas. Las siguientes proposiciones constituyen la prueba del Teorema 2 que enunciaremos más adelante.

Proposición 2.9 *Si un espacio vectorial V posee una base finita, entonces todas sus bases son finitas.*

La proposición anterior permite clasificar los espacios vectoriales en dos categorías: los de bases finitas y los de bases infinitas.

Proposición 2.10 *Sea V un espacio vectorial con bases finitas $\beta = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $\beta\prime = \{v_1, \ldots, v_m\}$. Entonces $n = m$.*

Proposición 2.11 *Sea V un espacio vectorial con bases infinitas β y β'. Entonces $card(\beta) = card(\beta\prime)$.*

Para cada espacio vectorial V se cumple que todas las bases tienen la misma cardinalidad.

El teorema anterior permite definir la noción de dimensión en un espacio vectorial V como el número de elementos que forma cualquiera de sus bases; denotaremos este invariante de V por $\dim_K(V)$, o simplemente por $\dim(V)$, es claro por el contexto sobre que cuerpo estamos trabajando. Si V es de bases infinitas diremos que V es de dimensión infinita. Si β es un subconjunto de V, definimos el *rango* de X, como la dimensión de la envolvente lineal de X, es decir, $rank_K(X) = \dim_K < X >$.

Ejemplo 2.57 $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

Ejemplo 2.58 *El espacio de los polinomios es de dimensión infinita.*

Ejemplo 2.59 $\dim(\mathcal{P}_n) = n + 1$

Ejemplo 2.60 $\dim(0) = 0$.

Ejercicio. Demuestre que si un espacio vectorial V posee un subconjunto infinito LI, entonces V es de dimensión infinita.

Algunas propiedades interesantes relativas a espacios de dimensión finita se presentan a continuación.

Proposición 2.12 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. Entonces,*

(a) Cada conjunto de n elementos LI de V conforman una base.

(b) Cada conjunto de n generadores de V conforman una base de V.

(c) Sea $m < n$ y sean $v_1, \ldots, v_m$ vectores LI de V. Entonces es posible encontrar vectores $v_{m+1}, \ldots, v_n$ en V tales que $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ es una base de V.

(d) Sea S un subespacio de V. Entonces, cada base de S puede extenderse hasta una base de V. En particular, $\dim(S) \leq \dim(V)$.

(e) Sean $x_1, \ldots, x_m$ elementos cualesquiera de V y S su envolvente lineal. Entonces, $\dim(S)$ coincide con el máximo número de vectores LI encontrados en la colección $v_1, \ldots, v_m$ de vectores dados.

1. Determinar si el conjunto de vectores dado genera el espacio vectorial
   (a) En $\mathbb{R}^2$, $u = (1, 1)$, $v = (2, 1)$
   (b) En $\mathbb{R}^3$, $u = (1, -1, 2)$, $v = (1, 1, 2)$, $w = (0, 0, 1)$
   (c) En $\mathcal{P}_2$, $p_1(x) = 1 - x$, $p_2(x) = 3 - x^2$, $p_3(x) = x$

2. Analizar si el conjunto dado de vectores es linealmente dependiente o linealmente independiente
   (a) En $\mathbb{R}^2$, $u = (1, 2)$, $v = (-1, -3)$
   (b) En $\mathbb{R}^3$, $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 2, 1)$, $w = (2, 1, 2)$
   (c) En $\mathbb{R}$, $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 1)$, $w = (1, 1, 0)$
   (d) En $\mathbb{R}^4$, $u_1 = (1, -2, 1, 1)$, $u_2 = (3, 0, 2, -2)$, $u_3 = (0, 4, -1, 1)$, $u_4 = (5, 0, 3, 1)$
   (e) En $E = C[0, 1]$ el conjunto de las funciones $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, tales que f es continua en $[0, 1]$, $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos x$.

3. Determinar si el conjunto de vectores dado es una base del espacio vectorial dado
   (a) En $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{(1, 1), (-1, 1)\}$. En caso afirmativo expresar cada uno de los vectores $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$ como combinación lineal de los elementos de esta base
   (b) En $\mathbb{R}^2$, $F = \{u = (x, y) \in \mathbb{R} : 2x + y = 0\}$, $\mathcal{B} = \{(1, -2)\}$
   (c) En $\mathbb{R}^2$, $F = \{u = (x, y) \in \mathbb{R} : 2x + y = 0\}$, $\mathcal{B} = \{(1, -2), (-5, 10)\}$
   (d) En $\mathcal{P}_3 : \mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, donde $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 1 + x$, $p_3(x) = 1 + x^2$, $p_4(x) = 1 + x^3$. En caso afirmativo expresar el polinomio $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 1$ como combinación lineal de los elementos de esta base

4. Demostrar que el conjunto solución $\{e^{x^2}, xe^{x^2}, x^2e^{x^2}\}$ es linealmente independiente en $C(\mathbb{R})$, el conjunto de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que f es continua.

5. Analizar la dependencia lineal de los polinomios $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}_3$ dados por

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 1 - 2x + x^2 + x^3 \\ p_2(x) &= -5 - 2x - 9x^2 + 7x^3 \\ p_3(x) &= 2 - x + 3x^2 - x^3 \end{aligned}$$

   y hallar una base y la dimensión del espacio generado por ellos.

6. Dadas las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & \alpha \end{pmatrix}$$

   hallar el valor de α para que A_4 esté en el subespacio generado por A_1, A_2 y A_3.

7. Dados los vectores $(k, 1, 0), (1, k - 1, k), (1 + k, 1, k)$ de $\mathbb{R}^3$.
   (a) ¿Para cuáles valores de k estos vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$?.
   (b) ¿Para cuáles valores de k estos vectores generan subespacios propios de $\mathbb{R}^3$?.Hallar dichos subespacios mostrando un conjunto generador para cada uno.

8. Dados los vectores $v_1 = (1,2,-2,1)\,, v_2 = (2,-1,1,2)$ y $v_3 = (1,-3,-1,3)$ de $\mathbb{R}^4$, hallar una base para el subespacio

$$H = \{v \in \mathbb{R}^4 : v \text{ es ortogonal a los tres vectores dados}\}.$$

9. Dado

$$H = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+w=0 \wedge x+2y+3z+4w=0\}.$$

   (a) Demostrar que H es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Hallar una base para H.

10. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,sea H el conjunto de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ formado por todas las matrices X tales que $AX = XA$.

   (a) Demostrar que H es un subespacio de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.
   (b) Hallar, justificando su respuesta, una base para H.

11. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial V de dimensión 4.Dados

$$\begin{aligned} v_1 &= 2u_1 + 3u_2 + u_3 - u_4 \\ v_2 &= u_1 + 2u_2 \\ v_3 &= u_1 - u_3 + 3u_4 \\ v_4 &= u_4 \end{aligned}$$

analizar si el conjunto $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una base de V.

12. Hallar una base del siguiente subespacio

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0\}.$$

13. Sea $E = \mathcal{M}_{m\times n}$ el conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ con elementos reales. Si la suma de matrices y la multiplicación de una matriz por un escalar son las usuales, se comprueba que $\mathcal{M}_{m\times n}$ es un espacio vectorial

   Determinar si el siguiente conjunto de vectores es una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}$

   $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$; donde $abcd \neq 0$

14. Hallar una base para

   (a) $E = \left\{v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}\right\}$
   (b) $E = \{v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0\}$
   (c) $E = \{v = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : ax + by + cz + dw = 0\}$, donde $abcd \neq 0$

Norberto Chau

Lima, 23 de enero de 2012

2.3.2 Vectores de coordenadas

Con el fin de ser capaz de enlazar el álgebra lineal con el álgebra de matrices, tenemos que encontrar una manera de representar los vectores numéricamente. Esto se puede hacer eligiendo una base para un espacio determinado y por escrito cada vector como una combinación única lineal de vectores de la base. Los coeficientes que surgen de esta manera son los escalares necesario.

Sea V un espacio vectorial $n-$dimensional sobre un campo k, sea $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V, y sea $x \in V$. Entonces x se puede escribir únicamente en la forma

$$x = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

en relación con la base S. Por lo tanto, tienen un mapeo invertible $V \to \Bbbk^n$ que asocia a cada vector $x \in V$ un vector columna única

$$[x]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \Bbbk^n,$$

determines a unique linear combination $\hat{y}_S = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n \in V$.

conocido como el vector de coordenadas de x con respecto a la base de S. Por el contrario, cada vector columna

$$y = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \Bbbk^n$$

determina una única combinación lineal $\hat{y}_S = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n \in V$.

Definición 2.17 *La aplicación $x \to [x]_S$ que asigna a cada vector $x \in V$ el vector de coordenadas $[x]_S \in k^n$ es la* aplicación de coordenadas *de V a k^n determinado por la base S para V.*

Definición 2.18 *La aplicación $y \to \hat{y}_S$ que asigna a cada vector columna $y \in k^n$ la combinación lineal $\hat{y}_S \in V$ es la* aplicación combinación lineal de coordenadas *de k^n en V determinado por la base S para V.*

Teorema 2.3 *Teorema de aplicación de coordenadas)Las aplicaciones $x \to [x]_S$ y $y \to \hat{y}_S$ son inversos el uno del otro.*

Prueba. Los cálculos necesarios para demostrar este teorema es trivial. Por definición,

$$x = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \to [x]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = y \to \hat{y}_S = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = x$$

y

$$y = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \to \hat{y}_S = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \to [\hat{\mathbf{y}}_S]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = y.$$

Por lo tanto, las aplicaciones de coordenadas son inversos el uno del otro. ■

Las aplicaciones combinación lineal de coordenadas, son útiles porque son inversos el uno del otro, y porque preservan la suma de vectores y la multiplicación por un escalar en el sentido del siguiente teorema.

Teorema 2.4 *Las aplicaciones de coordenadas* $\mathbf{x} \to [\mathbf{x}]_S$ *de* V *a* k^n *tiene la propiedad que* $[\mathbf{x}+\mathbf{y}]_S = [\mathbf{x}]_S + [\mathbf{y}]_S$ *y que* $[a\mathbf{x}]_S = a[\mathbf{x}]_S$.

Prueba. Sean $\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$ y $\mathbf{y} = b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n$ son dos vectores en V y sea $\mathbf{x}+\mathbf{y} = (a_1+b_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (a_n+b_n)\mathbf{v}_n$ su suma. Entonces

$$[\mathbf{x}+\mathbf{y}]_S = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [\mathbf{x}]_S + [\mathbf{y}]_S.$$

Además , para cualquier escalar $a \in \mathbf{k}$,

$$a\mathbf{x} = a(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n) = (aa_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (aa_n)\mathbf{v}_n,$$

de modo que

$$[a\mathbf{x}]_S = \begin{bmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a[\mathbf{x}]_S.$$

Por lo tanto la aplicación de coordenadas preserva la suma de vectores y la multiplicación escalar. ■

Una aplicación entre dos espacios vectoriales con las propiedades descritas en el teorema anterior se llama una Transformación lineal

La pregunta obvia es ¿qué relación existe entre los vectores de coordenadas $[\mathbf{x}]_S$ y $[\mathbf{x}]_{S'}$ de un vector dado x con respecto a dos bases distintas S y S' de V. La respuesta resulta a ser bastante simple.

Si escribimos los vectores base $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ en S como combinaciones lineales de los vectores basicos en la base S', se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= a_{11}\mathbf{w}_1 + \cdots + a_{1n}\mathbf{w}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_n &= a_{n1}\mathbf{w}_1 + \cdots + a_{nn}\mathbf{w}_n \end{aligned}$$

Los vectores de coordenadas de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ en la base S', por lo tanto

$$[\mathbf{v}_1]_{S'} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix} \quad \cdots \quad [\mathbf{v}_n]_{S'} = \begin{bmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} .$$

Sea

$$P = [[\mathbf{v}_1]_{S'} \cdots [\mathbf{v}_n]_{S'}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

la matriz cuyas columnas son los vectores de coordenadas. Entonces, por construcción, $P[\mathbf{x}]_S = [\mathbf{x}]_{S'}$.

Si escribimos los vectores base $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ en S' como combinaciones lineales de los vectores de la base S, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_1 &= b_{11}\mathbf{v}_1 + \cdots + b_{1n}\mathbf{v}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_n &= b_{n1}\mathbf{v}_1 + \cdots + b_{nn}\mathbf{v}_n\end{aligned}$$

Los vectores de coordenadas de $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ en la base, por lo tanto

$$[\mathbf{w}_1] = \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{bmatrix} \quad \ldots \quad [\mathbf{w}_n] = \begin{bmatrix} b_{n1} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{bmatrix} .$$

Sea

$$Q = [[\mathbf{w}_1]_S \ \cdots \ [\mathbf{w}_n]_S] = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

la matriz cuyas columnas son los vectores de coordenadas de la base de vectores $\mathbf{w}_i$ determinado por la base S, entonces, por construcción, $Q\,[\mathbf{x}]_{S'} = [\mathbf{x}]_S$. Es fácil comprobar que $Q = P^{-1}$

El siguiente teorema resume los resultados de estos cálculos.

Teorema 2.5 *(Teorema de cambio de base)Sea V un espacio vectorial n-dimensional sobre un campo k.Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ y*

$S' = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ dos bases de V, y sea x un vector en V con vectores de coordenadas $[\mathbf{x}]_S$ y $[\mathbf{x}]_{S'}$.Entonces

existe una matriz P invertible para el cual $P[\mathbf{x}]_S = [\mathbf{x}]_{S'}$ y $P^{-1}[\mathbf{x}]_{S'} = [\mathbf{x}]_S$.

Prueba. Sea $\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$ cualquier vector en V, escrito como una combinación lineal de la base de S. Por el hecho de que la aplicación de coordenadas $\mathbf{x} \to [\mathbf{x}]_{S'}$ conserva vector Además de la multiplicación y escalar se deduce que

$$\begin{aligned}[\mathbf{x}]_{S'} &= [a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n]_{S'} = a_1\,[\mathbf{v}_1]_{S'} + \cdots + a_n\,[\mathbf{v}_n]_{S'} \\ &= [[\mathbf{v}_1]_{S'} \ \ldots \ [\mathbf{v}_n]_{S'}] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = [[\mathbf{v}_1]_{S'} \ \ldots \ [\mathbf{v}_n]_{S'}]\,[\mathbf{x}]_S = P\,[\mathbf{x}]_S\end{aligned}$$

Por el contrario, $\mathbf{y} = b_1\mathbf{w}_1 + \cdots + b_n\mathbf{w}_n$ cualquier vector en V, escrito como una combinación lineal de la base S'. Del hecho de que la función de coordenadas $\mathbf{y} \to [\mathbf{y}]_S$ preserva la suma de vectores y la multiplicación escalar se deduce que

$$\begin{aligned}[\mathbf{y}]_S &= [b_1\mathbf{w}_1 + \cdots + b_n\mathbf{w}_n]_S = b_1\,[\mathbf{w}_1]_S + \cdots + b_n\,[\mathbf{w}_n]_S \\ &= [[\mathbf{w}_1]_S \ \ldots \ [\mathbf{w}_n]_S] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [[\mathbf{w}_1]_S \ \ldots \ [\mathbf{w}_n]_S]\,[\mathbf{y}]_{S'} = Q\,[\mathbf{y}]_{S'}\end{aligned}$$

Esto quiere decir que $Q = P^{-1}$. ■

Las matrices P y P^{-1} juegan un papel importante en el estudio de las transformaciones lineales. Por lo tanto, dado un nombre especial.

Definición 2.19 *Las matrices $n \times n$ P y P^{-1} con la propiedad que $P[\mathbf{x}]_S = [\mathbf{x}]_{S'}$ y $P^{-1}[\mathbf{x}]_{S'} = [\mathbf{x}]_S$ son el* cambio de base }matrices *de la base S a la base de S' y de la base S' a la base S, respectivamente.*

Ejemplo 2.61 *UnMatriz general de Cambio de Base de* $\mathbb{R}^2$.

Sea x un vector en $\mathbb{R}^2$, y sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ y $S' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ dos bases de $\mathbb{R}^2$.. Entonces $\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 = b_1\mathbf{w}_1 + b_2\mathbf{w}_2$.Por lo tanto

$$[\mathbf{x}]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad [\mathbf{x}]_{S'} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Escribimos S en términos de S'y S' en términos de S, se obtienen dos sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = c_{11}\mathbf{w}_1 + c_{12}\mathbf{w}_2 \\ \mathbf{v}_2 = c_{21}\mathbf{w}_1 + c_{22}\mathbf{w}_2 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \mathbf{w}_1 = d_{11}\mathbf{v}_1 + d_{12}\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{w}_2 = d_{21}\mathbf{v}_1 + d_{22}\mathbf{v}_2 \end{cases}.$$

En la notación de matriz-vector, estos sistemas toman la forma

$$[\mathbf{x}]_S = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} [\mathbf{x}]_{S'} \quad \text{and} \quad [\mathbf{x}]_{S'} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} [\mathbf{x}]_S.$$

Por sustitución, obtenemos

$$[\mathbf{x}]_S = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} [\mathbf{x}]_S$$

y

$$[\mathbf{x}]_{S'} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} [\mathbf{x}]_{S'}.$$

Dado que estas ecuaciones son válidas para todos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, se sigue que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

Por tanto

$$P = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

y

$$Q = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Esto nos dice que las dos bases de S y $S\prime$están conectados por las matrices invertible P y Q. ♦

Ejemplo 2.62 *Un especial Cambio de base para la matriz para* $\mathbb{R}^2$.

Sea $S = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ *y* $S' = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ *son dos bases para* $\mathbb{R}^2$.

Entonces

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

y

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} .$$

$\begin{cases} 1 = p + 3q \\ 0 = 2p + 4q \end{cases}$, la solución es : $\{q = 1, p = -2\}$

Así $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ y $Q = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Se sigue que

$$PQ = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$QP = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Además,

$$P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

y

$$Q \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como podemos ver, la matriz P es la matriz de cambio de base de S a S', y su inverso Q es la matriz de cambio de base de S' a S.

Ejemplo 2.63 *Un cambio de coordenadas en* $\mathbb{R}^3$.

Convertir los vectores de la base de

$$S = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a vectores coordenadas en la base

$$S' = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

utilizar el resultado para la construcción de una matriz de cambio de base de S a S'.

Solución

Comenzamos calculando el vector de coordenadas $[\mathbf{v}_1]_{S'}$.

$$a_{11} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{13} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} + a_{13} \\ a_{11} + a_{12} \\ a_{11} + a_{13} \end{bmatrix}$$

Por tanto

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{13} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} + a_{13} \\ a_{11} + a_{12} \\ a_{11} + a_{13} \end{bmatrix}.$$

Ahora resolvemos el sistema $\begin{cases} 1 = a_{12} + a_{13} \\ 2 = a_{11} + a_{12} \\ 3 = a_{11} + a_{13} \end{cases}$.
la solución es : $\{a_{11} = 2, a_{12} = 0, a_{13} = 1\}$.
Por tanto$[\mathbf{v}_1]_{S'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{S'} = \begin{bmatrix} a_{12} + a_{13} \\ a_{11} + a_{12} \\ a_{11} + a_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Al repetir los pasos anteriores para $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$, se obtiene

$$[\mathbf{v}_2]_{S'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{S'} = a_{21} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{23} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} + a_{23} \\ a_{21} + a_{22} \\ a_{21} + a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

y

$$[\mathbf{v}_3]_{S'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{S'} = a_{31} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_{32} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{33} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{32} + a_{33} \\ a_{31} + a_{32} \\ a_{31} + a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con estos resultados, podemos construir el cambio de base de la matriz P de S a S'.

$$P = [[\mathbf{v}_1]_{S'} \ [\mathbf{v}_1]_{S'} \ [\mathbf{v}_1]_{S'}] = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Como era de esperar,

$$P\,[\mathbf{v}_1]_S = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_1]_{S'}$$

$$P\,[\mathbf{v}_2]_S = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_2]_{S'}$$

$$P\,[\mathbf{v}_3]_S = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_3]_{S'}.$$

A continuación, utilizamos P^{-1}, la matriz de cambio de base de S' de S, para revertir estos cálculos.
$\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$
Como era de esperar,

$$P^{-1}\,[\mathbf{v}_1]_{S'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_1]_S$$

$$P^{-1}\,[\mathbf{v}_2]_{S'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_2]_S$$

$$P^{-1}[\mathbf{v}_3]_{S'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_3]_S .$$

Con esto se completa el cambio deseado de las coordenadas.

2.4 Transformaciones Lineales

Definición 2.20 *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K ; una* transformación lineal *de V en W es una función $T : V \to W$ que satisface dos condiciones:*

$$\begin{aligned} (a) T(u+v) &= T(u) + T(v) \\ (b) T(\lambda.v) &= \lambda.T(v) \end{aligned}$$

para cualesquiera vectores $u, v \in V$ y cualquier escalar $\lambda \in K$. Se dice también que T es un operador lineal de V en W, o
que T es una función K-lineal de V en W.

Ejemplo 2.64 *La función $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (2x, 2y)$ es una transformación lineal.*

Ejemplo 2.65 *La integración puede considerarse como un operador lineal S del espacio $C(\mathbf{R})$ (o c(a,b)) en $\mathbb{R}$:*

$$S(f) = \int f(x)dx + C \text{ con } C = 0$$

Ejemplo 2.66 *Dados dos espacios vectoriales V y W, la función nula*

$$\begin{aligned} O &: V \to W \\ x &\longmapsto O(x) = 0 \end{aligned}$$

es una transformación lineal, denominada la transformación nula.

Ejemplo 2.67 *De igual manera, la función idéntidad*

$$\begin{aligned} I_V &: V \to V \\ u &\longmapsto I_V(u) = u \end{aligned}$$

es también una transformación lineal, y se le conoce como la idéntidad de V.

Ejemplo 2.68 *Sea $a \in \mathbb{R}$ un real fijo y el espacio de polinomios reales, entonces la función*

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R} \\ p(x) &\mapsto p(a) \end{aligned}$$

es una transformación lineal.

2.4.1 Núcleo e Imagen

Definición 2.21 *Sea $T : V \to W$ una transformación lineal de V en W ; se define el* núcleo *de T como*

$$N(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}.$$

Nótese que $N(T)$ es un subespacio de V. Por otro lado, se define la imagen *de T como*

$$Im(T) = \{w \in W \mid w = T(v), \text{ para algún } v \in V\};$$

$Im(T)$ es un subespacio de W. Si A es un subespacio de V y B es un subespacio de W, entonces los conjuntos

$$T(A) = \{T(a) \mid a \in A\}$$
$$T^{-1}(B) = \{v \in V \mid T(v) \in B\}$$

son subespacios de W y V respectivamente.

Observación 2.6 *Obsérvese que $N(T) = T^{-1}(0)$, e $Im(T) = T(V)$. La dimensión del espacio imagen $Im(T)$ se conoce como el rango de la transformación T, y la denotamos por $rank(T)$.*

Ejemplo 2.69 *Consideremos la función T definida por $T : \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}_{2n}[x]$*
$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mapsto a_0 + a_1x^2 + \cdots + a_nx^{2n}$.
T es una transformación lineal con núcleo 0 y $rank(T) = n + 1$.

Ejemplo 2.70 *En el espacio V de las c(a,b)sucesiones reales convergentes la función T definida por*

$$T(\{x_n\}) = \{a - x_n\}, \text{ donde } a = \lim_{n\to\infty}\{x_n\}$$

es una transformación lineal cuyo núcleo es el espacio de las sucesiones constantes y cuya imagen es el espacio de las sucesiones de límite 0.Además, la sucesión constante 1 es una base de $N(T)$ y, por otro lado, las sucesiones

$$s_1 = \{1, 0, 0, \ldots\}$$
$$s_2 = \{0, 1, 0, \ldots\}$$
$$s_3 = \{0, 0, 1, \ldots\}$$
$$\vdots$$

son linealmente independientes, con lo cual $Im(T)$ y V son espacios de dimensión infinita.

A continuación presentamos y probamos uno de los teoremas básicos del álgebra lineal.

Teorema 2.6 *Sea V un espacio de dimensión finita $n \geq 1$ y sea $T : V \to W$ una tranformación lineal. Entonces*

$$\dim(V) = \dim N(T) \;+\; \dim Im(T)$$

El siguiente teorema muestra que una transformación lineal queda completamente determinada por su acción sobre los vectores de una base. En otras palabras, para definir una transformación lineal basta conocer las imágenes de los vectores de una base.

Teorema 2.7 *Sean V y W dos K-espacios, β una base de V y $\varphi : \beta \to W$ una función. Entonces existe una única transformación lineal $T : V \to W$ que extiende a t, es decir, $T(v) = \varphi(v)$, para cada $v \in \beta$.*

Ejemplo 2.71 *Sea*

$$\mathcal{L}: \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

una recta en $\mathbb{R}^3$*.Si* P *es un punto de* $\mathbb{R}^3$*, el simétrico de* P *respecto a la recta* $\mathcal{L}$ *es el punto* $P\prime \in \mathbb{R}^3$ *tal que, el segmento* $\overline{PP\prime}$ *interseca perpendicularmente a la recta* $\mathcal{L}$ *en el punto* M *(*M *es el, puntomedio de* $\overline{PP'}$*).Sea*

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

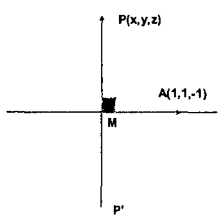
la transformación lineal definida por

$$\begin{aligned} T(P) &= P\prime \ (P\prime \text{ es simétrico de } P \text{ respecto a } \mathcal{L}) \\ T(P) &= P \text{ si } P \in \mathcal{L} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.72 *(a)Hallar el núcleo y la imagen de* T*.*
(b)Determinar una base para el núcleo y una base para la imagen de T*.*

Solución
$(a)\,\mathcal{L}: \begin{cases} 2x - y + z = 0 \cdots (1) \\ x + y + 2z = 0 \cdots (2) \end{cases}$
Sumando (1) y (2) :$3x + 3z = 0 \Longrightarrow z = -x$. Luego $y = 2x + z = 2x - x = x$
Parametrizando : sea $x = t$, de donde $y = t, z = -t$

$$\mathcal{L} : P = t(1, 1, -1), t \in \mathbf{R}$$



Sea $M \in \mathcal{L}$, entonces existe un $t \in \mathbf{R}$ tal que $M = (t, t, -t)$.Luego,
$\overrightarrow{MP} = P - M = (x, y, z) - (t, t, -t) = (x - t, y - t, z + t)$
$\overrightarrow{MP} \perp \mathcal{L} \Longrightarrow \overrightarrow{MP} \perp A = (1, 1, -1) \Longrightarrow \overrightarrow{MP} \cdot A = 0$
$(x - t, y - t, t + z) \cdot (1, 1, -1) = 0 \Longrightarrow x - 3t + y - z = 0 \Longrightarrow$
$x - 3t + y - z = 0 \Longrightarrow t = \dfrac{x + y - z}{3}$. Luego,
$M = \left(\dfrac{x+y-z}{3}, \dfrac{x+y-z}{3}, -\dfrac{x+y-z}{3} \right)$
Como Mes punto medio $\overline{PP'}$ se tiene $\frac{P+P'}{2} = M$, de donde $P' = 2M - P$

$$\begin{aligned} P' &= 2\left(\frac{x+y-z}{3}, \frac{x+y-z}{3}, -\frac{x+y-z}{3} \right) - (x, y, z) \\ P' &= \left(\frac{-x+2y-2z}{3}, \frac{2x-y-2z}{3}, \frac{-2x-2y-z}{3} \right) \end{aligned}$$

Sea

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

la transformación lineal definida por

$$\begin{aligned} T(P) &= P' \,(P' \text{ es simétrico de } P \text{ respecto a } \mathcal{L}) \\ T(x,y,z) &= \left(\frac{-x+2y-2z}{3}, \frac{2x-y-2z}{3}, \frac{-2x-2y-z}{3}\right) \end{aligned}$$

(b)El núcleo de T está formado por los puntos $P=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tales que

$$T(x,y,z) = \left(\frac{-x+2y-2z}{3}, \frac{2x-y-2z}{3}, \frac{-2x-2y-z}{3}\right) = (0,0,0)$$

de donde

$$\left\{\begin{array}{l} -x+2y-2z=0 \\ 2x-y-2z=0 \\ -2x-2y-z=0 \end{array}\right. ,$$

la Solución es:$[x=0, y=0, z=0]$.
Por tanto $Nu(T) = \{(x,y,z) = (0,0,0)\}$.
La imagen de T está formado por los puntos

$$\begin{aligned} P' &= \frac{1}{3}(-x+2y-2z, 2x-y-2z, 2x-y-2z)\,; x,y,z\in\mathbb{R} \\ P' &= x\frac{1}{3}(-1,2,-2) + y\frac{1}{3}(2,-1,-2) + z\frac{1}{3}(-2,-2,-1) \end{aligned}$$

Por tanto $\operatorname{Im}(T) = \left\{P' = x\frac{1}{3}(-1,2,-2) + y\frac{1}{3}(2,-1,-2) + z\frac{1}{3}(-2,-2,-1)\right\}$
$\operatorname{Im}(T) = gen\{(-1,2,-2),(2,-1,-2),(-2,-2,-1)\}$.
$\beta_{\operatorname{Im}T} = \{(-1,2,-2),(2,-1,-2),(-2,-2,-1)\}$ es l.i

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$$

$$\begin{aligned} c_1(-1,2,-2) + c(2,-1,-2) + c_3(-2,-2,-1) &= (0,0,0,0) \\ (2c-c_1-2c_3, 2c_1-c-2c_3, -2c-2c_1-c_3) &= (0,0,0,0) \end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2c-c_1-2c_3=0 \\ 2c_1-c-2c_3=0 \\ -2c-2c_1-c_3=0 \end{array}\right. ,$$

la Solución es: $c_1=0, c_2=0, c_3=0$

Ejemplo 2.73 *Sea*

$$T:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

la transformación lineal definida por

$$T(x,y,z,w) = (x+z, x+y-z-2w, -2x-y+2w)$$

(a)*Encontar la matriz asociada de T.*
(b)*Hallar la dimensión de la imagen de T .*

Solución

(a)La matriz asociada de T es

$$A_T = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) & T(e_4) \end{bmatrix}$$

$T(e_1) = (1, 1, -2)$
$T(e_2) = (0, 1, -1)$
$T(e_3) = (1, -1, 0)$
$T(e_4) = (0, -2, 2)$

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(b)Sea $w = T(x, y, z) = (x + z, x + y - z - 2w, -2x - y + 2w) \in \mathrm{Im}(T)$ entonces
$w = x(1, 1, -2) + y(0, 1, -1) + z(1, -1, 0) + w(0, -2, 2)$
$w = x(1, 1, -2) + (y - 2w)(0, 1, -1) + z(1, -1, 0); x, y, z \in \mathbb{R}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, entonces los vectores $(1, 1, -2), (0, 1, -1), (1, -1, 0)$ son linealmente dependientes.

Luego, $(1, 1, -2)$ y $(0, 1, -1)$ son linealmente independientes.
$\mathrm{Im}(T) = \langle\{(1, 1, -2), (0, 1, -1)\}\rangle$, de donde $\dim \mathrm{Im}(T) = 2$

Ejemplo 2.74 *Sea* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una transformación lineal dada por*

$$T(x, y, z) = (\lambda x + y + z, \lambda x + y, y + z)$$

Determinar el valor de λ *para que el núcleo de* T *tenga dimensión 1 y para dicho valor de* λ*, hallar una base para la imagen de* T.

Solución

$T(x, y, z) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Como $|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda$

núcleo de T : $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Si $|A| = \lambda \neq 0$, entonces núcleo de $T = \{(0, 0, 0)\} \Longrightarrow \dim Nu(T) = 0$
Si $|A| = \lambda = 0$, entonces núcleo de T se tiene :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad F_3 \longleftrightarrow F_3 - F_1 \quad \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

De : $y + z = 0 \longrightarrow z = 0$
$Nu(T) = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\} = \langle(1, 0, 0)\rangle$, de donde $\dim Nu(T) = 1$
Sea $w = T(x, y, z) = (y + z, y, y + z) \in \mathrm{Im}(T)$ entonces
$w = y(1, 1, 1) + z(1, 0, 1); y, z \in \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}(T) = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$
Luego, $(1, 1, 1)$ y $(1, 0, 1)$ son linealmente independientes. Por tanto,
$\beta_{\mathrm{Im}(T)} = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ es una base para la imagen de T.

Operaciones con Transformaciones Lineales En esta lección mostraremos que el conjunto de todas las transformaciones lineales entre dos K-espacios V y W es un K-espacio. Veremos además que cuando $V = W$ dicho conjunto es una K-álgebra.

Denotemos por L(V,W) el conjunto de todas las transformaciones lineales del espacio V en el espacio W.

$L_K(V, W)$ adquiere estructura de espacio vectorial respecto de las siguientes operaciones:

Para T_1, $T_2 \in L_K(V, W)$ y $v \in V$ se define la suma por

$$(T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v).$$

La acción de producto por un escalar sobre transformaciones viene dada por

$$(r.T)(v) = r.T(v)$$

donde $r \in K$ y $T \in L_K(V, W)$. Nótese que el cero de $L_K(V, W)$ es la transformación nula y la opuesta de $T \in L_K(V, W)$ es la transformación $-T$ definida por

$$(-T)(v) = -T(v).$$

$L_K(V, W)$ se conoce también como el *espacio de operadores lineales* de V en W.

Además de las dos operaciones definidas anteriormente, podemos considerar la composición de transformaciones lineales como una tercera operación.

En efecto, sean $T : V \to W$ y $S : Z \to U$ dos transformaciones lineales de tal manera que se cumpla la condición habitual de compatibilidad: $Im(T) \subseteq Z$. Entonces la función compuesta ST definida para cada $v \in V$ por

$$(ST)(v) = S(T(v))$$

es una transformación lineal.

Las tres operaciones introducidas gozan de las siguientes propiedades algebraicas.

Sean T, T_1, T_2, T_3 transformaciones lineales compatibles para las operaciones indicadas. Entonces

$$\begin{gathered} (T_1T_2)T_3 = T_1(T_2T_3) \\ T(T_1 + T_2) = TT_1 + TT_2 \\ (T_1 + T_2)T = T_1T + T_2T \\ a.(T_1T_2) = (a.T_1)T_2 = T_1(a.T_2),\ a \in K \\ IT = T = TI, \end{gathered}$$

donde I es la transformación idéntica respectiva.

De acuerdo a la discusión anterior, el espacio $L_K(V, V)$, de transformaciones lineales de V en si mismo, viene dotado de tres operaciones: suma de vectores, producto de escalares por vectores y producto entre vectores. Resulta entonces que $L_K(V)$ es un álgebra sobre el cuerpo K, en el sentido de la siguiente definición.

Definición 2.22 *Sea $\mathcal{A}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo K, se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra sobre K , o también que $\mathcal{A}$ es una K-álgebra, si en $\mathcal{A}$ está definido un producto entre vectores que cumple las siguientes condiciones:*

$$\begin{aligned}
(v_1v_2)v_3 &= v_1(v_2v_3)\\
v(v_1+v_2) &= vv_1+vv_2\\
(v_1+v_2)v &= v_1v+v_2v\\
\lambda.(v_1v_2) &= (\lambda.v_1)v_2 = v_1(\lambda.v_2), \lambda \in K\\
1v &= v = v1,
\end{aligned}$$

donde $v, v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{A}$, $a \in K$ y 1 es el elemento neutro del producto de vectores.

En lo siguiente presentamos el concepto de isomorfismo para grupos y anillos; en esta lección mostraremos la importancia de esta noción para el caso de los espacios vectoriales.

Definición 2.23 *Una transformación lineal $T : V \to W$ es inyectiva si para cualesquiera elementos $u, v \in V$ se cumple que:*

$$T(u) = T(v) \Longrightarrow u = v.$$

T se dice sobreyectiva *si $Im(T) = W$.*

Proposición 2.13 *Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*
1.T es inyectiva.
2.$N(T) = 0$.
3.Si $v_1, \ldots, v_n$ son vectores LI de V, entonces $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ son vectores L.I. de $Im(T)$.
4.Si β es una base de V, entonces $T(\beta)$ es una base de $Im(T)$.

En particular, si V y W son espacios de dimensión finita $n \geq 1$, entonces T es inyectiva si y solo si T es sobreyectiva.

Definición 2.24 *Se dice que T es* biyectiva *si T es inyectiva y sobreyectiva. Dos K-espacios V y W se dicen* isomorfos *si existe una transformación lineal biyectiva T de V en W. Esta relación entre V y W se denota por $V \cong W$.*

Siendo T biyectiva, existe la función inversa de T definida por

$$T^{-1} : W \to V$$

$$T^{-1}(w) = v \Longleftrightarrow T(v) = w$$

donde $w \in W$ y $v \in V$. Es obvio que T^{-1} es también una tranformación lineal y cumple las siguientes condiciones:

$$T\,T^{-1} = I \text{ identica}, T^{-1}T = I \text{ identica}$$

Nótese que T^{-1} es la única transformación de W en V que cumple estas identidades, y se le conoce como la inversa de T. Hemos visto entonces que una transformación lineal biyectiva tiene inversa, ésta es única y viene caracterizada por las identidades anteriores.

Nótese que la relación "ser isomorfo" es una relación de equivalencia en la colección de todos los K-espacios. Es también claro que la composición de dos isomorfismos es nuevamente un isomorfismo.Un isomorfismo T de un espacio V en si mismo se denomina un automorfismo de V. La colección de todos los automorfismos de un espacio V se denota por $Aut_K(V)$. Se tiene entonces inmediatamente el siguiente resultado.

Si V es un K-espacio, entonces $Aut_K(V)$ es un grupo respecto de la composición de transformaciones con elemento neutro I_V.

Una consecuencia inmediata de la Proposición anterior es el siguiente corolario.

Corolario 2.8 *Sea $T : V \to V$ una transformación lineal de un espacio V de dimensión finita $n \geq 1$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.T es inyectiva

2.$N(T) = 0$

3. T es sobreyectiva

4.rank(T)=n

5.T es un automorfismo.

2.4.2 Matrices y transformaciones lineales

En este capítulo, usted también aprenderá que todas las matrices determinan las transformaciones lineales. Usted también aprenderá cómo representar transformaciones lineales de matrices y estudiar la conexión entre diferentes matrices que representan la misma transformación lineal. Estas matrices se denominan matrices similares.

Usted aprenderá que las matrices similares están vinculados a través invertible de cambio de base de matrices.

Las matrices de las transformaciones lineales

Sea V un espacio n-dimensional y W es un espacio vectorial m-dimensional sobre los mismo campo k. Entonces sabemos de teorema de isomorfismo que en relación con una base fija de S de V, el espacio V es isomorfo a k^n, y en relación con una base fija S' de W, el W es isomorfo al espacio k^m. En relación con estos isomorfismos, por lo tanto, cada vector $x \in V$ corresponde a un único vector de coordenadas $[\mathbf{x}]_S \in \mathbb{k}^n$, y cada vector $T(x) \in W$ corresponde a un único vector de coordenadas $[T(\mathbf{x})]_{S'}$. En esta sección, vamos a utilizar tales isomorfismos para representar a cada transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ por una transformación de matriz $[T]^S_{S'} : k^n \to k^m$ de modo que $[T]^S_{S'}[\mathbf{x}]_S = [T(\mathbf{x})]_{S'}$. La matriz $[T]^S_{S'}$ se llama la *matriz de* T en las bases de S y S'. Diferentes bases S y el rendimiento de diferentes matrices S'.

Definición 2.25 *La matriz de una transformación lineal $T : k^n \to k^m$ en la base $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ para k^n y la base S' para k^m es la matriz*

$$A = [T]^S_{S'} = [[T(\mathbf{v}_1)]_{S'} \ \cdots \ [T(\mathbf{v}_n)]_{S'}]$$

cuyas columnas son los vectores de coordenadas $[T(\mathbf{v}_i)]_{S'}$ en la base S' de la imagen $T(\mathbf{v}_i)$ de la base de vectores $\mathbf{v}_i \in S$.

Definición 2.26 *Si $T : k^n \to k^m$ es una transformación lineal y si E es la base estandar para k^n y E' la base standard para k^m, entonces la matriz*

$$[T]^E_{E'} = [[T(\mathbf{e}_1)]_{E'} \ \cdots \ [T(\mathbf{e}_n)]_{E'}]$$

es la matriz estándar de T.

Teorema 2.9 *(teorema de representación de la matriz). Si A es la matriz de una transformación lineal $T: k^n \to k^m$ en la bases S y $S\prime$, entonces $[T(\mathbf{x})]_{S'} = A[\mathbf{x}]_S$.*

Prueba. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, y supongamos que $\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$ es cualquier vector en $\mathbb{k}^n$. Entonces, el vector de coordenadas de x en la base S es

$$[\mathbf{x}]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
[T(\mathbf{x})]_{S'} &= [T(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n)]_{S'} \\
&= a_1[T(\mathbf{v}_1)]_{S'} + \cdots + a_n[T(\mathbf{x}_n)]_{S'} \\
&= [[T(\mathbf{v}_1)]_{S'} \ \cdots [T(\mathbf{v}_n)]_{S'}] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \\
&= A[\mathbf{x}]_S. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.75 *La transformación identidad como una matriz de cambio de base.*

Sea $I : k^n \to k^n$ es la transformación identidad de un espacio vectorial V sobre un campo k, and let $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}\}$ y $S' = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ son dos bases k^n. Entonces por definición,

$$[I]_{S'}^S = [[I(\mathbf{v}_1)]_{S'} \ \cdots \ [I(\mathbf{v}_n)]_{S'}] = [[\mathbf{v}_1]_{S'} \ \cdots \ [\mathbf{v}_n]_{S'}] = P \in \mathbb{k}^{n\times n}$$

es la matriz de cambio de bases S a S', y

$$[I]_S^{S'} = [[I(\mathbf{w}_1)]_S \ \cdots \ [I(\mathbf{w}_n)]_S] = [[\mathbf{w}_1]_S \ \cdots \ [\mathbf{w}_n]_S] = Q \in \mathbb{k}^{n\times n}$$

es la matriz de cambio de bases S' a S.

Ejemplo 2.76 *La transformación identidad como la matriz identidad*

Ejemplo 2.77 *.*

Probar que la transformación identidad $I : k^n \to k^n$ es representada por una matriz identidad I_n, provista de las bases S y S' es la base estandár de $E = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ para k^n definida anteriormente.

Solución. Por teorema de representación de la matriz,

$$[I]_E^E = [[I(\mathbf{e}_1)]_E \ \cdots \ [I(\mathbf{e}_n)]_E].$$

Pero $[I(\mathbf{e}_i)]_E = \mathbf{e}_i$ para todo $1 \le i \le n$. Entonces

$$[I]_E^E = [\mathbf{e}_1 \ \cdots \ \mathbf{e}_n] = I_n \in k^{n\times n}.$$

Esto demuestra que la matriz de identidad representa la transformación de la identidad, siempre que la base estándar que se elija, tanto para el dominio y el codominio de I.

Ejemplo 2.78 *Una matriz de una transformación lineal*

Ejemplo 2.79 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Sea
$$S = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$
y
$$S' = \left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$
dos bases para $\mathbb{R}^2$.Encontrar la matriz $[T]_{S'}^{S}$ representante a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4x - 2y \\ 2x + y \end{bmatrix}.$$

Solución. Calculando los valores de T en la base S.

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}_1) &= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} &&= 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &&= 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 \\ T(\mathbf{v}_2) &= \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} &&= -4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &&= -4\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Por tanto
$$[T(\mathbf{v}_1)]_{S'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [T(\mathbf{v}_2)]_{S'} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Esto significa que
$$A = [T]_{S'}^{S} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Vamos a verificar que $A\,[\mathbf{x}]_S$ nos da los valores esperados mediante el cálculo de $A\,[\mathbf{v}_1]_S$ y $A\,[\mathbf{v}_2]_S$.

Si $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, entonces

$$[\mathbf{x}]_S = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por tanto
$$A\,[\mathbf{x}]_S = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [T(\mathbf{x})]_{S'}.$$

Si $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, entonces

$$[\mathbf{x}]_S = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto
$$A\,[\mathbf{x}]_S = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} = [T(\mathbf{x})]_{S'}.$$

Por lo tanto, representa la transformación lineal T en las bases S y S'.

Es importante señalar que en la especificación de las bases $S=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2\}$ y $S'=\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ en el ejemplo anterior, se supone que las bases se ordenan . Esto significa que $\mathbf{v}_1$ viene antes de $\mathbf{v}_2$ en S y $\mathbf{e}_1$ antes de $\mathbf{e}_2$ en S'. Si cambiamos el orden de los vectores en S y T representan en las bases de $S'' = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1\}$ y S', por ejemplo, entonces

$$[T]_{S'}^{S''} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2.80 *Una Matriz de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$*
Sea

$$S = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

la base para $\mathbb{R}^3$ y

$$S' = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

la base para $\mathbb{R}^2$. Encontrar la matriz $[T]_{S'}^{S}$ que representa la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3x + 2y - 4z \\ x - 5y + 3z \end{bmatrix}.$$

Solución. Por definición,

$$[T]_{S'}^{S} = \left[[T(\mathbf{w}_1)]_{S'} \ [T(\mathbf{w}_{21})]_{S'} \ [T(\mathbf{w}_3)]_{S'} \right].$$

Calculando los vectores coordenadas $[T(\mathbf{w}_1)]_{S'}, [T(\mathbf{w}_{21})]_{S'}$, y$[T(\mathbf{w}_3)]_{S'}$.

$$\begin{aligned} T(\mathbf{w}_1) &= T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \\ T(\mathbf{w}_2) &= T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \\ T(\mathbf{w}_3) &= T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Luego ahora calculamos los vectores coordenadas $[T(\mathbf{w}_1)]_{S'}, [T(\mathbf{w}_{21})]_{S'}$, y $[T(\mathbf{w}_3)]_{S'}$.

$[T(\mathbf{w}_1)]_{S'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{S'} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b \\ 3a + 5b \end{bmatrix}$

$\begin{cases} 1 = a + 2b \\ -1 = 3a + 5b \end{cases}$, la solución es : $\{b = 4, a = -7\}$

Por tanto $[T(\mathbf{w}_1)]_{S'} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix}$.

$[T(\mathbf{w}_2)]_{S'} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}_{S'} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b \\ 3a + 5b \end{bmatrix}$

$\begin{cases} 5 = a + 2b \\ -4 = 3a + 5b \end{cases}$, la solución es : $\{a = -33, b = 19\}$

Por tanto $[T(\mathbf{w}_2)]_{S'} = \begin{bmatrix} -33 \\ 19 \end{bmatrix}$.

$[T(\mathbf{w}_3)]_{S'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{S'} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b \\ 3a + 5b \end{bmatrix}$

$\begin{cases} 3 = a + 2b \\ 1 = 3a + 5b \end{cases}$, la solución es : $\{a = -13, b = 8\}$

Por tanto $[T(\mathbf{w}_3)]_{S'} = \begin{bmatrix} -13 \\ 8 \end{bmatrix}$.

Esto significa que

$$[T]_{S'}^{S} = [[T(\mathbf{w}_1)]_{S'} \; [T(\mathbf{w}_{21})]_{S'} \; [T(\mathbf{w}_3)]_{S'}] = \begin{bmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

Ejercicios Propuestos :Transformaciones lineales

1. Analizar si las siguientes transformaciones de V a W son lineales o no

   (a) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $T(x, y, z) = (x, y)$

   (b) $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $T(x, y) = (x^2, y^2)$

   (c) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $T(x, y, z) = (0, y)$

   (d) $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $T(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$

   (e) $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, $T(x) = (x, \ldots, x)$

   (f) $T : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_1$, $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + a_2x$

   (g) $T : \mathcal{C}[0, 1] \to \mathcal{C}[0, 1]$, $T(f(x)) = f(x) + 1$

2. Si $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, está dada por $T(x, y) = (-x, -y)$; describir T geométricamente

3. Suponga que el vector $v = (x, y)$ en el plano XY se rota un ángulo θ en sentido antihorario, obteniéndose el vector $v' = (x', y')$.

   (a) Justificar que

   $$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

   La transformación lineal $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, definida por $T(x, y) = (x', y')$ se denomina transformación de rotación y la matriz

   $$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   se denomina matriz de rotación (asociada a la transformación T)

   (b) ¿Qué sucede con el vector $v = (-3, 4)$ si se le rota un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ en sentido antihorario?

4. Determinar la expresión del operador lineal $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, sabiendo que, para todo $v = (x, y)$, el segmento de recta determinado por v y $T(v) = (x', y')$ es horizontal y tiene su punto medio en la recta $y = x$. ¿Cuál es la imagen del eje Y por la transformación T?

5. Sea $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una transformación lineal. Responder con verdadero o falso

   (a) Si $v \in V$ es tal que $T(v) = 0$, entonces $v = 0$

   (b) Si $T(w) = T(u) + T(v)$, entonces $w = u + v$

   (c) Si v es combinación lineal de $u_1, \ldots, u_m$, entonces $T(v)$ es combinación lineal de $T(u_1), \ldots, T(u_m)$

6. Proporcionar un ejemplo de una transformación lineal $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tal que

   (a) Si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces el conjunto $\{T(u_1), \ldots, T(u_m)\}$ es L.I

   (b) Si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces el conjunto $\{T(u_1), \ldots, T(u_m)\}$ es L.D

7. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$T(u) = \text{Proyección ortogonal de } u \text{ sobre } v = (-2, 1, 3).$$

   (a) Hallar una fórmula para T.

   (b) Encontrar una base para el núcleo de T y una base para la imagen de T.

8. Considere $\mathcal{M}_{3\times 3}$, el espacio de matrices 3×3 y sea la aplicación

$$T : \mathcal{M}_{3\times 3} \longrightarrow \mathcal{M}_{3\times 3}$$

   definida por

$$T(A) = A + A^t, \text{ donde } A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$$

   (a) Demuestre que T es una transformación lineal.

   (b) Halle el núcleo de T.

9. Sea $\mathcal{M} : x - y - z = 0$,un plano en $\mathbb{R}^3$.Si p es un punto de $\mathbb{R}^3$, el simétrico de p respecto al plano $\mathcal{M}$ es el punto $p\prime \in \mathbb{R}^3$ tal que, el segmento $\overline{pp\prime}$ interseca perpendicularmente al plano $\mathcal{M}$ en el punto Q (Q es el,punto medio de $\overline{pp\prime}$).Sea

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

   la transformación lineal definida por

$$\begin{aligned} T(p) &= p\prime \; (p' \text{ es simétrico de } p \text{ respecto a } \mathcal{M}) \\ T(p) &= p \text{ si } p \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

   (a) Halle la matriz que representa a T.

   (b) Determinar el núcleo de T.

2.5 Valores y Vectores Propio

En la sección anterior vimos que cada transformación lineal T de un espacio de dimensión finita $n \geq 1$ se puede representar por medio de una matriz A de orden n, la cual permite conocer propiedades de la transformación T, por ejemplo, es claro que T es invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$. Si la matriz A tiene un aspecto sencillo es muy fácil obtener información de T a partir de ella. La forma más simple que puede tener una matriz es la forma diagonal. En este capítulo estudiaremos criterios para diagonalizar matrices.

2.5.1 Valores y Vectores Propio

Definición 2.27 *Sea $T : V \to V$ una transformación de un K-espacio V, un escalar $a \in K$ se dice que es un* valor propio *de la transformación T si existe un vector no nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda . v$. En tal caso se dice que v es un* vector propio *de T perteneciente al valor propio a. Nótese que un vector propio solo puede ser asociado a un solo valor propio.*

Ejemplo 2.81 *Para la transformación lineal $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definida por $T(x,y) = (2x, 3y)$, $\lambda = 2$ es un valor propio con vector propio $(6,0)$; $\lambda = 3$ es también un valor propio de T con vector propio $(0, -2)$.*

Definición 2.28 *Sea $T : V \to V$ una transformación lineal y $a \in K$, el conjunto*

$$E_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda . v\}$$

es un subespacio de V; nótese que $E_\lambda \neq 0$ si y solo si E_λ es un valor propio de T, en tal caso E_λ se denomina el espacio propio *de T correspondiente al valor propio λ.*

Ejemplo 2.82 *Sea D el operador derivación definido sobre el espacio de funciones reales cuyas derivadas de cualquier orden existen, y sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $E(\lambda) = \{c\, e^{a.x} \mid c \in \mathbb{R}\}$.*

Ejemplo 2.83 *Existen transformaciones lineales sin valores propios, es decir, $E(\lambda) = 0$, para cada $\lambda \in K$. En efecto, la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por*

$$T(x,y) = (y, -x)$$

no tiene valores propios.

Proposición 2.14 *Sea $T : V \to V$ una transformación lineal de un espacio V. Sean $a_1, \ldots, a_r$ valores propios diferentes con vectores propios $v_1, \ldots, v_r$, respectivamente. Entonces $v_1, \ldots, v_r$ son $L.I.$ En particular, si V es de dimensión finita $n \geq 1$, entonces T tiene a lo sumo n valores propios diferentes. Si T tiene exactamente n valores propios diferentes, entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V.*

Demostración. Ejercicio.

El recíproco de la proposición anterior no es siempre cierto, por ejemplo, si $T = I_V$, cualquier base de V pertenece a 1, que es el único valor propio de I_V.

Ejemplo 2.84 *Sea $K[x]$ el conjunto de polinomios con coeficientes en el cuerpo K, y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Entonces para cada polinomio $p(x) \in K[x]$ se tiene que $p(T)$ es una transformación lineal de V en V, además si $a \in K$ es un valor propio de T con vector propio v, entonces $p(\lambda)$ es un valor propio de $p(T)$ con vector propio v. En tal caso, $E(\lambda) \subseteq N(p(T))$ si a es raíz de $p(x)$, y $E(\lambda) \subseteq \mathrm{Im}(p(T))$ si λ no es* raíz *de $p(x)$.*

2.5.2 Polinomio Característico

En la seción anterior definimos la teoría de determinantes para matrices con entradas en un cuerpo, sin embargo la invertibilidad de los elementos del cuerpo no fue usada en la construcción. Esto indica que se puede desarrollar la teoría de determinantes para matrices con entradas en un anillo conmutativo, por ejemplo, con entradas polinómicas. Esta observación nos permite definir un invariante muy importante de una transformación lineal de un espacio de dimensión finita: su polinomio característico. Comencemos por definir el polinomio característico de una matriz cuadrada.

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada de orden $n \geq 1$ sobre un cuerpo K. Se define el *polinomio característico* de A por

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Nótese que efectivamente $p_A(x) \in K[x]$. Se puede probar facilmente que para $p_A(x)$ se tienen las siguientes propiedades:

a) $p_A(x)$ es un polinomio de grado n.

b) Siendo $p_A(x) = p_0 + p_1x + \cdots + p_{n-1}x^{n-1} + p_nx^n$, entonces se tiene que $p_0 = (-1)^n \det(A)$, $p_{n-1} = -(a_{11} + \cdots + a_{nn})$ y $p_n = 1$.

c) Matrices similares tienen el mismo polinomio característico. El recíproco de esta afirmación no es siempre cierto, como lo ilustran las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal de un espacio V de dimensión finita $n \geq 1$. Entonces se define el polinimo característico de T como el polinomio característico de la matriz de T en cualquier base, y se denota por $p_T(x)$. En otras palabras, el polinomio característico de T es un invariante de T que no depende de la base elegida en V, y se tiene que $p_T(x) = p_A(x)$, donde $A = m_X(T)$ y X es cualquier base de V.

El polinomio característico es un instrumento para determinar los valores propios de una transformación lineal.

Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal de un espacio V de dimensión finita $n \geq 1$ y sea $\mathbf{a} \in \mathbf{K}$. Entonces, a es un valor propio de T si y solo si a es raíz del polinomio característico de T, es decir, $p_T(a) = 0$.

Insistimos en que este resultado es válido para valores $\mathbf{a} \in \mathbf{K}$. Podría ocurrir que las raíces del polinomio característico no pertenecieran al cuerpo K, por ejemplo, en el caso en que K sea el cuerpo de números reales y todas las raíces de $p_T(x)$ fueran complejas , entonces no tendríamos valores propios.

Un cuerpo K se dice *algebraicamente cerrado* si todas las raíces de todos sus polinomios pertenecen a K, por ejemplo, el cuerpo $\mathbf{C}$ de números complejos es algebraicamente cerrado, en cambio, el cuerpo $\mathbb{R}$ de números reales no lo es.

Corolario 2.10 *Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal del K-espacio V de dimensión finita $n \geq 1$. Entonces. T tiene n valores propios (no necesariamente diferentes) correspondientes a las n raíces de su polinomio característico.*

Sea A una matriz cuadrada de orden $n \geq 1$, un elemento $\lambda \in K$ se dice que es un valor propio de A si existe una matriz columna no nula $u = (u_1, \ldots , u_n)^T \in K^n$ tal que $Au = \lambda.u$. La teoría de valores y vectores propios para matrices está relacionada de manera obvia con la correspondiente teoría para transformaciones lineales.

Corolario 2.11 *Sea $T : V \to V$ una transformación lineal de un K-espacio V de dimensión finita $n \geq 1$. Sea $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V , $A = m_\beta(T)$ y $\lambda \in K$. Entonces, λ es un valor propio de T si y solo si λ es un valor propio de A. Mas exactamente, $v = u_1 . v_1 + \cdots + u_n . v_n$ es un vector propio de T perteneciente al valor propio a si y solo si $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$ es un vector propio de A perteneciente al valor propio λ.*

2.5.3 Matrices Diagonalizables

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden $n \geq 1$. Se dice que A es una matriz diagonal si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal de un espacio V de dimensión finita $n \geq 1$. Se dice que T es diagonalizable si existe una base β en V tal que es una matriz diagonal. Una matriz A de orden $n \geq 1$ se dice que es diagonalizable si A es similar a una matriz diagonal. Teniendo en cuenta que matrices que representen la misma transformación lineal son similares, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.15 *Sea $T : V \to V$ una transformación lineal de un espacio V de dimensión finita $n \geq 1$ y sea β una base cualquiera de V. Entonces, T es diagonalizable si y solo si $m_X(T)$ es diagonalizable.*

En términos de vectores propios se tiene el siguiente criterio obvio de diagonalización.

Teorema 2.12 *Sea $T : V \to V$ una transformación lineal de un espacio V de dimensión finita $n \geq 1$. T es diagonalizable si y solo si V tiene una base constituida por vectores propios.*

Según la proposición y el corolario se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.13 *Sea A una matriz cuadrada de orden $n \geq 1$. Entonces,*
a) A es diagonalizable si y solo si A tiene n vectores propios L I.
b) Si A tiene n valores propios diferentes, entonces A es diagonalizable.

El recíproco de la parte b) del corolario anterior no siempre se cumple: la matriz idéntica E es diagonal, sin embargo sus n valores propios coinciden y son iguales a 1.

Proposición 2.16 *Sea $T : V \to V$ una transformación lineal de un espacio V de dimensión finita $n \geq 1$. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ los valores propios diferentes para T, $1 \leq r \leq n$, y $E(\lambda_1), \ldots, E(\lambda_r)$ lossubespacios propios correspondientes. Entonces, la suma $E(\lambda_1) + \cdots + E(\lambda_r)$ es directa. En consecuencia,*
$\dim(E(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_r)) = \dim(E(\lambda_1)) + \cdots + \dim(E(\lambda_r))$.

Podemos probar ahora un criterio de diagonalización en términos del polinomio característico y de los espacios propios.

Teorema 2.14 *Sea $T : V \to V$ una transformación lineal de un espacio V de dimensión finita $n \geq 1$. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ los valores propios diferentes para T, $1 \leq r \leq n$, y $E(\lambda_1), \ldots, E(\lambda_r)$ los subespacios propios correspondientes. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*
a) T es diagonalizable.
b) El polinomio característico de T es de la forma

$$p_T(x) = (x - \lambda_1)^{d_1} \cdots (x - \lambda_r)^{d_r},$$

donde $d_i = \dim(E(\lambda_i))$, $1 \leq i \leq r$.
c) $\dim(V) = \dim(E(\lambda_1)) + \cdots + \dim(E(\lambda_r))$.
d) $V = E(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_r)$.

Ejemplo 2.85 *Encontrar los valores y vectores propios de la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución

$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{bmatrix}$

$p(\lambda) = (1-\lambda)\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 5-\lambda \end{bmatrix} - 2\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5-\lambda \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$
$p(\lambda) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 4\right) - 2\left((5-\lambda) - 4\right) - (-4 + 4\lambda)$
$p(\lambda) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 4\right) - 2(1-\lambda) + 4(1-\lambda)$
$p(\lambda) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 4\right) + 2(1-\lambda)$
$p(\lambda) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 6\right)$
$p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$
Por lo tanto los valores propios de A son $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3$
Para determinar un vector propio $v = (x, y, z)$ asociado con $\lambda = 1$, formamos el sistema

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \; F_1 \longleftrightarrow F_2 \; \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \; F_3 \longleftrightarrow F_3 - 4F_1 \; \sim$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \Longrightarrow x = y - z = y - 2y = -y \\ 2y - z = 0 \Longrightarrow z = 2y \end{cases}$$

Los vectores propios buscados son :$v = (x, y, z) = (-y, y, 2y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Análogamente, los vectores propios $v = (x, y, z)$ correspondientes a $\lambda = 2$ se obtienen a partir de

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \; F_1 \longleftrightarrow F_2 \; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \; \begin{matrix} F_2 \longleftrightarrow F_2 - F_1 \\ F_4 \longleftrightarrow F_4 - 4F_1 \end{matrix} \; \sim$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \Longrightarrow x = 2y - 4y = -2y \\ 4y - z = 0 \Longrightarrow z = 4y \end{cases}$$

Los vectores buscados son :$v = (x, y, z) = (-2y, y, 4y) = y(-2, 1, 4)$, $y \in \mathbb{R}$.
Los vectores propios $v = (x, y, z)$ correspondientes a $\lambda = 3$ se obtienen a partir de

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[F_4 \longleftrightarrow F_4 - 4F_1]{F_2 \longleftrightarrow F_2 + 2F_1}$$
$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 \longleftrightarrow F_3 + 2F_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = 0 \Longrightarrow x = 3y - 4y = -y \\ \quad -4y + z = 0 \Longrightarrow z = 4y \end{cases}$$
Los vectores propios buscados son :$v = (x, y, z) = (-y, y, 4y) = y\,(-1, 1, 4)\,,\ y \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.86 *Sea* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una transformación lineal con matriz asociada A tal que*

$$|A - \lambda I| = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$$

(a)*Hallar los valores propios* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *de* A.

(b)*Sean* $(1,0,1)\,,(1,2,1)\,,(-1,2,0)$ *vectores propios correspondientes a* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *respectivamente con* $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.*Calcular* $T\,(1,0,1)\,,T\,(1,2,1)$ *y* $T\,(-1,2,0)$.

(c)*Hallar* $T(x, y, z)$*, para todo* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Solución

(a)Sea $p(\lambda) = |A - \lambda I| = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$

$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$ son los valores propios de A.

(b)Los vectores propios $T\,(v) = \lambda v$

$T(v_1) = T\,(1,0,1) = -1\,(1,0,1) = (-1,0,-1)$

$T(v_2) = T\,(1,2,1) = 1\,(1,2,1) = (1,2,1)$

$T(v_3) = T\,(-1,2,0) = 2\,(-1,2,0) = (-2,4,0)$

(c)Sea $(x, y, z) = \alpha\,(1,0,1) + \beta\,(1,2,1) + \gamma\,(-1,2,0)$

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta - \gamma \\ y = 2\beta + 2\gamma \\ z = \alpha + \beta \end{cases} \Longrightarrow \alpha = 2z - \tfrac{1}{2}y - x, \beta = x + \tfrac{1}{2}y - z, \gamma = z - x$$

Luego,

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= \alpha T\,(1,0,1) + \beta T\,(1,2,1) + \gamma T\,(-1,2,0) \\ T(x,y,z) &= \alpha\,(-1,0,-1) + \beta\,(1,2,1) + \gamma\,(-2,4,0) \\ T(x,y,z) &= (\beta - \alpha - 2\gamma, 2\beta + 4\gamma, \beta - \alpha) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$T(x, y, z = (4x + y - 5z, y - 2x + 2z, 2x + y - 3z)$$

Ejercicios Propuestos:Valores propios y vectores propios

1. Hallar el polinomio característico, los valores propios y vectores propios de cada matriz :

$$(a)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (b)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (c)\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(d)\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \qquad (e)\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} ; bc \neq 0$$

2. Suponga que la matriz A tiene valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_k$.

   (a) Demostrar que los valores propios de A^t son $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_k$.

   (b) Demostrar que los valores propios de αA son $\alpha\lambda_1, \alpha\lambda_2, \alpha\lambda_3, \cdots, \alpha\,\lambda_k$.

   (c) Demostrar que A^{-1}existe si y sólo si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_k \neq 0$.

   (d) Si A^{-1}existe, demostrar que los valores propios de A^{-1} son $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1}, \cdots, \lambda_k^{-1}$.

   (e) Demostrar que la matriz $A - \alpha I$ tiene valores propios $\lambda_1 - \alpha, \lambda_2 - \alpha, \lambda_3 - \alpha, \cdots, \lambda_k - \alpha$.

   (f) Demostrar que si A es una matriz diagonal, entonces los valores propios de A son las componentes de la diagonal principal.

3. Si A y B son matrices semejantes de orden $n \times n$.Demostrar que A y B tienen los mismos valores propios.

   Nota. Dos matrices A y B de orden $n \times n$, son **semejantes** si existe una matriz invertible C de orden $n \times n$ tal que

$$B = C^{-1}AC.$$

4. Determinar si las siguientes matrices son diagonalizables. En caso afirmativo encontrar una matriz que diagonalice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Determinar los valores y vectores propios del operador derivación sobre el espacio n-polinomios. ¿ Es este operador diagonalizable ?

6. Sean A y B matrices cuadradas de orden $n \geq 1$ y $m \geq 1$, respectivamente. Demostra que el polinomio característico de la matriz

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

   es $p_A(x)p_B(x)$.

7. Sea A una matriz de orden $n \geq 1$ y $p(x)$ un polinomio cualquiera. Demostrar que si A es diagonalizable, entonces $p(A)$ es diagonalizable.

8. Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden $n \geq 1$ tal que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ para cada $1 \leq i \leq n$. Demostrar que 1 es un valor propio de A.

Funciones vectoriales de variables real

2.6 Introducción

Este capítulo está compuesto por cuatro secciones, en la primera introducimos el concepto de bola abierta y a partir de él llegamos a los conceptos básicos de la topología en $\mathbb{R}^n$ como son: punto interior, conjunto abierto, punto adherente, punto de acumulación,conjunto cerrado, frontera de un conjunto y conjunto acotado.

En la segunda sección introducimos la noción de curva en $\mathbb{R}^n$, y los conceptos de continuidad, derivabilidad e integración de funciones vectoriales. Presentamos los teoremas fundamentales del cálculo para funciones vectoriales e introducimos los conceptos de vector tangente y vector normal. Finalmente introducimos el concepto de plano osculador.

En la tercera sección introducimos el concepto de longitud de arco, función longitud de arco y curvatura de una curva.

La cuarta sección está dedicada a presentar un ejemplo de las ideas anteriores a la teoría newtoniana de la gravitación: A partir de las leyes de Newton mostramos cómo se deducen las leyes de Kepler.

Cada sección tiene un grupo de problemas que el estudiante debe resolver. Adicionalmente hemos incluído en cada sección

2.7 Topologia en $\mathbb{R}^n$

Uno de los conceptos que podemos iniciar es la definición de bola abierta. Concretamente tenemos:

Definición 2.29 *El conjunto*

$$B(Q,r) = \{P \in R^n \ , \ \|P - Q\| < r\}$$

se llama la bola abierta de centro Q y radio r.

Con la ayuda de la definición anterior introducimos los siguientes conceptos:

Definición 2.30 *1.* ***Punto interior:*** *Sea S un subconjunto de $\mathbf{R}^n$. Un vector $P \in S$ se dice un punto interior a S si existe una $B(P,r)$ tal que $B(P,r) \subset S$.*

El conjunto de puntos interiores es denotado por S°. Es claro que $S^\circ \subset S$.

Por ejemplo, todos los puntos de la bola $B(P,r)$ son puntos interiores de ella.

2. ***Conjunto abierto:*** *Un conjunto $S \subset \mathbf{R}^n$ se llama un conjunto abierto de $\mathbf{R}^n$ si todos sus puntos son puntos interiores. Esto es $S = S^\circ$.*

Por ejemplo, la bola $B(Q,r)$ es un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$, todo el espacio $\mathbf{R}^n$ es un conjunto abierto de $\mathbf{R}^n$, así mismo, el conjunto Φ es un conjunto abierto de $\mathbf{R}^n$.

Es importante observar que estamos diciendo que un conjunto es abierto de otro. Esto quiere decir que un conjunto A puede ser un abierto de Q más no un abierto de P. Por ejemplo: el intervalo $(0,1)$ es un abierto de $\mathbf{R}$ más no es un abierto de $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$.

3. ***Punto adherente:*** *Decimos que $P \in \mathbf{R}^n$ es un* punto adherente *de un subconjunto S de $\mathbf{R}^n$ si para todo $\varepsilon > 0$, $B(P,\varepsilon) \cap S \neq \Phi$.*

El conjunto de puntos adherentes de S lo denotamos con $\overline{S}$.

Es claro, de la definición de punto adherente, que $S \subset \overline{S}$. Por ejemplo, el conjunto $\{Z \in \mathbf{R}^n, \|Z - X\| \leq r\}$ está formado por puntos adherentes de $B(Q,r)$.

Dentro del conjunto de puntos adherentes están los puntos de acumulación.

4. ***Puntos de acumulación:*** *Decimos que $P \in \mathbf{R}^n$ es un* punto de acumulación *de un subconjunto S de $\mathbf{R}^n$ si para todo $\varepsilon > 0$, $B(P,\varepsilon)$ posee infinitos puntos de S.*

Los puntos de acumulación de S son denotados con S'. Es claro que $S' \subset \overline{S}$.

Por ejemplo, el conjunto $\left\{\frac{1}{n}, n = 1, 2...\right\} \subset \mathbf{R}$ tiene como único punto de acumulación al punto 0.

5. ***Conjuntos Cerrados:*** *Un conjunto S de $\mathbf{R}^n$ se dice cerrado en $\mathbf{R}^n$ si $S = \overline{S}$.*

El ejemplo más clásico de conjunto cerrado es

$$\overline{B(Q,r)} = \{P \in \mathbf{R}^n, \|Q - P\| \leq r\}.$$

Debemos advertir que los conceptos cerrado y abierto no son contrarios. Un conjunto puede ser al mismo tiempo abierto y cerrado, por ejemplo $\mathbf{R}^n$ y Φ son conjuntos abiertos y cerrados, o también, no ser ni abierto ni cerrado, por ejemplo el conjunto de números racionales $\mathbf{Q}$ no es ni abierto ni cerrado de $\mathbf{R}$.

Nota: *Cuando una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de $\mathbf{R}^n$ contiene al mismo $\mathbf{R}^n$, al conjunto Φ y satisface que* ***la unión arbitraria y la interesción finita de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$****, decimos que dicha colección es una topología. Por ejemplo, la familia de conjuntos abiertos de $\mathbf{R}^n$ es una topología de él.*

6. ***Punto frontera:*** *Sea S un subconjunto de $\mathbf{R}^n$. Decimos que $Z \in \mathbf{R}^n$ es un punto* frontera *de S si toda bola abierta $B(Z,\varepsilon)$ contiene puntos de S y puntos de S^c.*

El conjunto de todos los puntos frontera de S lo denotamos cómo ∂S. Es claro que $\partial S = \overline{S} \cap \overline{(\mathbf{R}^n - S)}$. Por lo tanto ∂S es cerrado de $\mathbf{R}^n$.

Por ejemplo,

$$\partial B(Q,r) = \{P \in \mathbf{R}^n, \|P - Q\| = r\}$$

7. ***Conjunto acotado:*** *Un subconjunto S de $\mathbf{R}^n$ se dice* acotado *si existe $B(\Theta, r)$ tal que $S \subseteq B(\Theta, r)$.*

Los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que son cerrados y acotados se llaman *compactos*. Estos tienen la propiedad que todo subconjunto infinito de ellos poseé un punto de acumulación en él. La prueba de esta importante propiedad se sale de los propósitos de este curso. Ella se basa en un célebre resultado conocido como el Teorema de Heine.Borel que afirma:

Definición 2.31 *Si $\mathcal{C}$ es una colección de conjuntos abiertos $\mathbb{R}^n$ tal que su unión contiene a un subconjunto C de $\mathbb{R}^n$ que es cerrado y acotado, entonses existe una subcolección finita de $\mathcal{C}$ cuya unión también contiene a A.*

Para su prueba referimos al lector a cualquier texto de Análisis Matemático.

La definición de límite para funciones de varias variables es similar a aquélla para funciones de una variable, pero con la salvedad de que los entornos tomados alrededor del punto donde queremos encontrar el límite serán ahora discos o bolas, de acuerdo a la dimensión del espacio de las variables.

Mientras que en funciones de una variable hay sólo dos maneras de acercarnos a un punto del dominio —por derecha y por izquierda—, en funciones de varias variables hay infinitos caminos para acercarse a un punto del plano de las variables. Para que exista un límite, el mismo debe ser igual para todos los posibles acercamientos.

Igual que en funciones de una variable, para que una función de varias variables sea continua en un punto debe estar definida en el mismo, debe tener límite en él y el valor de la función debe ser igual al del límite. Si una función es combinación de otras continuas, será también continua excepto en aquellos puntos donde no esté definida.

Ejemplo 2.87 *Conjuntos abiertos. Mostrar que el siguiente conjunto del plano es abierto:*

$$\Omega = \{(x, y) \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$$

Solución. En el plano, un conjunto es abierto cuando dado un elemento $(x; y)$ perteneciente al conjunto es posible trazar un disco alrededor de dicho punto tal que todos los elementos del disco pertenecen al conjunto.

En el caso de nuestro problema, tenemos que cualquier punto $(x_0; y_0)$ perteneciente al conjunto estará a una cierta distancia de cada uno de los cuatro bordes, no pudiendo estar exactamente sobre los mismos dado que las desigualdades son estrictas.

En esas condiciones, para seleccionar un δ tal que todos los puntos en un disco de radio δ pertenezcan al conjunto, basta tomar:

$\delta < \text{mín}\{(x_0 + 1), (1 - x_0), (y_0 + 1), (1 - y_0)\}$

Esto es, δ debe ser menor que la menor distancia del punto a los bordes. De esa manera, tendremos que para cualquier punto $(x; y)$ del disco se verificará:

$$\begin{array}{l} x > x_0 \Rightarrow x - x_0 < \delta < 1 - x_0 \Rightarrow x < 1 \\ x < x_0 \Rightarrow x_0 - x < \delta < x_0 + 1 \Rightarrow x > -1 \\ > y_0 \Rightarrow y - y_0 < \delta < 1 - y_0 \Rightarrow y < 1 \\ y < y_0 \Rightarrow y_0 - y < \delta < y_0 + 1 \Rightarrow y > -1 \end{array}$$

Esto es, cualquier punto dentro del disco cumplirán las cuatro condiciones requeridas para que pertenezca al conjunto Ω. Por ende, el conjunto es abierto.

2.8 Función vectorial de variable real

Definición 2.32 *Una aplicación* $F : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$*, donde* I *es un subconjunto de* $\mathbf{R}$ *se llama una función vectorial. Puesto que para cada* $t \in I$, $F(t) \in \mathbf{R}^n$*, entonces*

$$F(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t))$$

donde las funciones coordenadas o componentes de F *son*

$$\begin{array}{rl} f_k : & I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ & x \longmapsto f_k(t). \qquad , k = 1, 2, ...n \end{array}$$

es la $k-$*ésima componente o coordenada del vector* $F(t)$.

Así, para todo $t \in \mathcal{D}(F) := \bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{D}(f_k)$

Las funciones $f_k : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $k = 1, 2, ...n$ son las funciones componentes de F. Es por ello que todas las propiedades de F, como veremos, reposan en las propiedades de las funciones componentes.

Ejemplo 2.88 *1.* $F(t) = P + tA$, $t \in \mathbf{R}$, P *y* A *vectores fijos de* $\mathbf{R}^n$ *es una función vectorial que representa una recta en* $\mathbf{R}^n$.

2. $F(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbf{R}$ *es una función vectorial que representa una circunferencia de centro cero y radio uno en* $\mathbf{R}^2$.

3. $F(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbf{R}$ *es una función vectorial que representa una parábola*

La imagen $F(I)$ es un subconjunto de $\mathbf{R}^n$ y determina una *curva* en él. Es claro que una curva en $\mathbf{R}^n$ puede estár determinada por diferentes funciones vectoriales, por ejemplo: $\alpha(t) = (t, t^2)$, $t \geq 0$ y $\beta(t) = (t^2, t^4)$, definen la misma curva en $\mathbf{R}^2$. No obstante, aunque es un abuso, para simplificar la escritura, *identificaremos* la curva con la función que la define.

Operaciónes algebraicas con funciones vectoriales:

Definición 2.33 *Si F y G son funciones vectoriales con rangos en $\mathbf{R}^n$ y dominios $\mathcal{D}(F)$ y $\mathcal{D}(G)$ en $\mathbf{R}$, entonces $F + G, F.G$ y $F \times G$ son funciones con dominio $\mathcal{D}(F) \cap \mathcal{D}(G)$ y reglas de correspondencias :*

1. $(F \pm G)(t) = F(t) \pm G(t)$

2. $(F.G)(t) = F(t).G(t)$

3. $(F \times G)(t) = F(t) \times G(t)$ *(definidas solamente si $n = 3$).*

Si F es una función vectorial y $\phi : \mathcal{D}(\phi) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es una función real de variable real, entonces la función $\phi.F$ está definida como sigue :

$(\phi F)(t) = \phi(t)F(t)$, $\mathcal{D}_{\phi F} = \mathcal{D}(\phi) \cap \mathcal{D}(F)$.

Además, si la función vectorial $F : \mathcal{D}(F) \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ y la función escalar $\phi : \mathcal{D}(\phi) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tales que $\mathcal{R}(\phi) \cap \mathcal{D}(F) \neq \emptyset$, donde

$$\mathcal{D}_{F\circ\phi} = \{t \in \mathcal{D}(\phi) : \phi(t) \in \mathcal{D}(F)\}$$

y regla de correspondencia

$$(F \circ \phi)(t) = F(\phi(t)),$$

se denomina composición de las funciones ϕ y F en ese orden.

2.9 Límite de funciones vectoriales

En esta sección extenderemos el concepto de límite de una función real de una variable real a las funciones vectoriales de una variable real.Las funciones F que se consideran en esta sección tienen dominio $\mathcal{D}(F) \subset \mathbf{R}$ y rango $ran(F) \subset \mathbf{R}^n$.

Cualquier límite debe definirse en puntos de acumulación del dominio de una función.

Un *punto de acumulación* t_0 de $\mathcal{D}(F)$ es un punto de $\mathbf{R}^n$ (que puede pertenecer o no a $\mathcal{D}(F)$) que tiene la propiedad de que tan cerca como se quiera de él, deben existir puntos $t\,(\neq t_0)$ de $\mathcal{D}(F)$.

En cada uno de los límites siguientes, será un punto de acumulación de los dominios correspondientes.

La siguiente definición es la formalización del hecho intuitivo: el límite de F en t_0 es L, si como sea que se tome $t \in \mathcal{D}(F)$ "muy cerca" de t_0, entonces $F(t)$ estará "muy cerca" de L.

Definición 2.34 *Sea $F : \mathcal{D}(F) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$una función vectorial y sea $t_0 \in \mathcal{D}(F)$.Entonces se dice que el,vector $L = (l_1, l_2, l_3, \cdots, l_n)$ es el límite de la función F en t_0 y escribimos si dado $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que siempre que t_0 esté en el dominio de F y*

$$0 < |t - t_0| < \delta$$

entonces

$$\|F(t) - L\| < \varepsilon.$$

Al aplicar la definición para demostrar que $\lim_{t\to t_0} F(t) = L$, *debemos demostrar que:*

$$Dado\ \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : t \in \mathcal{D}(F)\ \wedge\ 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|f(t) - L\| < \varepsilon.$$

Lo que se requiere es mostrar cómo se elegirá $\delta > 0$ para un $\varepsilon > 0$ dado cualquiera. Es decir, debemos dar una regla

para la selección de $\delta > 0$ en términos de $\varepsilon > 0$.

La desigualdad $0 < |t - t_0|$ en la definición implica que $t \neq t_0$. Nosotros excluimos $t = t_0$ para ser capaces de considerar el límite de F en t_0 cuando no está definido $F(t_0)$.

En esta sección, siempre que hablemos del límite de una función F en t_0, supondremos que t_0 es un punto de acumulación del dominio de F. Si t_0 no es un punto de acumulación del dominio de F, entonces el límite de f en t_0 no es único.

Observación.

Así pues, decimos que $\lim_{t\to t_0} F(t) = L$ si para cada vecindad $B(L;\in)$ de L hay una vecindad $B'(t_0;\delta) = B(t_0;\delta) \setminus \{t_0\}$ de t_0 tal que $F(t_0) \in B(L;\in)$; siempre que $t \in \mathcal{D}(F) \cap B'(t_0;\delta)$.

Teorema 2.15 *Sea* $F = (f_1, f_2, ..., f_n) : \mathcal{D}(F) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ *una función vectorial ,y* t_0 *es un punto de acumulación de* $\mathcal{D}(F)$. *Entonces* $\lim_{t\to t_0} F(t) = L = (l_1, l_2, l_3, \cdots, l_n) \in \mathbf{R}^n$ *si y sólo si* $\lim_{t\to t_0} f_k(t) = l_k$ *,para* $k = 1, 2, ...n$.

Demostración.

Si $\lim_{t\to t_0} F(t) = L = (l_1, l_2, l_3, \cdots, l_n)$ entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que siempre que t esté en el dominio de F y

$$0 < |t - t_0| < \delta$$

entonces

$$\|F(t) - L\| = \|(f_1(t) - l_1, f_2(t) - l_2, \cdots, f_n(t) - l_n)\| < \varepsilon.$$

Como: $|f_k(t) - l_k| \leq \|F(t) - L\|$, para $k = 1, 2, ...n$.

De donde,$|f_k(t) - l_k| < \varepsilon$,para $k = 1, 2, ...n$, siempre que t esté en el dominio de f_k. Esto muestra que $\lim_{t\to t_0} F(t) = L$ implica $\lim_{t\to t_0} f_k(t) = l_k$, para $k = 1, 2, ...n$.

Recíprocamente, si $\lim_{t\to t_0} f_k(t) = l_k$,para $k = 1, 2, ...n$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta_k > 0$ tal que siempre que t esté en el dominio de f_k y

$$\|F(t) - L\| = \|(f_1(t) - l_1, f_2(t) - l_2, \cdots, f_n(t) - l_n)\| < \varepsilon.$$

$$0 < |t - t_0| < \delta_k$$

se tiene $|f_k(t) - l_k| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$,para $k = 1, 2, ...n$.

Tomando $\delta = \min\{\delta_k : k = 1, 2, ...n\}$ tenemos, si $0 < |t - t_0| < \delta_k$, siempre que t esté en el dominio de F :

$$\|F(t) - L\| = \sqrt{\left[\sum_{k=1}^{n} (f_k(t) - l_k)^2\right]} < \sqrt{\left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2\right]} < \varepsilon,$$

es decir, que $\lim_{t\to t_0} F(t) = L$.

El teorema anterior nos dice que si existe el límite:

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = \left(\lim_{t \to t_0} f_1(t), \lim_{t \to t_0} f_2(t), \cdots, \lim_{t \to t_0} f_n(t) \right).$$

El límite de una función vectorial F puede, por tanto, calcularse con los límites de funciones reales componentes f_k ,para $k = 1, 2, ...n$.Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \lim_{t \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{sen} t, \tan t, t) &= \left(\lim_{t \to \frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} t, \lim_{t \to \frac{\pi}{4}} \tan t, \lim_{t \to \frac{\pi}{4}} t \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Usando el teorema anterior, podemos probar fácilmente el siguiente teorema.

Teorema 2.16 *Si F y G son funciones vectoriales de una variable real tales que* $\lim_{t \to t_0} F(t) = L$ *y* $\lim_{t \to t_0} G(t) = M$
y t_0 es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(F) \cap \mathcal{D}(G)$,entonces
1. $\lim_{t \to t_0} [F(t) + G(t)] = \lim_{t \to t_0} F(t) + . \lim_{t \to t_0} G(t) = L + M,$
2. $\lim_{t \to t_0} [F(t) \cdot G(t)] = \lim_{t \to t_0} F(t) \cdot \lim_{t \to t_0} G(t) = L \cdot M,$ *y*
3. $\lim_{t \to t_0} [F(t) \times G(t)] = \lim_{t \to t_0} F(t) \times \lim_{t \to t_0} G(t) = L \times M$ *(solamente para $\mathbf{R}^3$).*

Demostración.
Probaremos (1).Las pruebas de las otras propiedades son análogas. Si $F = (f_1, f_2, ..., f_n)$ y $G = (g_1, g_2, ..., g_n)$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \to t_0} [F(t) + G(t)] &= \lim_{t \to t_0} [(f_1 + g_1)(t), (f_2 + g_2)(t), ..., (f_n + g_n)(t))] \\ &= \left(\lim_{t \to t_0} f_1(t) + \lim_{t \to t_0} g(t), \lim_{t \to t_0} f_2(t) + \lim_{t \to t_0} g_2(t), \cdots, \lim_{t \to t_0} f_n(t) + \lim_{t \to t_0} g_n(t) \right) \\ &= \left(\lim_{t \to t_0} f_1(t), \lim_{t \to t_0} f_2(t), \cdots, \lim_{t \to t_0} f_n(t) \right) + \left(\lim_{t \to t_0} g(t), \lim_{t \to t_0} g_2(t), \cdots, \lim_{t \to t_0} g_n(t) \right) \\ \lim_{t \to t_0} [F(t) + G(t)] &= \lim_{t \to t_0} F(t) + \lim_{t \to t_0} G(t). \end{aligned}$$

Teorema 2.17 *Si F es una función vectorial y ϕ es una función real de variable real y* $\lim_{t \to t_0} F(t) = L$ *y* $\lim_{t \to t_0} \phi(t) = r$
y t_0 es un punto de acumulación de $\mathcal{D}_{\phi F}$,entonces

$$\lim_{t \to t_0} \phi F(t) = \lim_{t \to t_0} \phi(t) \lim_{t \to t_0} G(t) = rL$$

Demostración.
Si $F = (f_1, f_2, ..., f_n)$,entonces

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to t_0} \phi F(t) &= \left(\lim_{t\to t_0} (\phi f_1)(t), \lim_{t\to t_0} (\phi f_2)(t), \cdots, \lim_{t\to t_0} (\phi f_n)(t) \right) \\
&= \left(\lim_{t\to t_0} \phi(t) \lim_{t\to t_0} f_1(t), \lim_{t\to t_0} \phi(t) \lim_{t\to t_0} f_2(t), \cdots, \lim_{t\to t_0} \phi(t) \lim_{t\to t_0} f_n(t) \right) \\
&= \lim_{t\to t_0} \phi(t) \left(\lim_{t\to t_0} f_1(t), \lim_{t\to t_0} f_2(t), \cdots, \lim_{t\to t_0} f_n(t) \right) \\
\lim_{t\to t_0} [F(t) + G(t)] &= \lim_{t\to t_0} \phi(t) \lim_{t\to t_0} G(t).
\end{aligned}
$$

2.10 Continuidad de funciones vectoriales

Definición 2.35 *Sea $F : \mathcal{D}(F) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función vectorial. Decimos que F es continua en t_0 de $\mathcal{D}(F)$, si*

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0).$$

Es equivalente a decir: dado $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que siempre que $t \in \mathcal{D}(F)$ y

$$|t - t_0| < \delta$$

entonces

$$\|F(t) - F(t_0)\| < \varepsilon.$$

Si t_0 no es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(F)$, entonces F es continua en t_0,pues en este caso hay un $\delta > 0$ tal que t_0 es el único punto de $\mathcal{D}(F) \cap]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$, y entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene $\|F(t) - F(t_0)\| < \varepsilon$

siempre que $t_0 \in \mathcal{D}(F) \cap]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$.

Si t_0 es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(F)$, entonces la definición es equivalente a :

F es continua en el punto t_0 de $\mathcal{D}(F)$, *si*

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0).$$

El siguiente teorema es inmediato.

Teorema 2.18 *Sea $F = (f_1, f_2, ..., f_n) : \mathcal{D}(F) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ una función vectorial Entonces F es continua en a si y sólo si las funciones componentes $f_1, f_2, ..., f_n$ de F son continuas en t_0.*

Demostración.

Si t_0 no es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(F)$, entonces la prueba es inmediata, basta ver que $\mathcal{D}(f_k) = \mathcal{D}(F)$, para $k = 1, 2, ...n$.

Supongamos que t_0 es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(F)$,según teorema,

$\lim\limits_{t \to t_0} F(t) = F(t_0)$ si y sólo si $\lim\limits_{t \to t_0} f_k(t) = f_k(t_0)$,para $k = 1, 2, ...n$.Lo que completa la prueba.

Teorema 2.19 *Sean $F : \mathcal{D}(F) \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ y $G : \mathcal{D}(G) \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ dos funciones continuas en el número $t_0 \in \mathcal{D}(F) \cap \mathcal{D}(G)$, entonces:*

1.$F + G$ es continua en t_0.

2.$F \cdot G$ es continua en t_0.

3.$F \times G$ es continua en t_0.

4.Si ϕ es una función escalar, ϕFes continua en $t_0 \in \mathcal{D}_{\phi F}$.

Demostración.

Probaremos la primera afirmación, dejando el resto como un ejercicio para el estudiante. Ya que F y G son continuas en t_0, tenemos

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0)$$

y

$$\lim_{t \to t_0} G(t) = G(t_0).$$

Si t_0 no es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(F + G)$, entonces $F + G$ es continuas en t_0.

Si t_0 es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(F + G)$,entonces t_0 es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(F)$ y $\mathcal{D}(G)$, Por lo tanto, por teorema,

$$\lim_{t\to t_0}[F(t)+G(t)]=\lim_{t\to t_0}F(t)+\lim_{t\to t_0}G(t)=F(t_0)+G(t_0).$$

Lo cual demuestra que $F+G$ es continua en t_0.

Ejemplo 2.89 *Sea*

$$f(t)=\begin{cases}\left(e^{t-1},\frac{e^{t-1}-1}{t-1},\frac{2\ln t}{t-1}\right) & t = 1\\ (1,1,2) & t\neq 1\end{cases}$$

Analizar si f es continua en $t=1$.

Solución.
Como $\lim_{t\to 1} e^{t-1}=1$
$\lim_{t\to 1}\frac{e^{t-1}-1}{t-1}=1, \lim_{t\to 1}\frac{2\ln t}{t-1}=2$
$\lim_{t\to 1}\left(e^{t-1},\frac{e^{t-1}-1}{t-1},\frac{2\ln t}{t-1}\right)=f(1).$
Por tanto , f es continua en 1.

Ejemplo 2.90 *Sea la función f definida por*

$$f\ (t)=\begin{cases}\left(1-t,\dfrac{\ln(1+t)}{t},-e^{-\,t}\right) & ,\ t\ >\ 0\\ (1,1,-1) & ,\ t\ =\ 0\\ \left(\sqrt{1-t^2},\dfrac{\sin^2 t}{t^2},\dfrac{2t}{1-e^{2t}}\right) & ,\ t\ <\ 0\end{cases}$$

Analizar si f es continua en $t=0$.

Solución.
Para $t>0$:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+} f\ (t) &= (\lim_{t\to 0}1-t,\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t},\lim_{t\to 0}-e^{-\,t})\\ &= (1,\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+t},-1)=(1,1,-1)\end{aligned}$$

Para $t<0$:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^-} f\ (t) &= (\lim_{t\to 0^-}\sqrt{1-t^2},\lim_{t\to 0^-}\frac{\sin^2 t}{t},\lim_{t\to 0^-}\frac{2t}{1-e^{-2t}})\\ &= (1,1,\lim_{t\to -0^-}\frac{2}{2e^{-2t}})=(1,1,2)\end{aligned}$$

Puesto que $\lim_{t\to 0^+} f\ (t)\neq\lim_{t\to 0^-} f\ (t)$ entonces no existe $\lim_{t\to 0} f\,(t)$ Por tanto, f no es continua en $t=0$

2.11 Curvas en $\mathbf{R}^n$

Definición 2.36 *Sea $\alpha : I\subset R\to\mathbf{R}^n$ una función vectorial continua, definida en un intervalo I como dominio. A α se le llama* camino *o* trayectoria *o* parametrización.
La imagen del camino α se le llama curva en $\mathbf{R}^n$.Es decir,

Denotaremos la curva por $\mathcal{C}$ y diremos que $\mathcal{C}$ es decrita por α

$$\mathcal{C} := \{P \in \mathbf{R}^n : P = \alpha(t), t \in \mathbf{I}\}$$

Así, $\mathcal{C} : P = \alpha(t), t \in \mathbf{I}$ *Se le llama* ecuación vectorial *de la curva* $\mathcal{C}$.

En la gráfica de la curva descrita por una función continua, no puede tener interrupciones.

Ecuación paramétricas de $\mathcal{C}$

Sea $\mathcal{C}$ la curva descrita por el camino $\alpha : I \subset R \to \mathbf{R}^n$.

Si $P = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathcal{C} : P = \alpha(t), t \in \mathbf{I}$

y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ entonces $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \cdots, \alpha_n(t))$, de donde

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x_1 = \alpha_1(t) \\ x_2 = \alpha_2(t) \\ \quad\vdots \\ x_n = \alpha_n(t) \end{cases} , \quad t \in \mathbf{I}$$

Se le llama *ecuaciones paramétricas* de la curva $\mathcal{C}$.

Observación 2.7 *1. La curva en el espacio puede ser expresada o bien por una ecuación vectorial, o bien por las ecuaciones paramétricas, o bien mediante dos ecuaciones.*

2. Si eliminamos el parámetro t de las ecuaciones

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} , \quad t \in \mathbf{I};$$

y obtenemos dos ecuaciones que relacionan x, y, z, realizamos el paso de las curvas dadas por el procedimiento paramétrico a las curvas expresadas por la intersección de dos superficies. Recíprocamente, si ponemos $x = \phi(t)$ (donde ϕ es una función arbitraria) y hallamos y, z como funciones de t de las ecuaciones

$$\mathcal{C} : \begin{cases} E(\phi(t), y, z) = 0 \\ F(\phi(t), y, z) = 0 \end{cases} ,$$

realizamos el paso de las curvas expresadas por la intersección de dos superficies a las curvas dadas por el procedimiento paramétrico.

Ejemplo 2.91 *Sea*

$$F(t) = \left(t, \sqrt{1-2t}, \int_0^t e^{\operatorname{sen} u} du\right).$$

Verificar que $F(t)$ es una parametrización de alguna curva Γ.

Solución.

$$f_1(t) = t, \ f_2(t) = \sqrt{1-2t}, \ f_3(t) = \int_0^t e^{\operatorname{sen} u} du$$

son continuas en $I = \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$.

Observación 2.8 ***Proyección de una curva sobre un plano coordenado***

Sea la curva C, definida por el sistema de ecuaciones

$$C:\begin{cases} E(x,y,z)=0\cdots(1) \\ F(x,y,z)=0\cdots(2) \end{cases}$$

La superficie cilíndrica de generatrices paralelas al eje Z, y de directriz C, se llama cilindro proyectante con el plano de C sobre el plano XY. Su ecuación es de tipo $f(x,y)=0$ y se obtiene eliminando z entre (1) y (2).

La intersección del cilindro proyectante con el plano de ecuación $z=0$, es la proyección de C sobre el plano XY. Osea,

$$\Gamma = Proy_{XY}C:\begin{cases} f(x,y)=0\cdots(1) \\ z=0\cdots(2) \end{cases}$$

Para obtener la proyección de C sobre el plano YZ hay que eliminar x entre (1) y (2) y cortar el cilindro proyectante con el plano de ecuación $x=0$.

Ejemplo 2.92 *Sea la curva*

$$\Gamma:\begin{cases} (x-2)^2+(y-2)^2+z^2 &= 8 \\ x+y &= 4 \end{cases}$$

a)Hallar la proyección ortogonal C de la curva Γ sobre el plano XZ.

b)Parametrizar la curva Γ en función de ***senos*** *y* ***cosenos****, indicando el dominio del parámetro.*

Solución.

Sean las ecuaciones:

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y-2)^2+z^2=8.........(1) \\ x+y=4.........................\ .(2) \end{cases}$$

Proyectando la curva Γ sobre el plano XZ : Eliminando la variable "y".

Despejando la variable "y" de la ecuación (1) :

$$y=4-x.......(3)$$

Reemplazando (3) en (1) :

$(x-2)^2+[(4-x)-2]^2+z^2=8 \implies 2(x-2)^2+z^2=8$

$C := \Pr oy_{XZ}\Gamma$:

$$\begin{cases} \dfrac{(x-2)^2}{2^2}+\dfrac{z^2}{(2\sqrt{2})^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$$

Parametrizando la elipse:

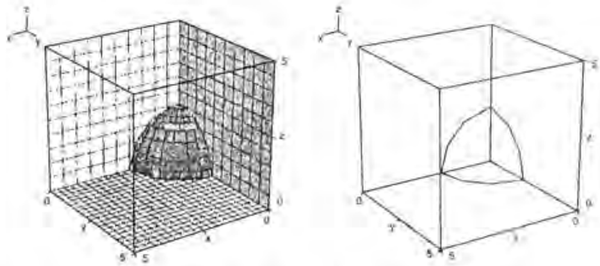
$\begin{cases} x=2+2\cos t \\ z=2\sqrt{2}\sin t;\ t\in[0,2\pi] \end{cases}$, "y" en (3) : $y=4-(2+2\cos t)=2-2\cos t$

Así, la parametrización pedida es:

$$C:\begin{cases} x=2+2\cos t \\ y=2-2\cos t \\ z=2\sqrt{2}\sin t \end{cases};\quad t\in[0,2\pi]$$

Ejemplo 2.93 *Hacer un esbozo de la curva* $-:\begin{cases} xyz &= 0 \\ x^2+y^2+z^2 &= 4 \end{cases}$; $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0.$

Solución.
Es inmediata.



Ejemplo 2.94 *Dada la curva* $C : \begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= a^2 \\ x^2+y^2-ay &= 0 \end{cases}, a>0.$
Parametrizar la curva C en términos de senos y cosenos, indicando su dominio.

Solución.
Sean las ecuaciones:

$$C : \begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= a^2 \\ x^2+(y-\frac{a}{2})^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 \end{cases}, z>0, a>0$$

Parametrizando la curva C:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2}\cos t \\ y = \frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sin t \end{cases}, t\in[0,2\pi]$$

Luego, en $x^2+y^2+z^2=a^2$:
$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\cos t\right)^2-\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sin t\ \right)^2}$
$z=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}\cos^2 t-\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}\sin t-\frac{a^2}{4}\sin^2 t}$
$z=\sqrt{\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}\sin t}$
Así, la parametrización pedida es:
Sea $\alpha(t)=\left(\frac{a}{2}\cos t, \frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sin t, \sqrt{\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}\sin t}\right), t\in[0,2\pi]$.

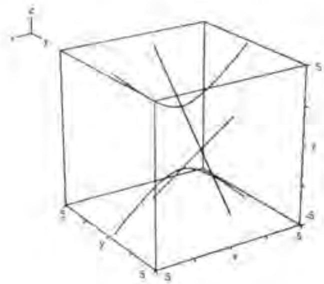
Ejemplo 2.95 (a)*Dada la superficie* $S : x^2+(y-2)^2=z^2$.
Hacer un esbozo de la gráfica de S, mostrando las trazas y las secciones transversales correspondientes a los planos: $z=2$, $z=-2$.
(b)*Parametrizar la curva C intersección de la superficie S con el plano $y=3z$, $z\geq 0$.*

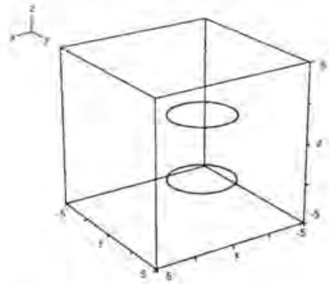
Solución.
(a)Sea $S : x^2+(y-2)^2=z^2$.
Intesecciones de S con los planos coordenados:
Al plano YZ, $T_{YZ}:=S\cap P_{YZ}:\begin{cases} (y-2)^2= &= z^2 \\ x &= 0 \end{cases} \Longrightarrow T_{YZ}:\begin{cases} y-z &= \pm 2 \\ x &= 0 \end{cases}$
Al plano XZ, $T_{XZ}:=S\cap P_{XZ}:\begin{cases} z^2-x^2 &= 4 \\ y &= 0 \end{cases}$ Hipérbola con eje focal Z
Al plano XY, $T_{XY}:=S\cap P_{XY}: z=0$,se tiene el vértice del cono $V=(0,2,0)$.

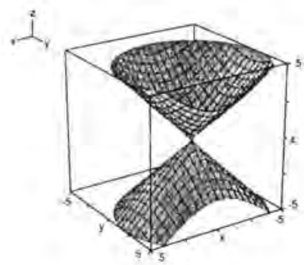
Secciones transversales planas :

Al plano $z=2$, $\Gamma_2 := \mathcal{S} \cap \mathcal{P}_{z=2}$: $\left\{ \begin{array}{rcl} x^2+(y-2)^2 & = & 4 \\ z & = & 2 \end{array} \right.$

Al plano $z=-2$, $\Gamma_{-2} := \mathcal{S} \cap \mathcal{P}_{z=-2}$: $\left\{ \begin{array}{rcl} x^2+(y-2)^2 & = & 4 \\ z & = & -2 \end{array} \right.$







(b)Sea $\mathcal{C}$: $\left\{ \begin{array}{rcl} x^2+(y-2)^2 & = & z^2 \\ y & = & 3z \end{array} \right.$

Proyectando sobre el plano XY.

$$x^2+(y-2)^2 = \frac{y^2}{9} \Longrightarrow x^2 + \frac{8y^2}{9} - 4y + 4 = 0 \Longrightarrow x^2 + \frac{8}{9}\left(y^2 - \frac{9}{2}y + \frac{81}{16}\right) = -4 + \frac{9}{2}$$

$$\Longrightarrow x^2 + \frac{8}{9}\left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{\left(y-\frac{9}{2}\right)^2}{\frac{9}{16}} = 1.$$

Parametrizando la curva $\mathcal{C}$:

$$\left\{ \begin{array}{r} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ y = \dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4}\sin t \end{array} \right. , \ t \in [0, 2\pi]$$

Luego, en $z = \dfrac{y}{3}$: $z = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\sin t$

Así, la parametrización pedida es:

Sea $\alpha(t) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4}\sin t, \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\sin t\right)$, $t \in [0, 2\pi]$.

2.12 Derivabilidad de funciones vectoriales

Definición 2.37 *Sea* $F : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ *una función vectorial.* La derivada de F *es una función vectorial* F' *cuya regla de correspondencia es*

$$F'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} \qquad (*)$$

y cuyo dominio es el intervalo I *para lo cual el límite existe.*

Si t es un número en el dominio de F', entonces se dice que F es diferenciable en t.

Interpretación geométrica de la derivada de una función vectorial

Sea C una curva descrita por la función F cuyo dominio es I. Si t y $t+h$ están en I $(h \neq 0)$.

Si los puntos P y Q tienen vectores de posición $F(t)$ y $F(t+h)$, entonces $\overrightarrow{PQ}$ representa al vector $F(t+h) - F(t)$ que, por tanto, se considera como un vector secante. Si $h > 0$, el vector $\frac{1}{h}\,[F(t+h) - F(t)]$ es un vector paralelo al vector $F(t+h) - F(t)$ que tienen la misma dirección.

Si F es diferenciable en t y $F(t) \neq 0$, entonces la dirección del vector $\frac{1}{h}\,[F(t+h) - F(t)]$ se aproxima a la dirección del vector $F'(t)$ cuando h tiende a cero, puesto que

$$F'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h}.$$

Teorema 2.20 *Sea* $F = (f_1, f_2, ..., f_n) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ *una función vectorial. Entonces* F *es derivable en* $a \in I$ *si y sólo si las funciones componentes* $f_1, f_2, ..., f_n$ *de* F *son derivables en* a.

Demostración.

$$\begin{aligned} F'(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} \\ F'(t) &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h}, \frac{f_2(t+h) - f_2(t)}{h}, \cdots, \frac{f_n(t+h) - f_n(t)}{h} \right). \end{aligned}$$

existe si y sólo si cada uno de los límites

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_k(t+h) - f_k(t)}{h}$$

$(k = 1, 2, \cdots, n)$ existe.

Esto prueba que el dominio de F' es la intersección de $f_1', f_2', ..., f_n'$.Si $t \in \mathcal{D}(F')$ entonces,usando nuevamente el teorema

concluimos que

$$F'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), ..., f_n'(t));$$

es decir, que

$$F' = (f_1', f_2', ..., f_n').$$

Recta tangente a una curva

Sea $C : P = \alpha(t), t \in \mathbf{I}$ una curva descrita por una función $\alpha : I \subset R \to \mathbf{R}^n$ y si $\alpha'(t)$ existe y es distinta de cero, entonces $\alpha'(t)$ se le llama *vector tangente(o vector velocidad)* a la curva C en el punto $\alpha(t)$ .Además la recta $\mathcal{L}$ que pasa por $\alpha(t)$ y tiene por dirección el vector tangente $\alpha'(t)$ se llama *recta tangente a la curva* C en el punto $\alpha(t)$, cuya ecuación es dada por

$$\mathcal{L} : P = \alpha(t) + \lambda\alpha'(t), \lambda \in R.$$

Algunos teoremas sobre derivada

Definición 2.38 *1.Se dice que un afunción es difernciable en un punto si la derivada de la función existe en tal punto.*

2.La función F es diferenciable sobre el intervalo abierto $]a, b[$ si F es diferenciable en cada punto del intervalo $]a, b[$.

3.La función F es diferenciable sobre el intervalo $[a, b]$ si F es diferenciable en cada punto del intervalo $]a, b[$ y si existen las derivadas laterales en los puntos extremos:

$$F'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(a + h) - F(a)}{h}.$$

y

$$F'_-(b) = \lim_{h \to 0^-} \frac{F(b + h) - F(b)}{h}.$$

El siguiente teorema relaciona la continuidad y diferenciabilidad sobre un intervalo.

Teorema 2.21 *Si la función F es diferenciable sobre el intervalo I , entonces F es continua sobre I.*

Demostración.
Es una consecuencia inmediata de las definiciones de continuidad y diferenciabilidad sobre un intervalo.

Teorema 2.22 *La derivación de funciones vectoriales satisface las siguientes propiedades:*
1.$(F + G)' = F' + G'$.
2. $(\phi.F)' = \phi'.F + \phi.F'$, *con* $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.
3.$(F \cdot G)' = (F' \cdot G) + (F \cdot G')$.
4. $(F \times G)' = F' \times G + F \times G'$.
5.$(F \circ \phi)' = \phi'.F'(\phi)$, *con* $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Como consecuencia de la propiedad **3**. anterior tenemos el siguiente

Teorema 2.23 *Sea F una función vectorial definida en algún intervalo I. Si $\|F(t)\| = c$, para todo t, entonces*

$$F(t) \perp F'(t) = 0, \text{ para todo } t \in I.$$

Demostración.
Si $\|F(t)\| = c$, para todo $t \in I$,entonces $F(t) \cdot F(t) = c^2$.
Aplicando la derivada miembro a miembro:
$D_t\,(F(t) \cdot F(t)) = D_t\,(c^2)$, para todo $t \in I$
$F'(t) \cdot F(t) + F(t) \cdot F'(t) = 0$, para todo $t \in I$
$F'(t) \cdot F(t) = 0$, para todo $t \in I$
$F(t) \perp F'(t) = 0$, para todo $t \in I$.
El Teorema nos dice que el vector posición de la curva y su vecror tangente son perpendiculares para todo valor t.

Ejemplo 2.96 *Dada la curva* $\mathcal{C}:\begin{cases} z+x^2+y^2-3 &= 0 \\ 2x+2y+z-4 &= 0\end{cases}; z\geq 0.$

(a)Parametrizar , indicando el dominio de la parametrización.

(b)Las rectas tangentes a la curva $\mathcal{C}$ cortan al plano $\mathcal{P}: x-y=0$ en una curva $\mathcal{D}$. Hallar la parametrización para $\mathcal{D}$.

Solución

$(a)\mathcal{C}:\begin{cases} z+x^2+y^2-3 &= 0 \\ -2x-2y+4 &= z\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -2x-2y+4+x^2+y^2-3 &= 0 \\ 2x+2y+z-4 &= 0\end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2 &= 1 \\ 2x+2y+z+4 &= 0\end{cases}$

Parametrizando la curva $\mathcal{C}$:

$\begin{cases} x=1+\cos t \\ y=1+\sin t\end{cases}, t\in[0,2\pi]$

Luego, en $2x+2y+z=0$:

$z=-2x-2y+4=-2(1+\cos t)-2(1+\sin t)+4=-2\cos t-2\sin t$

Pero $z\geq 0 \Longrightarrow \cos t+\sin t\leq 0 \Longrightarrow t\in\left[\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$

Así, la parametrización pedida es:

Sea $\alpha(t)=(1+\cos t,1+\sin t,-2\cos t-2\sin t)$, $t\in\left[\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$.

(b)Como $\alpha'(t)=(-\sin t,\cos t,2\sin t-2\cos t)$

Sea la recta tangente a la curva $\mathcal{C}$ en en el punto $P=\alpha(t)$.

$\mathcal{L}:P=\alpha(t)+r\alpha\prime(t);r\in\mathbb{R}$

$\mathcal{L}:P=(1+\cos t,1+\sin t,-2\cos t-2\sin t)+r(-\sin t,\cos t,2\sin t-2\cos t);r\in\mathbb{R}$:

$\mathcal{L}:P=(\cos t-r\sin t+1,\sin t+r\cos t+1,2r\sin t-2r\cos t-2\sin t-2\cos t)\,;r\in\mathbb{R}$

$\mathcal{D}:=\mathcal{L}\cap\mathcal{P}:\cos t-r\sin t+1-(\sin t+r\cos t+1)=0$, de donde

$$r=\frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}$$

$$\mathcal{D}:\begin{cases} x=\cos t-\left(\frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}\right)\sin t+1 \\ y=\sin t+\left(\frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}\right)\cos t+1 \\ z=2\left(\frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}\right)(\sin t-\cos t)-2\sin t-2\cos t\end{cases} ;\ t\in\left]\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right[.$$

Ejemplo 2.97 *Sea $\mathcal{S}$ el paraboloide elíptico, en el primer octante, de ecuación*

$$z=x^2+y^2.$$

Sean $\mathcal{C}_1$, la intersección de $\mathcal{S}$ con el plano XZ ; $\mathcal{C}_2$ parte de la intersección de $\mathcal{S}$ con el plano YZ que está comprendida entre el ***origen de coordenadas*** *y el punto $A(0,2,4)$; y $\mathcal{C}_3$ el segmento de recta que une el punto A y el punto B, donde su* ***vector tangente*** *a $\mathcal{C}_2$,es paralelo al plano $\mathcal{P}: x-6y+z-1=0$.*

(a)Parametrizar cada una de las curvas $\mathcal{C}_1$,$\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$.

(b)Hallar una función $F(u)$ que parametrice a la curva $\mathcal{C}$ formada por la reunión de $\mathcal{C}_1$,$\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$.

Solución.

(a)Sea $\mathcal{C}_1$:=$\mathcal{S}\cap XZ:\begin{cases} z &= x^2 \\ y &= 0\end{cases}$

Parametrizando $\mathcal{C}_1$:

Sea $x=t$ entonces $z=t^2$.Así,

$$\mathcal{C}_1:F_1(t)=(t,0,t^2)\,;t\geq 0$$

Sea $C_2 := \mathcal{S} \cap YZ : \begin{cases} z &= y^2 \\ x &= 0 \end{cases}$

Parametrizando C_2 :

Sea $y = r$ entonces $z = r^2$. Así

$C_2 : F_2(t) = (0, r, r^2)$; $r \geq 0$

Como $(0,0,0) \in C_2$ entonces existe un $r_o \geq 0$ tal que $(0,0,0) = F_2(r_o) = (0, r_o, r_o^2)$, entonces $r_o = 0$ y también como $A(0,2,4) \in C_2$, existe un $r_1 \geq 0$ tal que $(0,2,4) = F_2(r_1) = (0, r_1, r_1^2)$, de donde $r_1 = 2$. Así,

$C_2 : F_2(r) = (0, r, r^2)$; $0 \leq r \leq 2$.

Para el segmento $C_3 := \overline{AB}$

Sea B el punto donde su vector tangente a C_2 es paralelo al plano $\mathcal{P} : x - 6y + z - 1 = 0$.

Es decir:$B = F_2(r_o) = (0, r_o, r_o^2) \in C_2$ tal que $F_2'(r_o) \perp N$, donde $N(1, -6, 1)$ es el vector normal del plano y $F_2'(r_o) = (0, 1, 2r_o)$.

Así $F_2'(r_o) \cdot N = 0 \iff (0, 1, 2r_o) \cdot (1, -6, 1) = 0$

$\implies -6 + 2r_o = 0 \implies r_o = 3$.

Por tanto, $B = F(r_o = 3) = (0, 3, 9)$

Así, $C_3 : P = A + s(B - A)$; $\quad 0 \leq s \leq 1$

$C_3 : P = (0,2,4) + s(0,1,5)$; $\quad 0 \leq s \leq 1$

$C_3 : P = (0, 2 + s, 4 + 5s)$; $\quad 0 \leq s \leq 1$

(b)Sea $C := C_1 \cup C_2 \cup C_3$ la curva descrita por la función vectorial:

$$F(u) =: \begin{cases} (-u, 0, u^2) & ; \quad u < 0 \\ (0, u, 2u^2) & ; \quad 0 \leq u \leq 2 \\ (0, u, 5u - 6) & ; \quad 2 \leq u \leq 3 \end{cases} .$$

2.13 Curvas parametrizadas por parametrizaciones regulares

La parametrización $\alpha : I \subset R \to \mathbf{R}^n$ es una *parametrización regular,* si α es de clase C^1(es decir, α es diferenciable en I y α' es continua en I),y $\alpha'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$.

Decimos que una curva C es regular en I, si *existe* una *parametrización regular* en I.

Decimos que una curva C es *regular a trozos* en el intervalo $I = [a; b]$, si $[a; b]$ puede descomponerse en un número finito de subintervalos en cada uno de los cúales el camino es regular.

Ejemplo 2.98 *Para la curva Γ, parametrizada por la función $F(t) = (t^2, 2t, t^2)$, $t \in \mathbf{R}$.*

a)Hallar la ecuación de la recta tangente a Γ en cada punto $F(t)$.

b)Hallar los valores de t que tienen la siguiente propiedad: "La recta tangente a Γ en el punto $F(t)$ es tangente a la esfera

$$\mathcal{E} : x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

Solución.

$a)$la ecuación de la recta tangente a Γ en el punto F(t) es

$$\mathcal{L} : P = (t^2, 2t, t^2) + r(t, 1, t), r \in \mathbf{R}.$$

$b)$Para que una recta sea tangente a la esfera, la distancia del centro $C(0,0,0)$ de la esfera a la recta $\mathcal{L}$ debe ser igual al radio de la esfera.Así, tenemos la ecuación:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\|F(t) \times F'(t)\|}{\|F'(t)\|} \iff \frac{\|(t^2, 2t, t^2) \times (t, 1, , t)\|}{\|(t, 1, , t)\|} = 2 \\ &\implies \frac{\|(t^2, 0, -t^2)\|}{\|(t, 1, t)\|} = 2 \implies \frac{t^2\sqrt{2}}{\sqrt{2t^2 + 1}} = 2 \implies t^4 - 4t^2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación se encuentra $t = \pm\sqrt{2+\sqrt{6}}$.

Ejemplo 2.99 *Sea la curva* $\Gamma : \begin{cases} x^2+y^2+4z^2-4z-9=0 \\ y=2z+1 \end{cases}, z \geq 0$

a)Hallar una parametrización para Γ *en términos de senos y cosenos, indicando el dominio del parámetro.*

b)Analizar si la parametrización hallada en la parte (a), es regular.

c)Sean $P = \left(2, \sqrt{2}+1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \in \Gamma$ *y* Q *el punto de intersección de la recta tangente a* Γ *en* P *con el plano* $x=0$*.Parametrizar el segmento* $\overline{PQ}$*.*

Solución.

$a)\Gamma : \begin{cases} x^2+y^2+4z^2-4z-9=0 \\ y=2z+1 \end{cases}, z \geq 0$

$\Gamma : \begin{cases} x^2+(2z+1)^2+4z^2-4z-9=0 \\ y=2z+1 \end{cases}, z \geq 0$

$\Gamma : \begin{cases} \dfrac{x^2}{8}+z^2=1 \\ y=2z+1 \end{cases}, z \geq 0\,.$

Parametrizando $\mathcal{C}$:

Usando como parámetro el ángulo central t. Sean :

$$x = 2\sqrt{2}\cos t\ ,\ z = \sin t$$

Reemplazando en el plano $y = 2z+1$, se tiene $y = 2\sin t + 1$

Así,

$$\Gamma : \begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t \\ z = \sin t \\ y = 2\sin t + 1 \end{cases} ;\ t \in [0,\pi]$$

$b)\Gamma : F(t) = \left(2\sqrt{2}\cos t, 2\sin t+1, \sin t,\right)\ t \in [0,\pi]\,.$

Existe $F'(t) = \left(-2\sqrt{2}\sin t, 2\cos t, \cos t\right)\ t \in \,]0,\pi[$ y además F' es continua $]0,\pi[$.

$\|F'(t)\| = \left\|\left(-2\sqrt{2}\sin t, 2\cos t, \cos t\right)\right\| = \sqrt{5\cos^2 t + 8\sin^2 t} = \sqrt{1+3\sin^2 t} \neq 0$, entonces $F'(t) \neq 0$. Por tanto, F es regular.

$c)$Sea $\Gamma : F(t) = \left(2\sqrt{2}\cos t, 2\sin t+1, \sin t,\right), t \in [0,\pi]$

$\Longrightarrow F'(t) = \left(-2\sqrt{2}\sin t, 2\cos t, \cos t\right)\ ;\ t \in \,]0,\pi[\,.$

Sea $\mathcal{L}$ la recta tangente a la curva Γ en en el punto $F(t)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &: P = F(t) + rF'(t)\ ; r \in \mathbf{R} \\ \mathcal{L} &: P = \left(2\sqrt{2}\cos t, 2\sin t+1, \sin t,\right) + r\left(-2\sqrt{2}\sin t, 2\cos t, \cos t\right)\ ; r \in \mathbf{R} \\ \mathcal{L} &: P = \left(2\left(\cos t\right)\sqrt{2} - 2\sqrt{2}r\sin t, 2\sin t + 1 + 2r\cos t, \sin t + r\cos t\right)\ ; r \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Como el punto $P = \left(2, \sqrt{2}+1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \in \Gamma$ entonces existe un $t \in \,]0,\pi[$ tal que

$$\left(2, \sqrt{2}+1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = F(t) = \left(2\sqrt{2}\cos t, 2\sin t + 1, \sin t\right),$$

de donde $t = \dfrac{\pi}{4}$.

Así, $F(\frac{\pi}{4})=\left(2,\sqrt{2}+1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $F'(\frac{\pi}{4})=\left(-2,\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$\mathcal{L}:P=\left(2,\sqrt{2}+1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+r\left(-2,\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(-2r+2,\sqrt{2}+r\sqrt{2}+1,\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}r\sqrt{2}\right)$,

$\{Q\}:=\mathcal{L}\cap XY: x=-2r+2=0$,de donde $r=1$. Así, $Q=\left(0,2\sqrt{2}+1,\sqrt{2}\right)$.

Parametrizando el segmento $\overline{PQ}$

Así, $\overline{PQ}:P^*=P+t\,(Q-P)\,;\quad 0\leq t\leq 1$

$\overline{PQ}:P^*=\left(2,\sqrt{2}+1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+t\left[(0,2\sqrt{2}+1,\sqrt{2})-\left(2,\sqrt{2}+1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right];\ 0\leq t\leq 1:$

$\overline{PQ}:P^*=\left(2,\sqrt{2}+1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+t\left(-2,\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right);\ 0\leq t\leq 1$

$\overline{PQ}:P^*=\left(\ 2-2t,\quad \sqrt{2}+1+t\sqrt{2},\quad \dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\ \right);\ 0\leq t\leq 1.$

Ejemplo 2.100 *Sea la curva*

$$\Gamma:\begin{cases} x^2+\dfrac{y^2}{4} &= 1\\ x^2+\dfrac{z^2}{4} &= 1\end{cases},yz\geq 0$$

(a)*Parametrizar la curva* Γ *en términos de senos y cosenos, indicando su dominio del parámetro.*

(b)*Hallar la recta tangente* $\mathcal{L}$ *a la curva* Γ *que interseca al plano* $\mathcal{P}:3x+2y-2z=0$ *en el punto* $Q=(0,2,2)$.

Solución.

(a)Parametrizando Γ :

Usando como parámetro el ángulo central t. Sean :

$$x=\cos t\ ,\ y=2\sin t,\ \ t\in[0,2\pi]\,.$$

Reemplazando en la superficie $x^2+\dfrac{z^2}{4}=1$, se tiene $z=2\sin t$, puesto que $yz\geq 0$.

Así,

$$\Gamma:\begin{cases} x=\cos t\\ y=2\sin t\\ y=2\sin t\end{cases},\ t\in[0,2\pi]\,.$$

$(b)\,\Gamma:F(t)=(\cos t,2\sin t,2\sin t,),\ t\in[0,2\pi]$.

Sea $\mathcal{L}$ la recta tangente a la curva Γ en en el punto $F(t)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\ &:\ P=F(t)+rF'(t)\ ;r\in\mathbf{R}\\ \mathcal{L}\ &:\ P=(\cos t,2\sin t,2\sin t)+r\,(-\sin t,2\cos t,2\cos t)\ \ ;r\in\mathbf{R}\\ \mathcal{L}\ &:\ P=(\cos t-r\sin t,2\sin t+2r\cos t,2\sin t+2r\cos t)\ \ ;r\in\mathbf{R}\end{aligned}$$

$\{Q\}:=\mathcal{L}\cap\mathcal{P}$:

Sea $Q\in\mathcal{L}$, entonces existe un $t\in[0,2\pi]$ tal que

$$Q=(\cos t-r\sin t,2\sin t+2r\cos t,2\sin t+2r\cos t)$$

y

$Q \in \mathcal{P} : 3(\cos t - r\sin t) + 2(2\sin t + 2r\cos t) - 2(2\sin t + 2r\cos t) = 0,$

$$\cos t - r\sin t = 0 \Longrightarrow r = \frac{\cos t}{\sin t},\ t \neq 0, \pi.$$

Luego,

$$(0,2,2) = \left(0, \frac{2}{\sin t}, \frac{2}{\sin t}\right) \Longrightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

Así, $\mathcal{L} : P = (0,2,2) + r(-1,0,0)\ ; r \in \mathbf{R}.$

Ejemplo 2.101 *Sea Γ la intersección de la superficie $\mathcal{S} : (4-y)^2 = z^2 + 4x^2, 0 \leq y \leq 4$ con los planos coordenados en el primer octante trazada en sentido antihorario vista desde el origen de coordenadas. Parametrizar Γ.*

Solución.

la curva pedida es, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$,

Sea $\Gamma_1 := \mathcal{S} \cap XY : \begin{cases} y &= 4-2x \\ z &= 0 \end{cases}\ ; 0 \leq y \leq 4,$

de esta manera una parametrización de ella es

Parametrizando Γ_1 :

Sea $y = 4t$ .Así,

$$\mathcal{C}_1 : F_1(t) = (2-2t, 4t, 0)\,; 0 \leq t \leq 1$$

Sea $\Gamma_2 := \mathcal{S} \cap YZ : \begin{cases} z &= 4-y \\ x &= 0 \end{cases}\ ; x \geq 0, y \geq 0$

Parametrizando Γ_2 :

Sea $y = 4t$ entonces $z = 4 - 4t$.

Así,

$$\mathcal{C}_2 : F_2(t) = (0, 4t, 4-4t)\ ;\ 0 \leq t \leq 1.$$

Sea $\Gamma_3 := \mathcal{S} \cap XZ : \begin{cases} 16 &= z^2 + 4x^2 \\ y &= 0 \end{cases}\ ; x \geq 0, z \geq 0$

Parametrizando Γ_3 :

Sea $x = t$ entonces $z = \sqrt{16-4t^2}$; $16 - 4t^2 \geq 0$ de donde $0 \leq t \leq 2$

Así,

$$\Gamma_3 : F_3(t) = \left(t, 0, \sqrt{16-4t^2}\right)\ ;\ 0 \leq t \leq 2.$$

Luego, la curva pedida es, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$,

$$F(u) =: \begin{cases} (2-2u, 4u, 0) & ; \quad 0 \leq u \leq 1 \\ (0, 4u-4), -4u+8) & ; \quad 1 \leq u \leq 2 \\ \left(u-2, 0, 2\sqrt{u(-u+4)}\right) & ; \quad 2 \leq u \leq 4 \end{cases},.$$

Ejemplo 2.102 *Sea la curva C que resulta de intersecar las superficies*

$$\mathcal{S}_1 : x^2 + y^2 - z = 7, \quad \mathcal{S}_2 : x^2 + 8x - 2y + z = 0.$$

Hallar una parametrización de C, en términos de senos y cosenos.

Solución

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 - z = 7 \cdots (1) \\ x^2 + 8x - 2y + z = 0 \cdots (2) \end{cases}$$

Sumando (1) y (2) resulta $2x^2 + 8x + y^2 - 2y = 7$. Completando cuadrado resulta $2\left(x^2 + 4x + 4\right) + \left(y^2 - 2y + 1\right) = 7 + 8 + 1$

$2\,(x+2)^2+(y-1)^2=16$

$\dfrac{(x+2)^2}{(2\sqrt{2})^2}+\dfrac{(y-1)^2}{(4)^2}=1\cdots(3)\,.$

Por tanto,

$$\Gamma:\begin{cases}\dfrac{(x+2)^2}{(2\sqrt{2})^2}+\dfrac{(y-1)^2}{(4)^2}=1\\ z=x^2+y^2+7\end{cases}$$

Parametrizando la curva Γ :

$$\Gamma:\begin{cases}x=-2+2\sqrt{2}\cos t\\ y=1+4\sin t\\ z=\left(-2+2\sqrt{2}\cos t\right)^2+(1+4\sin t)^2+7\end{cases},t\in[0,2\pi]$$

$$\Gamma:\begin{cases}x=-2+2\sqrt{2}\cos t\\ y=1+4\sin t\\ z=8\cos^2 t-8\sqrt{2}\cos t+16\sin^2 t+8\sin t+5\end{cases},t\in[0,2\pi]\,.$$

Ejemplo 2.103 *Dada la curva* $\Gamma:\alpha(t)=\left(t^2\cos(\frac{1}{t^2}),t^2\operatorname{sen}(\frac{1}{t^2}),\frac{t^2}{2}\right)$, $0<t<1$.

(a)*Demostrar que la curva* Γ *está contenida en un cono elíptico(Ecuación de la forma :* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ *).*

(b)*Analizar si* α *es regular.*

Solución.

(a)Sea $P(x,y,z)$ un punto arbitrario de Γ, entonces

$x=t^2\cos(\frac{1}{t^2}),\ y=t^2\operatorname{sen}(\frac{1}{t^2}),\ z=\dfrac{t^2}{2}.$

Luego,

$x^2+y^2=t^4\cos^2(\frac{1}{t^2})+t^4\operatorname{sen}^2(\frac{1}{t^2})=t^4$, pero: $t^2=2z$

Por tanto, $P((x,y,z)\in\mathcal{S}:x^2+y^2=4z^2.$

$(b)\ \alpha'(t)=\left(2t\cos\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}\operatorname{sen}\frac{1}{t^2},2t\operatorname{sen}\frac{1}{t^2}-\dfrac{2}{t}\cos\frac{1}{t^2},t\right)$, para todo $t\in\,]0,1[$.

Es claro que

$\alpha'(t)=\left(2t\cos\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}\operatorname{sen}\frac{1}{t^2},2t\operatorname{sen}\frac{1}{t^2}-\dfrac{2}{t}\cos\frac{1}{t^2},t\right)$

es una función continua en$]0,1[$.

Como $\|\alpha'(t)\|=\sqrt{4t^2+\dfrac{4}{t^2}+t^2}\neq 0$, para todo $t\in\,]0,1[$.Entonces $\alpha'(t)\neq 0$, para todo $t\in\,]0,1[$.

Por tanto es α es regular.

Ejemplo 2.104 *Sea la curva* $\Gamma:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1\\ z=2by\end{cases}$

donde a *y* b *son constantes positivas tales que* $a+b=2$.

Hallar los valores de a *y* b *para los cuales la proyección de* Γ *sobre el plano* XY *sea una circunferencia* C

Solución.

$$\Gamma:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1\\ z=2by\end{cases}$$

Reescribiendo el sistema anterior se obtiene

$$\Gamma : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + 4y^2 = 1 \\ z = 2by \end{cases}$$

$$C : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

C es una circunferencia si $a = \frac{1}{2}$. Luego, $b = \frac{3}{2}$.

Ejemplo 2.105 *la curva* Γ: $\begin{cases} \left(x^2+y^2+z^2-2\right)^2 & = & 4(1-z^2) \\ y & = & \sqrt{3}x \end{cases}, x \geq 0.$

(a)*Probar que la curva* Γ *se puede representar por :*

$$\begin{cases} z^2 + 4x^2 - 4x & = & 0 \\ y & = & \sqrt{3}x \end{cases}, x \geq 0.$$

(b)*Parametrizar la curva* Γ *en términos de senos y cosenos, indicando su dominio del parámetro.*

(c)*Analizar si la parametrización hallada en (b) es regular.*

Solución.

(a)Sean las ecuaciones: $\begin{cases} \left(x^2+y^2+z^2-2\right)^2 & = & 4(1-z^2)........(1) \\ y & = & \sqrt{3}x............(2) \end{cases}, x \geq 0.$

Proyectando la curva Γ sobre el plano XZ : Eliminando la variable "y".

Reemplazando (2) en (1) :

$\left(x^2 + \left(\sqrt{3}x\right)^2 + z^2 - 2\right)^2 = 4(1-z^2) \implies$

$\left(4x^2 + z^2 - 2\right)^2 = 4 - 4z^2 \implies$

$16x^4 - 16x^2 - 4z^2 + z^4 + 8x^2z^2 + 4 = 4 - 4z^2 \implies$

$16x^4 - 16x^2 + z^4 + 8x^2z^2 = 0 \implies$

$z^4 + 8x^2z^2 + 16x^4 = 16x^2 \implies$

$\left(z^2 + 4x^2\right)^2 = 16x^2 \implies z^2 + 4x^2 = 4x, x \geq 0.$

Así,

$$\Gamma: \begin{cases} z^2 + 4x^2 - 4x & = & 0 \\ y & = & \sqrt{3}x \end{cases}, x \geq 0.$$

(b)

$$\Gamma: \begin{cases} \dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + z^2 = 1 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases}, x \geq 0.$$

Parametrizando la curva Γ:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t \\ z = \operatorname{sen} t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

Luego, en (2) : $y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t$

Así, la parametrización pedida es:

$$\Gamma : \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t \quad , \quad t \in [0, 2\pi] \\ z = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

(c)Sea $\alpha(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t, \operatorname{sen} t\right), t \in [0, 2\pi]$.

Así : $\alpha'(t) = \left(-\frac{1}{2}\sin t, -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, \cos t\right), t \in [0, 2\pi]$.

Existe $\alpha'(t)$, $t \in [0, 2\pi]$ y además α' es continua $[0, 2\pi]$, pues sus funciones coordenadas son continuas en $[0, 2\pi]$.

Además, $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\frac{1}{4}\sin^2 t + \frac{3}{4}\sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1 \neq 0$, entonces $\alpha'(t) \neq 0$.Por tanto, α es regular.

Ejemplo 2.106 *Desde el punto $A(0, 4, -2)$ se trazan rectas que pasan por puntos de la recta*

$$\mathcal{L} : x + y = 2, \quad z = 0$$

y que intersecan al cilindro $\mathcal{S} : x^2 + y^2 = 4$ en una curva Γ.

(a)*Parametrizar Γ, indicando el dominio de la parametrización.*

(b)*¿Es Γ regular con la parametrización elegida en (a)?Justificar.*

Solución.

(a)Desde el punto $A(0, 4, -2)$, consideremos la recta AQP, en la recta $\mathcal{L}$ y P en el cilindro $\mathcal{S}$.

Entonces $Q = (x, 2 - x, 0) \Longrightarrow \overrightarrow{AQ} = Q - A = (x, 2 - x, 0) - (0, 4, -2) = (x, -x - 2, 2)$.

Luego,

$$\mathcal{L} : P = A + t\overrightarrow{AQ} = (0, 4, -2) + t(x, -x - 2, 2) = (tx, 4 - 2t - tx, 2t - 2), t \in \mathbb{R}$$

Si $u = tx$, $v = 4 - 2t - tx$ y $w = 2t - 2$ entonces

$$u + v + w = (tx) + (4 - 2t - tx) + (2t - 2) = 2$$

Luego P pertenece al plano: $u + v + w = 2$.

Otra forma: sean $B = (2, 0, 0)$ y $C = (0, 2, 0)$ puntos de $\mathcal{L}$. Luego

$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 0, 0) - (0, 4, -2) = (2, -4, 2)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, 2, 0) - (0, 4, -2) = (0, -2, 2)$, y la normal al plano es

$N = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, -4, 2) \times (0, -2, 2) = (-4, -4, -4) = -4(1, 1, 1)$.

La ecuación del plano es :

$\mathcal{P} : (P - A) \cdot \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) = 0 \Longrightarrow \mathcal{P} : (x - 0, y - 4, z + 2) \cdot (1, 1, 1) = 0,$

$$\mathcal{P} : x + y + z = 2.$$

En consecuencia

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 &= 4 \\ x + y + z &= 2 \end{cases}$$

Parametrizando

$$\Gamma : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 2 - x - y = 2 - 2\cos t - 2\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

$(b)- : \alpha(t) = (2\cos t, 2\sin t, 2 - 2\cos t - 2\sin t), t \in [0, 2\pi]$

Existe $\alpha'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 2\sin t - 2\cos t)$

α'es continua para $t \in [0, 2\pi]$.

$\|\alpha'(t)\| = \|(-2\sin t, 2\cos t, 2\sin t - 2\cos t)\| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + (2\sin t - 2\cos t)^2}$

$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{8 - 8\sin t\cos t} = \sqrt{8 - 4\sin 2t} \neq 0$,para $t \in [0, 2\pi]$, pues $4 \leq 8 - 4\sin 2t \leq 12$.

Así, $\alpha'(t) \neq 0$,para $t \in [0, 2\pi]$.

Por tanto – regular con la parametrización elegida en (a)

2.14 Vectores unitarios: tangente, normal y binormal

Sea $C : P = \alpha(t), t \in \mathrm{I}$ una curva regular en I, descrita por una función $\alpha : I \subset R \rightarrow \mathbf{R}^n$

Definición 2.39 *El vector tangente unitaria en el punto $\alpha(t)$ de la curva C, se define por:*

$$T(t) := \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

Observación 2.9 *Como $\|T(t)\| = 1$, para todo $t \in I$ y por teorema anterior se deduce que $T(t) \perp T'(t)$, para todo $t \in I$.*

Definición 2.40 *Si suponemos que la función $T(t)$ es derivable y $T'(t) \neq 0$, entonces podemos definir el* vector normal unitario *a la curva C en el punto $\alpha(t)$, por:*

$$N(t) := \frac{T(t)}{\|T'(t)\|}$$

Así, $\|N(t)\| = 1$, para todo $t \in I$

Observación 2.10 *Como $T(t) \times N(t) \perp T(t)$ y $T(t) \times N(t) \perp N(t)$, entonces*

$$\|T(t) \times N(t)\| = \|T(t)\| \, \|N(t)\| \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

Definición 2.41 *El* vector binormal unitario *a la curva C en el punto $\alpha(t)$, se denota y se define por :*

$$B(t) := T(t) \times N(t).$$

Observación 2.11 *El Plano Osculador:*

El par de vectores $T(t)$ y $N(t)$ definen un plano,en cualquier punto $\alpha(t)$ de la curva C,así la ecuación del plano que pasa por $\alpha(t)$ de la curva C y es generado por los vectores $T(t)$ y $N(t)$ es dado por :

$$\mathcal{P} : (P - \alpha(t)) \cdot B(t) = 0$$

Este plano es conocido como el *plano osculador* a la curva C en el punto $\alpha(t)$. La característica de este plano consiste en que es el plano que mejor *aproxima* a la curva en el punto $\alpha(t)$. Esto quiere decir que si tomamos tres puntos distintos de la curva que puedan determinar un plano y hacemos que esos tres puntos se aproximen a $\alpha(t)$ entonces esos planos se aproximan al plano $\mathcal{P}(t)$.

Observación 2.12 *Es fácil ver que los vectores velocidad $V(t) = \alpha'(t)$ y aceleración $A(t) = \alpha''(t)$ del punto $\alpha(t)$ se encuentran en el plano osculador. En efecto, un cálculo sencillo nos muestra que*

$$A(t) = v'(t)T(t) + \|\alpha'(t)\| \, \|T'(t)\| \, N(t),$$

en donde $v(t) = \|F'(t)\|$.

La componente $v'(t)$ se llama la componente tangencial *de la aceleración y $\|\alpha'(t)\| \, \|T'(t)\|$ la* componente normal.

Si pensamos en una partícula que se mueve a lo largo de la curva que describe la imagen de una función vectorial α, entonces $\alpha(t)$ es el vector que mide la posición de la partícula, $\alpha'(t)$ será el vector velocidad y $\alpha''(t)$ será el vector aceleración. Es costumbre nombrar, entonces, $\alpha'(t) = V(t)$, vector velocidad y $\alpha''(t) = A(t)$, vector aceleración. Además denotaremos $v(t) = \|V(t)\|$ que representa la rapidez de la partícula, así mismo denotaremos $a(t) = \|\alpha''(t)\|$.

Ejemplo 2.107 *Sea la curva Γ definida por la función vectorial F definida por*

$$F(t) = \begin{cases} \left(2\cos(t-\frac{\pi}{2}), \sin 2(t-\frac{\pi}{2}), \pi - t\right) & , \quad 0 \leq t < \pi \\ (0,0,0) & , \quad t = \pi \\ \left(-2\cos(\frac{3\pi}{2}-t), \sin 2(\frac{3\pi}{2}-t), \pi - t\right) & , \quad \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$

(a)*Hallar $F'(t)$, indicando su dominio.*
(b)*Analizar si F es una parametrización regular en $[0,2\pi]$.*
(c)*Hallar el plano osculador de la curva Γ en el punto $\left(\sqrt{2}, 1, \frac{\pi}{4}\right)$.*

Solución.

$$(a)\, F'(t) = \begin{cases} \left(-2\sin(t-\frac{\pi}{2}), 2\cos 2(t-\frac{\pi}{2}), -1\right) & , \quad 0 \leq t < \pi \\ \left(-2\sin\left(\frac{3}{2}\pi - t\right), -2\cos 2\left(\frac{3}{2}\pi - t\right), -1\right) & , \quad \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$

Entonces, F es derivable en $[0,\pi[\,\cup\,]\pi, 2\pi]$.
Hallando la derivada en $t = \pi$.

$$F'(\pi^-) = \lim_{t\to\pi^-} \frac{F(t)-F(\pi)}{t-\pi} = \lim_{t\to\pi^-} \left(\frac{2\cos(t-\frac{\pi}{2})}{t-\pi}, \frac{\sin 2(t-\frac{\pi}{2})}{t-\pi}, \frac{\pi-t}{t-\pi}\right).$$

Aplicando L'hospital en cada componente

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\pi^-} \frac{2\cos(t-\frac{\pi}{2})}{t-\pi} &= \lim_{t\to\pi^-} -2\sin(t-\frac{\pi}{2}) = -2, \\ \lim_{t\to\pi^-} \frac{\sin 2(t-\frac{\pi}{2})}{t-\pi} &= \lim_{t\to\pi^-} 2\cos 2(t-\frac{\pi}{2}) = -2. \end{aligned}$$

Así, $F'(\pi^-) = (-2, -2, -1)$.

$$F'(\pi^+) = \lim_{t\to\pi^+} \frac{F(t)-F(\pi)}{t-\pi} = \lim_{t\to\pi^+} \left(\frac{-2\cos(\frac{3\pi}{2}-t)}{t-\pi}, \frac{\sin 2(\frac{3\pi}{2}-t)}{t-\pi}, \frac{\pi-t}{t-\pi}\right).$$

Aplicando L'hospital en cada componente

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\pi^+} \frac{-2\cos(\frac{3\pi}{2}-t)}{t-\pi} &= \lim_{t\to\pi^+} -2\sin(\frac{3\pi}{2}-t) = -2, \\ \lim_{t\to\pi^+} \frac{\sin 2(\frac{3\pi}{2}-t)}{t-\pi} &= \lim_{t\to\pi^+} -2\cos 2(\frac{3\pi}{2}-t) = 2. \end{aligned}$$

Así, $F'(\pi^+) = (-2, 2, -1)$.

Como las derivadas laterales son distintas , entonces no existe la derivada de F en $t = \pi$. Luego el dominio de la derivada es, $Dom\,(F') = [0,\pi[\,\cup\,]\pi, 2\pi]$.

(b) F no es regular en $[0, 2\pi]$ porque F no es derivable en $t = \pi$.

(c)Como $F(\frac{3\pi}{4}) = \left(\sqrt{2}, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

$$F'(\frac{3\pi}{4}) = \left(-2\sin(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}), 2\cos 2(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}), -1\right) = \left(-\sqrt{2}, 0, -1\right)$$

$$F''(t) = \left(-2\cos(t-\frac{\pi}{2}), -4\sin 2(t-\frac{\pi}{2}), 0\right)$$

$F''(\frac{3\pi}{4}) = \left(-2\cos(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}), -4\sin 2(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}), 0\right) = (-\sqrt{2}, -4, 0)$
$F'(\frac{\pi}{4}) \times F''(\frac{\pi}{4}) = (-\sqrt{2}, 0, -1) \times (-\sqrt{2}, -4, 0) = (-4, \sqrt{2}, 4\sqrt{2})$
$B(\frac{\pi}{2}) \parallel (-4, \sqrt{2}, 4\sqrt{2})$.
Hallando la ecuación del plano osculador en el punto $Q = F(\frac{3\pi}{4}) \in - :$
$\mathcal{P} : B(\frac{3\pi}{4}) \cdot (P - F(\frac{3\pi}{4})) = 0 \rightarrow$
$\mathcal{P} : (-4, \sqrt{2}, 4\sqrt{2}) \cdot (x - \sqrt{2}, y - 1, z - \frac{\pi}{4}) = 0$
$\rightarrow \mathcal{P} : 4x - \sqrt{2}y - 4\sqrt{2}z + 3\sqrt{2} - \sqrt{2}\pi = 0.$

Ejemplo 2.108 *Dada la curva*

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x^2 - 2y + 2z &= 0 \\ x^2 + y^2 - 4y &= 0 \end{cases}$$

(*a*)*Parametrizar la curva* $\mathcal{C}$ *en términos de senos y cosenos, indicando su respectivo dominio.*

(*b*)*Hallar los vectores unitarios* $T(t)$, $B(t)$ *y* $N(t)$ *en el punto* Q, *no nulo de la curva* $\mathcal{C}$, *donde el vector tangente es paralela a la recta*

$$\mathcal{L} : \begin{cases} y &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}.$$

(*c*)*Hallar la curvatura* $k(t)$ *de la curva* $\mathcal{C}$ *y la ecuación del plano osculador en el punto* Q *hallado en* (*b*).

Solución.
(*a*)

$$\mathcal{C} : \begin{cases} 2z = 2y - x^2 \\ x^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases}$$

Parametrizando la curva $\mathcal{C}$:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2 + 2\operatorname{sen} t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

Reemplazando en el plano $2z = 2y - x^2$, se tiene $2z = 2(2 + 2\operatorname{sen} t) - 4\cos^2 t \Longrightarrow z = 2 + 2\sin t - 2\cos^2 t$

Así,

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x &= 2\cos t \\ y &= 2 + 2\sin t \\ z &= 2 + 2\sin t - 2\cos^2 t \end{cases} ; \ t \in [0, 2\pi]$$

(*b*) $\alpha(t) = \left(2\cos t, 2 + 2\sin t, 2 + 2\sin t - 2\cos^2 t\right); t \in [0, 2\pi]$
$\Longrightarrow \alpha'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 2\cos t + 2\sin 2t) \ ; \ t \in [0, 2\pi]$
$\alpha''(t) = (-2\cos t, -2\sin t, -2\sin t + 4\cos 2t)$
Como el punto $Q = \alpha(t) \in \mathcal{C}$, entonces existe un $r \in R$ tal que
$\left(2\cos t, 2 + 2\sin t, 2 + 2\sin t - 2\cos^2 t\right) = (r, 0, 0)$, de donde $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.
Así,
$\alpha(\frac{\pi}{2}) = (0, 2, 2)$, $\alpha(\frac{3\pi}{2}) = (0, 0, 0)$(se descarta)
$\alpha'(\frac{\pi}{2}) = (-2, 0, 0)$.

$\alpha''(\frac{\pi}{2}) = (0,-2,-6)$

$\alpha'(\frac{\pi}{2}) \times \alpha''(\frac{\pi}{2}) = (-2,0,0) \times (0,-2,-6) = (0,-12,4)$

$\| \alpha'(t) \times \alpha''(t) \| = 4\sqrt{10}$

$B(t) = \frac{1}{\sqrt{10}}(0,1,3)$

$$T(\frac{\pi}{2}) = \frac{\alpha'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left\|\alpha'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\|} = \frac{(-2,0,0)}{\|(-2,0,0)\|} = (-1,0,0)$$

$$B(\frac{\pi}{2}) = \frac{\alpha'\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \alpha''(\frac{\pi}{2})}{\left\|\alpha'\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \alpha''(\frac{\pi}{2})\right\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(0,-3,1) \parallel (0,3,-1)\,.$$

$$N(\frac{\pi}{2}) = B(\frac{\pi}{2}) \times T(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{10}}(0,-3,1) \times (-1,0,0) = \frac{1}{\sqrt{10}}(0,-1,-3)\,.$$

$$(c)\, k(\frac{\pi}{2}) = \frac{\left\|\alpha'\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \alpha''(\frac{\pi}{2})\right\|}{\left\|\alpha'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\|^3} = \frac{4\sqrt{10}}{(2)^3} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Hallando la ecuación del plano osculador en el punto $Q \in \mathcal{C}$:

$\pi : B(\frac{\pi}{2}) \cdot (P - \alpha(\frac{\pi}{2})) = 0 \rightarrow \pi : (0,3,-1) \cdot (x, y-2, z-2) = 0$

$\rightarrow \pi : 3y - z - 4 = 0.$

2.14.1 Integración

La integración de funciones vectoriales la definimos así:

$$\int_a^b F(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt, ..., \int_a^b f_n(t)dt\right).$$

Como en el caso de funciones de variable y valor real, tenemos acá los teoremas fundamentales del cálculo que enunciaremos sin demostración pues ésta sigue los mismos pasos que la que conocemos en los primeros cursos de cálculo.

Teorema 2.24 ***(Primer Teorema Fundamental del Cálculo).*** *Sea $F : [a,b] \longrightarrow R^n$ continua y sea $c \in [a,b]$. Entonces la función*

$$G(x) = \int_c^x F(t)\,dt$$

cumple que $G'(x) = F(x)$.

Teorema 2.25 ***(Segundo Teorema Fundamental del Cálculo).*** *Supongamos que F' es continua en (a,b). Entonces para cada $c, x \in (a,b)$ tenemos que*

$$F(x) = F(c) + \int_c^x F'(t)dt.$$

2.14.2 El Plano Osculador

Sea $F : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^3$ una aplicación derivable y supongamos que $F'(t) \neq 0$. Entonces el vector

$$T(t) = \frac{F'(t)}{\|F'(t)\|}$$

es el vector tangente unitario de la curva en el punto $F(t)$. Si además suponemos que la función $T(t)$ es derivable y $T'(t) \neq 0$, entonces podemos definir el vector normal unitario a la curva en el punto $F(t)$, así:

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$$

Puesto que $T(t)$ es unitario, entonces $\langle T(t), N(t)\rangle = 0$. Este par de vectores definen un plano, así:

$$\mathcal{P}(t) = \{X(t) = F(t) + sT(t) + rN(t), r, s \in \mathbf{R}\}.$$

Este plano es conocido como el plano osculador a la curva en el punto $F(t)$. La

característica de este plano consiste en que es el plano que mejor *aproxima* a la curva en el punto $F(t)$. Esto quiere decir que si tomamos tres puntos distintos de la curva que puedan determinar un plano y hacemos que esos tres puntos se aproximen a $F(t)$ entonces esos planos se aproximan al plano $\mathcal{P}(t)$.

Es fácil ver que los vectores velocidad $V(t) = F'(t)$ y aceleración $A(t) = F''(t)$ del punto $F(t)$ se encuentran en el plano osculador. En efecto, un cálculo sencillo nos muestra que

$$A(t) = v'(t)T(t) + \|F'(t)\|\,\|T'(t)\|\,N(t),$$

en donde $v(t) = \|F'(t)\|$.

La componente $v'(t)$ se llama la componente tangencial de la aceleración y $\|F'(t)\| \|T'(t)\|$ la componente normal.

A manera de ejemplo, consideremos la curva $F(t) = (\cos t, sen\ t, t)$, $t \in \mathbf{R}$. Esta curva representa una hélice ascendente.

Observamos que

$$\begin{aligned} \|F'(t)\| &= \sqrt{2} \\ \|T'(t)\| &= \tfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \tfrac{F'(t)}{\|F'(t)\|} &= T(t) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, 1) \\ \tfrac{T'(t)}{\|T'(t)\|} &= N(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) \end{aligned}$$

Por lo tanto $v'(t) = 0$ y la aceleración será

$$A(t) = N(t) = (-\cos t, -\sin t, 0).$$

Esto es, la aceleración permanece en el plano $X;Y$ y en la dirección opuesta a la proyección, sobre el plano $X;Y$, del movimiento $F(t)$. Esto nos dice que la aceleración es centrípeta.

2.14.3 Longitud de arco y curvatura

Para poder comprender mejor algunas otras propiedades de las curvas es necesario mirarlas como dependientes de una variable que mida la longitud de arco. Así, por ejemplo, le daremos un significado físico a la velocidad más acorde con el concepto que de ella tenemos.

Sea $F : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ una curva y tomemos $\triangle = \{\mathbf{t_0} = \mathbf{a}, \mathbf{t_1}, ..\mathbf{t_n} = \mathbf{b}\}$ una partición del intervalo $[a,b]$. Denotemos con $\Pi(\triangle)$ el *polígono* de segmentos de recta que definen $F(t_0), ..., F(t_n)$.

Sea:

$$|\Pi(\triangle)| = \sum_{k=1}^{n} \|F(t_k) - F(t_{k-1})\|$$

la longitud de dicho polígono. Tenemos, entonces, la siguiente

Definición 2.42 *Decimos que la curva definida por $F : [a,b] \to R^n$ es rectificable si existe una constante $M > 0$ tal que $|\Pi(\triangle)| \leq M$, para toda partición $\triangle$ de $[a,b]$.*

Ahora, si la curva es rectificable, al número

$$\Lambda(a,b,F) = \sup_{\mathbf{p} \in \triangle} |\Pi(\triangle)|,$$

en donde $\triangle$ denota el conjunto de todas las particiones del intervalo $[a,b]$, lo llamamos la longitud de la curva.

Los consecuencias más importantes son:

1. Para todo $c \in [a,b]$ se tiene que

$$\Lambda(a,b,F) = \Lambda(a,c,F) + \Lambda(c,b,F).$$

2. $\Lambda(a,b,F) = \int_a^b \|F'(t)\| \, dt.$

La propiedad **1.** se deduce de lo anterior. Para ver **2.** procedemos de la siguiente forma: Por el teorema del valor medio tenemos que

$$F(t_k) - F(t_{k-1}) = (t_k - t_{k-1}) \left(f_1'(\theta_{1k}), ... f_n'(\theta_{nk}) \right),$$

en donde $\theta_{jk} \in (t_k, t_{k-1})$. Entonces

$$\begin{aligned}|\Pi(p)| &= \sum_{k=1}^{n} \|F(t_k) - F(t_{k-1})\| \\ &= \sum_{k=1}^{n} \|(t_k - t_{k-1})(f_1'(\theta_{1k}), ...f_n'(\theta_{nk}))\| \\ &= \sum_{k=1}^{n} |t_k - t_{k-1}| \, \|(f_1'(\theta_{1k}), ...f_n'(\theta_{nk}))\| .\end{aligned}$$

Si en expresión anterior tomamos el sup en ambos miembros observamos que el miembro izquierdo se transforma en $\Lambda(a,b,F)$ y el miembro derecho se transforma en $\int_a^b \|F'(t)\| \, dt$.

Como una aplicación de la propiedad **2**. consideremos la curva

$$F(t) = (r\cos t, r sen\ t), \quad t \in [0,\theta] .$$

Entonces $\Lambda(0,\theta,F) = r\theta$. Este resultado lo conocemos desde nuestros cursos elementales de geometría.

2.14.4 Función longitud de arco

Definición 2.43 *La función $s(t) = \Lambda(a,t,F)$, $t \in [a,b]$ se denomina la función longitud de arco.*

La función $s(t)$ mide la longitud de la curva desde el punto $F(a)$ hasta el punto $F(t)$. Sus propiedades más importantes son:

1. $s(t)$ es estrictamente creciente.

2. $s'(t) = \|F'(t)\|$.

La propiedad **2**. nos dice que la rapidez, en el instante t, de un movil que se desplaza por una curva se mide como la derivada de la función desplazamiento. Esto coincide con la idea de velocidad que veíamos en nuestros primeros cursos de Física.

Es fácil ver que

1. Si $F(t) = (t, f(t))$, $t \in [a,b]$, entonces

$$\Lambda(a,b,F) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

Este resultado ya lo conocíamos como una aplicación de la integral definida.

2. Si las curvas F y G satisfacen que $G(t) = F(u(t))$, en donde $u : [c,d] \to \mathbf{R}$, $u'(t) \neq 0$, entonces

$$\int_c^d \|G'(t)\| \, dt = \int_{u(c)}^{u(d)} \|F'(t)\| \, dt.$$

La propiedad **2**. anterior nos dice que la longitud de arco se preserva después de hacer reparametrizaciones de la curva. O desde el punto de vista de la mecánica clásica: Aunque recorramos un camino a diferentes velocidades su longitud no cambia.

Ejemplo 2.109 *Sea $F(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbf{R}$. y sea $u(t) = t^2$, $t \in [0,2]$. Entonces la función vectorial $G(t) = F(u(t)) = (t^2, t^4)$ satisface:*

$$\int_0^2 \sqrt{4t^2 + 16t^6} dt = \int_0^4 \sqrt{1 + 4t^2} dt = 16.819$$

Ejemplo 2.110 *La curva – es parametrizada por la función*

$$F(t) = (\sin 2t, 1 - \cos 2t, 2\ln(\cos t)), \quad t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right].$$

Hallar la longitud del arco de la curva $-$ *comprendido entre el punto* $\left(1, 1, 2\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *y el punto* $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 2\ln\frac{1}{2}\right)$.

Solución.
Sea $F(t) = (\sin 2t, 1 - \cos 2t, 2\ln(\cos t))$, $t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$. Entonces, se tienen :
$F'(t) = (2\cos 2t, 2\sin 2t, -2\tan t)$
$\|F'(t)\| = \sqrt{(2\cos 2t)^2 + 2\sin 2t)^2 + (-2\tan t)^2} = \sqrt{4 + 4\tan^2 t} = 2\sec t$

Como el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in -$: $P_0 = F(t_0) \Longrightarrow t_0 = \frac{\pi}{6}$. Similarmente, el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\ln\frac{1}{2}\right) \in -$: $P_1 = F(t_1) \Longrightarrow t_1 = \frac{\pi}{4}$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \int_{t_0}^{t_1} \|F'(t)\|\,dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2\sec t dt = 2\left[\ln(\sec t + \tan t)\right]\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\
\mathcal{L} &= 2\left[\ln\left(\sec\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{3}\right) - \ln\left(\sec\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
\mathcal{L} &= 2\left[\ln\left(\sqrt{3} + 2\right) - \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)\right]
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,$\mathcal{L} = 2\left[\ln(\sqrt{3} + 2) - \ln(\sqrt{2} + 1)\right]$.

Ejemplo 2.111 *Si la curva* $\Gamma : \beta(t) = (2t, 3\operatorname{sen}(2t), 3\cos(2t))$, $t \geq 0$ *(tiempo), es la trayectoria de una partícula, en qué punto de* Γ *dicha partícula habrá recorrido una distancia de* $\frac{\sqrt{10}}{3}\pi$ *unidades.*

Solución.
$\beta'(t) = (2, 6\cos(2t), -6\operatorname{sen}(2t))$, $t \geq 0$

$$\|\beta'(t)\| = \sqrt{40}$$

Sea t_0 el tiempo recorrido para que $s(t_0) = \frac{\sqrt{10}}{3}\pi$, entonces

$s(t_0) = \int_0^{t_0} \|\beta'(t)\|\,dt = \int_0^{t_0} \sqrt{40}dt = 40t_0 \Longrightarrow 40t_0 = \frac{\sqrt{10}}{3}\pi$, de donde $t_0 = \frac{\pi}{6}$,

por tanto el punto es $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

2.14.5 Curvatura de una curva

La curvatura de una curva en el instante t es un número que expresa la magnitud del cambio de su vector tangente con respecto a la longitud de arco.

Concretamente tenemos: Sea $T(t) = \frac{F'(t)}{\|F'(t)\|}$ el vector tangente unitario de una curva en el tiempo t. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{ds} &= \frac{dT}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\\
\frac{dT}{ds} &= \frac{1}{s'(t)}T'(t)\\
\frac{dT}{ds} &= \frac{1}{\|F'(t)\|}T'(t)\\
\frac{dT}{ds} &= \frac{\|T'(t)\|}{\|F'(t)\|}N(t).
\end{aligned}$$

Definimos la curvatura de la curva en el tiempo t como

$$\kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|F'(t)\|}.$$

Vemos que $\kappa(t)$ es la norma de un vector que tiene la misma dirección del vector normal unitario. Si este número es muy grande nos indica que la curva se *tuerce* mucho en trayectos muy cortos y si es pequeño nos indica que la curva se *tuerce* poco. Por ejemplo, consideremos la recta $F(t) = P + tA$, $t \in [a,b]$. Vemos entonces que $T(t)$ es constante y por lo tanto $\frac{dT}{ds} = 0$. Así que $\kappa(t) = 0$. Esto es: la linea recta no tiene ninguna tendencia a torcerse. Ahora, consideremos la curva $F(t) = (r\cos t, r\ sen\ t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Un cálculo nos dice que $\kappa(t) = \frac{1}{r}$. Si r es pequeño la circunferencia se tuerce demasiado en cortos trayectos.

Ejemplo 2.112 *La curva C es parametrizada por la función*

$$F(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 4\sin\frac{t}{2}); t \in [0,\pi].$$

Hallar la longitud del arco de la curva C comprendido desde el punto $\left(\frac{\pi-2}{2}, 1, \sqrt{2}\right)$ hasta el punto $(\pi, 2, 4)$.

Solución.

Sea $F'(t) = \left(1 - \cos t, \sin t, 2\cos\frac{t}{2}\right)$

$$\|F'(t)\| = \sqrt{\left(1-\cos t)^2 + (\sin t)^2 + (2\cos\frac{t}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - 2\cos t + 4\cos^2\frac{t}{2}}$$

$$\|F'(t)\| = \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2} + 4\cos^2\frac{t}{2}} = 2.$$

Como el punto $\left(\frac{\pi-2}{2}, 1, \sqrt{2}\right) \in C : P_0 = F(t_0) \Longrightarrow t_0 = \frac{\pi}{2}$.

Similarmente, el punto $(\pi, 2, 4) \in C : P_1 = F(t_1) \Longrightarrow t_1 = \pi$.

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} \|F\ '(t)\|\, dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2dt = 2t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \pi$$

Por lo tanto, $\mathcal{L} = \pi$.

Ejemplo 2.113 *Dada la curva ζ descrita por la parametrización $F(t) = (a\cos t, c - c\sin t, b\cos t), t \in]0,\pi]$, donde $a > b > 0$ y $c = \sqrt{a^2+b^2}$.*

a)Calcular la curvatura de ζ en cualquier punto de la curva .

b)Determinar el plano osculador de la curva ζ en el punto donde la recta tangente es paralela al plano XZ.

c)Las rectas tangentes a la curva ζ cortan al plano XY en una curva $\mathcal{B}$. Hallar las ecuaciones paramétricas para $\mathcal{B}$.

Solución.

$a)$Sea $F(t) = (a\cos t, c - c\sin t, b\cos t)$, entonces

$F'(t) = (-a\sin t, -c\cos t, -b\sin t)$

$F''(t) = (-a\cos t, c\sin t, -b\cos t)$

$F'(t)xF''(t) = c(b, 0, -a)$

$$\|F'(t)\| = c$$

$$\|F'(t) \times F''(t)\| = c^2$$

Así, $k(t) = \dfrac{\|F'(t) \times F''(t)\|}{\|F'(t)\|^3} = \dfrac{1}{c}$.

$b)$La derivada de F es paralela al vector $j = (0, 1, 0)$, entonces se tiene $\cos t = 0$,de donde $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Así el punto $P = (0, 0, 0)$ y el plano osculador es :

$$\mathcal{P} : (x, y, z).(b, 0, -a) = 0,$$

de donde

$$\mathcal{P} : bx - az = 0$$

$c)$Las rectas tangentes a la curva ζ en cualquier punto es:

$$\begin{cases} x = a\cos t - \lambda a\sin t \\ y = c - c\sin t - c\lambda\cos t; \quad \lambda \in \mathbf{R} \\ z = b\cos t - \lambda b\sin t \end{cases}$$

Reemplazando en la ecuación del plano $XY : z = 0$

Resulta que $\lambda = \cos t/\sin t = \cot t$.

Así la curva $\mathcal{B}$, está dada por las ecuaciones paramétricas :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = c(1 - \csc t); 0 < t < \pi \\ z = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2.114 *Sea* $F(t) = \left(\ln(t-1), \frac{t^2-1}{t+1}, 2t^2 + 2\right)$.

(a)Dar el dominio de la función F.

(b)Hallar el punto o los puntos de la curva Γ descrita por F donde la recta que pasa por el punto $(-2, -1, -6)$

es tangente a la curva Γ.

Solución.

$(a)\, F(t) = \left(\ln(t-1), \frac{t^2-1}{t+1}, 2t^2 + 2\right) = \left(\ln(t-1), t-1, 2t^2+2\right), t > 1$.

Dominio de $F =]1; +\infty[$.

(b)Hallando el punto de tangencia.

Sea $\Gamma : F(t) = \left(\ln(t-1), t-1, 2t^2+2\right), t > 1$.

$\Longrightarrow F'(t) = \left(\dfrac{1}{t-1}, 1, 4t\right)$; $t > 1$.

Sea $\mathcal{L}$ la recta tangente a la curva Γ en en el punto $F(t)$,

$$\mathcal{L} \ : \ P = F(t) + rF'(t) \ ; r \in \mathbf{R}$$

$$\mathcal{L} \ : \ P = \left(\ln(t-1), t-1, 2t^2+2\right) + r\left(\frac{1}{t-1}, 1, 4t\right) \ ; r \in \mathbf{R}, t > 1$$

$$\mathcal{L} \ : \ P = \left(\ln(t-1) + \frac{r}{t-1}, t-1+r, 2t^2+2+4rt\right) \ ; r \in \mathbf{R}, t > 1$$

Como el punto $P = (-2,-1,-6) \in \Gamma$ entonces existe un $t \in \,]1;+\infty[$ tal que $(-2,-1,-6) = F(t) = \left(\ln(t-1) + \frac{r}{t-1}, t-1+r, 2t^2+2+4rt\right)$, de donde

$$\begin{cases} -2 = \ln(t-1) + \dfrac{r}{t-1} \ldots (1) \\ t-1+r = -1 \ldots (2) \\ 2t^2+2+4rt = -6 \ldots (3) \end{cases}$$

Reenplazando (2) en (3) : $-6 = 2t^2 + 2 + 4(-t)t$
$\Longrightarrow 2t^2 = 8 \Longrightarrow t = \pm 2$, de donde $t = 2$. Así, $Q = (0,1,10)$.

Ejemplo 2.115 *Dada la curva* $\Gamma : \alpha(t) = (t, \ln(\sec t), 3)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, *hallar la longitud de la curva* Γ *comprendido entre el punto* $R(0,0,3)$ *y el punto* $Q\left(\frac{\pi}{4}, \ln\sqrt{2}, 3\right)$.

Solución.
Sea $\alpha(t) = (t, \ln(\sec t), 3), 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.Entonces, se tienen :
$\alpha'(t) = (1, \tan t, 0)$, $\|\alpha'(t)\| = \sec t$.
Como el punto $R(0,0,3) \in - : R = \alpha(t_0) \Longrightarrow t_0 = 0$.Similarmente, el punto $Q\left(\frac{\pi}{4}, \ln\sqrt{2}, 3\right) \in - : Q = \alpha(t_1) \Longrightarrow t_1 = \frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_{t_0}^{t_1} \|F'(t)\|\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec t \, dt \\ \mathcal{L} &= \left[\ln|\sec t + \tan t|\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}} = \ln(1+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Por lo tanto,$\mathcal{L}(-) = \ln(1+\sqrt{2})$.

Ejemplo 2.116 *Sea la curva* $C : \begin{cases} x^2 - y^{\frac{3}{2}} = z \\ y = x^2 \end{cases}$.

(*a*) *Parametrizar* C.

(*b*)*Hallar el plano osculador* $\mathcal{P}$ *en los puntos de* C *donde el plano* $\mathcal{P}$ *es paralela a la recta* $\mathcal{L} : P = (0, t, -t), t \in \mathbf{R}$.

Solución.
(*a*)Parametrizando la curva C:
Sea $x = t \rightarrow y = t^2 \rightarrow z = t^2 - t^3$.
Así, $\alpha(t) = (t, t^2, t^2 - t^3)$, $t \in \mathbf{R}$.
(*b*) $\alpha'(t) = (1, 2t, 2t - 3t^2)$,
$\alpha''(t) = (0, 2, 2 - 6t)$
$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (1, 2t, 2t - 3t^2) \times (0, 2, 2 - 6t) = \left(-6t^2, 6t - 2, 2\right) = 2(-3t^2, 3t - 1, 1)$
$B(t) \parallel \alpha'(t) \times \alpha''(t) \rightarrow B(t) \parallel (-3t^2, 3t - 1, 1)$

Por condición : existe un punto $Q = \alpha(t) \in \mathcal{C}$ tales que
$\mathcal{P}_{osc} \| \mathcal{L} \iff B(t) \perp (0,1,-1) \Rightarrow (-3t^2, 3t-1, 1) \cdot (0,1,-1) = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$.
Así, $Q = \alpha(\frac{2}{3}) = (\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{4}{27})$.
Luego, hallando la ecuación del plano osculador en el punto $Q \in \mathcal{C}$,
$\alpha'(\frac{2}{3}) \times \alpha''(\frac{2}{3}) = 2(\frac{-4}{3}, 1, 1) \parallel (4,-3,-3)$
$\mathcal{P}_{osc} : (P - \alpha(\frac{2}{3})) \cdot B(\frac{2}{3}) = 0 \Rightarrow (x - \frac{2}{3}, y - \frac{4}{9}, z - \frac{4}{27}) \cdot (4,-3,-3) = 0.$
Por tanto, la ecuación del plano osculador en el punto $Q \in \mathcal{C}$ es,

$$\mathcal{P}_{osc} : 36x - 27y - 27z - 8 = 0$$

Ejemplo 2.117 *Dada la curva*

$$\mathcal{C} : \begin{cases} 4x + z^2 &= 16 \\ z\sqrt{x} &= 2y \end{cases}$$

(a)*Parametrizar $\mathcal{C}$, indicando el dominio de la parametrización.*
(b)*Hallar los vectores unitarios $T(t)$, $B(t)$ y $N(t)$ en el punto $(4,0,0)$.*

Solución.
(a)Parametrizando $\mathcal{C}$:
Sea :

$$\begin{aligned} z &= 2t \\ x &= 4 - t^2 \end{aligned}$$

Reemplazando en $z\sqrt{x} = 2y$, se tiene

$$y = t\sqrt{4-t^2}, -2 \leq t \leq 2$$

Así, $- : \alpha(t) = \left(4 - t^2, \frac{t}{2}\sqrt{4-t^2}, 2t\right), -2 \leq t \leq 2.$
$(b)\, \alpha'(t) = \left(-2t, \frac{1}{2}\left[\sqrt{4-t^2} + t\left(\dfrac{-2t}{2\sqrt{4-t^2}}\right)\right], 2\right) = \left(-2t, \dfrac{4-2t^2}{\sqrt{4-t^2}}, 2\right)$
$\Longrightarrow \alpha'(0) = (0,2,2) = 2\,(0,1,1)$
$y''(t) = \frac{d}{dt}\left(\dfrac{4-2t^2}{\sqrt{4-t^2}}\right) = \left[-4t\sqrt{4-t^2} - (4-2t^2)\left(\dfrac{-2t}{2\sqrt{4-t^2}}\right)\right]$
$y''(t) == \dfrac{2t\,(t^2-6)}{(4-t^2)^{\frac{3}{2}}}$
$\alpha''(t) = \left(-2, \dfrac{2t\,(t^2-6)}{(4-t^2)^{\frac{3}{2}t}}, 0\right) \Longrightarrow \alpha''(0) = (-2,0,0)$
$\|\alpha'(0)\| = \|(0,2,2)\| == \sqrt{(0)^2 + 2^2 + (2)^2} = 2\sqrt{2}$
$T(0) = \dfrac{\alpha'(0)}{\|\alpha'(0)\|} = \dfrac{2\,(0,1,1)}{2\sqrt{2}} \Longrightarrow T(0) = \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$\alpha'(0) \times \alpha''(0) = (0,2,2) \times (-2,0,0) = (0,-4,4)$
$\|\, \alpha'(0) \times \alpha''(0) \,\| = \|(0,-4,4)\| = 4\sqrt{2}$
$B(0) = \dfrac{\alpha'(0) \times \alpha''(0)}{\|\alpha'(0) \times \alpha''(0)\|} = \dfrac{(0,-4,4)}{4\sqrt{2}} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$N(0) = B(0) \times T(0) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$N(0) = (-1,0,0)$.

Ejemplo 2.118 *Una partícula se desplaza en $\mathbf{R}^3$ según la trayectoria*

$$\mathcal{C} :\ \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,$$

en el instante $t=\frac{\pi}{4}$ *la posición de la partícula es* $P_0=\left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\right)$ *y tiene velocidad* $V_0=\left(-1,1,\sqrt{2}\right)$. *En cada instante, la aceleración de la partícula es*

$$A(t)=\left(-\sec^2 t,-\csc^2 t,0\right).$$

Hallar :
(a) $\alpha(t)$.
(b)Los vectores unitarios $T(\frac{\pi}{4}),B(\frac{\pi}{4})$ *y* $N(\frac{\pi}{4})$ *en la curva* C.
(c)La curvatura $k(t)$ *en cualquier punto* $F(t)$ *de la trayectoria.*

Solución.
(a)La aceleración de la partícula es

$$\alpha''(t)=A(t)=\left(-\sec^2 t,-\csc^2 t,0\right)$$

La velocidad de la partícula es

$$\alpha'(t)=V(t)=\left(\int-\sec^2 t\,dt,\int-\csc^2 t dt,\int 0dt\right)$$

$\alpha'(t)=(-\tan t+C_1,\cot t+C_2,C_3)$.
Como $V_0=\left(-1,1,\sqrt{2}\right)=\alpha'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(-\tan\frac{\pi}{4}+C_1,\cot\frac{\pi}{4}+C_2,C_3\right)$,
de donde $C_1=0,C_2=0$ y $C_3=\sqrt{2}$.
$\alpha'(t)=\left(-\tan t,\cot t,\sqrt{2}\right)$.
La trayectoria de la partícula es
$\alpha(t)=\left(\int-\tan t\,dt,\int\cot t dt,\int\sqrt{2}dt\right)=\left(\ln\operatorname{sen}t+D_1,\ln\cos t+D_2,\sqrt{2}t+D_3\right)$
Como $P_0=\alpha\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\ln\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}+D_1,\ln\cos\frac{\pi}{4}+D_2,\sqrt{2}t+D_3\right)$,
de donde $D_1=0,D_2=0$ y $D_3=0$.
Así, $\alpha(t)=\left(\ln\operatorname{sen}t,\ln\cos t,\sqrt{2}t\right),t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.
$(b)\,\alpha'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(-1,1,\sqrt{2}\right),\left\|\alpha'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\|=\left\|\left(-1,1,\sqrt{2}\right)\right\|=2,$

$$T(\frac{\pi}{4})=\frac{\alpha'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\left\|\alpha'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\|}=\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$\alpha''(\frac{\pi}{4})=\left(-\sec^2\frac{\pi}{4},-\csc^2\frac{\pi}{4},0\right)=(-2,-2,0)$
$\alpha'\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\alpha''(\frac{\pi}{4})=\left(-1,1,\sqrt{2}\right)\times(-2,-2,0)=\left(2\sqrt{2},-2\sqrt{2},4\right)=2\left(\sqrt{2},-\sqrt{2},2\right)$
$\left\|\alpha'\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\alpha''(\frac{\pi}{4})\right\|=\left\|\left(2\sqrt{2},-2\sqrt{2},4\right)\right\|=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$$B(\frac{\pi}{4})=\frac{\alpha'\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\alpha''(\frac{\pi}{4})}{\left\|\alpha'\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\alpha''(\frac{\pi}{4})\right\|}=\frac{\left(2\sqrt{2},-2\sqrt{2},4\right)}{4\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$N(\frac{\pi}{4})=B(\frac{\pi}{4})\times T(\frac{\pi}{4})=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4},0\right).$$

(c)
$\alpha'(t)=\left(-\tan t,\cot t,\sqrt{2}\right)$,
$\|\alpha'(t)\|=\left\|\left(-\tan t,\cot t,\sqrt{2}\right)\right\|=\sqrt{\tan^2 t+\cot^2 t+2}=\sqrt{\sec^2 t+\csc^2 t}$
$\alpha'(t)=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2 t}}=\sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t}}=\frac{2}{|\operatorname{sen}2t|}=\frac{2}{\operatorname{sen}2t}.$
$\alpha'(t)\times\alpha''(t)=\left(-\tan t,\cot t,\sqrt{2}\right)\times\left(-\sec^2 t,-\csc^2 t,0\right)$

$$\alpha'(t)\times\alpha''(t)=\left(\sqrt{2}\csc^2 t,-\sqrt{2}\sec^2 t,\tan t\csc^2 t+\cot t\sec^2 t\right)$$

$$\begin{aligned}
\left\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\right\|^2 &= \left\|\left(\sqrt{2}\csc^2 t,-\sqrt{2}\sec^2 t,\tan t\csc^2 t+\cot t\sec^2 t\right)\right\|^2\\
\left\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\right\|^2 &= 2\csc^4 t+2\sec^4 t+\tan^2 t\csc^4 t+\cot^2 t\sec^4 t+2\tan t\csc^2 t\cot t\sec^2 t\\
\left\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\right\|^2 &= \frac{2}{\operatorname{sen}^4 t}+\frac{2}{\cos^4 t}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t}+\frac{2}{\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t}\\
\left\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\right\|^2 &= \frac{2}{\operatorname{sen}^4 t}+\frac{2}{\cos^4 t}+\frac{4}{\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t}\\
\left\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\right\|^2 &= 2\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 t}+\frac{1}{\cos^2 t}\right)^2=2\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t}\right)^2=\frac{32}{\operatorname{sen}^2 2t}\\
\left\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\right\| &= \frac{4\sqrt{2}}{\operatorname{sen}2t}
\end{aligned}$$

$$\text{Así, } k(t)=\frac{\left\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\right\|}{\left\|\alpha'(t)\right\|^3}=\frac{\dfrac{4\sqrt{2}}{\operatorname{sen}2t}}{\left[\dfrac{2}{\operatorname{sen}2t}\right]^3}=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}^2 2t.$$

Ejemplo 2.119 *Una partícula se mueve en* $\mathbf{R}^3$ *según la trayectoria* $C: F(t)=(x(t),y(t),z(t))$, *partiendo del punto* $P_0(1,1,0)$ *en el instante* $t=0$. *En cada instante* $t\geq 0$ *la velocidad de la partícula es*

$$V(t)=\left(e^t,-e^{-t},\sqrt{2}\right)$$

(a)*Hallar la trayectoria* $F(t)$.

(b)*Calcular la curvatura* $k(t)$ *y la torsión* $\tau(t)$ *de la trayectoria en el instante cuando* $t=0$.

(c)*Hallar las* ***componentes tangencial*** $a_T(t)$ *y* ***normal*** $a_N(t)$ *de la* ***aceleración*** *en el punto* $F(0)$.

Sugerencia. Usar las fórmulas :

$$k(t)=\frac{\|F'(t)\times F''(t)\|}{\|F'(t)\|^3}\qquad \tau(t)=\frac{(F'(t)\times F''(t))\cdot F'''(t)}{\|F'(t)\times F''(t)\|^2}$$

$$\begin{aligned}
a_T(t) &= F''(t)\cdot T(t) \quad \text{o} \quad a_T(t)=s''(t)=\frac{d^2s}{dt^2}\ ,\ \text{donde}\quad s'(t)=\frac{ds}{dt}=\|F'(t)\|\\
a_N(t) &= F''(t)\cdot N(t) \quad \text{o} \quad a_N(t)=s'(t)\,\|T'(t)\|=k(t)\ \left[s'(t)\right]^2
\end{aligned}$$

Solución.

(a)la velocidad de la partícula es

$$F'(t)=V(t)=\left(e^t,-e^{-t},\sqrt{2}\right)\ ;\ t\geq 0$$

$F(t)=\left(e^t+C_1,e^{-t}+C_2,\sqrt{2}t+C_3\right)$.

Como $P_0(1,1,0)=F(0)=\left(e^0+C_1,e^{-0}+C_2,\sqrt{2}(0)+C_3\right)$,

de donde $C_1=0,C_2=0$ y $C_3=0$.

Así, $F(t)=\left(e_1^t,e^{-t},\sqrt{2}t\right)$; $t\geq 0$.

(b) $F'(t)=\left(e^t,-e^{-t},\sqrt{2}\right)$,$\|F'(t)\|=e^t+e^{-t}$ entonces $F'(0)=\left(1,-1,\sqrt{2}\right)$,

$\|F'(0)\|=2$.

$F''(t) = (e^t, e^{-t}, 0) \Longrightarrow F''(0) = (1,1,0)$.
$F'''(t) = (e^t, -e^{-t}, 0) \Longrightarrow F'''(0) = (1,-1,0)$.
$F'(t) \times F''(t) = (\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^t, 2)$.
Ahora en $t = 0$: $F'(0) \times F''(0) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$, $\|F'(0) \times F''(0)\| = 2\sqrt{2}$.
Así, $k(0) = \dfrac{\|F'(0) \times F''(0)\|}{\|F'(0)\|^3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{[2]^3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{4}$.
Ahora, $(F'(t) \times F''(t)) \cdot F'''(t) = (-\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^t, 2) \cdot (e^t, -e^{-t}, 0) = -2\sqrt{2}$.
Así, $\tau(0) = \dfrac{(F'(0) \times F''(0)) \cdot F'''(0)}{\|F'(0) \times F''(0)\|^2} = \dfrac{-2\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})^2} = \dfrac{-\sqrt{2}}{4}$.
(c)

$$T(0) = \frac{F'(0)}{\|F'(0)\|} = \frac{(1,-1,\sqrt{2})}{2} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$B(0) = \dfrac{F'(0) \times F''(0)}{\|F'(0) \times F''(0)\|} = \dfrac{(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)}{2\sqrt{2}} = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.Luego,
$N(0) = B(0) \times T(0) = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.
Ahora,
$a_T(0) = F''(0) \cdot T(0) = (1,1,0) \cdot (1,-1,\sqrt{2}) = 0$.
$a_N(t) = F''(0) \cdot N(0) = (1,1,0) \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \sqrt{2}$.

Aplicaciones a la gravitación

En esta sección estudiaremos una aplicación de las curvas en $\mathbf{R}^2$ al movimiento planetario. Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbf{R}^2$ una función vectorial. Los puntos $(x,y) \in \mathrm{Im}(\alpha)$ lo podemos poner en coordenadas polares y así la curva puede ser puesta cómo

$$(x,y) = r(\cos\theta, sen\theta),$$

en donde r mide la distancia del punto (x,y) al origen. Es claro que tanto r como θ dependen del tiempo t.

Denotemos con $U_r = (\cos\theta, sen\ \theta)$. Entonces nuestra curva la podemos escribir como $\alpha(t) = r.U_r$. También, denotemos con

$$U_\theta = \frac{dU_r}{d\theta} = (-sen\theta, \cos\theta).$$

Es claro que U_r y U_θ son vectores unitarios y perpendiculares, además $U_r = \frac{-dU_\theta}{d\theta}$.
Ahora,

$$V(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dr}{dt}.U_r + r\frac{dU_r}{dt}.$$

Hacemos uso de la regla de la cadena y obtenemos que

$$\frac{dU_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dU_r}{d\theta} = \frac{d\theta}{dt}U_\theta.$$

Combinando estas dos última expresiones obtenemos

$$V(t) = \frac{dr}{dt}.U_r + r\frac{d\theta}{dt}U_\theta.$$

De la misma forma la aceleración también la podemos expresar como una combinación lineal de U_r y U_θ, así:

$$A(t) = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] U_r + \left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right] U_\theta.$$

Si suponemos que una estrella de masa M atrae a un planeta de masa m, la fuerza de atracción la podemos expresar así:

$$F = f_r U_r + f_\theta U_\theta.$$

De otra parte, la segunda ley de Newton nos dice que $F(t) = mA(t)$. De lo anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} f_r &= m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] \\ f_\theta &= m\left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]. \end{aligned}$$

Dentro de las hipótesis que hizo , con respecto al movimiento planetario, está aquella que afirma que la fuerza de atracción, de la estrella al planeta, se ejerce en la dirección del planeta hacia la estrella. Esto es, en la dirección de $-U_r$. Entonces la componente $f_\theta = 0$. Esto es,

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Si multiplicamos por r vemos que se transforma en

$$\frac{d\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)}{dt} = 0$$

De lo anterior se deduce que

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h,$$

en donde h es una constante. Pero si suponemos que el movimiento del planeta es un giro en sentido contrario al las manecillas del reloj podemos concluir que $\theta(t)$ es una función creciente y por lo tanto $\frac{d\theta}{dt} > 0$. Así, nuestra constante h es positiva.

Sabemos que el área que barre el radio vector R cuando el planeta se desplaza de un tiempo t_1 a un tiempo t_2 viene expresada por la fórmula

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} r^2\frac{d\theta}{dt}.$$

De lo expuesto anteriormente obtenemos que

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}h(t_2 - t_1).$$

Esta expresión confirma la segunda Ley de Kepler que dice: *Las áreas barridas por el radio vector desde el sol a un planeta son proporcionales al tiempo.*

La ley de gravitación universal de Newton establece que

$$f_r = -\frac{G.M.m}{r^2} = \frac{-km}{r^2},$$

en donde G es la constante de gravitación universal. De lo anterior obtenemos la ley que rige el movimiento planetario en la mecánica newtoniana:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r(t)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{-k}{r^2}.$$

Si hacemos el cambio de variable $z = \frac{1}{r}$ y hacemos uso de loa anterior, es fácil observar que

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -h^2z^2\frac{d^2z}{d\theta^2}.$$

Remplazamos en lo anterior obtenemos:

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} + z = \frac{k}{h^2}.$$

La solución general es

$$z = \alpha sen\theta + \beta\cos\theta + \frac{k}{h^2}.$$

Para obtener información de lo anterior debemos hacer algunas simplificaciones. Podemos suponer, por ejemplo, que para $\theta = 0$ la distancia r del planeta a la estrella es mínima o lo que es lo mimo z es máximo. Esto significa que podemos suponer que $z'(0) = 0$ y $z''(0) > 0$. entonces se deduce que $\alpha = 0$ y $\beta > 0$. La solución tomará la forma

$$z = \beta\cos\theta + \frac{k}{h^2}.$$

Si en lo anterior cambiamos z por $\frac{1}{r}$, aquella se transforma en

$$r = \frac{pE}{1 + E\cos\theta},$$

en donde $p = \frac{1}{\beta}$ y $E = \frac{\beta h^2}{k}$. Este número E se llama la excentricidad de la cónica definida anteriormente.

Puesto que el movimiento del planeta alrededor de la estrella es cerrado, dedujo que la cónica anterior debe ser una elipse. Con ello confirmó la primera ley de Kepler que dice: *Los planetas describen órbitas elípticas en uno de cuyos focos está el sol.*

Ejercicios Propuestos:Curvas y sus aplicaciones

1. Dada la curva

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4(x+y) \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Hallar las ecuaciones paramétricas de Γ.

2. Sea la curva

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 &= 1 \\ z - y &= 1 \end{cases}$$

(a) Hallar una parametrización para Γ.

(b) Hacer un esbozo de la curva Γ considerándola como intersección de dos superficies.

3. La parábola

$$x^2 = 8(y-4), \quad z = 0$$

es la proyección ortogonal de una curva C que se encuentra en la esfera con centro $(0,4,5)$ y radio 3. Hallar las ecuaciones paramétricas y graficar la curva C.

4. Sea C la curva
$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0 \\ x - z + 3 = 0 \end{cases}$$

   (a) Verificar que la proyección ortogonal de C sobre el plano XY es una elipse.

   (b) Hallar el vector tangente en cualquier punto de la curva $P(x, y, z)$ tal que $y > 0$.

5. Hallar una representación paramétrica de una curva que se encuentra en el cilindro de ecuación
$$x^2 + y^2 = a^2$$
y tal que en cualquier punto P de la curva, el ángulo entre el eje Y y la tangente es igual al ángulo entre el radio vector P y la tangente.

6. Hallar sobre la curva Γ con ecuaciones paramétricas
$$x = t^2 \quad , \quad y = \ln(t+2) \quad , \quad z = \frac{t+1}{t-1}$$
los puntos donde su recta tangente pasa por el centro de la esfera
$$\mathcal{E} : x^2 + y^2 + z^2 - 2\beta y + \beta^2 - 4 = 0.$$

7. Demostrar que la curva C descrita por $\alpha(t) = \left(ae^{kt} \cos t, ae^{kt} \sin t, ce^{kt}\right)$ está sobre un cono de revolución.

8. Sean las curvas
$$C_1 : F(t) = e^t(\cos t, sen t, 1),\ 0 \le t \le 2\pi,\ C_2 : G(t) = (t+1, t^2, t+1)$$
¿En cuánto debe incrementarse t para que la longitud de arco de C_1 se incremente en $(e-1)\sqrt{3}$ desde el instante en que C_2 interseca a C_1?.

9. Una partícula que se mueve en el espacio describe una curva C, con vector de posición
$$\alpha(t) = (t, \frac{2}{t}, \ln(t^2)),\ t > 0 \ \text{ y } t \text{ en segundos.}$$
¿En cuánto tiempo recorrerá una longitud de arco de la curva C igual a 9 unidades, desde el punto P_0 donde la recta tangente a la curva descrita por α pasa por el punto $(4, 0, 2 + \ln 4)$?.

10. Sea la función $F(t) = (t - \ln t, \tan(\pi t), \sqrt{2t - t^2})$

    (a) Hallar el intervalo más grande (del dominio de F)para el cual F es la parametrización de una curva en $\mathbf{R}^3$.

    (b) Analizar si F es regular en el intervalo hallado en la parte (a).

    (c) Si Γ es una curva regular descrita por F, de la parte (b), hallar ecuaciones paramétricas de la curva C que resulta de intersecar las rectas tangentes a Γ con el plano XZ.

11. Sea
$$\Gamma : \alpha(t) = (3t^2 - 5, -t + 5, 3t^2 + 5), \ t \in \mathbf{R}$$

(a) Hallar los puntos P_1 y P_2 de Γ tales que la curvatura de Γ toma su valor máximo en P_1 y un vector tangente a Γ en P_2 es paralelo al vector $(6, -1, 6)$.

(b) Hallar la longitud de arco de Γ desde P_1 hasta P_2.

12. Una curva Γ es descrita por la parametrización $F(t) = (2t, e^t, e^{-t})$, $t \in \mathbf{R}$.

(a) Hallar los vectores unitarios T, N y B en el punto $(0, 1, 1)$.

(b) ¿Existe en la curva un punto donde su plano osculador tiene como normal al vector $(\sqrt{2}, -1, 2)$?. En caso afirmativo, hallar la ecuación de dicho plano osculador.

13. La curva C es parametrizada por la función $F(t) = (\sin t, \cos t, \ln \sec t)$, $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Hallar:

(a) La curvatura $k(t)$ en cualquier punto $F(t)$ de la curva.

(b) La longitud del arco de la curva comprendido entre el punto $F(\frac{\pi}{3})$ y el punto donde la curvatura tiene valor $\sqrt{2}$.

14. Una partícula se mueve por el espacio con velocidad
$$V(t) = \left(-3t^2, t^3, e^{t-2}\right) \ , t \geq 0.$$

Hallar la aceleración partícula en el instante, distinto de 0, en que su rapidez coincide con el módulo de su aceleración.

Funciones de varias variables

2.15 Introducción.Función de varias variables

Definición 2.44 *Una función $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de n variables es una regla que asocia a cada n-upla de números reales $(x_1, ..., x_n)$ de algún subconjunto $D(f)$ un único número real $f(x_1, ..., x_n)$.*

Observación 2.13 *La función f definida sobre $\mathcal{D}(f)$ con valores en $\mathbb{R}$ se representa por*

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x_1, ..., x_n) \longmapsto w = f((x_1, ..., x_n)), \end{aligned}$$

y se dice que

$$\begin{array}{lcl} w = f(x_1, ..., x_n) & : & \textit{regla de correspondencia de } f \\ w & : & \textit{imagen de } P \textit{ mediante } f \textit{ (variable dependiente)} \\ (x_1, ..., x_n) & : & \textit{preimagen de } w \textit{ mediante } f \textit{ (variables independientes - argumento de } f) \end{array}$$

El conjunto $\mathcal{D}(f)$ se denomina dominio *de f .*
El conjunto de números reales $f(x_1, ..., x_n)$ se denomina rango *o* imagen *de f.,*

$$\mathcal{R}(f) = \{f(x_1, ..., x_n) : (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{D}(f)\} \subseteq \mathbb{R}.$$

En lo que sigue en adelante consideramos ejemplos de funciones de dos o tres variables independientes.

Ejemplo 2.120 ***(Encontrando un dominio).*** *Encontrar el dominio de definición de función*

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Solución. Se trata de encontrar aquellas parejas de números (x, y), para las cuales tiene sentido la fórmula dada para $f(x, y)$. Es decir, ¿qué valores pueden darse a x e y,de manera que al realizar las operaciones indicadas en la fórmula se obtenga un valor numérico y no tropecemos con una operación imposible?

Es evidente que, en este caso, el dominio de la función es todo el espacio $\mathbb{R}^2$ excepto el origen de coordenadas, es decir, $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, pues la fórmula puede ser calculada para cualquier pareja de números reales, salvo para la pareja (0,0).

Ejemplo 2.121 *(Representando un dominio).Encontrar el dominio de las siguientes funciones y representar su gráfico:*

1. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x - y^2}}$

2. $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}{y}$

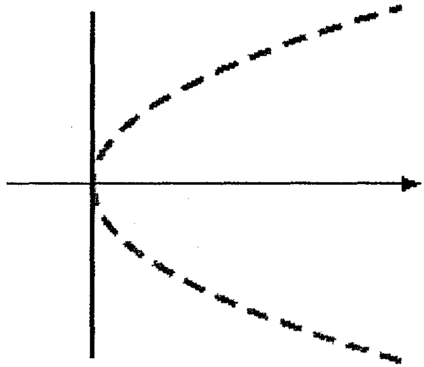
3. $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2 - z^2}}$
4. $f(x,y) = \ln xy$
5. $f(x,y) = \arcsin(x + y)$

Solución

1.Para que la raíz cuadrada $\sqrt{x - y^2}$ esté definida, el radicando no puede ser negativo, luego $x - y^2 \geq 0$, pero, al estar en el denominador, ha de ser distinto de cero, $x - y^2 \neq 0$. En consecuencia, $x - y^2 > 0$.

$$\mathcal{D}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y^2\right\}$$

Luego el dominio de la función coincide con el interior de la parábola, excluido el contorno.



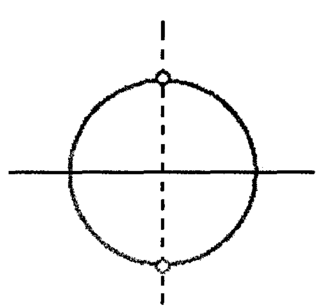
Dominio de la función : $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{xy - y^2}}$

2. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}{y}$

Para que la raíz cuadrada esté definida, el radicando no puede ser negativo, luego $x^2 + y^2 - 4 \geq 0$. Ahora bien, al estar y
en el denominador, no puede ser cero, $y \neq 0$. En consecuencia,

$$\mathcal{D}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4,\ y \neq 0\right\}$$

Exterior de la circunferencia de centro el Origen y radio 2, incluido el contorno y excluido el eje OY. Los puntos (0,2) y (0, -2) quedan excluidos.

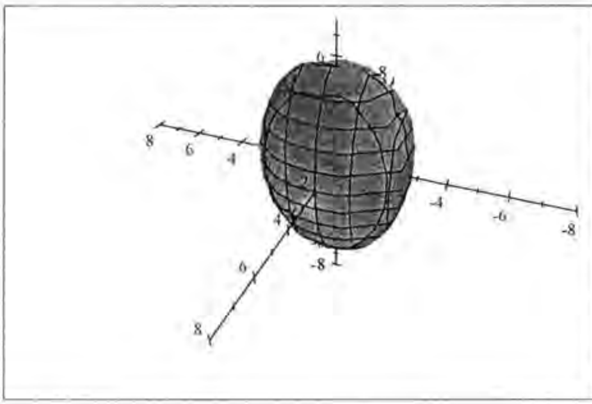


$3. f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{36-4x^2-9y^2-z^2}}$

$$36 - 4x^2 - 9y^2 - z^2 > 0 \Longrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} < 1$$

$$\mathcal{D}(f) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} < 1 \right\}$$

El dominio es el interior del elipsoide con centro el Origen y eje mayor el eje Z, excluido el contorno.



$4. f(x,y) = \ln xy$

$$xy > 0 \Longrightarrow (x > 0 \wedge y > 0) \quad \text{o} \quad (x < 0 \wedge y < 0)$$

$$\mathcal{D}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \wedge y > 0) \quad \text{o} \quad (x < 0 \wedge y < 0)\}$$

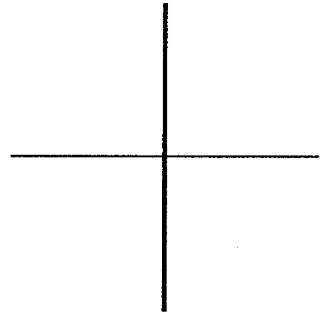
Es decir, el dominio está formado por el primer y el tercer cuadrante, excluidos los ejes de coordenadas.

$5. f(x,y) = \arcsin(x+y)$

esto significa que $x+y$ es el seno de un ángulo. Para que $x+y$ pueda ser el seno de un ángulo ha de estar comprendido

entre 1 y -1, $-1 \leq x+y \leq 1$. En consecuencia

$$-1 \leq x+y \leq 1 \Longrightarrow -x-1 \leq x+y \leq 1-x$$



El dominio es la franja comprendida entre las rectas $y = 1 - x$, $y = -1 - x$, incluidas ambas rectas.

2.15.1 Operaciones con funciones de varias variables

Definición 2.45 *Sean $f : \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathcal{D}(g) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $\mathcal{D} = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) \neq \emptyset$. Entonces se definen:*

1.La función suma de f y g,

$$f + g : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$(f+g)(P) = f(P) + g(P).$$

2.La función producto de f y g,

$$fg : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$fg(P) = f(P) \cdot g(P).$$

3.La función cociente de f sobre g,

$$\frac{f}{g} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$$

por

$$\frac{f}{g}(P) = \frac{f(P)}{g(P)},$$

donde $\mathcal{E} = \{x \in \mathcal{D} : g(P) \neq 0\}$.

Las funciones de varias variables se pueden combinar de la misma forma que las funciones de una sola variable. Por tanto se pueden sumar, restar, multiplicar, dividir, etc.

Definición 2.46 ***(Composición de funciones).*** *Dada la función $f : \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en el conjunto $\mathcal{D}(f)$de $\mathbb{R}^n$ y la función $\varphi : D(\varphi) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en el conjunto $\mathcal{D}(\varphi)$de $\mathbb{R}$, cuyo rango está contenido en $\mathcal{D}(f)$ (es decir, $f(D\varphi) \subseteq D(\varphi)$), entonces se puede formar la composición de φ con f, que representamos por $\varphi \circ f : \mathcal{D}(\varphi \circ f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ donde*

$$\mathcal{D}(\varphi \circ f) = \{P \in \mathcal{D}(f) : f(p) \in \mathcal{D}(\varphi)\}$$

y regla de correspondencia

$$(\varphi \circ f)(P) = \varphi(f(P)).$$

Ejemplo 2.122 *Hallar la función compuesta de la funcióon* $f(x,y) = y - x^2$ *con la función* $\varphi(t) = \sqrt{t}$

Solución. Para poder componer, la función f tiene que actuar primero, y después la φ.En efecto, en esquema, resulta

$$\begin{array}{llllll} f(x,y) = xy - x^2y & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} \\ \varphi(t) = \sqrt{t} & (x,y) & \longmapsto & t & \longmapsto & z \end{array}$$

de donde, la composición buscada, será:
$h(t) = (\varphi \circ f)\, x, y) = (\varphi)(f(x,y)) = \varphi\left(y - x^2\right) = \sqrt{y - x^2}$
Observe que la función resultante de la composición solamente estará definida para aquellos puntos (x,y)en los cuales se cumpla que $y - x^2 \geq 0$, es decir,

$$D(h) = \mathcal{D}(\varphi \circ f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\right\}$$

2.15.2 Gráfica de una función de dos variables

Definición 2.47 *Sea* $f : A \to B$ *definida por* $w = f(u)$, el grafo de f *es el subconjunto de* $A \times B$ *denotado* $\mathcal{G}(f)$ *y definido por*

$$\mathcal{G}(f) = \{(u, f(u)) \in A \times B : u \in A\}.$$

Observación 2.14 *1.La representación gráfica del grafo de una función se denomina* gráfica de la función.

2.Si $f : \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es una función real de variable vectorial, para obtener la gráfica de la función en el espacio* $\mathbb{R}^n$ *dibujamos*

$$w = f(u) \quad con\ u \in \mathcal{D}(f).$$

3.Dada la gráfica de una función f,

Para determinar	*se proyecta ortogonalmente la gráfica sobre*
$\mathcal{D}(f)$	*el espacio* $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{R}(f)$	*el eje vertical*

Así,

$$\mathcal{D}(f) = \Omega \quad y \quad \mathcal{R}(f) = [c,d].$$

Definición 2.48 *Sea* $f : \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es una función real de variable vectorial.Definimos la gráfica de la función* f *como el subconjunto del espacio* $\mathbb{R}^{n+1}$ *que consta de todos los puntos* $((x_1, x_2, ..., x_n), w)$ *en* $\mathbb{R}^{n+1}$ *tales que*
$w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, *para* $(x_1, x_2, ..., x_n, w)$ *en* $\mathcal{D}(f)$.*Es decir,*

$$\mathcal{G}(f) = \{((x_1, x_2, ..., x_n), f(x_1, x_2, ..., x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{D}(f)\}.$$

En el caso de $n = 1$:

Funciones de una variable. La gráfica de una función de una variable, por lo general, es una *curva en el plano.*

Un punto (x,y) del plano para estar situado en la gráfica ha de cumplir dos condiciones: en primer lugar, que su primera coordenada, x,esté en el dominio de la función, $x \in D(f)$; y en segundo lugar, que su segunda coordenada, y, sea la imagen, mediante la función de la primera, es decir, $y = f(x)$. En base a esto, los puntos (x, y) de la gráfica se pueden expresar de la forma $(x, f(x))$.Es decir,

$$\mathcal{G}(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in D(f)\right\}$$

o bien, de manera esquemática,

$$(x, y) \in \mathcal{G}(f) \Leftrightarrow \{x \in D(f) : y = f(x)\}$$

Funciones de dos variable. *La gráfica de una función de dos variables $f(x, y)$ es el conjunto de puntos del espacio (x, y, z) para los cuales se tiene que $z = f(x, y), (x, y) \in D(f)$.*

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in D(f)\}$$

Es decir,

$$(x, y, z) \in \mathcal{G}(f) \Longleftrightarrow z = f(x, y), (x, y) \in D(f)$$

La gráfica de una función de dos variables será una *superficie en el espacio.* La proyección de la gráfica sobre el plano horizontal coincide con el dominio de la función.

Definición 2.49 *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $k \in \mathbb{R}$. Entonces el conjunto de nivel del valor k se define como todos los puntos $P \in \Omega$ tales que $f(P) = k$.Se denota por*

$$\Gamma_k := \{P \in \Omega : f(P) = k,\ k \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo 2.123 *Dada $f(x, y) = x^2 + y^2$.Esbozar $\mathcal{S}$ la* ***gráfica*** *de f, hallando y graficando las intersecciones de $\mathcal{S}$ con los planos coordenados (trazas) y las curvas de nivel*

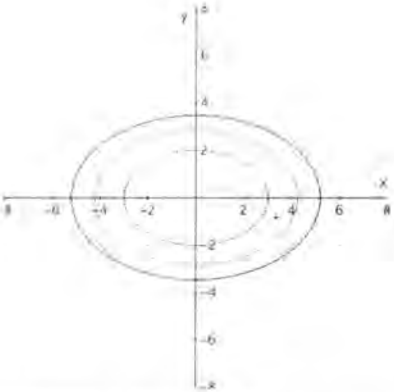
$$\Gamma_k = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f\ (x, y) = k\right\} \quad \text{para } k \in \mathbb{R}.$$

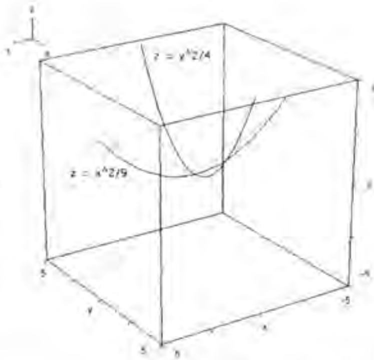
Solución.
$Dom(f) = \mathbb{R}^2$
Las **curvas de nivel** de valor k :

$$\Gamma_k : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = k \Longrightarrow \Gamma_k : \frac{x^2}{\left(3\sqrt{k}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(2\sqrt{k}\right)^2} = 1, k > 0$$

Si $k > 0$, vemos que son elipses, de centro $V(0, 0)$, con eje mayor el eje X.
Γ_0 : es el punto $(0, 0)$.

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &: \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \\
\Gamma_2 &: \frac{x^2}{(3\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1 \\
\Gamma_3 &: \frac{x^2}{(3\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{(2\sqrt{3})^2} = 1
\end{aligned}$$



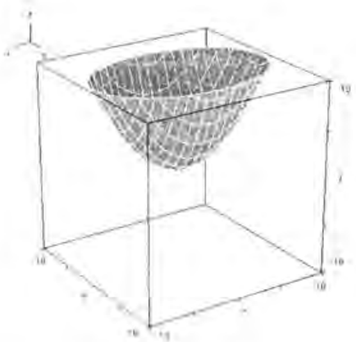


Las **trazas** a los planos coordenados(intersección de la gráfica de f con los planos coordenados $\mathcal{P}_{XZ}$ y $\mathcal{P}_{YZ}$).

$T_{XZ} ::= Gr(f) \cap \mathcal{P}_{XZ} := \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : z = \frac{x^2}{9}\ ,\ y = 0\ \right\}$es una parábola.

$T_{YZ} := Gr(f) \cap \mathcal{P}_{YZ} := \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : z = \frac{y^2}{4} x = 0\ \right\}$es una parábola.

La **gráfica** de f, usando las trazas y las curvas de nivel es :



Ejemplo 2.124 *Dada la función* $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$.

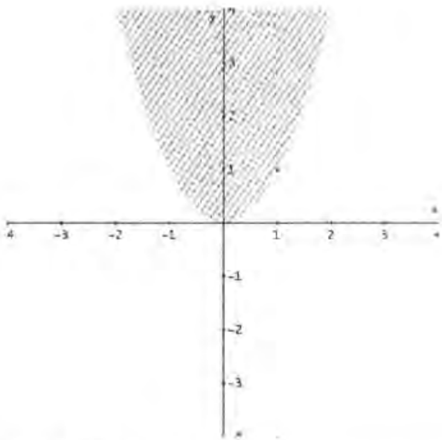
a)Hallar y graficar el dominio de f.

b)Esbozar la ***gráfica*** *de f, hallando y graficando las intersecciones de $\mathcal{S}$ con los planos coordenados (trazas) y las curvas de nivel*

$$\Gamma_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f\ (x,y) = k\right\} \quad para\ k = 0, 1, 2.$$

Solución.

$a)D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\ \right\}$



$b)$Las **curvas de nivel** de valor k :

$$\Gamma_k = \{(x,y) \in D(f) : f\ (x,y) = k\} \quad \text{para } k \in \mathbb{R}.$$

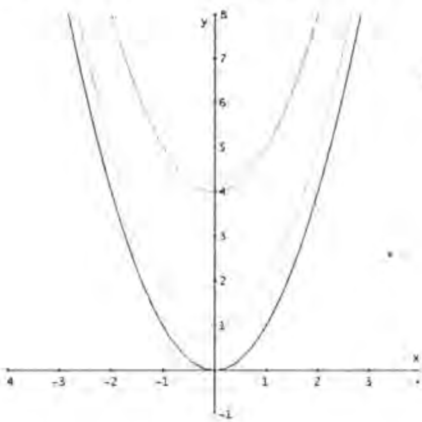
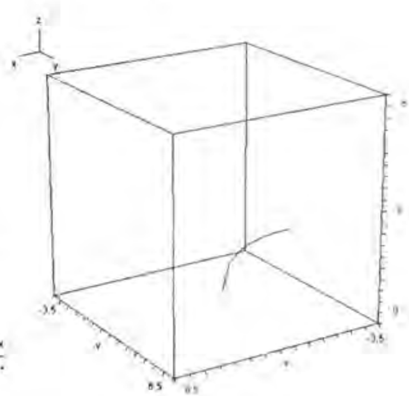
$$\Gamma_k : \sqrt{y - x^2} = k \Longleftrightarrow \Gamma_k : y = x^2 + k^2.$$

Si $k \geq 0$, vemos que son parábolas, de vértice $V\left(0, k^2\right)$, se abre hacia el eje positivo de Y.

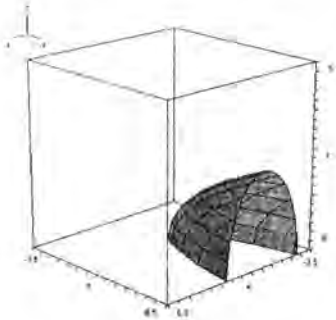
$\Gamma_0 : y = x^2.$
$\Gamma_1 : y = x^2 + 1$
$\Gamma_2 : y = x^2 + 4$

Las **trazas** a los planos coordenados(intersección de la gráfica de f con los planos coordenados $\mathcal{P}_{XZ}$ y $\mathcal{P}_{YZ}$).

T_{XZ} :no existe
$T_{YZ} := Gr(f) \cap \mathcal{P}_{YZ} := \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : z = \sqrt{y}\ ,\ x = 0\ \right\}.$

La **gráfica** de f, usando las trazas y las curvas de nivel es :



Ejemplo 2.125 *Graficar la función:* $f(x,y) = x + y - 3$

Solución. El dominio de la función es $D(f) = \mathbb{R}^2$.

Para representar la función ponemos z en vez de $f(x,y)$,de donde se tiene: $z = x+y-3$, es la ecuación de un plano en el espacio.

Para visualizar el plano en el espacio representamos el triángulo formado por los tres puntos en los que el plano corta a los ejes de coordenadas.

Para hallar las coordenadas de un punto de un plano se dan valores arbitrarios a dos de las variables y se calcula el tercer valor a partir de la ecuaci´on del plano. En nuestro caso, se da el valor cero a dos de las variables y se calcula el valor correspondiente de

la otra variable:

x	y	z
0	0	-3
3	0	0
0	3	0

Las **curvas de nivel** de valor k :

$$\begin{aligned}
\Gamma_k &= \{(x,y) \in D(f) = \mathbb{R}^2 : f\ (x,y) = k\} \text{ para } k \in \mathbb{R}. \\
\Gamma_k &: x + y - 3 = k \Longleftrightarrow \Gamma_k : x + y = k + 3 \\
\Gamma_k &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = k + 3\} \subset \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Para $k \in \mathbb{R}$, vemos que es una familia de rectas.

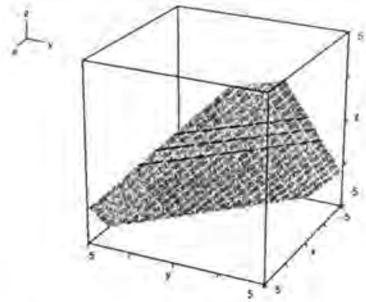
$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &: x + y = 3 \\
\Gamma_1 &: x + y = 4 \\
\Gamma_2 &: x + y = 5
\end{aligned}$$

Las **trazas** a los planos coordenados(intersección de la gráfica de f con los planos coordenados $\mathcal{P}_{XZ}$ y $\mathcal{P}_{YZ}$).

$T_{XZ} := Gr(f) \cap \mathcal{P}_{XZ} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x - 3\ ,\ y = 0\ \}$ es una recta.

$T_{YZ} := Gr(f) \cap \mathcal{P}_{YZ} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = y - 3,\ x = 0\ \}$ es una recta.

La **gráfica** de f, usando las trazas y las curvas de nivel es :



Ejemplo 2.126 *Dada la función*

$$f\ (x,y) = \frac{x^2}{y}.$$

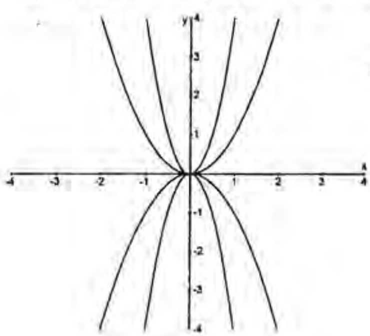
*Esbozar $\mathcal{S}$ la **gráfica** de f, hallando y graficando las intersecciones de $\mathcal{S}$ con los planos coordenados (trazas) y las curvas de nivel*

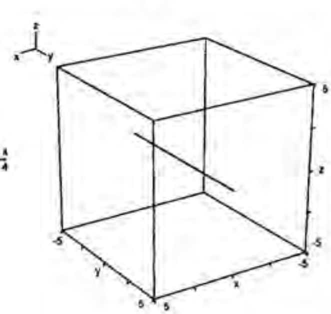
$$N_k = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f\ (x,y) = k\} \quad \textit{para } k = -1, 0, 1.$$

Solución.
$Dom(f) = \mathbf{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y = 0\}$
Las curvas de nivel de valor k:

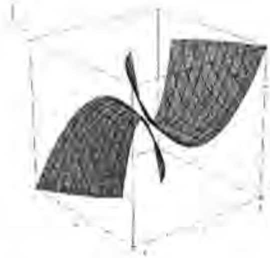
$$N_k : \frac{x^2}{y} = k \Longleftrightarrow \Gamma_k : x^2 = ky.$$

Si $k \neq 0$, vemos que son parábolas, de vértice $V\ (0,0)$, sin el origen de coordenadas.
$N_{-1} : x^2 = -y,\ y \neq 0$
$N_0 : x = 0, y \neq 0$, el eje Y sin el origen.
$N_1 : x^2 = y, y \neq 0$
Las **trazas** a los planos coordenados(intersección de la gráfica de f con los planos coordenados $\mathcal{P}_{XZ}$ y $\mathcal{P}_{YZ}$) son:
T_{XZ} :no existe
$T_{XY} := Gr(f) \cap \mathcal{P}_{XZ} := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : z = 0\ ,\ x = 0\} = \{(0,y,0) : y \neq 0\}$.
$T_{YZ} := Gr(f) \cap \mathcal{P}_{YZ} := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x = 0\ ,\ z = 0\} = \{(0,y,0) : y \neq 0\}$.





La gráfica de f, usando las trazas y las curvas de nivel es :



Observación 2.15 *La ecuación del plano se generaliza al espacio de n dimensiones mediante lo que se denomina hiperplano. Así, tenemos las siguientes representaciones:*

$f(x) = ax + b$ *Recta en el plano*

$f(x, y) = ax + by + c$ *Plano en el espacio*

$f(x_1, ..., x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b$ *Hiperplano en* $\mathbb{R}^{n+1}$

2.16 Límites

Una aplicación $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m, n, m \geq 2$, la denominamos campo vectorial. En el caso en que $m = 1$ la denominamos campo escalar.

Cualquier límite debe definirse en puntos de acumulación del dominio de una función. Un *punto de acumulación* P_0 de $dom(f)$ es un punto de $\mathbf{R}^n$ (que puede pertenecer o no a $dom(f)$) que tiene la propiedad de que tan cerca como se quiera de él, deben existir puntos $P\,(\neq P_0)$ de $dom(f)$.

Cuando consideramos funciones de una sola variable el concepto de límite está referido a la aproximación que hacemos a un punto ya sea por la derecha o por la izquierda. En el caso de campos vectoriales la aproximación a un punto puede hacerse por infinitos caminos. Iniciemos con unos ejemplos:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Si dejamos una variable, por ejemplo x, fija vemos que $f(x, y)$ se aproxima a 0 cuando y se aproxima a 0. Pero si tomamos la recta $x = y$ entonces $f(x, y) = \frac{1}{2}$ y, aunque (x, y) se aproxime a $(0, 0)$, no se tiene que $f(x, y)$ se aproxime a 0.

La siguiente definición es la formalización del hecho intuitivo: el límite de f en P_0 es l, si como sea que se tome $P \in dom(f)$ "muy cerca" de P_0, entonces $f(P)$ estará "muy cerca" de l.

Definición 2.50 *Se dice que el número real l es el límite de f en P_0, si para cada $\varepsilon > 0$ que se considere existe un $\delta > 0$ (por lo general, δ depende de ε y de P_0) tal que:*

$$Si\ P \in dom(f), 0 < \|P - P_0\| < \delta \Longrightarrow |f(P) - l| < \varepsilon$$

En este caso escribimos: $\lim\limits_{P \longrightarrow P_0} f(P) = l.$

Definición 2.51 ***(Límite de una función en un punto en el plano).*** *Sea f una función de dos variables definida en un disco abierto centrado en (x_0, y_0), excepto quizas en el punto (x_0, y_0). Entonces,*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$$

si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente $\delta > 0$ tal que $|f(x,y) - l| < \varepsilon$, siempre que
$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta.$.

Gráficamente, esta definición de límite significa que para un punto cualquiera (x,y) situado en el disco de radio δ, el valor $f(x,y)$ está comprendido entre $L-\varepsilon$ y $L+\varepsilon$.

Hay que tener en cuenta que para que exista el límite *todos* los puntos del entorno tienen que tener su imagen aproximadamente a la misma altura (entre $L-\varepsilon$ y $L+\varepsilon$). Si unos puntos del entorno se aproximan a un valor y otros a otros, entonces el límite no existe.

En la definición de límite, el punto en cuestión no cuenta. Es decir, da igual cuál sea el valor de $f(x_0,y_0)$, incluso da igual que no exista dicho valor. Al poner $0 < \delta$ nos estamos ocupando de todos los puntos del δ-entorno, salvo del centro. No obstante, hay que advertir que en el cálculo de límites de funciones *continuas* dicho valor sí que adquiere gran importancia.

Esto es **lo que no sucede** en el ejemplo anterior, podemos tener puntos $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tales que $\|(x,y) - (0,0)\|$ sea muy pequeña y no obstante $|f(x,y) - 0| = \frac{1}{2}$.

A partir de la definición se pueden demostrar teoremas similares a los teoremas sobre límites conocidos de las funciones del Cálculo.

2.16.1 Propiedades de límites de función vectorial

Proposición 2.17 *Si f es una función de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}$ tales que $\lim_{P\to P_0} f(P)$, y $\lim_{P\to P_0} g(P)$ existen y si P_0 es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$, entonces*

1. $\lim_{P\to P_0} \{f(P) + g(P)\} = \lim_{P\to P_0} f(P) + \lim_{P\to P_0} g(P)$

2. $\lim_{P\to P_0} \lambda f(P) = \lambda \lim_{P\to P_0} f(P)$

3. $\lim_{P\to P_0} f(P) . g(P) = (\lim_{P\to P_0} f(P)) (\lim_{P\to P_0} g(P))$

4. $\lim_{P\to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = \frac{\lim_{P\to P_0} f(P)}{\lim_{P\to P_0} g(P)}$, *si* $\lim_{P\to P_0} g(P) \neq 0$.

Omitimos la prueba de esta proposición, ya que es la misma que la de la proposición correspondiente para funciones de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$.

Ejemplo 2.127 *Demostrar,* ***usando la definición****, que:*

$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} y^2 - xy = 3.$$

Solución.

Dado $\in > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si para todo $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ y $0 < \sqrt{(x-2) + (y+1)^2} < \delta \Longrightarrow |y^2 - xy - 3| < \in$.

Expresamos $|y^2 - xy - 3|$ en términos de $|x-2|$ y $|y+1|$.

Si $0 < \sqrt{(x-2)+(y+1)^2} < \delta$, entonces $|x-2| < \delta$ y $|y+1| < \delta$.

$$\begin{aligned}
\left|y^2 - xy - 3\right| &= \left|[(y+1)-1]^2 - [(x-2)+2]\,[[(y+1)-1]] - 3\right| \\
&= \left|\left[(y+1)^2 - 2(y+1)+1\right] - [(x-2)(y+1) - (x-2) + 2(y+1) - 2] - 3\right| \\
&= \left|(y+1)^2 - 2(y+1) - (x-2)(y+1) + (x-2) + 2(y+1)\right|. \\
\left|y^2 - xy - 3\right| &\leq |y+1|^2 + 2\,|y+1| + |x-2|\,|y+1| + |x-2| + 2\,|y+1|
\end{aligned}$$

Para simplificar esta expresión podemos restringir la elección de δ de modo que $\delta \leq 1$.Entonces, $|x-2| < 1$ y $|y+1| < 1$ y

$$\left|y^2 - xy - 3\right| < \delta + 2\delta + \delta + \delta + 2\delta = 7\delta.$$

Por lo tanto , si elegimos $\delta = \text{mín}\left\{1, \dfrac{\in}{7}\right\}$,

$$\left|y^2 - xy - 3\right| < \in$$

siempre que $0 < \sqrt{(x-2)+(y+1)^2} < \delta$. Lo que prueba lo pedido.

Ejemplo 2.128 *Usando la* ***definición*** *de límite, probar que:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0.$$

Solución.
$D(f) = \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$.
Por demostrar que

$$\forall \in\ > 0\ ,\ \exists\, \delta > 0 : (x,y) \in D(f) \quad \wedge 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Longrightarrow \left|\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}\right| < \ \in$$

Observemos que :

$$\begin{aligned}
\text{De} \quad &: \quad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \text{ se tiene:} \\
|x| \quad &\leq \quad \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Longrightarrow |x| < \delta \\
|y| \quad &\leq \quad \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Longrightarrow |y| < \delta \\
|x| \quad &\leq \quad |x| + |y| \ ,\quad |y| \leq |x| + |y| \quad ;\forall x, y \in \mathbf{R}
\end{aligned}$$

Dado $\in > 0$ tenemos

$$\left|\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}\right| \leq \frac{|x|}{|x|+|y|}\,|x| + \frac{|y|}{|x|+|y|}\,|y| \leq |x| + |y| < \delta + \delta = 2\delta = \in \ ,\quad (x,y) \neq (0,0).$$

Por tanto, basta elegir $\delta = \dfrac{\in}{2}$.

Proposición 2.18 *Si f es una función de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}$ tal que $\lim_{P\to P_0} f(P) = l$, φ es una función contínua en l ,y P_0 es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(\varphi \circ f)$, entonces*

$$\lim_{P\longrightarrow P_0} \varphi(f(P)) = \varphi(l).$$

Prueba.
La prueba es la misma que la prueba de la proposición correspondiente para funciones de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$.
Tomemos $\varepsilon > 0$.Como φ es una función contínua en l, existe un número $\delta > 0$ tal que:

$$|\varphi(y) - \varphi(l)| < \varepsilon \text{ siempre que } y \in \mathcal{D}(\varphi) \text{ y } |y - l| < \sigma.$$

Como $\lim_{P \to P_0} f(P) = l$,existe un número $\delta > 0$ (por lo general, δ depende de ε y de P_0) tal que:

$$\text{Si } P \in \mathcal{D}(f), 0 < \|P - P_0\| < \delta \Longrightarrow |f(P) - l| < \sigma$$

Si $P \in \mathcal{D}(\varphi \circ f)$ y $0 < \|P - P_0\| < \delta$, entonces $|f(P) - l| < \sigma$ y $|\varphi(f(P)) - \varphi(f(l))| < \varepsilon$.

Esto prueba que $\lim\limits_{P \longrightarrow P_0} \varphi(f(P)) = \varphi(l)$.

Proposición 2.19 ***(El teorema del emparedado)***
Si f y g son funciones de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}$ tales que si existe una bola abierta $B(P_0; r)$ tales que

(i) $g(P) \leq f(P) \leq h(P)$ para todo $P \in (B(P_0; r) \setminus \{P_0\}) \cap \mathcal{D}(f \cap g)$
(ii) $\lim\limits_{P \longrightarrow P_0} g(P) = \lim\limits_{P \longrightarrow P_0} h(P) = l$,
entonces $\lim\limits_{P \longrightarrow P_0} f(P)$ existe y

$$\lim_{P \longrightarrow P_0} f(P) = l.$$

2.16.2 Limites restringidos

Cuando existe $\lim\limits_{P \longrightarrow P_0} f(P) = l$, cualquiera que sea la forma en que se tome $P \in dom(f)$, próximo a P_0, siempre se tendrá $f(P)$ próximo a l. Fijada una tal forma, tenemos lo que se llama un *límite restringido de la función f en P_0*.

Por lo general, las formas que se toman son curvas Γ, contenidas en el dominio de la función f, para las cuales P_0 es un punto de acumulación.

Escribimos $\lim\limits_{\substack{P \longrightarrow P_0 \\ P \in \Gamma}} f(P) = l$, para un tal límite restringido.

El siguiente teorema es claro a partir de la definición de límite.

Teorema 2.26 *Si $\lim\limits_{P \longrightarrow P_0} f(P) = l$, entonces para cualquier curva Γ, en el dominio de la función f y tal que P_0 es un punto de acumulación de ella, se tiene: $\lim\limits_{\substack{P \longrightarrow P_0 \\ P \in \Gamma}} f(P) = l$.*

Nota. El teorema sólo es útil para demostrar que $\lim\limits_{P \longrightarrow P_0} f(P)$ *no existe*:
(i)Mostrando que un cierto límite restringido no existe, o, en su defecto,
(ii)Hallando dos límites restringidos diferentes.

Inexistencia de límites

Cuando no sepamos calcular un límite, intentaremos demostrar que dicho límite no existe. Esto lo podemos hacer por dos métodos:
Mediante los límites restringidos.
Mediante los límites iterados.

Límites iterados

Para el cálculo de límites de funciones de varias variables es necesario hacer uso de los conocimientos que tenemos de límites de funciones de una sola variable. Por ejemplo: Si queremos calcular

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y)$$

estamos tentados a calcularlo primero buscando el $\lim_{x\to a} f(x,y)$, dejando la variable y fija, y al resultado que obtenemos le aplicamos $\lim_{y\to b}$. Esto es, calculamos

$$\lim_{y\to b}\left\{\lim_{x\to a} f(x,y)\right\},$$

o también

$$\lim_{x\to a}\left\{\lim_{y\to b} f(x,y)\right\}$$

Estos límites los llamamos *límites iterados.* Desafortunadamente éstos no nos lleva siempre a feliz término. En general tenemos que

$$\begin{aligned}&\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\\ &\neq \lim_{y\to b}\{\lim_{x\to a} f(x,y)\}\\ &\neq \lim_{x\to a}\{\lim_{y\to b} f(x,y)\}.\end{aligned}$$

Inclusive, podemos tener que

$$\lim_{y\to b}\left\{\lim_{x\to a} f(x,y)\right\}=\lim_{x\to a}\left\{\lim_{y\to b} f(x,y)\right\}$$

y no obstante

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\neq\lim_{y\to b}\left\{\lim_{x\to a} f(x,y)\right\}.$$

Veamos algunos ejemplos: Consideremos la función

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}.$$

Nótese que

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0} f(x,y)\right\}=\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} f(x,y)\right\}=0.$$

Ahora, cuando tomamos $x=y$ vemos que $f(x,y)=1$ y cuando $y=2x$ vemos que

$$f(x,y)=4\frac{x^2}{4x^2+1}$$

Esto nos indica que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe debido a que si $(x,y)\to(0,0)$ por la recta $x=y$, entonces $f(x,y)\to 1$. Y si $(x,y)\to(0,0)$ por la recta $y=2x$,entonces $f(x,y)\to 0$

O más extraño aún, podemos tener que

$$\lim_{y\to b}\left\{\lim_{x\to a} f(x,y)\right\}\neq\lim_{x\to a}\left\{\lim_{y\to b} f(x,y)\right\}$$

y no obstante $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ existe. Por ejemplo

$$f(x,y)=\begin{cases} xsen\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0.\end{cases}$$

En este caso, puesto que $|f(x,y)|=\left|xsen\frac{1}{y}\right|\leq|x|$, tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

y

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0} f(x,y)\right\} \neq \lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} f(x,y)\right\},$$

el primer límite es cero y el segundo simplemente no existe.
Ahora, Cuando, entonces, tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{y\to b}\left\{\lim_{x\to a} f(x,y)\right\} = \lim_{x\to a}\left\{\lim_{y\to b} f(x,y)\right\} \quad ?$$

Sólo si:
1. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ existe y
2. Los límites iterados existen y son iguales.

De los ejemplos anteriores concluímos que no hay métodos seguros para calcular el límite de una función de varias variables. El uso de los límites iteredados nos puede servir para *sospechar* quien puede ser el posible límite de la función. Sólamente la definición es la que nos da la certeza de la existencia del límite de la función.

Límites restringidos

Aunque la definición de límite de funciones de dos variables va en total paralelismo con la definición de límite de funciones de una sola variable, existe una diferencia fundamental a la hora de determinar la existencia de un límite. En una variable, la existencia del límite, es equivalente a la coincidencia de los límite laterales. Es decir, para determinar si una función de una variable tiene límite en un punto determinado, solamente necesitamos comprobar qué ocurre al aproximarnos por dos direcciones –por la izquierda y por la derecha–. Si la función tiene el mismo límite por la izquierda y por la derecha podemos concluir que el límite existe. Si embargo, en dos variables esto no es así

En dos variables, en principio, no tiene sentido hablar del límites laterales ¿qué significan derecha e izquierda en el plano?, por eso hablamos de límites *restringidos*, ya que, en dos variables existen infinitos caminos para acercarnos al punto, es más, podemos acercarnos siguiendo un camino recto o un camino curvo. Es decir, al escribir

$$(x,y) \longrightarrow (x_0, y_0)$$

entendemos que el punto (x,y)se aproxima al punto (x_0,y_0) en cualquier dirección. Y, para que exista el límite, los límites siguiendo todas las direcciones o trayectorias tienen que coincidir. La exigencia de la definición a todos los puntos del disco o entorno significa todas las posibles formas de aproximarse. En consecuencia, para ver que una función no tiene límite en un punto se siguen varios caminos de aproximación al punto y si la función tiene un límite distinto por cada camino, entonces el límite "doble" no existe. El problema será determinar si existe un camino que conduce a otra parte. En la práctica los caminos que se suelen seguir son rectas y parábolas. (El camino por rectas se sigue cuando las potencias del denominador son del mismo grado, y el camino por parábolas cuando son de distinto grado, intentando igualar los grados). No debe olvidarse que la recta ha de pasar por el punto en cuestión, es decir su ecuación ha de ser $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Ejemplo 2.129 *Analizar si los siguientes límites existen. Justificar su respuesta.*

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-y^2}{x^3+y}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-3)} \dfrac{x(x-2)}{y+3}$

Solución.

a)Tomando límites restringidos a los caminos $\mathcal{C}: y = mx^3$. Entonces

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{C}}} \frac{x^3-y^2}{x^3+y} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3-(mx^3)^2}{x^3+mx^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-m^2x^3}{m+1} = \frac{1}{m+1}.$$

Para $m=0$, el límite es 1

Para $m=1$ el límite es $\dfrac{1}{2}$.

Así, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-y^2}{x^3+y}$ no existe, pues dos límites restringidos son distintos.

b)Tomando límites restringidos a los caminos $\mathcal{C}: y+3 = m(x-2)$. Entonces

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(2,-3)\\(x,y)\in\mathcal{C}}} \frac{x(x-2)}{y+3} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)}{m(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x}{m} = \frac{2}{m}.$$

Para $m=1$, el límite es 2.

Para $m=2$, el límite es 1.

Así, $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-3)} \dfrac{x(x-2)}{y+3}$ no existe, pues dos límites restringidos son distintos.

Ejemplo 2.130 *Demostrar que* $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy^2z}{x^2+y^2+z^2} = 0.$

Solución.

Observemos que: $y^2 \leq x^2+y^2+z^2, \forall x,y,z \in \mathbf{R}$,

$$0 \leq \left|\frac{xy^2z}{x^2+y^2+z^2}\right| \leq \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} \; |xz| \leq |xz| \;, \quad (x,y,z) \neq (0,0,0).$$

Como $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} |xz| = 0$. Por el Teorema del Sandwich, resulta

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left|\frac{xy^2z}{x^2+y^2+z^2}\right| = 0.$$

Luego, $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy^2z}{x^2+y^2+z^2} = 0.$

Ejemplo 2.131 *Demostrar que* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln\left[\left(x^2+y^2+1\right)^{2x}\right]}{x^2+y^2} = 0.$

Sugerencia. *Usar la desigualdad* : $\ln(z+1) \leq z \; ; \; z \geq 0$.

Solución. Observemos que: $\ln\left(x^2+y^2+1\right) \leq x^2+y^2; \forall x,y \in \mathbf{R}$,

$$0 \;\leq\; \left|\frac{\ln\left[\left(x^2+y^2+1\right)^{2x}\right]}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{2x\;\ln\left(x^2+y^2+1\right)}{x^2+y^2}\right|$$

$$0 \;\leq\; \left|\frac{\ln\left[\left(x^2+y^2+1\right)^{2x}\right]}{x^2+y^2}\right| \leq 2|x| \frac{\ln\left(x^2+y^2+1\right)}{x^2+y^2} \leq 2|x| \;, \; (x,y) \neq (0,0).$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2|x| = 0$.Por el Teorema del Sandwich, resulta

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{\ln\left[\left(x^2+y^2+1\right)^{2x}\right]}{x^2+y^2} \right| = 0.$$

Luego, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln\left[\left(x^2+y^2+1\right)^{2x}\right]}{x^2+y^2} = 0.$

Ejemplo 2.132 *Usando la definición de límite probar que* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{xy-x-y+1}{\sqrt{x^2+y^2-2x-2y+2}} =$ 0.

Solución.
$D(f) = \mathbf{R}^2 - \{(1,1)\}$.
Por demostrar que :dado $\in\, > 0$, $\exists\, \delta > 0$:
$(x,y) \in D(f) \ \wedge 0 < \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} < \delta \Longrightarrow \left| \dfrac{(x-1)\ (y-1)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}} - 0 \right| < \in$

Análisis preliminar :
Observemos que :

$$\text{De} \quad : \quad 0 < \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} < \delta \text{ se tiene:}$$
$$|y-1| \ \leq \ \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} < \delta \Longrightarrow |y-1| < \delta.$$

Dado $\in\, > 0$ tenemos

$$\left| \frac{(x-1)\ (y-1)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}} \right| = \frac{|(x-1)|}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}} |y-1| \leq |y-1| < \delta.$$

Por tanto, basta elegir $\delta = \in$.

Ejemplo 2.133 (a)*Demostrar que el* $(0,0)$ *es un punto de acumulación de la curva* Γ *cuya ecuación es*

$$x = \frac{4-\sqrt{16+y^4}}{y} \ ; y \neq 0.$$

Sugerencia.*Basta demostrar que* $\lim\limits_{y\to 0} x = 0.$

(b) *Usar la parte* (a) *para demostrar que* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y^2}{(8x+y^3)^2}$ ***no existe.***

Solución.
$(a)\ \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{4-\sqrt{16+y^4}}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{16-\left(16+y^4\right)}{y\left(4+\sqrt{16+y^4}\right)} = \lim\limits_{y\to 0} -\dfrac{y^3}{4+\sqrt{16+y^4}} = 0.$
Tomando límite restringido al camino C : $y = 0$. Entonces
$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C}} \dfrac{x^4y^2}{(8x+y^3)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{(8x)^2} = 0.$

(b)Considerando la curva Γ de la parte (a),

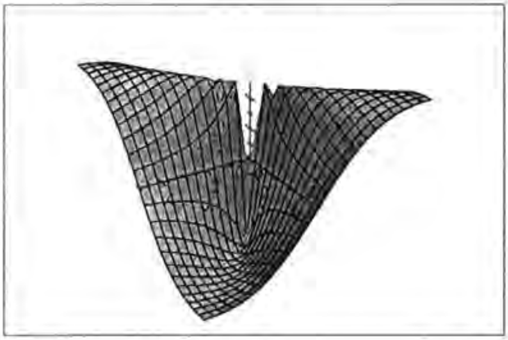
$$\begin{aligned} x &= \frac{4-\sqrt{16+y^4}}{y}\ ; y\neq 0 \Longrightarrow xy = 4-\sqrt{16+y^4} \\ &\Longrightarrow\ 4-xy=\sqrt{16+y^4}\Longrightarrow 16-8xy+x^2y^2=16+y^4 \\ &\Longrightarrow\ x^2y^2=\left(8x+y^3\right)y\Longrightarrow x^4y^2=\left(8x+y^3\right)^2; y\neq 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C}}\frac{x^4y^2}{\left(8x+y^3\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(8x+y^3\right)^2}{\left(8x+y^3\right)^2}=1.$$

Así, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4y^2}{\left(8x+y^3\right)^2}$ no existe, pues dos límites restringidos son distintos.

Ejemplo 2.134 ***(Calculando límites direccionales).*** *Probar que el siguiente límite no existe.*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}.$$



Solución.

Tomando límites restringidos a los caminos $C :=\{(x,y)\in B_r(0,0) : y=mx\}$, nos acercamos al origen a través de la recta $y=mx$.Entonces

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\,(mx)}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{m}{1+m^2}=\frac{m}{1+m^2}.$$

Para $m=0$, el límite es 0

Para $m=1$ el límite es $\frac{1}{2}$.

Así, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ no existe, pues dos límites restringidos son distintos.

Ejemplo 2.135 *Demostrar que el siguiente límite no existe*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^2}{x+y^2}$$

Solución

Tomando límites restringidos a los caminos $C := \left\{(x,y)\in B_r(0,0) : x=my^2\right\}$, nos acercamos al origen a través de trayectorias parabólicas $x=my^2$. Entonces

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C}}\frac{y^2}{x+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{y^2}{m^2y^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{m^2y^2+1}=\frac{1}{m}.$$

Para $m = 1$, el límite es 1
Para $m = 2$ el límite es $\frac{1}{2}$.
Así, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2}{x+y^2}$ no existe, pues dos límites restringidos son distintos.

Ejemplo 2.136 *Demostrar que el siguiente límite no existe.*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$

Solución
Tomando límites restringidos a los caminos

$$\mathcal{C} := \left\{(x,y) \in B_r(0,0) : y = mx^2\right\},$$

nos acercamos al origen a través de trayectorias parabólicas $y = mx^2$.Entonces

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{C}}} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2\left(mx^2\right)}{x^4+\left(mx^2\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2m^2x^4}{x^4+m^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2m^2}{1+m^2} = \frac{2m^2}{1+m^2}.$$

Para $m = 0$, el límite es 0
Para $m = 1$ el límite es 1.
Así, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ no existe, pues dos límites restringidos son distintos.

Ejemplo 2.137 *Demostrar que el siguiente límite no existe*

$$\lim_{(x,y)\to(-5,-2)} \frac{x(x-5)}{y+2}$$

Solución
Tomando límites restringidos a los caminos

$$\mathcal{C} := \{(x,y) \in B_r(5,-2) : y+2 = m(x-5)\},$$

nos acercamos al punto $(5,-2)$ a través de de la recta $y+2 = m(x-5)$ .Entonces

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(-5,-2)\\(x,y)\in\mathcal{C}}} \frac{x(x-5)}{y+2} = \lim_{x\to 5} \frac{x(x-5)}{m(x-5)} = \lim_{x\to 5} \frac{x}{m} = \frac{5}{m}.$$

Para $m = 1$, el límite es 5
Para $m = 2$ el límite es $\frac{5}{2}$.
Así, $\lim\limits_{(x,y)\to(-5,-2)} \dfrac{x(x-5)}{y+2}$ no existe, pues dos límites restringidos son distintos.

Ejemplo 2.138 *Demostrar que* ***no existe*** *el siguiente límite*

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^5}{y^3+y(x-1)^3}.$$

Solución. Tomando límites restringidos a los caminos $\mathcal{C} := \left\{(x,y) \in B_r(1,0) : y = m(x-1)^2\right.$ nos acercamos al punto $(1,0)$ a través de trayectorias parabólicas $y = m(x-1)^2$ .Entonces

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\(x,y)\in\mathcal{C}}} \frac{(x-1)^5}{y^3+y(x-1)^3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^5}{m^3(x-1)^6+m(x-1)^5} \\ L &= \lim_{x\to 1} \frac{1}{m^3(x-1)+m} = \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Para $m = 1$, el límite es 1.

Para $m = 2$, el límite es $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{(x-1)^5}{y^3 + y(x-1)^3}$ no existe, pues dos límites restringidos son distintos.

Ejemplo 2.139 *Demostrar que el siguiente límite no existe.*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 - y^2}{x^2 + 3y^2}$$

Solución

Tomando límites restringidos a los caminos

$$\mathcal{C} := \{(x,y) \in B_r(0,0) : y = mx\},$$

nos acercamos al origen a través de rectas $y = mx$. Entonces

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{C}}} \frac{3x^2-y^2}{x^2+3y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 - (mx)^2}{x^2 + 3(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3 - m^2}{1 + 3m^2} = \frac{3 - m^2}{1 + 3m^2}.$$

Para $m = 0$, el límite es 3

Para $m = 1$ el límite es$\frac{1}{2}$.

Así, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-y^2}{x^2+3y^2}$ no existe, pues dos límites restringidos son distintos.

Ejemplo 2.140 *Demostrar que el siguiente límite no existe.*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

Solución

En este ejemplo ilustraremos el uso de las coordenadas polares: Si hacemos el cambio de variables $x = r\cos\theta$, $y = r\ sen\ \theta$

obtenemos

$$\frac{xy^2}{x^2 + y^2} = r\cos\theta sen^2\theta.$$

Puesto que $\left|r\cos\theta sen^2\theta\right| \le r$ y $r \to 0$ si y sólo si $(x,y) \to (0,0)$, deducimos que por el Teorema del Sandwich, resulta

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Ejemplo 2.141 *Dada la función* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, *definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{xy}, & si\ \ xy \neq 0 \\ 0 & ,\ si\ \ xy = 0 \end{cases}$$

Analizar la existencia del límite $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

Solución.

·Cuando (a,b) es tal que $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{x^3 - y^3}{xy} = \frac{a^3 - b^3}{ab}.$$

(o por cocientes de límites).
·Cuando $(0, b)$ es tal que $b \neq 0$, entonces
$$\lim_{(x,y)\to(0,b)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,b) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - b^3}{xb} = \pm\infty.$$
·Cuando $(a, 0)$ es tal que $a \neq 0$, entonces
$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(a,y) = \lim_{y\to 0} \frac{a^3 - y^3}{ay} = \pm\infty.$$
·Cuando $(a, b) = (0, 0)$ tenemos que al evaluar dicho límites por el camino $\mathcal{C} : y = mx^2$,entonces
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{C}}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,mx^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - (mx^2)^3}{x\,(mx^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - m^2x^6}{mx^3} = \frac{1}{m}.$$
Luego el límite dado no existe, por depender de m.

2.17 Continuidad de funciones de varias variables

Definición 2.52 *Una función f es contínua en P_0 si se cumple* $\lim_{P\longrightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$.

Proposición 2.20 *Si las funciones f y g son funciones de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}$ contínuas en P_0,entonces $f \pm g$, fg y $\frac{f}{g}$(siempre que $g(P_0) \neq 0$) son continuas en P_0.*

Proposición 2.21 *Si f es una función de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}$ continua en P_0 y φ es una función de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ contínua que es continua en $f(P_0)$, entonces $\varphi \circ f$ es continua en P_0.*

Demostración.
Si P_0 no es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(\varphi \circ f)$, entonces $\varphi \circ f$ es continua en P_0.Si P_0 es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(\varphi \circ f)$,entonces, como $\mathcal{D}(\varphi \circ f) \subset \mathcal{D}(f)$, P_0 debe ser un punto de acumulación de $\mathcal{D}(f)$ y $\lim_{P\longrightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$.
Luego de acuerdo con el teorema de límite
$$\lim_{P\longrightarrow P_0} (\varphi \circ f)(P) = \varphi(f(P_0)) = (\varphi \circ f)(P_0).$$

Definición 2.53 *Una función f es contínua si es continua en cada punto de su dominio.*

Proposición 2.22 *Las funciones polinómicas y las funciones racionales son funciones contínuas (en sus respectivos dominios).*

Ejemplo 2.142 *Dada la función* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, *definida por*
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{4x^2+3y^4}} & , \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
Analizar si f es continua en $(0,0)$.

Solución.
Tomando límites restringidos a diferentes caminos, resulta
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{4x^2+3y^4}} = 0$$
Observemos que:

$$2|x| \le \sqrt{4x^2+3y^4}, \forall x,y \in \mathbf{R},$$

$$0 \le \left| \frac{2xy}{\sqrt{4x^2+3y^4}} \right| \le \frac{2|x|\ |y|}{\sqrt{4x^2+3y^4}} \le |y| \ , \quad (x,y) \ne (0,0).$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$.Por el Teorema del Sandwich, resulta

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{2xy}{\sqrt{4x^2+3y^4}} \right| = 0$$

Luego, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{\sqrt{4x^2+3y^4}} = 0 = f(0,0)$. Por lo tanto, f es continua en $(0,0)$.

Ejemplo 2.143 *Sea la función* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, *definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy-2x}{x^2+(y-2)^2} \ , & si \ (x,y) \ne (0,2) \\ 0 \ , & si \ (x,y) = (0,2) \end{cases}$$

Analizar la continuidad de las función f *en* $(0,2)$.

Solución.
Tomando límites restringidos a los caminos $C : =\{(x,y) \in B_r(0,0) : y-2 = mx\}$,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in C}} \frac{x(y-2)}{x^2+(y-2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(mx)}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Para $m = 0$, el límite es 0
Para $m = 2$, el límite es $\frac{1}{2}$.
Así, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x(y-2)}{x^2+(y-2)^2}$ no existe, pues dos límites restringidos son distintos. Por lo tanto, f no es continua en $(0,2)$

Ejemplo 2.144 *Dada la función* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, *definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \ , & si \ (x,y) \ne (0,0) \\ 0 \ , & si \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a)*Demostrar que* f *es* ***continua*** *en* $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$.
(b)*Demostrar que* f *es* ***continua*** *en* $(0,0)$.
Sugerencia: *Use la desigualdad*

$$|\sin t| \le |\ t| \ , \ para\ todo\ t.$$

Solución.
(a)Para $(x,y) \ne \{(0,0)\}$.
$g(x,y) = \sin^2(x+y)$ es continua, pues es composición de funciones continuas.
$h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ es continua, pues es composición de funciones continuas.
Puesto que $h(x,y) \ne (0,0)$, se concluye que $f = \frac{g}{h}$es continua en $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$.
(b)Para $(x,y) = (0,0)$:
Observemos que: $\forall x,y \in \mathbf{R}$

$$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}\ ,\ |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\sin(x+y)| \leq |x+y| \\ &\Rightarrow 0 \leq |\sin(x+y)|^2 \leq |x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2 \\ &\Rightarrow 0 \leq |\sin(x+y)|^2 \leq |x|^2+|y|^2+2|x||y| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left|\frac{\sin^2(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{|\sin(x+y)|^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\left(|x|^2+|y|^2+2|x||y|\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \\ 0 &\leq \left|\frac{\sin^2(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot|x| + \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot|y| + 2\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot|y| \\ 0 &\leq \left|\frac{\sin^2(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq |x|+|y|+2|y| = |x|+3|y|\ ,\ \ (x,y) \neq (0,0) \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (|x|+3|y|) = 0$. Por el Teorema del Sandwich, resulta

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{\sin^2(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = 0$$

Luego, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin^2(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Por lo tanto, f es continua $(0,0)$.

Ejemplo 2.145 *Demostrar que no existe el siguiente límite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{4x^4-3x^2y+y^2}$$

Solución.
Tomando límites restringidos a los caminos $C: y = mx^2$.Entonces

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C}} \frac{x^2y}{4x^4-3x^2y+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(mx^2\right)}{4x^4-3x^2\left(mx^2\right)+\left(mx^2\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{x^4(4-3m+m^2)} = \frac{m}{4-3m+m^2}.$$

Para $m = 0$, el límite es 0

Para $m = 1$ el límite es $\dfrac{1}{2}$.

Así, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{4x^4-3x^2y+y^2}$

Ejemplo 2.146 *Dada la función* $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, *definida por*

$$f\ (x,y) = \begin{cases} \dfrac{6x^3+xy^2}{3x^2+y^2}, & si\ \ (x,y)\ \neq\ (0,0) \\ 0\ , & si\ \ (x,y)\ =\ (0,0) \end{cases}$$

Analizar la continuidad de las función f en $(0,0)$.

Solución

Es suficiente demostrar que el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6x^3+xy^2}{3x^2+y^2} = 0 = f\ (0,0)$$

Observemos que:

$$3x^2 \le 3x^2+y^2, y^2 \le 3x^2+y^2, \forall x,y \in \mathbf{R}$$

$$0 \le \left|\frac{6x^3+xy^2}{3x^2+y^2}\right| \le 2\frac{3x^2}{3x^2+y^2}|x| + \frac{y^2}{3x^2+y^2}|x| \le 3|x| \ , \quad (x,y) \ne (0,0).$$

Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 3|x| = 0$. Por el Teorema del Sandwich, resulta

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{6x^3+xy^2}{3x^2+y^2}\right| = 0$$

Luego, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6x^3+xy^2}{3x^2+y^2} = 0$. Por lo tanto, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6x^3+xy^2}{3x^2+y^2} = f\ (0,0)$. Por lo tanto, f es continua en $(0,0)$.

2.18 Diferenciacion funciones de varias

Derivada direccional de un campo escalar

Definiremos el concepto de derivada en campos escalares para luego generalizar a campos vectoriales.

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar, y sea $P \in \Omega$. Deseamos estudiar la variación de f cuando nos movemos desde P hasta un punto próximo.

Teorema 2.27 *Supongamos que $f'(X+tY,Y)$ existe para todo $t \in [0,1]$. Entonces existe $\theta \in (0,1)$ tal que*

$$f(X+Y) - f(X) = f'(X+\theta Y, Y)$$

Demostración: Es suficiente aplicar el Teorema del valor medio a la función $g(t) = f(X+tY)$, $t \in [0,1]$.

Definición 2.54 *Dado un campo escalar $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; P \in \Omega$, sea U un vector unitario de $\mathbb{R}^n$, se llama* derivada direccional de f en P según el vector unitario U *y se denota y se define por*

$$D_u f(P) = \frac{\partial f(P)}{\partial U} = \lim_{h\to 0} \frac{f(P+hU) - f(P)}{h}$$

Interpretación geométrica

Consideremos la recta $\mathcal{L} = \{Q : Q = P + tU, t \in R\}$
que pasa por el punto P y tiene de vector director el vector unitario U.Sea la función

$$g(t) := f(P+tU).$$

Si una de las dos derivadas $g\prime(t)$ o $\dfrac{\partial f(P+tU)}{\partial U}$ existen, entonces también existe la otra y coinciden:

En particular cuando $t = 0$ tenemos

$$g\prime(0) = \frac{\partial f(P)}{\partial U} = D_u f(P)$$

Luego la derivada direccional $D_u f(P)$ no es más que $g'(0)$ pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(P, f(P)$ que resulta de cortar la superficie por el plano perpendicular al plano $z = 0$ que contiene a la recta $\mathcal{L}$.

Definición 2.55 *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar, sea $P \in \Omega$ si $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$ a la derivada, si existe, de f en P según la dirección e_j para $j = 1, 2, ..., n$ se le llama* derivada parcial con respecto a la variable x_j *se representa*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_j}(P) &= \frac{\partial f}{\partial e_j}(P) = g\prime(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(P+te_j) - f(P)}{h} \\
\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)}{h}
\end{aligned}$$

Consecuencia.
Hallar la derivada parcial respecto a la variable x_j equivale a derivar la función $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que resulta de considerar en $f(P)$,la componente x_j como variable y las restantes como constantes.

Observación 2.16 *El símbolo $D_k f(X)$ se llama la derivada parcial con respecto a la variable x_k. También se usan las siguientes notaciones para la derivada parcial:*

$$D_k f(P) = \frac{\partial f(P)}{\partial x_k} = f_{x_k}(P).$$

Estas notaciones las usaremos indistintamente.

Definición 2.56 *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $P \in \Omega$. Se llama gradiente de f en P y se representa $\nabla f(P)$ al vector*

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \frac{\partial f}{\partial x_2}(P), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)\right)$$

cuyas componentes son las derivadas parciales de f en P

Ejemplo 2.147 *Dada la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\left(y^2 - 2x^2\right)}{x^2 + y^2} &, \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 &, \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Calcular la función $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ especificando su dominio.
(b) Demostrar que f es diferenciable en $(0,0)$.

Solución.
(a) Para $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^5 - 2x^4y - 7x^2y^3}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h.0\left(\dfrac{0^2 - 2.h^2}{h^2 + 0^2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^5 - 2x^4y - 7x^2y^3}{\left(x^2 + y^2\right)^2} &, \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 &, \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(b) De la parte (a), se tiene $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0.h\left(\dfrac{h^2 - 2.0^2}{0^2 + h^2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Para probar que f sea diferenciable en $(0,0)$ bastará demostrar que $L = 0$.

$$L = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|f(h,k) - f(0,0) - \nabla f(0,0).(h,k)\right|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$L = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|\dfrac{hk\left(k^2 - 2h^2\right)}{h^2 + k^2} - 0 - (0,0).(h,k)\right|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$L = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|\dfrac{hk\left(k^2 - 2h^2\right)}{h^2 + k^2}\right|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|hk\left(k^2 - 2h^2\right)\right|}{\sqrt{h^2 + k^2}\left(h^2 + k^2\right)} = 0.$$

Observemos que:

$$|h| \leq \sqrt{h^2+k^2}, |k| \leq \sqrt{h^2+k^2}, \forall h, k \in \mathbf{R}$$

$$0 \leq \left| \frac{hk\left(k^2-2h^2\right)}{\sqrt{h^2+k^2}\left(h^2+k^2\right)} \right| \leq \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \frac{k^2}{h^2+k^2} |k| + 2 \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \frac{h^2}{h^2+k^2} |h| \leq |k| + 2|h|,$$

$(h,k) \neq (0,0)$.

Como $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} (|k| + 2|h|) = 0$. Por el Teorema del Sandwich, resulta

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{hk\left(k^2-2h^2\right)}{\sqrt{h^2+k^2}\left(h^2+k^2\right)} \right| = 0.$$

2.18.1 Diferencial de un campo escalar. Plano tangente

Hemos visto como la existencia de derivadas direccionales no aseguran la continuidad de la función, hagamos un análisis de la situación.

En funciones reales de variable real $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las únicas derivadas direccionales que existen son la derivada por la izquierda y por la derecha y ya sabemos que la simple existencia de estas no aseguran la continuidad de f. La existencia de derivada equivale a que $f(x)$ posea recta tangente en $x = a$.

O lo que es lo mismo:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

Como $\lim\limits_{x\to a} f'(a) = f'(a)$,se puede reescribir la ecuación anterior como

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} f'(a) \\
&\iff \lim_{x\to a} \left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right] = 0 \\
&\iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a} = 0 \\
&\iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)-r(x;a)}{x-a} = 0, \text{ donde } r(x;a) = f(a) + f'(a)(x-a)
\end{aligned}$$

$r(x;a)$ es la mejor aproximación lineal a $f(x)$ en $x = a$

Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, el hecho de que existan las derivadas direccionales en (x_0, y_0) obliga a la existencia de rectas tangentes a $f(x,y)$ en (x_0, y_0) pero esto no garantiza el comportamiento suave de la superficie, lo que si puede hacer es la existencia del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en (x_0, y_0).Ese plano tangente tendrá de ecuación:

$z = a(x-x_0) + b(y-y_0) + c$

Como pasa por $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es $c = f(x_0, y_0)$

$z = a(x-x_0) + b(y-y_0) + f(x_0, y_0)$

Por ser plano tangente a $f(x,y)$ en (x_0, y_0) debe tener las mismas derivadas direccionales que f en (x_0, y_0), en particular las mismas derivadas parciales:

$\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \dfrac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial x} = a$, $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = \dfrac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial y} = b$

Luego el plano tangente deberá ser:

$$z = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) + f(x_0,y_0)$$

Este es el candidato para ser el plano tangente, pero para que efectivamente lo sea debe ser la mejor aproximación lineal a f.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|f(x,y)-z|}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}=0$$

que equivale a :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)\right|}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}=0$$

Usando el hecho de que

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)+f(x_0,y_0) \\
= & \left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)\cdot((x,y)-(x_0,y_0)) \\
= & \nabla f(x_0,y_0)\cdot((x,y)-(x_0,y_0))
\end{aligned}$$

Obtenemos la siguiente condición:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|f(x,y)-f(x_0,y_0)-\nabla f(x_0,y_0)\cdot((x,y)-(x_0,y_0))|}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}=0$$

2.18.2 Regla de la Cadena

Sea $f : S \to \mathbf{R}$, donde S es un conjunto abierto de $\mathbf{R}^n$. Sea $\gamma : [a, b] \to S$ una función vectorial cuya imagen determina una curva en S. Entonces $f \circ \gamma$ determina una función del intervalo $[a, b]$ al conjunto $\mathbf{R}$. Si ambas funciones son diferenciables entonces tenemos la siguiente expresión conocida como regla de la cadena.

$$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle . \quad (1)$$

Para ver (1) es suficiente calcular $g'(t)$, donde $g(t) = (f \circ \gamma)(t)$, y hacer uso de la fórmula de diferenciación.

En efecto, llamemos $g(t) = (f \circ \gamma)(t)$. Sabemos que

$$g(t + h) - g(t) = g'(t)h + o(h).$$

Para ver quien es $g'(t)$ procedemos así: Sea $Y = \gamma(t + h) - \gamma(t)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
g(t + h) - g(t) &= (f \circ \gamma)(t + h) - (f \circ \gamma)(t) \\
&= f(\gamma(t) + Y) - f(\gamma(t)) \\
&= f'(\gamma(t))(Y) + o(\|Y\|) \\
&= \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma(t + h) - \gamma(t)\rangle + o(\|Y\|) \\
&= \langle \nabla f(\gamma(t)), h\gamma'(t) + o_1(h)\rangle + o(\|Y\|) \\
&= \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, h + \langle \nabla f(\gamma(t)), o_1(h)\rangle + o(\|Y\|) \\
&= \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, h + o_2(h),
\end{aligned}$$

en donde $o_2(h) = \langle \nabla f(\gamma(t)), o_1(h)\rangle + o(\|Y\|)$. Dejamos que el lector verifique que $\frac{o_2(h)}{h} \to 0$ si $h \to 0$. Concluímos, entonces, la validez de (1)

Como una aplicación de (1) tenemos el siguiente ejemplo. Supongamos que el campo escalar $f(x, y)$ es tal que cada una de sus variables x e y son funciones de una variable t, ésto es, $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Entonces $f(x, y) = F(t)$. La expresión (1) nos dice que

$$F'(t) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} y'(t).$$

Otra manera sugestiva de escribir (3.4.2) es la siguiente:

$$F'(t) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Por ejemplo: Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$ y supongamos que $x(t) = t$ e $y(t) = t^2$. Entonces $F'(t) = 2t.1 + 2t^2.2t = 4t^3 + 2t$.

Teorema 2.28 $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función de clase* $C^1(\Omega)$ *.Considere el conjunto de nivel*

$$S = \{P \in \Omega : f(P) = k\}.$$

tales que $P_0 \in S$ *con* $f(P_0) = k$ *.Entonces* $\nabla f(P_0)$ *es normal al conjunto de nivel* S*. En el siguiente sentido:*

si u *es el vector tangente en t=0 de una curva* $\Gamma : P = \alpha(t)$, $t \in I$, I *algún intervalo de la recta real, en* S *con* $\alpha(t_0) = P_0$, *entonces* $\nabla f(P_0)$*es ortogonal al vector* u.

Prueba.

Sea la curva $\Gamma : P = \alpha(t)$, $t \in I$,tales que $\nabla f(\alpha(t)) = k$. Sea u como la hipótesis, entonces $u = \alpha'(t_0)$. Aplicando la regla de la cadena: $\frac{d}{dt} f(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}k = 0$,

$$0 = \frac{d}{dt} f(\alpha(t)) \mid_{t=t_0} = \nabla f(P_0) \cdot \alpha'(t_0) = \nabla f(P_0) \cdot u,$$

es decir, u es ortogonal a $\nabla f(P_0)$.

Definición 2.57 *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^1(\Omega)$. Considere la superficie*

$$\mathcal{S} = \{P = (x, y, z) \in \Omega : f(P) = k\}.$$

si $\nabla f(P_0) \neq 0$. Así el plano tangente tangente de $\mathcal{S}$ en un punto P_0 es,

$$\mathcal{P} := \left\{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \nabla f(x_0, y_0, z_0) \, . \, (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0\right\}.$$

Observación 2.17 *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^1(\Omega)$.Considere la gráfica de f :*

$$\mathcal{G}(f) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in \Omega\right\}.$$

Sea

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

Entonces el plano tangente de la gráfica de f en un punto $P_0 \in S = \mathcal{G}(f)$ con

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, -1\right)$$

está definido por la ecuación :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &: \ \nabla f(x_0, y_0, z_0) \, . \, (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \\
\mathcal{P} &: \ \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, -1\right) . \, (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \\
\mathcal{P} &: \ z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0).
\end{aligned}$$

Ya estamos en condiciones de definir cuando un campo escalar es diferenciable.

Ejemplo 2.148 *Sea la superficie $\mathcal{S} : 6x^2 - y^2 - z^2 + 4 = 0$.*

(a)Demostrar que el plano tangente a $\mathcal{S}$ en el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$ es $\mathcal{P} : 6x_0x - y_0y - z_0z + 4 = 0$.

(b)Hallar las ecuaciones cartesianas de todos los planos tangentes a $\mathcal{S}$ que contienen a la recta

$$\mathcal{L} : \begin{cases} y = 4 \\ z + 2x = 0 \end{cases}.$$

Solución.

(a)Llamemos al punto de tangencia $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$. Entonces se tiene que

$$6x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 + 4 = 0 \cdots\cdots (1)$$

Sea $F(x, y, z) = 6x^2 - y^2 - z^2 + 4$, entonces el vector normal al plano tangente será

$$\nabla F(x, y, z) = (12x_0, -2y_0, -2z_0)$$

La ecuación del plano tangente a la superficie $\mathcal{S}$ en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &: (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (12x_0, -2y_0, -2z_0) = 0 \\
\mathcal{P} &: 12x_0 - 2y_0 y - 2z_0 z - 2\left(6x_0^2 - y_0^2 - z_0^2\right) = 0 \\
\mathcal{P} &: 6x_0 x - y_0 y - z_0 z + 4 = 0 \cdots\cdots (2)
\end{aligned}$$

(b)Parametrizando la recta $\mathcal{L}: \begin{cases} y = 4 \\ x = t \\ z = -2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$

$\mathcal{L} : P = (t, 4, -2t)$, $t \in \mathbf{R}$.

Sea $A = (1, 0, -2)$ el vector de dirección de la recta $\mathcal{L}$ y como $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}$ entonces $\nabla F(P_0) \perp A \Longrightarrow \nabla F(P_0) \cdot A = 0 \Longrightarrow (12x_0, -2y_0, -2z_0) \cdot (1, 0, -2) = 0 \Longrightarrow 12x_0 + 4z_0 = 0$, y obtenemos

$$z_0 = -3x_0 \cdots\cdots (3).$$

El punto $(0, 4, 0) \in \mathcal{P} : 6x_0 x - y_0 y - z_0 z + 4 = 0$ entonces $-4y_0 + 4 = 0$, de donde $y_0 = 1 \cdots (4)$.

Reemplazando (3) y (4) en (1) : $6x_0^2 - (1)^2 - (-3x_0)^2 + 4 = 0$, resulta $x_0^2 = 1$,de donde $x_0 = \pm 1$.Luego, $z_0 = \mp 3$.

Así, los puntos de tangencias son :$P_0(1, 1, -3)$ y $P_0'(-1, 1, 3)$.

La ecuación del plano tangente a la superficie $\mathcal{S}$ en los puntos$P_0(1, 1, -3)$ y $P_0'(-1, 1, 3)$ son :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &: 6x - y + 3z + 4 = 0 \quad , \\
\mathcal{P}' &: 6x + y + 3z - 4 = 0 .
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.149 *Sean $\mathcal{S}$ la gráfica de $f(x, y) = \dfrac{4x}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ y $\mathcal{P}$ el plano tangente a $\mathcal{S}$ en el punto $(a, b, 2)$ de $\mathcal{S}$, ubicado en el plano $z = 2$. Hallar la relación entre a y b para que la intersección de $\mathcal{P}$ con el eje Y sea $(0, 1, 0)$.*

Solución.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{4x}{x^2 + y^2}\right) = \dfrac{4y^2 - 4x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{4x}{x^2 + y^2}\right) = -\dfrac{8xy}{(x^2 + y^2)^2}$

Pero $f\ (a, b) = \dfrac{4a}{a^2 + b^2} = 2$ de donde $2a = a^2 + b^2$.

Sea $P_0 = (a, b,\ f\ (a, b)) = (a, b, 2)$.

Entonces el vector normal al plano tangente en el punto $(a, b, 2)$ de $\mathcal{S}$ es

$$\begin{aligned}
N &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1\right) = \left(\frac{4b^2 - 4a^2}{(a^2 + b^2)^2}, \frac{-8ab}{(a^2 + b^2)^2}, -1\right) \\
&= \left(\frac{4b^2 - 4a^2}{(2a)^2}, \frac{-8ab}{(2a)^2}, -1\right) = \left(\frac{b^2}{a^2} - 1, \frac{-2b}{a}, -1\right)
\end{aligned}$$

y la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(a, b, 2)$ es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &: (x - a, y - b, z - 2) \cdot \left(\frac{b^2}{a^2} - 1, \frac{-2b}{a}, -1\right) = 0 \\
\mathcal{P} &: (x - a)\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) - (y - b)\frac{2b}{a} - (z - 2) = 0.
\end{aligned}$$

Pero $(0,1,0)\in\mathcal{P}:(0-a)\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)-(1-b)\frac{2b}{a}-(0-2)=0\Longrightarrow -\frac{b^2}{a}+a-\frac{2b}{a}+\frac{2b^2}{a}+2=0$

$\Longrightarrow\left(\frac{b^2}{a}+a\right)-\frac{2b}{a}+2=0\Longrightarrow 2-\frac{2b}{a}+2=0\Longrightarrow b=2a.$

Ejemplo 2.150 *Dada la función* $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$*, definida por*

$$f\ (x,y)=x\ \phi\left(\frac{y}{x^3}\right)\ ;\ x>0$$

donde

$$\phi:]0,+\infty[\to\mathbf{R}\ ,$$

es una función real diferenciable, de variable real tales que

$$\phi(1)=5\quad y\quad \phi'(1)=1.$$

(a)Hallar la ecuación cartesiana del **plano tangente** *a la gráfica* $z=f\ (x,y)$ *en el punto* $(1,1,\ f\ (1,1))$.

(b)Si $\phi(t)=e^{6t-1}$, ***determinar*** *los puntos de la superficie donde el plano tangente a la gráfica* $z=f\ (x,y)$ *es perpendicular al plano* YZ.

Solución.

(a)Sea $F(x,y,z)=f\ (x,y)-z=x\ \phi\left(\frac{y}{x^3}\right)-z=0$

$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}=\phi\left(\frac{y}{x^3}\right)+x\phi'\left(\frac{y}{x^3}\right).y\left(\frac{-3x^2}{x^6}\right)=\phi\left(\frac{y}{x^3}\right)-\frac{3y}{x^3}\phi'\left(\frac{y}{x^3}\right)$

$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}=\frac{1}{x^2}\ \phi'\left(\frac{y}{x^3}\right)$

$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}=-1.$

Pero $f\ (1,1)=1\ \phi\left(\frac{1}{1^3}\right)=\phi(1)=5.$

Sea

Luego, :

$\frac{\partial F(1,1,5)}{\partial x}=\phi\left(\frac{1}{1^3}\right)-\frac{3(1)}{1^3}\ \phi'\left(\frac{1}{1^3}\right)=\phi(1)-3\ \phi'(1)=5-3(1)=2$

$\frac{\partial F(1,1,5)}{\partial y}=\frac{1}{1^2}\ \phi'\left(\frac{1}{1^3}\right)=\phi'(1)=1$

Así : $\nabla F(2,8,4)=(2,1,-1)$

Ahora, la ecuación del plano tangente a $\mathcal{S}:\ F(x,y,z)=x\ \phi\left(\frac{y}{x^3}\right)-z=0$ en el punto $P_0=(1,1,5)\in\mathcal{S}$, es :

$$\mathcal{P}:(P-P_0)\cdot\nabla F(1,1,5)=0$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\ &:\ 2(x-1)+(y-1)-(z-5)=0\\ \mathcal{P}\ &:\ 2x+y-z+2=0\end{aligned}$$

(b)Sea $P_0=(x_0,y_0,z_0)\in\mathcal{S}:F(x,y,z)=x\ \phi\left(\frac{y}{x^3}\right)-z=0$

Luego, como tal que

$$\mathcal{P}\perp YZ\Longleftrightarrow\nabla F(P_0)\perp(1,0,0)\Longleftrightarrow\nabla F(P_0)\cdot(1,0,0)=0$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{\partial F(P_0)}{\partial x}, \frac{\partial F(P_0)}{\partial y}, \frac{\partial F(P_0)}{\partial z}\right) \cdot (1,0,0) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial F(P_0)}{\partial x} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \phi\left(\frac{y_0}{x_0^3}\right) - \frac{3y}{x_0^3}\phi'\left(\frac{y_0}{x_0^3}\right) = 0.$$

Puesto que $\phi(t) = e^{6t-1}$, $\phi'(t) = 6\ e^{6t-1} = 6\phi(t)$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow &\quad \phi\left(\frac{y_0}{x_0^3}\right) - \frac{3y_0}{x_0^3} \cdot 6\phi\left(\frac{y_0}{x_0^3}\right) = 0 \Longleftrightarrow \phi\left(\frac{y_0}{x_0^3}\right) - \frac{18y}{x_0^3}\phi\left(\frac{y_0}{x_0^3}\right) = 0 \\
\Longleftrightarrow &\quad \left(1 - \frac{18y_0}{x_0^3}\right).\phi\left(\frac{y_0}{x_0^3}\right) = 0 \Longleftrightarrow 1 - \frac{18y_0}{x_0^3} = 0, pues \phi\left(\frac{y_0}{x_0^3}\right) > 0 \\
\Longleftrightarrow &\quad \frac{y_0}{x_0^3} = \frac{1}{18} \Longleftrightarrow y_0 = \frac{x_0^3}{18}.
\end{aligned}$$

$$z = x_0\phi\left(\frac{y_0}{x_0^3}\right) = x_0\phi\left(\frac{1}{18}\right) = x_0.e^{6(\frac{1}{18})-1} = x_0 e^{-\frac{2}{3}}; x_0 > 0$$

Por lo tanto, los puntos de la superficie son: $\left\{(x_0, \frac{x_0^3}{18}, x_0 e^{-\frac{2}{3}}) : x_0 > 0\right\}$.

Ejemplo 2.151 *Hallar el valor de la constante c tal que en todo punto de intersección de las dos superficies esféricas*

$$\left\{\begin{array}{l} (x-c)^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1 \end{array}\right. ,$$

los planos tangentes correspondientes sean perpendiculares uno al otro.

Solución

Podemos escribir ambas esferas como $F_1(x;\ y;\ z) = 3$ y $F_2(x;\ y;\ z) = 1$, respectivamente. Los vectores normales a los planos tangentes correspondientes serán los gradientes de F_1 y F_2 . Sabemos que deben ser perpendiculares y por lo tanto su producto interno debe ser nulo.

$$\left.\begin{array}{l} \nabla F_1 = (2(x-c), 2y, 2z) \\ \nabla F_2 = (2x, 2(y-1), 2z) \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla F_1 \cdot \nabla F_2 = 4x^2 - 4xc + 4y^2 - 4y + 4z^2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - xc + y^2 - y + z^2 = 0 \Rightarrow x^2 - xc - y + 3 - (x-c)^2 = 0$$

Esta última es: $xc - y + 3 - c^2 = 0$

Ahora maniobramos algebraicamente despejando z^2 de las ecuaciones de ambas esferas:

$$\left.\begin{array}{l} z^2 = 3 - (x-c)^2 - y^2 \\ z^2 = 1 - x^2 - (y-1)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 - (x-c)^2 - y^2 = 1 - x^2 - (y-1)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3 - x^2 + 2xc - c^2 - y^2 = 1 - x^2 - y^2 + 2y - 1 \Rightarrow 3 + 2xc - c^2 = 2y \Rightarrow y = \tfrac{3}{2} + xc - \tfrac{1}{2}c^2$$

Introduciendo esto en la ecuación $xc - y + 3 - c^2 = 0$ tenemos:

$$xc - \frac{3}{2} - xc + \frac{1}{2}c^2 + 3 - c^2 = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{2}c^2 = 0 \Rightarrow c = \pm\sqrt{3}.$$

Ejemplo 2.152 *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P_0 \in \Omega$; decimos que f es diferenciable en P_0 si :*
(i)existen las derivadas parciales de f en P_0 y
(ii)$L = \lim\limits_{H \to O} \dfrac{|f(P+H) - f(P) - \nabla f(P) \cdot H|}{\|H\|} = 0$

Al vector $\nabla f(P_0)$ se le llama diferencial de f en P_0 y se representa $Df(P_0)$.

El grán inconveniente de la derivada débil que introdujimos en la sección dos consiste en que ella no implica continuidad. Para subsanar esa debilidad introduciremos, ahora, la noción de derivada fuerte o derivada de Frechet.

Definición 2.58 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar. Decimos que f es* fuertemente diferenciable *en $P \in \mathbf{R}^n$ si existe una transformación lineal $T_P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que para todo $H \in \mathbf{R}^n$ se tiene que*

$$f(P + H) - f(P) = T_P(H) + r(P, \|H\|),$$

en donde $r(P, \|H\|)$ es tal que $\lim_{H\to 0} \frac{|r(P,\|H\|)|}{\|H\|} = 0.$

La *transformación lineal T_P* se le llama la diferencial fuerte de f en el punto P. Es costumbre denotar $T_P = f'(P)$.

Lo primero que debemos advertir de la definición anterior es que si la función f es fuertemente diferenciable en P entonces es débilmente diferenciable en P y las dos derivadas coinciden. Esto es

$$f'(P, H) = f'(P)(H),$$

para todo $H \in \mathbb{R}^n$

También advertimos de la definición (3.3.1) que si f es fuertemente diferenciable en P entonces la función f es continuia en P. Sólo es suficiente tener en cuenta que la *transformación lineal T_P* es siempre una función continua y $T_P(0) = 0$. Además, de la caracterización que hicimos de $r(P, \|H\|)$ concluímos que $r(P, \|H\|) \to 0$ cuando $H \to 0$.

Ahora, sea $H \in \mathbf{R}^n$. Entonces $H = \sum_{k=1}^n h_k e_k$ donde $\{e_1, ..., e_n\}$ representa la base canónica de $\mathbf{R}^n$. Esto es, $e_k = (0, 0..., 1, 0, ...0)$ donde el 1 aparece en el lugar k-ésimo. Por la linealidad de $T_P = f'(P)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} f'(P)(H) &= f'(P)(\textstyle\sum_{k=1}^n h_k e_k) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n h_k f'(P)(e_k) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n h_k f'(P, e_k) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n h_k D_k f(P). \end{aligned}$$

Esto es, podemos expresar la diferencial fuerte en términos de las derivadas parciales de f. En resumen tenemos

$$f'(P)(H) = \sum_{k=1}^n h_k D_k f(P).$$

Si denotamos $\nabla f(P) = (D_1 f(P), ..., D_n f(P)) \in \mathbb{R}^n$ la expresión anterior toma la siguiente forma:

$$f'(P)(Y) = \langle \nabla f(P), Y \rangle .$$

Esto quiere decir que la diferencial fuerte, o simplemente la diferencial, de ahora en adelante, de f en P, $f'(P)$, la podemos representar por medio del vector

$$\nabla f(P) = (D_1 f(P), ..., D_n f(P)) \in \mathbb{R}^n.$$

Este vector es conocido como el gradiente de f en P.

Es muy importante tener una fórmula anterior nos permita calcular la diferecial de un campo escalar, pero la pregunta crucial de esta sección es: Cuando un campo escalar es diferenciable ? La respuesta la tenemos en el siguiente

Teorema 2.29 *$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en P, ésto es, existe $f'(P)$, si las derivadas parciales $D_k f$, $k=1,2...,n$, existen en alguna bola $B(P,r)$ y son continuas en P.*

Demostración: Sea $H \in B(P,r)$. Denotemos con $H_k = \sum_{j=1}^{k} h_j e_j$, además, $H = H_n$ y $H_0 = 0$. Ahora, obsevemos que

$$f(P+H) - f(P) = \sum_{j=1}^{n} \{f(P+H_j) - f(P+H_{j-1})\}$$

nos dice que

$$f(P+H_j) - f(P+H_{j-1}) = h_j D_j f(C_j),$$

en donde C_j es un vector que se encuentra en el segmento que une a los vectores $P+H_j$ y $P+H_{j-1}$. Y cuando $H \to 0$ entonces $C_j \to P$. De lo anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} f(P+H) - f(P) &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} h_j D_j f(P) \\ &\quad + \textstyle\sum_{j=1}^{n} h_j \{D_j f(C_j) - D_j f(P)\}. \end{aligned}$$

Denotemos con

$$r(P, \|H\|) = \sum_{j=1}^{n} h_j \{D_j f(C_j) - D_j f(P)\}.$$

Puesto que las derivadas parciales $D_j f$, $j = 1,2,...,n$, son continuas en $B(P,r)$ es fácil ver que $\frac{|r(P,\|H\|)|}{\|H\|} \to 0$ cuando $\|H\| \to 0$. De lo anterior deducimos que

$$f'(P)(H) = \sum_{j=1}^{n} h_j D_j f(P) = \langle \nabla f(P), H \rangle \quad .$$

Ejemplo 2.153 *Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definido como $f(P) = \|P\|^2$. Calculamos $\nabla f(P)$.*
Solución. *La fórmula (3.3.3) nos dice que*

$$f'(P)(H) = \langle \nabla f(X), H \rangle$$

También sabemos que

$$f'(X)(Y) = f'(X,Y) = 2\langle X, Y \rangle.$$

Por lo tanto obtenemos que $\nabla f(P) = 2P$.

Ejemplo 2.154 *Sea $f(x,y,z) = xy + yz + zx$. Calculamos $f'(a,b,c)(m,n,r)$.*
Solución. *La fórmula anterior nos dice que*

$$f'(a,b,c)(m,n,r) = \langle \nabla f(a,b,c), (m,n,r) \rangle$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \nabla f(a,b,c) &= (D_1 f(a,b,c), D_2 f(a,b,c), D_3 f(a,b,c)) \\ &= (b+c, a+c, b+a). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f'(a,b,c)(m,n,r) &= \langle (b+c, a+c, b+a), (m,n,r) \rangle \\ &= mb + mc + na + nc + rb + ra \end{aligned}$$

2.18.3 Diferenciabilidad y continuidad

Teorema 2.30 *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $P_0 \in \Omega$ si f es diferenciable en P_0, entonces f es continua en P_0.*

2.18.4 Diferencial de campos escalares

Propiedades de la diferencial

Teorema 2.31 *Sean los campos escalares $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:*

1. $D[\lambda f(P)] = \lambda D f(P)$

2. $D[f(P) + g(P)] = Df(x) + Dg(x)$

3. $D[f(P).g(P)] = [Df(P)]g(P) + f(P)[Dg(P)]$

4. $D[\frac{f(P)}{g(P)}] = \dfrac{Df(P)g(P) - f(P)Dg(P)}{[g(P)]^2}$ *;siempre que* $g(P) \neq 0$

Condición suficiente de diferenciabilidad

Lema 2.1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, , a_n)$ supongamos que existen todas las derivadas parciales de f en una bola $B(a,r)$,sea $b = (b_1, b_2, , b_n) \in B(a,r)$, llamemos $x_i = (b_1, b_2, \ldots, a_{i+1}, \ldots, b_n)$ entonces el segmento de $\mathbb{R}^n$,$I_i = [x_{i-1}, x_i]$ para i = 1, 2, , n están en $B(a,r)$ y existen $c_i \in int(I_i)$ tales que:*

$$f(b) - f(a) = \frac{\partial f(c_1)}{\partial x_1}(b_1 - a_1) + \frac{\partial f(c_2)}{\partial x_2}(b_2 - a_2) + \ldots + \frac{\partial f(c_n)}{\partial x_n}(b_n - a_n)$$

Este lema es el equivalente en varias variables del Teorema del Valor Medio para funciones reales de variable real, es necesario para probar el siguiente teorema.

Teorema 2.32 *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si existen todas las derivadas parciales en una bola abierta B(P_0, r) y al menos n - 1 de ellas son continua en P_0 , entonces f es diferenciable en P_0. El recíproco es falso.*

Ejemplo 2.155 *Probar que la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & si \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , si \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es diferenciable en (0, 0) pero sin embargo no verifica las condiciones suficientes de diferenciabilidad del teorema anterior.

Solución. Se deja al lector.

Ejercicios Propuestos : Función real de variable vectorial

LIMITES

1. (a) Analizar si el siguiente límite existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^4x^2}{x^2+y^2}$.

(b) Sean $f(x,y)$ y $g(x,y)$ dos funciones positivas para todo $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ tal que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=0.$$

Demuestre que existe un $\delta>0$ tal que si $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$, entonces $f(x,y) < \frac{1}{2}g(x,y)$.

2. Si existen calcular los siguientes límites.Justificar su respuesta.

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2}$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3. Demostrar que

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$ no existe.

(b) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} xy\sin\left(\dfrac{z}{xy}\right)=0.$

4. Demostrar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln\left[\left(x^2+y^2+1\right)^{2x}\right]}{x^2+y^2}=0.$

Sugerencia. Usar la desigualdad : $\ln(z+1)\le z$; $z\ge 0$.

5. Usando la definición de límite probar que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{xy-x-y+1}{\sqrt{x^2+y^2-2x-2y+2}}=0.$

CONTINUIDAD

6. Analizar la continuidad de la función f en el punto $(0,0)$:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & , \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , \text{ si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

7. Demostrar que la función $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x\ \sin y}{x^2+y^2} & , \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , \text{ si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(a) Es continua en $(x,y)\neq(0,0)$;

(b) Es continua en $(0,0)$.

8. Dada la función $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, definida por

$$f\ (x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^4+3x^3y^2+x^5}{x^4+y^4} & , \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & , \text{ si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(a) Probar que f es **continua** en $(x,y)\neq(0,0)$.

(b) Analizar si f es **continua** en $(0,0)$.

9. Analizar la continuidad en el punto $(0,2)$ para la función:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,2) \\ 2 & \text{si} \quad (x,y)=(0,2)\,. \end{cases}$$

DERIVADAS PARCIALES , GRADIENTE, DERIVADA DIRECCIONAL

10. Analizar la continuidad de la función f en cada (x,y) de $\mathbf{R}^2$y la existencia de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ si $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , & \text{si} \quad (x,y) \quad \neq \quad (0,0) \\ \quad 0 \quad , & \text{si} \quad (x,y) \quad = \quad (0,0) \end{cases} \quad .$$

11. Hallar un ángulo formado por la tangente a la curva $x=t$, $y=t^2$, $z=2t^3$ y la normal del plano tangente a la superficie $z=x^2+3y^2-2xy$, en el punto de intersección de la curva con la superficie.

12. Dada la función

$$f(x,y)=\sqrt{x(x-y)}$$

(a) Graficar su dominio.

(b) Si (a,b) satisface $a(a-b)=0$, hallar todos los vectores unitarios $U=(u_1,u_2)$ para los cuales existe $D_u f(a,b)$.

13. Hallar las derivadas parciales en el punto $(0,0)$ y la derivada direccional en ese punto, en la dirección $u=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ para la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^5}{(x^2+y^2)^3} \quad , & \text{si} \quad (x,y) \quad \neq \quad (0,0) \\ \quad 0 \quad , & \text{si} \quad (x,y) \quad = \quad (0,0) \end{cases} \quad .$$

DIFERENCIABILIDAD Y PROPIEDADES DE LA DERIVADA

14. Usando la definición de función diferenciable, demostrar que la función

$$f\ (x,y)=x^2y+2y$$

es diferenciable en $(0,0)$.

15. Usando la definición de función diferenciable , demostrar que la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{|x|+|y|} \quad , & \text{si} \quad (x,y) \quad \neq \quad (0,0) \\ \quad 0 \quad , & \text{si} \quad (x,y) \quad = \quad (0,0) \end{cases}$$

es diferenciable en $(0,0)$.

16. Demostar que la función $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ no es diferenciable en $(0,0)$ pero es continua allí.

17. Sean f y g funciones diferenciables en $\mathbf{R}^3$. Deducir las siguientes fórmulas:

    (a) $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$

    (b) $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{g\nabla f-f\nabla g}{g^2}$, si $g\neq 0$

18. Si $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ es diferenciable y $F(x,y,z)=f(r)$, donde $r=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}$, demuestre que $\|\nabla F\|=|f'|$.

19. Si $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ es diferenciable y $u=xy\,f\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)$, demostar que u satisface una ecuación diferencial de la forma: $x^2u_x-y^2u_y=G(x,y)\,u$. Hallar la función G.

20. Sea la función $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

    (a) Hallar las funciones $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$,indicando su dominios.

    (b) Analizar la continuidad de las funciones $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en todo punto de $\mathbf{R}^2$.

    (c) ¿Es f es diferenciable en todo punto de $\mathbf{R}^2$?.Justifique su respuesta.

21. Dada la función $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, definida por

$$f(x,y)=xy\sqrt{x^2+y^2}$$

    (a) Hallar las funciones $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $\mathbf{R}^2$.

    (b) Demostrar que la función f es diferenciable en $(x,y)\neq(0,0)$.

DERIVADA DIRECCIONAL ,MÁXIMO CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

22. Dada la función $z=f(x,y)$ donde $z=\sqrt{x^2-y^2}+\sqrt[3]{x^2-y^2}$.

    (a) Sea $g(x,y,z)=f(x,y)-z$.Hallar el vector gradiente de $g(x,y,z)$ en los puntos $(x,y,z)\neq(0,0,0)$.

    (b) Hallar la derivada direccional de f en el punto $(4,3)$ en una de las direcciones del vector tangente a la curva

$$\Gamma:\begin{cases}x+5=y^2\\ z=0\end{cases}$$

23. Sea $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ una función diferenciable en $(1,1)$ con $Df(1,1)\neq(0,0)$.Si la derivada direccional de f en $(1,1)$ alcanza su valor mínimo $-2\sqrt{10}$ según el vector $\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.Calcular la derivada direccional de f en $(1,1)$ según el vector $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

24. Sea $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ una función diferenciable en $P_0\in\mathbf{R}^2$, $u=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ y $v=\left(\frac{5}{13},\frac{12}{13}\right)$ dos valores tales que $D_uf(P_0)=1$ y $D_vf(P_0)=2$.

    (a) Calcular $\nabla f(P_0)$.

    (b) Demostrar que para todos los vectores $W=(p,q)$ unitarios tales que $D_wf(P_0)=0$, se cumple $p=mq$, para cierta constante m.Encontrar la constante m.

25. Sea la función $f(x,y,z)=\sqrt[3]{xy-z^2}$.

    (a) Demostrar que si $xy-z^2\neq 0$ entonces $D_uf(x,y,z)$ existe para todo vector unitario $u\in\mathbf{R}^3$.

    (b) ¿Para qué puntos (x_0,y_0,z_0) tales que $x_0y_0-z_0^2=0$ existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)$?.

    (c) Hallar todos los $u=(u_1,u_2,0)$ unitarios par los cuales existe $D_uf(0,0,0)$.

26. Sea $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ diferenciable en el punto $(0,0)$ tal que $\nabla f(0,0)\neq(0,0)$.Si $u=(a,b)$ es un vector unitario tal que $D_uf(0,0)=2$.Analizar el valor de las siguientes afirmaciones, justificando en cada caso su respuesta

    (a) u y $\nabla f(0,0)$ son ortogonales

    (b) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(ta,tb)-f(a,b)}{t}=2$

    (c) $\|\nabla f(0,0)\|\geq 2$

    (d) Existe el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

27. El potencial eléctrico V en cualquier punto (x,y) del plano se puede calcular con la función
$$V(x,y)=e^{-x}\cos(2y),$$
donde V está dado en voltios y las distancias se miden en pies.

    (a) Calcular la tasa de variación de Ven el punto $\left(1,\dfrac{\pi}{4}\right)$, en la dsirección del vector $(1,1)$.

    (b) Interpretar el número obtenido en (a) , en el contexto físico presentado.

    (c) Determinar en que dirección se obtiene la máxima tasa de variación de Ven el punto $\left(1,\dfrac{\pi}{4}\right)$.¿Cuál es el valor?.

28. Dada la función $f(x,y)=x^2+\cos(x+y)-z^2$, hallar la derivada direccional de f en el punto $Q(1,-1,1)$ y en la dirección de una normal al plano tangente en Q de una superficie de nivel de f.

29. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x,y)=xy-y^2$ en el punto $(3,-1,f(3,-1))$, en la dirección de máximo crecimiento de f.

PLANO TANGENTE

30. Hallar la ecuación cartesiana del plano tangente o los planos tangentes a la gráfica de la función:
$$f(x,y)=3+3x^2+(y-2)^2$$
que contiene a la recta $\mathcal{L}: x=1, z=0$.¿Cuántos de tales planos existen?

31. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^3 - 3x^2 - x + \ln\left(y^2\right) + 3$, si este plano contiene a la recta

$$\mathcal{L} : x = 2\ ,\ y = t,\quad z = -1 - 2t\ ; t \in \mathbf{R}.$$

32. Sea la superficie $\mathcal{S} : z = \ln(xyz)$ .Hallar la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie $\mathcal{S}$ en el punto $(e, 1, 1)$.

33. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie

$$\mathcal{S} : z = 2x - 3y + \frac{\ln\left(x^2 + y^2\right)}{2} + 5\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\ ;\ x \neq 0,$$

en el punto $(1, 0, 2)$ de su gráfica.

34. Sea f la función definida por $f(x, y) = x + y^2$.

   (a) Hallar, simplificando al máximo, la ecuación cartesiana del plano tangente a su gráfica en cualquier punto (x_0, y_0, z_0) , donde $z_0 = x_0 + y_0^2$.

   (b) Hallar todos los planos de la parte (a) que forman con los planos coordenados un tetraedro de volumen $\frac{8}{3}u^3$.

2.18.5 Derivadas parciales de órdenes superiores

Derivadas parciales de segundo orden

Las derivadas parciales de una función de dos variables $f(x, y)$, son, a su vez, funciones de dos variables, $fx(x, y), fy(x, y)$ y, por lo tanto, podemos obtener de ellas, nuevamente, sus derivadas parciales. Llamadas derivadas parciales de segundo orden. Así, resultan las siguientes cuatro derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Para simplificar los paréntesis usaremos la siguiente notación:

$$(fx)x = fxx = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = D_1(D_1 f) = D_{11} f$$

$$(fy)_x = fyx = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = D_1(D_2 f) = D_{12} f$$

$$(fx)y = fxy = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = D_2(D_1 f) = D_{21} f$$

$$(fy)_y = fyy = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = D_2(D_2 f) = D_{22} f$$

Ejemplo 2.156 *Hallar las derivadas parciales de segundo orden de la función*

$$f(x, y) = sen(x^2 y)$$

Solución.

$fx = 2xycos(x^2y)$

$fxx = (fx)x = 2ycos(x^2y) + 2xy(-2xysen(x^2y)) = 2ycos(x^2y) - 4x^2y^2sen(x^2y)$

$fxy = (fx)y = 2xcos(x^2y) + 2xy(-x^2sen(x^2y)) = 2xcos(x^2y) - 2x^3ysen(x^2y)$

$fy = x^2\ cos(x^2y)$

$fyx = (fy)x = 2xcos(x^2y) + x^2(-2xysen(x^2y)) = 2xcos(x^2y) - 2x^3ysen(x^2y)$

$fyy = (fy)y = x2(-x^2sen(x^2y)) = -x^4sen(x^2y)$

Derivadas parciales mixtas.

Las derivadas parciales $fxy, fyx,$ se llaman derivadas parciales mixtas o cruzadas y cuando son continuas coinciden.

Teorema 2.33 ***(Igualdad de las derivadas parciales cruzadas).*** *Si f es una función de dos variables x e y y tal que f, fx, fy, fxy, fyx son continuas en una región abierta $\mathcal{R}$, entonces se tiene que las derivadas parciales cruzadas coinciden para cada $(x,\ y)$ de $\mathcal{R}$,*

$$fxy(x, y) = fyx(x, y)$$

Este teorema se llama *Teorema de Schwartz,* y puede enunciarse en términos más restrictivo de la siguiente forma

Teorema 2.34 *Sea $fyx : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida en el abierto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$. Si las derivadas parciales*

$fxy : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $fyx : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existen y son funciones continuas en $\mathcal{D}$, entonces

$$fxy = fyx$$

El teorema de Schwartz también puede enunciarse en los siguientes términos: *Si fx, fx, fy, fxy, fyx son continuas en un entorno del punto $(x_0,\ y_0)$, entonces existe $fyx(x_0, y_0)$ y se verifica $fyx(x_0, y_0) = fxy(x_0, y_0)$.*

Ejemplo 2.157 *Hallar las derivadas parciales de segundo orden de la función*

$$f(x,y) = x^2ye^{x^2+y^2}.$$

Solución.

$fx = 2xye^{x^2+y^2} + x^2y(2xe^{x^2+y^2}) = (2x^3y + 2xy)e^{x^2+y^2}$

$fxx = (6x^2y + 2y)e^{x^2+y^2} + (2x^3y + 2xy)(2xe^{x^2+y^2}) = (4x^4y + 10x^2y + 2y)e^{x^2+y^2}$

$fxy = (2x^3 + 2x)e^{x^2+y^2} + (2x^3y + 2xy)(2ye^{x^2+y^2}) = (4x^3y^2 + 2x^3 + 4xy^2 + 2x)e^{x2+y2}$

$fy = x^2e^{x^2+y^2} + x^2y(2ye^{x^2+y^2}) = (2x^2y^2 + x^2)e^{x^2+y^2}$

$fyx = (4xy^2 + 2x)e^{x^2+y^2} + (2x^2y^2 + x^2)(2xe^{x^2+y^2}) = (4x^3y^2 + 2x^3 + 4xy^2 + 2x)e^{x^2+y^2}$

$fyy = 4x^2ye^{x^2+y^2} + (2x^2y^2 + x2) \quad (2ye^{x^2+y^2}) = (4x^2y^3 + 6x^2y)e^{x2+y2}$

También tenemos derivadas de orden superior. Por ejemplo denotamos con

$$D_{jk}f(P) = D_j\left(D_kf(P)\right)$$

y es llamada la derivada parcial de orden dos. Otra notación para tal derivada parcial es $\frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_j \partial x_k}$. También, $D_{jj}(f(P)$ la notamos cómo $\frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_j^2}$.

Es importante preguntarse bajo qué condiciones

$$\frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_k \partial x_j}.$$

En términos generales ésto no es cierto. Por ejemplo la función

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

cumple que $D_{21}f(0,0) = -1$ y $D_{12}f(0,0) = 1$. La razón de esta diferencia estriba en que $D_{21}f(x,y)$ y $D_{21}f(x,y)$ no son continuas en el origen. Tenemos el siguiente

Teorema 2.35 *Si las derivadas parciales D_1f, D_2f, $D_{21}f$ y $D_{12}f$ son continuas en un punto (a,b) de un abierto $S \subset R^2$ entonces*

$$D_{12}f(a,b) = D_{21}f(a,b).$$

Demostración: Consideremos la siguiente expresión

$$h(x,y) = f(a+x, b+y) - f(a+x, b) - f(a, b+y) + f(a,b).$$

Si llamamos $g(x) = f(x, b+y) - f(x,b)$ vemos que

$$h(x,y) = g(a+x) - g(a).$$

Aplicamos el teorema del valor medio obtenemos

$$g(a+x) - g(a) = xg'(z),$$

con z entre $a+x$ y a. Ahora,

$$g'(z) = D_1f(z, b+y) - D_1f(z,b)$$

y se transforma en

$$h(x,y) = x\left\{D_1f(z,b+y) - D_1f(z,b)\right\}.$$

Aplicamos de nuevo el teorema del valor medio y obtenemos

$$h(x,y) = xyD_{21}f(z,w),$$

en donde w está entre b y $b+y$.

Aplicamos el mismo procedimiento a la función

$$s(y) = f(a+x,y) - f(a,y)$$

y obtenemos

$$h(x,y) = xyD_{12}f(z',w').$$

De lo expuesto anteriormente se tiene que

$$D_{12}f(z',w') = D_{21}f(z,w).$$

Si hacemos tender (x,y) hacia $(0,0)$ entonces $(z',w') \to (a,b)$ y $(z,w) \to (a,b)$. La hipótesis de continuidad nos asegura que

$$D_{12}f(a,b) = D_{21}f(a,b) \cdot$$

Ejemplo 2.158 *Dada la función*

$$f\ (x,y) = \begin{cases} x^2 sen\left(\frac{y}{x}\right) & , \quad si\ \ x \neq 0 \\ 0 & , \quad si\ \ x = 0 \end{cases}$$

(a) Calcular las funciones $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *especificando su dominios respectivos.*

(b) Hallar $E = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$

Solución.

(a)Para $x \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial\left(x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{\partial x} = 2x\sin\left(\frac{y}{x}\right) - y\cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial\left(x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{\partial y} = x\cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

Para $x = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\sin\left(\frac{y}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\left(\frac{y}{h}\right) = 0,$$

ya que

$$0 \le 0 \le \left| h\sin\left(\frac{y}{h}\right)\right| \le |h|\,, h \neq 0.$$

Como $\lim\limits_{h\to 0} |h| = 0$,por el teorema del sandwich, resulta que $\lim\limits_{h\to 0} h\sin\left(\frac{y}{h}\right) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,y+h) - f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{y}{x}\right) - y\cos\left(\frac{y}{x}\right) & , \quad \text{si} \ \ x \neq 0 \\ 0 & , \quad \text{si} \ \ x = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{y}{x}\right) & , \quad \text{si} \ \ x \neq 0 \\ 0 & , \quad \text{si} \ \ x = 0 \end{cases}$$

$$(b)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0+h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\cos\left(\frac{0}{h}\right)}{h} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

$$E = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1.$$

Ejemplo 2.159 *La propagación del sonido se estudia mediante la ecuación diferencial*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

donde $u(x,t)$ es una función diferenciable en dos variables.
Probar que $u(x,t) = A\sin(x-ct)$; $A, c \in \mathbf{R}$ es ***solución*** *de la ecuación diferencial.*

Solución
$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -cA\cos(x-ct)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = -c^2 A\sin(x-ct) \cdots (1)$
$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = A\cos(x-ct)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -A\sin(x-ct) \cdots (2)$
De (1) y (2) resulta : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = -c^2 A\sin(x-ct) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$

Derivada y continuidad

La *debilidad* de la derivada de Gateaux o derivada débil consite en que ella no implica la continuidad de la función. Consideremos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Es fácil ver que f tiene derivada débil en $(0,0)$ y en la dirección de cualquier vector $P = (a,b)$. En efecto, un cálculo sencillo nos dice que

$$f'\left[(0,0),P\right] = \begin{cases} \frac{b^2}{a} & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

Pero la función no es continua en $(0,0)$. En efecto, hacemos $x = y^2$, observamos que $f(x,y) = \frac{1}{2}$. Para puntos (x,y) próximos a $(0,0)$ no tenemos que $f(x,y)$ sea próximo a 0.

Ejemplo 2.160 *Dada la función*

$$f\ (x,y) = \begin{cases} \dfrac{\left(x^2-y^2\right)^\alpha}{x^2+y^2} \ , & si\ \ (x,y) \neq (0,0) \\ \qquad 0 & ,\ si\ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Analizar la derivada direccional de f en el punto $(0,0)$, en la dirección $v = (a,b) \neq (0,0)$ según los valores de $\alpha \in \mathbf{R}^+$.

Solución.

Consideremos $u = (a,b) \in \mathbf{R}^2$ unitario, por lo tanto , $\|v\| = \sqrt{a^2+b^2} = 1 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 1$.

Luego,

$$D_u f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0+ta, o+tb)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb)}{t}$$

$$D_u f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\left((ta)^2-(tb)^2\right)^\alpha}{(ta)^2+(tb)^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^{2\alpha}\left(a^2-b^2\right)}{t^2\left(a^2+b^2\right)}}{t}$$

$$D_u f(0,0) = \lim_{t\to 0} t^{2\alpha-3}\left(a^2-b^2\right) = \begin{cases} \left(a^2-b^2\right)^{\frac{3}{2}}, & \text{si } \alpha = \frac{3}{2} \\ 0 \ , & \text{si } \alpha > \frac{3}{2} \\ \text{No existe} & \text{si } \alpha < \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Ejemplo 2.161 *Analizar la diferenciabilidad de la función* $f(x,y) = \sqrt[3]{x}y^2$.

Solución.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y^2}{3x^{2/3}},\ x \neq 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\sqrt[3]{x}\ y,\ \ (x,y) \in \mathbf{R}^2.$

Como las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existen, y son continuas en $\mathbf{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \neq 0\}$, pues son funciones elementales las cuales son continuas en $\mathbf{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \neq 0\}$. Entonces por el teorema de condición suficiente se tiene que f es diferenciable en $\mathbf{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \neq 0\}$.

Para $x = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}\ y^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{y^2}{h^{\frac{2}{3}}} = \begin{cases} 0 \ , & \text{si } y = 0 \\ \text{No existe,} & \text{si } y \neq 0 \end{cases}.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{3x^{2/3}}, & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 \ , & \text{si } x = y = 0 \end{cases}.$$

Analizando la diferenciabilidad en $(0,0)$.

En $(0,0)$, tenemos $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

Usamos la definición de diferenciablilidad,

(i) Existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$

(ii) $L = \displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)\ h - f_y(0,0)\ k}{\sqrt{h^2+k^2}}$

$$L = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h}k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Observemos que:

$$|k| \leq \sqrt{h^2+k^2},\ \ \forall h,k \in \mathbf{R}$$

Puesto que ,

$$0 \leq \left|\frac{\sqrt[3]{h}k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq \left|\sqrt[3]{h}\right| |k| \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \left|\sqrt[3]{h}\right| |k|, \quad (h,k) \neq (0,0).$$

Como $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \left|\sqrt[3]{h}\right| |k| = 0$. Por el Teorema del Sandwich, resulta

$$L = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

La función f es diferenciable en $\left(\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \neq 0\}\right) \cup \{(0,0)\}$.

Ejemplo 2.162 *Sea*

$$T(x,y,z) = \frac{500}{x^2+y^2+z^2},$$

la temperatura en el punto (x,y,z).

(a)Hallar la razón de cambio de T en el punto $(2,3,3)$ y en la dirección del vector $(3,1,1)$.

(b)Estando en el punto $(2,3,3)$¿en que dirección se incrementa mas rápidamente la temperatura?.

(c)¿Cuál es el valor de la razón de cambio máxima de T en el punto $(2,3,3)$?

Solución.

(a)

$$f_x(x,y,z) = -\tfrac{1000x}{(x^2+y^2+z^2)^2} \to f_x(2,3,3) = -\tfrac{2000}{(22)^2} = -\tfrac{500}{121}$$

$$f_y(x,y,z) = -\tfrac{1000y}{(x^2+y^2+z^2)^2} \to f_x(2,3,3) = -\tfrac{3000}{(22)^2} = -\tfrac{750}{121}$$

$$f_z(x,y,z) = -\tfrac{1000z}{(x^2+y^2+z^2)^2} \to f_z(2,3,3) = -\tfrac{3000}{(22)^2} = -\tfrac{750}{121}$$

$$\nabla f(2,3,3) = \left(-\tfrac{500}{121}, -\tfrac{750}{121}, -\tfrac{750}{121}\right) = -\tfrac{250}{121}(2,3,3),$$

$$v = \tfrac{(3,1,1)}{\|(3,1,1)\|} = \tfrac{1}{\sqrt{11}}(3,1,1)$$

Luego f_x, f_y, f_z son continuas en el punto $(2,3,3)$.Por el teorema de la condición suficiente f es diferenciable en$(2,3,3)$. Luego, por teorema se tiene que:

$D_v f(2,3,3) = \nabla f(2,3,3)\cdot v = \left(-\tfrac{500}{121}, -\tfrac{750}{121}, -\tfrac{750}{121}\right)\cdot\left(\tfrac{3}{11}\sqrt{11}, \tfrac{1}{11}\sqrt{11}, \tfrac{1}{11}\sqrt{11}\right) = -\tfrac{3000}{1331}\sqrt{11}$

(b)Se incrementa mas en la dirección del $\nabla f(2,3,3)//\left(-2,-3,-3\right)$.

(c)El valor de la razón de cambio máxima de T es : $\|\nabla f(2,3,3)\| = \tfrac{250}{121}\sqrt{22}$

Ejemplo 2.163 *Sea*

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

donde a, b, c son constantes positivas.Hallar los puntos P, donde la derivada direccional máxima de f es igual a 1, sabiendo que dicho valor lo alcanza en la dirección de la recta $\mathcal{L} : x = y = z$.

Solución.

Parametrizando la recta $\mathcal{L} : x = t, t \in \mathbf{R}$ se tiene $\mathcal{L} : P = t\,(1,1,1)$, $t \in \mathbf{R}$.

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{2x}{a^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{2y}{b^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \dfrac{2z}{c^2}$ existen y son continuas.Por el teorema de la condición suficiente f es diferenciable en $\mathbf{R}^3$.Por teorema , existe $D_u\, f(x,y,z)$ en cualquier dirección unitaria u.Por propiedad se tiene:

$$D_u f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)\cdot u$$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right)$$

Considere el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{R}^3$.Entonces $\nabla f(P_0) \parallel (1,1,1)$, entonces existe un $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que $\nabla f(P_0) = \lambda(1,1,1)$

de donde se tiene

$$\frac{2x_0}{a^2} = \lambda, \frac{2y_0}{b^2} = \lambda, \frac{2z_0}{c^2} = \lambda \Longrightarrow x_0 = \frac{\lambda a^2}{2}, y_0 = \frac{\lambda b^2}{2}, z_0 = \frac{\lambda c^2}{2}$$

El valor de la razón de cambio máxima de f es : $\|\nabla f(P_0)\| = \sqrt{\frac{4x_0^2}{a^4} + \frac{4y_0^2}{b^4} + \frac{4z_0^2}{c^4}} = 1,$

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda^2 + \lambda^2 &= 1 \Longrightarrow 3\lambda^2 = 1 \Longrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}. \\ x_0 &= \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{a^2}{2}, \quad y_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{b^2}{2}, \quad z_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{c^2}{2} \end{aligned}$$

Por tanto los puntos son :$P_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{a^2}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{b^2}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{c^2}{2}\right)$ y $P_0' = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{a^2}{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{b^2}{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{c^2}{2}\right)$.

Ejemplo 2.164 *Dada la función $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y + e^y \operatorname{sen} x$. Hallar*

(a)La derivada direccional de f en $(0,0)$ en la dirección del vector $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(b) Un vector unitario U para el cual $D_U f(0,0) = 0$.

Solución.

(a)Como $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x \operatorname{sen} y + e^y \cos x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^x \cos y + e^y \operatorname{sen} x$ existen y son continuas(pues, las funciones exponenciales y trigonométricas sen, cos son continuas en $\mathbf{R}^2$) .Por el teorema de la condición suficiente f es diferenciable en $\mathbf{R}^2$.Por teorema , existe $D_u f(x,y,z)$ en cualquier vector unitario u. Por propiedad se tiene:

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot u$$

$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (e^x \operatorname{sen} y + e^y \cos x, e^x \cos y + e^y \operatorname{sen} x),$

Así, $\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(0,0), \frac{\partial}{\partial y} f(0,0)\right) = (1,1)$.

$D_u f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot u = (1,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$

(b)Consideremos $U = (a,b) \in \mathbf{R}^2$ unitario, por lo tanto , $\|U\| = \sqrt{a^2+b^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \cdots (1)$

$D_U f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot U = (1,1) \cdot (a,b) = a + b = 0 \Longrightarrow b = -a \cdots (2)$.

Reenplazando (2) en (1) ,se tiene : $a^2 + a^2 = 1$, $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Por tanto los vectores pedidos son :$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

Ejemplo 2.165 *Si $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es una función de clase C^1.*

*(a)Demostrar que $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ **decrece más rapido** en el punto $P \in \mathbf{R}^n$, en **dirección opuesta** al vector gradiente $\nabla f(P)$.*

*(b) Usando la parte (a), encontrar la dirección en que la función $f(x,y) = x^4 y - x^2 y^3$ **disminuye** con más rapidez en el punto $P(2,-3)$.*

Solución.

(a)Sea u el vector unitario y como f es una función diferenciable ,entonces la razón de cambio de f en la dirección u es :

$$D_u f(P) = \nabla f(P) \cdot u = \|\nabla f(P)\| \, \|u\| \cos\theta = \|\nabla f(P)\| \cos\theta,$$

donde θ es el ángulo entre u y $\nabla f(P)$. Puesto que $-1 \leq cos\theta \leq 1$ se tiene que

$$-\|\nabla f(P)\| \leq \underbrace{\|\nabla f(P)\| \cos\theta}_{D_u\, f(P)} \leq \|\nabla f(P)\|,$$

entonces esta es mínima cuando $\theta = \pi$; esto es , cuando u y $\nabla f(P)$ son paralelos y de sentido opuestos.

(b) $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(4x^3 - 2xy^3, x^4 - 3x^2y^2\right)$, entonces f decrece más rapido en el punto $P\,(2,-3)$, en dirección opuesta al vector gradiente $\nabla f(P)$. Es decir, $u = -\nabla f\,(2,-3) = -\,(12,-92) = (-12, 92)$.

Ejemplo 2.166 *Sea $\mathcal{S}$ una superficie con ecuación $z = g(x,y)$, donde $z > 0$ satisface la ecuación*

$$x^3 + 4xyz - y^3 + z^3 = 2.$$

Si $(1,-1)$ está en el dominio de g, hallar la ecuación del plano tangente a $\mathcal{S}$ en el punto $(1,-1,g(1,-1))$.

Solución.

Sea $F(x,y,z) = x^3 + 4xyz - y^3 + z^3 = 2$

$\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} = 3x^2 + 4yz$

$\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} = 4xz - 3y^2$

$\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} = 3z^2 + 4xy.$

Sean $g\,(1,-1) = c$ y $P_0 = (1,-1,g(1,-1)) = (1,-1,c) \in \mathcal{S} : 1 - 4c + 1 + c^3 = 2$
$\Longrightarrow c\left(c^2 - 4\right) = 0$, de donde $c = 0$ o $c = \pm 2$.Por tanto $c = 2$.

Asì, $\nabla F\,(1,-1,2) = (-5,5,8)$

Ahora, la ecuación del plano tamgente a $\mathcal{S}$ en el punto $P_0 = (1,-1,2) \in \mathcal{S}$, es :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &: (P - P_0) \cdot \nabla F\,(1,-1,2) = 0 \\
\mathcal{P} &: -5(x-1) + 5(y+1) + 8(z-2) = 0 \\
\mathcal{P} &: 5x - 5y - 8z + 6 = 0.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.167 *Sean $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una función, $U = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), V = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}), W = (0,1)$ vectores de $\mathbf{R}^2$ tales que $D_U\ f\,(1,1) = 2$, $D_V\ f\,(1,1) = 0$, $D_W\ f\,(1,1) = 1$.*

(a)¿Es f diferenciable en $(1,1)$?Justificar su respuesta.

(b)¿Si $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es una función tal que $\nabla f(P_0)$ existe, entonces f es diferenciable en P_0?.Justificar su respuesta.

Solución.

(a)Si f es diferenciable en $(1,\,1)$, entonces $\forall$vector unitario$A$, se tiene $D_A f\,(1,1) = \nabla f\,(1,\,1) \cdot A$

Sea $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (a,b)$,

$D_U f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot U = (a,b) \cdot (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\sqrt{3} = 2 \Longrightarrow a = 4 - b\sqrt{3} \cdots (1)$.

$D_V\ f\,(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot V = (a,b) \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}a\sqrt{3} + \frac{1}{2}b = 0 \Longrightarrow b = -a\sqrt{3} \cdots (2)$.

Resolviendo (1) y (2), resulta $a = 4 + 3a$, $a = -2$, $b = 2\sqrt{3}$

Con estos datos se tiene $D_W f(1,\ 1) = \nabla f(1,1)\cdot W = (a,b)\cdot(0,1) = b = 2\sqrt{3}$ lo que contradice al tercer dato.$D_W\ f\ (1,1) = 1$.

Por lo tanto f no es diferenciable en $(1,\ 1)$.

(b)Es Falso. **Por ejemplo**, considere la función $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Entonces se tiene
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0$. Luego existe $\nabla f(0,0)=(0,0)$.

Pero f **no es continua** en $(0,0)$, pues $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ no existe. Por tanto f **no es diferenciable** en $(0,0)$.

Otro ejemplo, considere la función $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Entonces se tiene
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0$.Luego existe $\nabla f(0,0)=(0,0)$.

Usamos la definición de diferenciablilidad,

(i) Existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.

(ii) $L=\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)\ h-f_y(0,0)\ k}{\sqrt{h^2+k^2}}$

$L=\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{hk}{h^2+k^2}$

Por tanto f **no es diferenciable** en $(0,0)$, pues $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{hk}{h^2+k^2}$ no existe.

Ejemplo 2.168 *Dada la función*

$$f\ (x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^\alpha\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\right), & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(a)*Hallar* α *de manera que existan* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0),\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(b)*Si* $\alpha=1$, *analizar si la función* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *es continua en* $(0,0)$.

(c)*Hallar* α *de manera que* f *sea diferenciable en el punto* $(0,0)$.

(d)*Sea* $g(x,y)=(x^2-y^2)\ f(x,y)$ *y* $\alpha=-\dfrac{1}{2}$.*Hallar todos los* ***vectores unitarios*** $u=(u_1,u_2)\in\mathbf{R}^2$ *tales que* $D_u g(0,0)$ ***existen.***

Solución.

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(h^2+0^2)^\alpha\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{(h^2+0^2)^\alpha}\right)}{h}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} h^{2\alpha-1} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h^{2\alpha}}\right)$

Observemos que:

$$|\operatorname{sen}(\theta)| \leq 1, \forall \theta \in \mathbf{R}$$

Se tiene

$$0 \leq \left| h^{2\alpha-1} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h^{2\alpha}}\right)\right| \leq |h|^{2\alpha-1}, h \neq 0$$

Como $\lim_{(h,k)\to(0,0)} |h|^{2\alpha-1} = 0$, para $2\alpha - 1 > 0, \alpha > \frac{1}{2}$.Por el Teorema del Sandwich, resulta

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| h^{2\alpha-1} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h^{2\alpha}}\right)\right| = 0.$$

Luego, existe $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ si $\alpha > \frac{1}{2}$.

Similarmente se puede ver que:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(h^2\right)^{\alpha} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{(h^2)^{\alpha}}\right)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} h^{2\alpha-1} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h^{2\alpha}}\right) = 0.$$

(b)Si $\alpha = 1$:

Para $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial\left(\left(x^2+y^2\right)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right)}{\partial x} = 2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{(x^2+y^2)}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

Así,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Pero $\frac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$, ya que no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.

Esto último lo podemos justificar de la siguiente forma:

Cuando $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$, pero no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$, ya que por ejemplo si hacemos el camino $C : y = x$,no existe $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{2x^2}\right)$.

Este último lo podemos ver tomando la sucesión $x_n = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}, x_n \longrightarrow 0$ y

$$\lim_{x_n\to 0} \frac{1}{x_n}\cos\left(\frac{1}{2x_n^2}\right) = \lim_{x_n\to 0} 2\sqrt{n\pi}\cos(2n\pi) = \infty.$$

Por tanto, $\frac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$

(c)Por parte (a), se tienen que existen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ si $\alpha > \frac{1}{2}$.

Falta ver :

$$L = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(h,k) - f(0,0) - \nabla f(0,0).(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|\left(h^2+k^2\right)^{\alpha} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{(h^2+k^2)^{\alpha}}\right)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$L = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left|\left(h^2+k^2\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{(h^2+k^2)^{\alpha}}\right)\right| = 1$$

Observemos que:

$$|\operatorname{sen}(\theta)| \leq 1, \forall \theta \in \mathbf{R}$$

Se tiene

$$0 \leq \left| \left(h^2+k^2\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} \text{ sen}\left(\frac{1}{(h^2+k^2)^{\alpha}}\right) \right| \leq \left|h^2+k^2\right|^{\alpha-\frac{1}{2}}, (h,k) \neq (0,0).$$

Como $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \left|h^2+k^2\right|^{\alpha-\frac{1}{2}} = 0$, para $\alpha - \frac{1}{2} > 0, \alpha > \frac{1}{2}$.Por el Teorema del Sandwich, resulta

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \left(h^2+k^2\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} \text{ sen}\left(\frac{1}{(h^2+k^2)^{\alpha}}\right) \right| = 0.$$

Por lo tanto, f no es diferenciable en $(0,0)$, si $\alpha > \frac{1}{2}$

(d)Para $\alpha = -\dfrac{1}{2}$:

$D_u f(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(hu_1,hu_2)-g(0,0)}{h}$

$D_u f(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\left((hu_1)^2-(hu_2)^2\right)\left((hu_1)^2+(hu_2)^2\right)^{\alpha} \text{ sen}\left(\frac{1}{\left((hu_1)^2+(hu_2)^2\right)^{\alpha}}\right)}{h}$

$D_u f(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2\left(u_1^2-u_2^2\right)h^{2\alpha} \text{ sen}\left(\frac{1}{h^{2\alpha}}\right)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \left(u_1^2-u_2^2\right)h^{2\alpha+1} \text{ sen}\left(\dfrac{1}{h^{2\alpha}}\right) =$

$D_u f(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \left(u_1^2-u_2^2\right)h^{2\alpha+1} \text{sen}\left(\dfrac{1}{h^{2\alpha}}\right)$.Por lo tanto,

$D_u f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } u_2 = \pm u_1 \\ \text{no existe} \quad , & \text{si } u_2 \neq \pm u_1 \end{cases}$

La $D_u f(0,0)$ existe si y sólo si si $u_2 = \pm u_1$,como $u = (u_1,u_2) \in \mathbf{R}^2$ unitario, por lo tanto , $\|u\| = \sqrt{u_1^2+u_2^2} = 1 \Leftrightarrow u_1^2+u_2^2 = 1 \Leftrightarrow 2u_1^2 = 1 \Leftrightarrow u_1 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ entonces $u_2 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.Por lo tanto, $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}).(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ y $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ son los vectores pedidos.

Ejemplo 2.169 *Dada la función $f(x,y) = y^2\sqrt{x}$, $x \geq 0$.Demostrar que si $x > 0$ entonces existe $D_u f(x,y)$ para todo vector unitario $u \in \mathbf{R}^2$.*

Solución.

$$f_x(x,y) = \tfrac{y^2}{2\sqrt{x}}, x \neq 0$$
$$f_y(x,y) = 2y\sqrt{x}$$

Luego f_x, f_y son continuas en $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0\}$. Por el teorema de la condición suficiente f es diferenciable en D. Por tanto para cada punto $(x,y) \in D$, existen todas las derivadas parciales y en cualquier dirección unitaria $u \in \mathbf{R}^2$.

Ejemplo 2.170 *Dada la función $f(x,y) = \arctan\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) + x^2y, (x,y) \neq (0,0)$. Sean $\mathcal{S}$ la* gráfica *de f y el plano $\mathcal{P} : x - y = 0$. Verificar que el vector tangente a la curva $\Gamma := \mathcal{S} \cap \mathcal{P}$, es **ortogonal** al vector gradiente a $\mathcal{S}$ en el punto $P_0 = (1,1,f(1,1))$.*

Solución.
$f(1,1) = \frac{\pi}{4} + 1$

Definamos $\mathcal{S} : g(x,y,z) = \arctan\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) + x^2y - z$, entonces

$$\begin{array}{c} f_x(x,y) = \frac{2(x^2+y^2)-4xy}{(x^2+y^2)^2+4x^2} + 2xy \to f_x(1,1) = 2 \\ f_y(x,y) = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2+4x^2} + x^2 \to f_y(1,1) = \frac{1}{2} \end{array}$$

$\nabla g(x,y,z) = (f_x(x,y), f_y(x,y), -1)\,, \nabla g(1,1,\frac{\pi}{4}+1) = (2,\frac{1}{2},-1)$.

Parametrizando la curva $\Gamma := \mathcal{S} \cap \mathcal{P} : \begin{cases} z = \arctan\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) + x^2y \\ x - y = 0 \end{cases}$

Sea $x = t$,se tiene $y = t$ entonces $z = \arctan\left(\frac{2t}{t^2+t^2}\right) + t^3 = \arctan\left(\frac{1}{t}\right) + t^3, t \neq 0$.

Así, $\Gamma : \alpha(t) = \left(t, t, \arctan\left(\frac{1}{t}\right) + t^3\right), t \in]0,+\infty[$,

entonces $\alpha'(t) = \left(1,1,3t^2 - \frac{1}{t^2+1}\right)$,luego $\alpha'(1) = \left(1,1,\frac{5}{2}\right)$.

Ahora,

$\nabla g(P_o)\cdot\alpha'(1) = (2,\frac{1}{2},-1)\cdot(1,1,\frac{5}{2}) = 2 + \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = 0$. Por tanto, $\nabla g(P_o) \perp \alpha'(1)$.

Ejemplo 2.171 *Dada la función* $f\ (x,y) = \arctan\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) + x^2y, (x,y) \neq (0,0)$. *Sean* $\mathcal{S}$ *la* gráfica *de* f *y el plano* $\mathcal{P} : x - y = 0$. *Verificar que el vector tangente a la curva* $\Gamma := \mathcal{S} \cap \mathcal{P}$*, es* ***ortogonal*** *al vector gradiente a* $\mathcal{S}$ *en el punto* $P_0 = (1,1,f(1,1))$.

Solución.

$$\begin{array}{c} f_x(x,y) = \frac{y^2}{2\sqrt{x}}, x \neq 0 \\ f_y(x,y) = 2y\sqrt{x} \end{array}$$

Luego f_x, f_y son continuas en $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0\}$.Por el teorema de la condición suficiente f es diferenciable en D. Por tanto para cada punto $(x,y) \in D$,existen todas las derivadas parciales y en cualquier dirección unitaria $u \in \mathbf{R}^2$.

$f(1,1) = \frac{\pi}{4} + 1$

Definamos $\mathcal{S} : g(x,y,z) = \arctan\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) + x^2y - z$, entonces

$$\begin{array}{c} f_x(x,y) = \frac{2(x^2+y^2)-4xy}{(x^2+y^2)^2+4x^2} + 2xy \to f_x(1,1) = 2 \\ f_y(x,y) = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2+4x^2} + x^2 \to f_y(1,1) = \frac{1}{2} \end{array}$$

$\nabla g(x,y,z) = (f_x(x,y), f_y(x,y), -1)\,, \nabla g(1,1,\frac{\pi}{4}+1) = (2,\frac{1}{2},-1)$.

Parametrizando la curva $\Gamma := \mathcal{S} \cap \mathcal{P} : \begin{cases} z = \arctan\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) + x^2y \\ x - y = 0 \end{cases}$

Sea $x = t$, se tiene $y = t$ entonces $z = \arctan\left(\frac{2t}{t^2+t^2}\right) + t^3 = \arctan\left(\frac{1}{t}\right) + t^3, t \neq 0$.

Así, $\Gamma : \alpha(t) = \left(t, t, \arctan\left(\frac{1}{t}\right) + t^3\right), t \in]0,+\infty[$,

entonces $\alpha'(t) = \left(1,1,3t^2 - \frac{1}{t^2+1}\right)$, luego $\alpha'(1) = \left(1,1,\frac{5}{2}\right)$

Ahora,

$\nabla g(P_o)\cdot\alpha'(1) = (2,\frac{1}{2},-1)\cdot(1,1,\frac{5}{2}) = 2 + \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = 0$. Por tanto, $\nabla g(P_o) \perp \alpha'(1)$.

Ejemplo 2.172 *Sea la función* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *definida por*

$$f\ (x,y) = \sqrt[3]{xy}$$

(a)*Hallar las función* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *,indicando su dominio.*

(b)*Hallar todos los vectores unitarios* $U = (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2$ *para los cuales existe* D_U $f(0,0)$.

(c)Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *en el punto correspondiente a* $x = 8,\ y = 1.$

Solución.

(a)Se tiene que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{y}{x^2}}$; si $x \neq 0.$

Si $x = 0 : \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{y}}{h^{\frac{2}{3}}},$

solamente existe la derivada parcial cuando $y = 0.$

Entonces tenemos :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{y}{x^2}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$

(b)Consideremos $U = (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2$ unitario, por lo tanto , $\|U\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1 \Leftrightarrow u_1^2 + u_2^2 = 1 \cdots (1)$

$f(0,0) = \sqrt[3]{0.0} = 0.$

Luego

$$\begin{aligned} D_U f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0) + h(u_1,u_2)) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(hu_1, hu_2)}{h} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{(hu_1)(hu_2)}}{h} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{u_1 u_2}}{h} \\ D_U f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{u_1 u_2}}{h^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

El límite existe si y sólo si

$$u_1.u_2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 0 \ \vee .u_2 = 0.$$

Si $u_1 = 0$. En $(1) : u_1^2 + u_2^2 = 1 \Leftrightarrow 0^2 + u_2^2 = 1 \Leftrightarrow u_2 = \pm 1$.Así, $u = (0, \pm 1)$.

Si $u_2 = 0$.En $(1) : u_1^2 + u_2^2 = 1 \Leftrightarrow u_1^2 + 0^2 = 1 \Leftrightarrow u_1 = \pm 1$.Así, $u = (\pm 1, 0)$.

Por lo tanto, $(0,-1)$,$(0,1)$, $(-1,0)$ y $(1,0)$ son los vectores pedidos.

(c)Tenemos $g(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{y}{x^2}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$

entonces $g(8,1) = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{1}{8^2}} = \dfrac{1}{12}$. Se tiene que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\frac{2}{9}\sqrt[3]{\frac{y}{x^5}} \text{ y } \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{9}\sqrt[3]{\frac{y}{x^2 y^2}}.$$

Entonces el vector normal al plano tangente es

$$N = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(8,1), \frac{\partial g}{\partial y}(8,1), -1\right) = \left(-\frac{1}{144}, \frac{1}{36}, -1\right) \parallel (-1, 4, -144)$$

y la ecuación del plano tangente a la gráfica de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en el punto $\left(8,1,\dfrac{1}{12}\right)$ es

$$\mathcal{P}:\left(x-8,y-1,z-\frac{1}{12}\right)\cdot(-1,4,-144)=0.$$

Es decir,

$$\mathcal{P}:4y-x-144z+16=0.$$

Ejercicios Propuestos:Derivadas de orden superior

1. Si $u\,(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, encontrar la constante a tal que para todo $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3-\{(0,0,0)\}$ se cumple

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=\frac{a}{u}.$$

2. Si $z=x\;f\;(x+y)+y\;g\;(x+y)$,donde f y g tienen derivadas continuas de segundo orden, probar que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

3. Sea $f\,(x,y,z)=g\,(r)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.Hallar

   (a) $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}$.

   (b) La función g más general tal que $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=0$.

4. Si f es una función de x verificando la ecuación $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\lambda^2 f\,(x)=0$ y g es una función de t que satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}+a^2\lambda^2 g(t)=0.$$

   Demostrar que la función $u=f\,(x)\;g(t)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.$$

5. Sea $u:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, una función de clase C^2 en $\mathbf{R}^2$. Demostrar que u es de la forma $u=f\,(x)\,g\,(y)\Longleftrightarrow u$ satisface la ecuación: $u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

   Sugerencia: Para demostrar $(\Longleftarrow)$ calcular$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$ siendo $v=\ln u$.

2.19 Máximos y Mínimos

2.19.1 Máximos y Mínimos sin restricciones

La función

$$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$$

alcanza en en $(0,0)$ su máximo valor. Es claro que

$$f(x,y) \leq f(0,0) = 1,$$

para todo $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Un cálculo sencillo nos indica que

$$\nabla f(0,0) = (0,0).$$

Análogamente,

$$f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$$

alcanza en $(0,0)$ su mínimo valor, ésto es $f(x,y) \geq f(0,0) = 1$. En este caso también $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Tenemos, entonces la siguiente

Definición 2.59 *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, en donde Ω es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.*

(a)Decimos que $P_0 \in \Omega$ es un punto máximo local o máximo relativo *de f si existe una bola $B(P_0,r) \subset \Omega$ tal que $f(P_0) \geq f(P)$, para todo $P \in B(P_0,r)$.*

(b)Decimos que $P_0 \in \Omega$ es un punto mínimo local o mínimo relativo *de f si existe una bola $B(P_0,r) \subset \Omega$ tal que $f(P_0) \leq f(P)$, para todo $P \in \Omega$.*

(c)Decimos que $P_0 \in \Omega$ es un punto máximo global o máximo absoluto *de f tal que $f(P_0) \leq f(P)$, para todo $P \in \Omega$.*

(d)Decimos que $P_0 \in \Omega$ es un punto máximo global o máximo absoluto *de f tal que $f(P_0) \leq f(P)$, para todo $P \in \Omega$.*

(e)Decimos que f tiene extremo relativo en el punto $P_0 \in \Omega$ *si f tiene un* máximo o *mínimo* relativo *en P_0.*

existe una bola $B(P_0,r) \subset \Omega$ tal que $f(P_0) \leq f(P)$, para todo $P \in \Omega$.

Definición 2.60 *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se dice que f tiene punto crítico en $P_0 \in \Omega$ si $\nabla f(P_0) = \overrightarrow{0}$ o no existe algunas derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(P_0)$ (P_0 es un punto singular).*

Definición 2.61 *Decimos que f tiene un punto P_0 de ensilladura al punto crítico interior de Ω que no es ni máximo ni mínimo local.En términos generales, P_0 es un punto de silla si para todo $r > 0$ existen puntos $P, Q \in B(P_0,r)$ tales que $f(P) > f(P_0)$ y $f(Q) < f(P_0)$.*

Definición 2.62 *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se dice que f tiene punto crítico en $P_0 \in \Omega$ si $\nabla f(P_0) = \overrightarrow{0}$ o no existe algunas derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(P_0)$ (P_0 es un punto singular).*

Definición 2.63 *Decimos que f tiene un punto P_0 de ensilladura al punto crítico interior de Ω que no es ni máximo ni mínimo local.En términos generales, P_0 es un punto de silla si para todo $r > 0$ existen puntos $P, Q \in B(P_0,r)$ tales que $f(P) > f(P_0)$ y $f(Q) < f(P_0)$.*

Teorema 2.36 Condiciones necesarias para valores extremos

La función $f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tiene valor extremo local o absoluto en un punto P_0 de Ω si P_0 es:

(a) Un punto crítico de f.

(b) Un punto frontera de Ω. Es decir, $P_0 \in \partial\Omega$.

Demostración

Supongamos que P_0 pertenece al dominio de f. Si el punto $P_0 \notin \partial\Omega$, entonces debe pertenecer al interior del dominio y si en P_0 todas las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(P_0)$ existen, entonces existe $\nabla f(P_0)$. Por otro lado, si P_0 no es un punto crítico de f , entonces $\nabla f(P_0) \neq 0$, por lo que f tiene derivada direccional negativa en la dirección de $-\nabla f(P_0)$; es decir, f crece si nos movemos desde P_0 en una dirección y decrece si nos movemos en la dirección opuesta por consiguiente, f no puede tener un valor máximo ni mínimo en P_0. Por tanto, todo punto donde se produzca un valor extremo debe ser un punto crítico de f o un punto frontera de f.

Teorema 2.37 Condiciones suficientes para la existencia de valores extremos

Si $f : \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es continua en un conjunto cerrado y acotado $\mathcal{K}$ en $\mathbb{R}^n$.Entoces f alcanza valores máximos y mínimos absolutos.

Ejemplo 2.173 *Analizar si la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tiene valores extremos*

$$f(x,y) = xy.$$

Solución

Determinación de los puntos críticos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$$
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \cdots (1) \\ y = 0 \cdots (2) \end{cases}$$

Así, los puntos críticos son:

$$P.C = \{(0,0)\}.$$

Analizando en $(0,0) : f(0,0) = 0$.

Observemos que en este caso $\nabla f(0,0) = (0,0)$ y no obstante el punto $(0,0)$ no es de máximo ni de mínimo. Observe que $f(x,y) > 0$ para $x > 0$ y $y > 0$ como también para $x < 0$ y $y < 0$. En cambio, para $x < 0$ y $y > 0$, como también para $x > 0$ y $y < 0$, vemos que $f(x,y) < 0$. Esto nos indica que $(0,0)$ no es máximo ni mínimo.

Por otro lado:

Considerando el camino $\mathcal{C}_1 := \{(x,y) \in B_r(0,0) : y = x\}$, se tiene que

$g(x) = f(x,x) = x^2 \geq 0 = f(0,0)$

la función f tiene, en $(0,0)$, un punto mínimo en $\mathcal{C}_1$.

Considerando el camino $\mathcal{C}_2 := \{(x,y) \in B_r(0,0) : y = -x\}$, se tiene que

$g(x) = f(x,-x) = -x^2 \leq 0 = f(0,0)$

la función f tiene, en $(0,0)$, un punto máximo en $\mathcal{C}_1$.

En este caso decimos que $(0,0)$ es un punto silla.

Ejemplo 2.174 *Sea* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $P_0 \in \Omega$ *tal que existen y son continuas las derivadas parciales de segundo orden* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *para todo* $i, j = 1, \ldots, n$ *en* $B(P_0, r)$. *Entonces se define la* matriz hessiana *de* f *en* $P_0 \in \Omega$ *como*

$$H_f(P_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x_i^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0) \right).$$

Por el teorema de Schwartz, la matriz hessiana es simétrica.Llamaremos *hessiano* de f en P_0 al determinante de la matriz hessiana.

En términos generales, P *es un punto de silla si en toda bola* $B(P, r)$ *encontramos puntos* Q *tales que* $f(Q) > f(A)$ *y otros para los cuales* $f(Q) < f(P)$.

Los puntos P *tales que* $\nabla f(P) = 0$ *se llaman puntos críticos o estacionarios.*

Vamos, ahora, a obtener un resultado que nos permita clasificar los puntos estacionarios. Antes de ello introduciremos la siguiente notación: La matriz

$$(D_{ij} f(P)) = H_f(P),$$

de orden $n \times n$, *se llama la matriz hessiana de* f *en* P_0. *Es fácil ver que, para* $H = (h_1, h_2, ..., h_n)$,

$$\langle H_f(P_0)H, H\rangle = \sum_{j=}^{n} \sum_{i=1}^{n} D_{ij} f(P_0) h_i h_j.$$

Nuestro principal resultado es el siguiente:

Teorema 2.38 *(Fórmula de Taylor de segundo orden) Supongamos que* f *tiene derivadas parciales de segundo orden continuas en* $B(P, r)$. *Entonces*

$$f(P + H) - f(H) \quad = \langle \nabla f(P), H\rangle + \tfrac{1}{2!} \langle H_f(P)H, H\rangle + o\left(\|H\|^2\right).$$

Demostración: Sea $g(t) = f(P + tH)$. Puesto que f tiene derivadas parciales de segundo orden continuas la función g admite un desarrollo de *Taylor* de orden dos en el intervalo $[0, 1]$. Esto es,

$$g(1) - g(0) = g'(0) + \frac{1}{2!} g''(s),$$

para algún $s \in (0, 1)$.
Ahora,

$$g'(s) = \langle \nabla f(P + sH), H\rangle = \sum_{j=1}^{n} D_j f(P + sH) y_j.$$

Entonces

$$g''(s) = \sum_{i=1}^{n} D_i \left(\sum_{j=1}^{n} D_j f(P + sH) h_j \right) h_i = \langle H_f(P + sH)H, H\rangle,$$

en donde $H = (h_1, h_2, ..., h_n)$.

Ahora, sea

$$h(s) = \langle \{H_f(P+sY) - H_f(A)\} H, H\rangle .$$

Entonces, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$|h(s)| \leq \|H_f(P+sH) - H_f(P)\| \, \|H\|^2 .$$

Como f tiene derivadas parciales de segundo orden continuas tenemos que

$$\frac{|h(s)|}{\|H\|^2} \to 0 \text{ cuando } H \to 0.$$

Esto es, $h = o\left(\|H\|^2\right)$. Para terminar sólo nos resta remplazarla a $g''(s)$ por $\langle H_f(P)H, H\rangle + h(s)$ y obtenemos inmediatamente.

Si las derivadas parciales de segundo orden son continuas entonces

$$D_{ij}f(P) = D_{ji}f(P)$$

y la matriz $H_f(P)$ es simétrica. Podemos, entonces, hacer un cambio de variable que nos permita presentar la matriz en forma diagonal. Sabemos que en esa diagonal aparecerán los *valores propios* de la matriz hessiana, digamos que son: $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Es así cómo la forma cuadrática $\frac{1}{2!}\langle H_f(P)H, H\rangle$ la podemos escribir cómo

$$\frac{1}{2!}\langle H_f(P)H, H\rangle = \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n} \lambda i.h_i^2 \qquad (3.7.6)$$

Clasificación de los Puntos Críticos

Supongamos que P es un punto crítico, o estacionario, de f, entonces $\nabla f(A) = 0$. Por lo tanto, obtenemos

$$f(P+H) - f(P) = \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n} \lambda i.h_i^2 + o\left(\|H\|^2\right),$$

y observamos que el signo de $f(P+H) - f(P)$, para H muy pequeño, es el signo de la forma cuadrática $\sum_{i=1}^{n} \lambda i.h_i^2$. Deducimos entonces que

1. *Si los valores propios $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de la matriz hessiana en A son todos positivos, el punto A es mínimo.*

2. *Si los valores propios son todos negativos, el punto A es máximo.*

3. *Si los valores propios son unos negativos y otros positivos, el punto A es silla.*

4. *Si por lo menos uno de los valores propios es cero, el criterio de los valores propios no decide.*

Observación

Es evidente que la matriz Hessiana es efectivamente simétrica. La matriz Hessiana agrupa de forma ordenada todas las derivadas parciales de orden dos de una función. Igual que en el caso de una variable exigimos que la segunda derivada sea positiva o negativa para garantizar la existencia de un máximo o mínimo, aquí exigiremos que la matriz Hessiana sea definida positiva o negativa. Definamos primeramente lo que entendemos por matriz definida positiva o negativa.

Definición 2.64 *Dada una matriz cuadrada* $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathcal{M}_n$, *decimos que* A *es*
(i) definida positiva si todos sus valores propios son números reales positivos,
(ii) definida negativa si todos sus valores propios son números reales negativos.

Es evidente que, una vez que conozcamos la función f y el punto P, podremos calcular Hess(f) (p) que será una matriz para la cual podremos estudiar sus valores propios y determinar si es definida positiva o negativa. En la siguiente propiedad vemos cómo los conceptos de matriz definida positiva y negativa convierten a la matriz hessiana en el análogo en varias variables de la segunda derivada.

Proposición 2.23 *Dada* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $P_0 \in \Omega$ *supongamos que en* una caja abierta que contiene al punto p existen y son continuas todas las derivadas parciales de segundo orden de f. Supongamos también que

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(P_0) = 0, \forall j = 1, ..., n.$$

Entonces:

(i) Si la matriz Hess(f) (P_0) es definida positiva, en el punto P_0, f alcanza un mínimo relativo.

(ii) Si la matriz Hess(f) (P_0 es definida negativa, en el punto P_0, f alcanza un máximo relativo.

En la práctica resulta útil la siguiente propiedad que permite estudiar si una matriz es definida positiva o negativa sin necesidad de calcular sus valores propios.

Proposición 2.24 *(Clasificación mediante menores principales). Dada la matriz cuadrada* $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathcal{M}_n$, *llamamos menores principales de* A *a los determinantes*

$$\lambda_1 = |(a_{11})|, \quad \lambda_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \lambda_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \lambda_n = |A|.$$

Entonces se verifica que

(1) *A es definida positiva* $\Longleftrightarrow \lambda_i > 0, \forall i = 1, ..., n.$

(2) *A es definida negativa* $\Longleftrightarrow (-1)^i\lambda_i > 0, \forall i = 1, ..., n.$

Ilustremos lo anterior con un ejemplo.

Ejemplo 2.175 *Consideremos la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

Hallar los puntos críticos f *y analizar su naturaleza.*

Solución

Es claro que $\nabla f(x, y) = (-2x, -2y)$. Por lo tanto el punto crítico de f es el vector $(0, 0)$. Por otra parte, la matriz hessiana de f en $(0, 0)$ es

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} D_{11}f(0,0) & D_{12}f(0,0) \\ D_{21}f(0,0) & D_{22}f(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -2$. Entonces, como los *valores propios* son negativos, $(0, 0)$ es un punto máximo.

Ejemplo 2.176 *Consideremos la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

tiene en $(0,0)$ *un punto crítico. Los valores propios de la matriz hessiana* $H_f(0,0)$ *son iguales a* 0. *Es fácil*

ver que $(0,0)$ *es un punto de silla.*

Ejemplo 2.177 *Sea la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y) = x^2y^2$$

tiene en $(0,0)$ *un punto crítico. Los valores propios de la matriz hessiana* $H_f(0,0)$ *son iguales a* 0. *Es fácil ver que* $(0,0)$ *es un punto mínimo.*

Ejemplo 2.178 *Sea la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \left(y - x^2\right)\left(y - 2x^2\right).$$

El siguiente ejemplo nos muestra cómo una función puede tener, en un punto A, *un mínimo cuando restringimos la función a cualquier recta que pasa por él y no obstante el punto* P *es silla.*

Si hacemos $y = mx$, *vemos que* $f(x,mx) = m^2x^2 + 3x^4 - 3mx^3$ *tiene en* $x = 0$ *un punto de mínimo. Esto es, sobre la recta* $y = mx$ *la función* f *tiene en* $(0,0)$ *un punto de mínimo. También, sobre la recta* $x = 0$ *la función tiene en* $(0,0)$ *un punto de mínimo. No obstante podemos encontrar puntos* (x,y) *en cualquier vecindad de* $(0,0)$ *para los cuales* $f(x,y) > 0$ *y otros tales que* $f(x,y) < 0$.

Ejemplo 2.179 *Hallar los puntos críticos de la función*

$$f(x,y) = x^3 - 2y^2 - 2y^4 + 3x^2y$$

y analizar su naturaleza.

Solución.

Determinación de los puntos críticos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial\left(x^3 - 2y^2 - 2y^4 + 3x^2y\right)}{\partial x} = 6xy + 3x^2 = 3x(x+2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial\left(x^3 - 2y^2 - 2y^4 + 3x^2y\right)}{\partial y} = 3x^2 - 4y - 8y^3$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3x(x+2y) = 0 \cdots (1) \\ 3x^2 - 4y - 8y^3 = 0 \cdots (2) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} x = 0 \vee x = -2y \\ 3x^2 - 4y - 8y^3 = 0 \end{array}\right.$$

Resolviendo el sistema:

De: $\left\{\begin{array}{c} x = 0 \\ 3x^2 - 4y - 8y^3 = 0 \end{array}\right.$,se tiene $-4y - 8y^3 = 0$, $4y(1 + 2y^2) = 0 \Longrightarrow y = 0$.Así, $(0,0)$.

De: $\left\{\begin{array}{c} x = -2y \\ 3x^2 - 4y - 8y^3 = 0 \end{array}\right.$, se tiene $3(-2y)^2 - 4y - 8y^3 = 0, 12y^2 - 4y - 8y^3 = 0$: $-4y(2y-1)(y-1) = 0$, entonces las soluciones de esta ecuación son $y = 0 \vee y = \frac{1}{2} \vee y = 1$, con los correspondientes puntos $(0,0), \left(-1, \frac{1}{2}\right), (-2,1)$.

Así, los puntos críticos son:

$$P.C = \left\{ (0,0), \left(-1, \frac{1}{2}\right), (-2,1) \right\}.$$

Ahora:
Para clasificar los puntos críticos, calculamos las derivadas parciales de segundo orden
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial (6xy + 3x^2)}{\partial x} = 6x + 6y$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial (3x^2 - 4y - 8y^3)}{\partial y} = -24y^2 - 4$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial (3x^2 - 4y - 8y^3)}{\partial x} = 6x$

$$|Hf(x,y)| = \begin{vmatrix} 6x + 6y & 6x \\ 6x & -24y^2 - 4 \end{vmatrix}$$

Luego,

P.C:(x,y)	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$	$DetHf(x,y)$	**Conclusión**
$(0,0)$	0	-4	0	0	Falla el criterio.
$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$	-3	-10	-6	-6	Silla
$(-2,1)$	-6	-28	-12	-24	Máx. Rel.

Analizando en $(0,0) : f(0,0) = 0$.
Considerando el camino $C := \{(x,y) \in B_r(0,0) : y = 0\}$, se tiene que
$g(x) = f(x,0) = x^3$
Aplicando el criterio de la primera derivada:
$g'(x) = 3x^2$
$g'(x) = 0$ entonces $x_0 = 0$ es punto crítico de f.
$g''(x) = 6x$
$g''(0) = 0$
$g'''(x) = 6$ entonces $g'''(0) = 6 \neq 0$.
Entonces $x_0 = 0$ es un punto de inflexión.
Luego,$(0,0)$ es un punto silla.

Ejemplo 2.180 *Hallar los puntos críticos de la función*

$$f(x,y) = e^{2x+3y}\left(8x^2 - 6xy + 3y^2\right)$$

y analizar su naturaleza.

Solución.
Determinación de los puntos críticos:
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{2x+3y}\left(16x^2 - 12xy + 6y^2 + 16x - 6y\right)$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{2x+3y}\left(24x^2 - 18xy + 9y^2 - 6x + 6y\right)$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(8x^2 - 6xy + 3y^2\right) + 16x - 6y = 0 \cdots (1) \cdots (\text{ multiplicando por } 3) \\ 3\left(8x^2 - 6xy + 3y^2\right) - 6x + 6y = 0 \cdots (2) \cdots (\text{ multiplicando por } -2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6\left(8x^2 - 6xy + 3y^2\right) + 48x - 18y = 0 \\ -6\left(8x^2 - 6xy + 3y^2\right) 12x - 12y = 0 \end{cases},$$

Sumando ambas ecuaciones resulta: $y = 2x$.
Reemplazando $(1) : 6\left(8x^2 - 6x(2x) + 3(2x)^2\right) + 48x - 18(2x) = 0$,resulta:

$4x\left(4x+1\right)=0$,entonces $x=0$ o $x=-\dfrac{1}{4}$.

Si $x=0$, en (1) ,resulta $16\left(0\right)^2-12\left(0\right)y+6y^2+16\left(0\right)-6y=0\Longrightarrow 6y\left(y-1\right)=0\Longrightarrow$ $y=0$ o $y=1$.

Así, los puntose son $(0,0)$ y $(0,1)$.

Si $x=-\dfrac{1}{4}$, en (1), $16\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2-12\left(-\dfrac{1}{4}\right)y+6y^2+16\left(-\dfrac{1}{4}\right)-6y=0$

$\Longrightarrow 6y^2-3y-3=0$, entonces $y=1$ o $y=-\dfrac{1}{2}$.

$e^{2x+3y}\left(24x^2-18xy+9y^2-6x+6y\right)$. Así, los punto son $\left(-\dfrac{1}{4},1\right)$ y $\left(-\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{2}\right)$.

Por lo tanto los P.C. son:

$$P.C=\left\{(0,0),(0,1)\ ,\left(-\frac{1}{4},1\right),\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Ahora:

Calculamos las derivadas parciales de segundo orden

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(x,y\right)=e^{2x+3y}\left(32x^2-24xy+12y^2+64x-24y+16\right)$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(x,y\right)=e^{2x+3y}\left(72x^2-54xy+27y^2-36x+36y+6\right)$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(x,y\right)=e^{2x+3y}\left(48x^2-36xy+18y^2+36x-6y-6\right)$.

Luego,

P.C:(x,y)	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$	$\dfrac{\partial^2 f\ (x,y)}{\partial y^2}$	$\dfrac{\partial^2 f\ (x,y)}{\partial x\partial y}$	$Det(x,y)$	**Conclusión**
$(0,0)$	16	6	-6	$+$	Máx. Rel.
$\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$	$23e^{-2}$	$42e^{-2}$	$\frac{87}{4}e^{-2}$	$+$	Mín. Rel.
$(0,1)$	$28e^3$	$69e^3$	$9e^{\frac{5}{2}}$	$+$	Mín. Rel.
$\left(-\frac{1}{4},1\right)$	$-4e^{\frac{5}{2}}$	$96e^{\frac{5}{2}}$	$9e^{\frac{5}{2}}$	$-$	Punto silla.

Ejemplo 2.181 *Hallar los puntos críticos de*

$$f(x,y)=\arctan(x^2+y^2)-x^2$$

y analizar si en ellos hay máximo relativo, mínimo relativo ó punto silla.

Solución.

Determinación de los puntos críticos:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)=\dfrac{2x}{1+(x^2+y^2)^2}-2x=\dfrac{-2x(x^2+y^2)^2}{1+(x^2+y^2)^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)=\dfrac{2y}{1+(x^2+y^2)^2}$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{-2x(x^2+y^2)^2}{1+(x^2+y^2)^2}=0\cdots(1)\\ \dfrac{2y}{1+(x^2+y^2)^2}\cdots(2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\\ y=0\end{array}\right.$$

Así, $(0,0)$.

Por lo tanto los P.C. son :

$$P.C=\{(0,0)\}.$$

Ahora:
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{2+2(x^2+y^2)(x^2-7y^2)}{1+(x^2+y^2)^2}$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\dfrac{8xy\left(x^2+y^2\right)}{\left(1+(x^2+y^2)^2\right)^2}$
Luego

P.C:(x,y)	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$	$Det(x,y)$	**Conclusión**
$(0,0)$	0	2	0	0	Falla el criterio.

Analizando en $(0,0)$:$f(0,0)=0$.
Considerando el camino $\mathcal{C}: y=0$ en $B((0,0),r)$ se tiene que
$g(x)=f(x,0)=\arctan(x^2)-x^2$
Aplicando el criterio de la primera derivada:
$g'(x)=\dfrac{2x}{1+x^4}-2x=-\dfrac{2x^5}{1+x^4}$
$g'(x)=0 \Longleftrightarrow -\dfrac{2x^5}{1+x^4}=0 \Longrightarrow x=0.$
Entonces $g(0)$ es un máximo relativo.
Considerando el camino $\mathcal{C}: x=0$ en $B((0,0),r)$ se tiene que
$h(y)=f(0,y)=\arctan(y^2)$
Aplicando el criterio de la primera derivada:
$h'(y)=\dfrac{2y}{1+y^4}$
$h'(y)=0 \Longleftrightarrow \dfrac{2y}{1+x^4}=0 \Longrightarrow y=0.$
Entonces $h(0)$ es un mínimo relativo.
Luego,$(0,0)$ es un punto silla.

2.19.2 Multiplicadores de Lagrange

En esta sección estudiaremos un método, el método de los multiplicadores de Lagrange, para estudiar la existencia de extremos (máximos y mínimos) de funciones que estan sometidos a restricciones. Por ejemplo, la distancia al origen de la recta $y=x+1$ es un problema que consite en hallar un mínimo bajo una restricción. Esto es, debemos minimizar la función distancia $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ bajo la condición $y-x-1=0$. Este problema es de fácil resolución si remplazamos la variable $y=x+1$ en la función $f(x,y)$. El problema queda reducido a un problema de mínimos de una función de una sola variable.

1

No siempre es posible reducir un problema de extremos condicionados a un problema de máximos o mínimos de una sola variable. El siguiente teorema nos proporciona una condición **necesaria** para que $P_0 \in \mathbf{R}^n$ sea un extremo condicionado de una función f.

Teorema 2.39 *Sean $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una función de clase $C^1(\Omega)$ .Considere el conjunto de nivel*

$$\mathcal{S}=\{P\in\Omega: g(P)=k\},$$

tales que $P_0\in\Omega$ con $g(P_0)=k$ y $\nabla f(P_0)\neq 0$. Si $f_{\mathcal{S}}:\mathcal{S}\cap\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tiene un valor extremo relativo en $\mathcal{S}$, en P_0 , existe un número real λ tal que

$$\nabla f(P_0)=\lambda\nabla g(P_0)\cdots(1)$$

Demostración

El Teorema exige, para su demostración, herramientas más avanzadas de análisis matemático y no la haremos aquí en su forma más general. No obstante podemos proporcionar ahora una prueba para el teorema para el caso particular en que

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función de dos variables y la condición $g(P_0) = 0$ determina una curva Γ que podemos parametrizar como $P = \alpha(t)$, $t \in I$, I algún intervalo de la recta real.

Supongamos que en $P_0 = \alpha(t_0)$, para algún $t_0 \in I$, $\alpha'(t_0)$ es un vector tangente a $\mathcal{S}$ en P_0; $\frac{d}{dt} g(\alpha(t)) = \frac{d}{dt} k = 0$, y por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dt} g(\alpha(t)) \mid_{t=0} = \nabla g(P_0) \cdot \alpha'(t_0),$$

de modo que $\nabla g(P_0) \cdot \alpha'(t_0) = 0$; es decir, $\alpha'(t_0)$ es ortogonal a $\nabla g(P_0)$.

Si la función $f_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \cap \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tiene un valor extremo relativo en $\mathcal{S}$, en P_0 entonces $f(\alpha(t))$ tiene un valor extremo relativo en $t = t_0$ la función f alcanza un valor extremo: un máximo o un mínimo. Entonces la función

$$h(t) = f(\alpha(t)), t \in I$$

tendrá en t_0 un máximo o un mínimo y por lo tanto $\frac{dh(t_0)}{dt} = 0$. De la expresión anterior conseguimos, por la regla de la cadena, que

$$0 = \frac{dh(t_0)}{dt} = \nabla f(\alpha(t_0)) \cdot \alpha'(t_0)$$

Así, el vector $\nabla f(\alpha(t))$ es ortogonal a la tangente de toda curva en $\mathcal{S}$ y también es ortogonal al espacio tangente a $\mathcal{S}$ en P_0 .Como el espacio perpendicular al espacio tangente es una recta, se tiene que $\nabla f(P_0)$ y $\nabla g(P_0)$ son paralelos. Puesto que $\nabla f(P_0) \neq 0$ se sigue que $\nabla f(P_0)$ es múltiplo de $\nabla g(P_0)$. Esto prueba el Teorema.

Observación 2.18 *Al usar el método de Multiplicadores de Lagrange, se debe hallar un punto P_0 y un escalar real λ tal que*

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0).$$

La ecuación (1) se dice que las derivadas parciales de f son proporcionales a las derivadas parciales de g.Hallar los puntos P_0 que cumple (1),es decir, resolver el sistemas de ecuaciones :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \ldots, x_n) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) \\ g(x_1, \ldots, x_n) = k \end{cases} \tag{2}$$

Teorema 2.40 ***(Multiplicadores de Lagrange).*** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones de clase $C^1(\Omega)$. Sean y $g_1, \ldots g_m : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $m < n$, funciones de clase $C^1(\Omega)$. Supongamos que $P_0 \in \Omega$ es un extremo de f bajo la condición que*

$$P_0 \in \mathcal{S} = \{P \in \mathbb{R}^n, \ \ g_i(P) = 0 \ \ para \ \ i = 1, 2...m\}.$$

Si el conjunto $\{\nabla g_i(P_0), \ i = 1, 2, ...m\}$ es linealmente independiente, entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_m$, números reales, llamados los multiplicadores, tales que

$$\nabla f(P_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(P_0).$$

El **Teorema** nos proporciona una condición necesaria y no suficiente para la existencia de extremos condicionados. No nos proporciona información sobre la clase de extremo en cuestión, sólo con otras consideraciones, físicas o geométricas, debemos decidir si el punto P_0 es de máximo o de mínimo condicionado. El método exige resolver un sistema de $m+n$ ecuaciones, cuales son las que se derivan de (3.8.1) más las condiciones $g_i(P) = 0$ para $i = 1, 2...m$, con $m+n$ incógnitas, cuales son las n componentes de P_0 más los m multiplicadores.

Ejemplo 2.182 *Sea la función*

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2,$$

ésto es, la distancia al cuadrado de un punto (x,y,z) *al eje* z, *bajo la condición que el punto de mínimo* (x,y,z) *satisfaga las ecuaciones*

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ z^2 - (y-1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

ésto es, la distancia al cuadrado de un punto (x,y,z) al eje z, bajo la condición que el punto de mínimo (x,y,z) satisfaga las ecuaciones.Esto es,

$$\begin{aligned} g_1(x,y,z) &= z = 0 \\ g_2(x,y,z) &= z^2 - (y-1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Observemos que el punto $(0,1,0)$ es un extremo condicionado tal que

$$\begin{aligned} \nabla g_2(0,1,0) &= (0,0,0) \\ \nabla g_1(0,1,0) &= (0,0,1) \end{aligned}$$

y $\nabla f(0,1,0) = (0,2,0)$. Por lo tanto no se satisface (3.8.1).
Veamos un ejemplo del uso de los multiplicadores de Lagrange

Ejemplo 2.183 *Deseamos calcular la distancia del origen* $(0,0,0)$ *al plano cuya ecuación es* $x+y+z=1$. *El objetivo es hallar un punto* (x_0, y_0, z_0) *que satisfaga la ecuación del plano y que sea un punto de mínimo de la función distancia de un punto al origen. Esta función distancia la podemos tomar como*

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

y la restricción $g(x,y,z) = x+y+z-1 = 0$. *Realmente la función distancia al origen que debemos tomar es* $h(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, *pero es claro que los extremos de* h *son los mismos de* f *y con ésta última los calculos se simplifican.*

En este caso sólo hay una restrición, los puntos de mínimo de f condicionados a la restrición $g=0$ deben satisfacer el sistema

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z).$$

El sistema :

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda \\ 2y &= \lambda \\ 2z &= \lambda \\ x+y+z &= 1 \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema anterior y encontramos que

$$\begin{aligned} \lambda &= \tfrac{2}{3} \\ x &= \tfrac{1}{3} \\ y &= \tfrac{1}{3} \\ z &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Entonces el punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ debe ser el punto que minimiza a f sujeto a la condición $g = 0$. Deducimos que la distancia del plano al origen es $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ejemplo 2.184 *Calcular el área del máximo paralelogramo que se puede inscribir en la circunferencia cuya ecuación es* $x^2 + y^2 = 1$.

Solución.

Podemos suponer que los vértices del paralelogramo son: $(x, y), (x, -y), (-x, -y)$ y $(-x, y)$. Entonces la función de área que debemos maximizar es $f(x, y) = 4xy$ y la resticción que de imponemos es $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Puesto que sólo hay una restricción el Teorema nos dice que

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

Por lo tanto debemos resolver el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 4y &= 2\lambda x \quad \ldots(1) \\ 4x &= 2\lambda y \quad \ldots(2) \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0 \quad \ldots(3) \end{aligned}$$

Si eliminamos x de las ecuaciones 1) y 2) obtenemos que

$$y\left(4 - \lambda^2\right) = 0$$

Esta ecuación implica que $y = 0$ o $4 - \lambda^2 = 0$. Ahora si $y = 0$ tendríamos que concluir de las ecuaciones a) y b) que $x = 0$ y $y = 0$, lo que contradice la ecuación c). Es así cómo debemos concluir que $\lambda = \pm 2$. Si tomamos el caso $\lambda = 2$ obtenemos de las ecuaciones a) y b) que $x = y$. Y si tomamos el caso $\lambda = -2$ obtenemos que $x = -y$. En ambos casos la ecuación c) nos dice $2x^2 = 1$, ésto es, $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Por lo tanto los cuatro vértices del paralelogramo serán $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Esto nos indica que el valor extremo de $f(x, y)$ bajo la restricción $g(x, y) = 0$ debe ser $4\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 2$. Por consideraciones geométricas debemos concluir que este valor es máximo.

Ejemplo 2.185 (a) *Usando el método de* ***Multiplicadores de Lagrange****, demostrar que el valor máximo de* $x^2y^2z^2$ $(x, y, z > 0)$, *sobre la esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, (a > 0)$, *es*

$$\left(\frac{a^2}{3}\right)^3$$

(b) Usar la parte (a) para demostrar que para números no negativos x, y, z se cumple

$$(xyz)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{x+y+z}{3}.$$

Solución.
(a)Sea

$$f(x,y,z) = x^2y^2z^2 \;;\; x,y,z > 0$$

Sujeto a la restricción

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Puesto que :

$$\nabla f(x,y,z) = \left(2xy^2z^2, 2x^2yz^2, 2x^2y^2z\right), \nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$$

Usando Multiplicadores de Lagrange, existe un escalar λ tales que:

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcll} 2xy^2z^2 & = & \lambda(2x) & \cdots(1) \\ 2x^2yz^2 & = & \lambda(2y) & \cdots(2) \\ 2x^2y^2z & = & \lambda(2z) & \cdots(3) \\ x^2+y^2+z^2 & = & a^2 & \cdots(4) \end{array}\right. \cdots(*)$$

Resolviendo el sistema se tiene :

$$x = \frac{a^2}{3}, y = \frac{a^2}{3}, \; z = \frac{a^2}{3}.$$

El valor $x^2y^2z^2$ que se obtuvo es : $\left(\dfrac{a^2}{3}\right)^3$.

Dicho valor es máximo(el mínimo ocurre cuando las variables x, y o z es cero)Si no fuera así, deberá hacer otros puntos críticos, pues $x^2y^2z^2$ alcanza su máximo y mínimo en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

(b)Se deja al lector.

Ejemplo 2.186 (a)*Suponga que x, y, z son positivas. Usando Multiplicadores de Lagrange, minimizar la función*
$f(x,y,z) = x + y + z$ *, sujeta a la restricción $xyz = 1$.*

Ejemplo 2.187 (b)*Aplicar el resultado del inciso (a) para deducir la desigualdad*

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}, \; donde \;\; a,b,c > 0.$$

Solución.
(a)Sean $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$

Función objetivo: Minimizar $f\ (x,y,z) = x + y + z$
Sujeto a la restricción
$g(x,y,z) = xyz = 1$

Puesto que :

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right) = (1,1,1) \\ \nabla g(x,y) &= \left(\frac{\partial g(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial z}\right) = (yz, xz, xy) \end{aligned}$$

Usando Multiplicadores de Lagrange , existe un escalar λ tal que

$$\nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z)$$

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} & = & \lambda\dfrac{\partial g(x,y,z)}{\partial x}\\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} & = & \lambda\dfrac{\partial g(x,y,z)}{\partial y}\\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} & = & \lambda\dfrac{\partial g(x,y,z)}{\partial z}\\ xyz & = & 1\end{array}\right. \Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl}1 & = & \lambda(yz)\cdots(1)\\ 1 & = & \lambda(xz)\cdots(2)\\ 1 & = & \lambda(xy)\cdots(3)\\ xyz & = & 1\cdots(4)\end{array}\right.\cdots(*).$$

Como $x>0,\ y>0,\ z>0$ entonces $\lambda\neq 0$.
De (1) y (2) : $yz=xz$.Entonces se deduce : $y=x\cdots(5)$.
De (2) y (3) : $xz=xy$.Entonces se deduce : $z=y\cdots(6)$.
Luego $x=y=z$.
En (4) :$xyz=1\Longrightarrow x^3=1\Longrightarrow x=y=z=1$.
Así, el punto es: $(1,1,1)$. Luego el valor mínimo de f es:$f\ (1,1,1)=3$.
Por tanto $3\leq f\ (x,y,z),\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x,y,z>0$
(b)Por (a) se tiene:$f\ (x,y,z)=x+y+z\geq 3\ ,\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x,y,z>0$.
Considerando :

$$x=\frac{a}{\sqrt[3]{abc}},y=\frac{b}{\sqrt[3]{abc}},z=\frac{c}{\sqrt[3]{abc}}$$
$$xyz=\frac{a}{\sqrt[3]{abc}}\frac{b}{\sqrt[3]{abc}}\frac{c}{\sqrt[3]{abc}}=\frac{abc}{abc}=1$$

Luego,

$$3\leq\ x+y+z=\frac{a}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{b}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{c}{\sqrt[3]{abc}}=\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$$
$$\sqrt[3]{abc}\leq\frac{a+b+c}{3};\quad a,b,c>0.$$

Ejemplo 2.188 *Usando el método de* ***Multiplicadores de Lagrange****, hallar los valores máximos y mínimos del producto de tres números reales x,y,z sí la suma de estos números debe ser* ***cero*** *y la suma de sus cuadrados debe ser **3**.*

Solución.
Sea:

$$f(x,y,z)=xyz$$

Sujeto a las restricciones

$$g(x,y,z)=x+y+z=0\ ,\ h(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=3$$

Puesto que :

$$\nabla f(x,y,z)=(yz,xz,xy)\,,\nabla g(x,y,z)=(1,1,1)\ \text{ y }\ \nabla h(x,y,z)=(2x,2y,2z)$$

Usando el método de Multiplicadores de Lagrange , existen escalares λ y μ tales que:

$$\nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z)+\mu\nabla h(x,y,z)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} yz &= \lambda + \mu(2x) & \cdots(1) \\ xz &= \lambda + \mu(2y) & \cdots(2) \\ xy &= \lambda + \mu(2z) & \cdots(3) \\ x+y+z &= 0 & \cdots(4) \\ x^2+y^2+z^2 &= 3 & \cdots(5) \end{cases} \quad \cdots(*)$$

De $(1)-(2) : (y-x)z = -2\mu(y-x)$. Entonces se deduce : $y = x \vee z = -2\mu \cdots (6)$.

(I) Si $y = x$:

En $(4), x+y+z = 0 \Longrightarrow x+x+z = 0 \Longrightarrow z = -2x$.

En $(5), x^2+y^2+z^2 = 3 \Longrightarrow x^2+x^2+(-2x)^2 = 3 \Longrightarrow 6x^2 = 3 \Longrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces $y = \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$ y

$z = -\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}$, respectivamente. Por lo tanto los puntos son: $P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$ y $P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$.

(II) Si $z = -2\mu$:

En $(3), xy = \lambda + \mu(2z) \Longrightarrow, xy = \lambda - z^2 \Longrightarrow \lambda = xy + z^2$.

En $(1), yz = \lambda + \mu(2x) \Longrightarrow yz = xy + z^2 - zx \Longrightarrow z^2 - z(x+y) + xy = 0 \Longrightarrow (z-x)(z-y) = 0 \Longrightarrow z = x$ o $z = y$..

(III)Si $z = x$:

En $(4), x+y+z = 0 \Longrightarrow x+y+x = 0 \Longrightarrow y = -2x$.

En $(5), x^2+(-2x)^2+x^2 = 3 \Longrightarrow 6x^2 = 3 \Longrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces $y = -\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}$ y

$z = \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$, respectivamente. Por lo tanto los puntos son: $P_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $P_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(IV)Si $z = y$:

En $(4), x+y+z = 0 \Longrightarrow x+y+y = 0 \Longrightarrow x = -2y$.

En $(5), (-2y)^2+y^2+y^2 = 3 \Longrightarrow 6y^2 = 3 \Longrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces $x = -\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}$ y

$z = \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$, respectivamente. Por lo tanto los puntos son: $P_5\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $P_6\left(\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Evaluando $f(x,y,z)$ en los 6 puntos críticos hallados, el producto de tres números reales x, y, z resultan

$f(P_1) = f(P_3) = f(P_5) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$f(P_2). = f(P_4). = f(P_6) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Entonces $f_{Max} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2.20 Derivación Implícita

Las superficies en $\mathbb{R}^3$ se representan por medio de expresiones del tipo $F(x,y,z) = 0$. Por ejemplo, $x^2+y^2+z^2-1 = 0$ representa la superficie de una esfera de centro en el origen y radio 1. Algunas veces es posible despejar una de las variables en términos de las otras dos, por ejemplo, en el caso de la esfera podemos hacer

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \qquad \text{o} \qquad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Pero en general ésto no es posible. Consideremos por ejemplo la ecuación $\operatorname{sen} xyz + e^{xyz} = 0$, no es posible despejar una variable en términos de las otras dos.

No obstante supongamos que de la ecuación $F(x, y, z) = 0$ podemos despejar, implícitamente, a z en términos de x, y. Esto es, supongamos que $z = f(x, y)$. Tenemos entonces que

$$F[x, y, f(x, y)] = 0.$$

Si llamamos $g(x, y) = F[x, y, f(x, y)]$ entonces $g(x, y) = 0$ y por lo tanto sus derivadas parciales son iguales a cero. Si usamos la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} &= D_1F\frac{\partial x}{\partial x} + D_2F\frac{\partial y}{\partial x} + D_3F\frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 = \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} &= D_1F\frac{\partial x}{\partial y} + D_2F\frac{\partial y}{\partial y} + D_3F\frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Esto es,

$$\begin{aligned} 0 = \tfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} &= D_1F(x, y, z) + D_3F(x, y, z)\tfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ 0 = \tfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} &= D_2F(x, y, z) + D_3F(x, y, z)\tfrac{\partial f(x,y}{\partial y}. \end{aligned}$$

Si $D_3F(x, y, z) \neq 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= -\tfrac{D_1F(x,y,z)}{D_3F(x,y,z)} \\ \tfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= -\tfrac{D_2F(x,y,z)}{D_3F(x,y,z)}. \end{aligned}$$

Vemos entonces que aunque no conocemos una expresión exacta de z en términos de x e y sí podemos conocer sus derivadas parciales. En el ejemplo $\cos xyz + e^{xyz} = 0$ procemos así:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial z}{\partial x} &= -\tfrac{yz\cos(xyz) + yze^{xyz}}{xy\cos(xyz) + xye^{xyz}} \\ \tfrac{\partial z}{\partial y} &= -\tfrac{xz\cos(xyz) + xze^{xyz}}{xy\cos(xyz) + xye^{xyz}}, \end{aligned}$$

siempre que $-xysen(xyz) + xye^{xyz} \neq 0$.

La anterior discusión puede generalizarse a más variables, por ejemplo, si tenemos $F(x_1, x_2, ...x_n) = 0$ podemos obtener derivadas parciales implícitas de x_n como funcion de las variables $x_1, ..., x_{n-1}$. Tendremos, entonces, fórmulas del siguiente tipo

$$D_k x_n = -\frac{D_kF}{D_nF}, \quad k = 1.2..., n-1,$$

siempre que $D_nF \neq 0$.

La derivación implícita nos sirve para el cálculo de curvas definidas implícitamente. Sean $F(x,y,z)=0$ y $G(x,y,z)=0$ dos superficies. Su intersección determina una curva y aunque no esté determinada explícitamente podemos obtener alguna información si suponemos, por ejemplo, que $x=x(z)$ e $y=y(z)$, con z perteneciendo a algún intervalo I. Usamos la regla de la cadena como en (3.6.1) y obtenemos

$$\begin{aligned} -D_3F &= D_1F.x'(z)+D_2F.y'(z) \\ -D_3G &= D_1G.x'(z)+D_2G.y'(z) \end{aligned}$$

Para aquellos puntos en los que el discriminante del sistema anterior no se anule podemos obtener fórmulas para $x'(z)$ y $y'(z)$, así:

$$x'(z)=\frac{\begin{vmatrix} -D_3F & D_2F \\ -D_3G & D_2G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D_1F & D_2F \\ D_1G & D_2G \end{vmatrix}}$$

$$y'(z)=\frac{\begin{vmatrix} D_1F & -D_3F \\ D_1G & -D_3G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D_1F & D_2F \\ D_1G & D_2G \end{vmatrix}}$$

Es así cómo podemos conocer el vector tangente a la curva en cada punto $z\in I$, y por lo tanto determinar la curva intersección de las dos superficies siempre y cuando conozcamos un punto que se encuentre en la intersección de las dos superficies.

Ejemplo 2.189 *Consideremos las superficies*

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= x+y+z=0 \\ G(x,y,z) &= 2x+y+z-1=0 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.190 *Un cálculo sencillo nos dice que*

$$\begin{aligned} D_1F(x,y,z) &= 1 \\ D_2F(x,y,z) &= 1 \\ D_3F(x,y,z) &= 1 \\ D_1G(x,y,z) &= 2 \\ D_2G(x,y,z) &= 1 \\ D_3G(x,y,z) &= 1 \end{aligned}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} x'(z) &= 0 \\ y'(z) &= -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} x(z) &= c \\ y(z) &= -z+d, \end{aligned}$$

en donde c, d son constantes que debemos determinar.

De lo anterior obtenemos que $x = 1$. Esto es, $x(z) = c = 1$. Entonces la intersección de las dos superficies está determinada por el conjunto $\{(1, -z + d, z),\ z \in \mathbf{R}\}$,

en donde d debe ser determinada. Ahora, para $z = 0$ el punto $(1, d, 0)$ que está en la intersección de las dos superficies es aquel para el cual $d = -1$. Por lo tanto, la intersección de las dos superficies es el conjunto

$$\{(1, -z + -1, z),\ z \in \mathbf{R}\},$$

ésto es, la recta

$$\{(1, -1, 0) + z(0, -1, 1),\ z \in \mathbf{R}\}.$$

Ejecicios propuestos:Valores extremos

1. Estudiar la naturaleza de los puntos críticos de las siguientes funciones

   (a) $f(x, y) = 3x^2y^2 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2.$
   (b) $f(x, y) = (x^3 - y^2)\, e^{\frac{x^2+y^2}{2}}.$
   (c) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 18xy.$
   (d) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy.$
   (e) $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2).$
   (f) $f(x, y) = \frac{1}{3}xy\, |x - y|^3.$
   (g) $f(x, y) = 4xy^2 - xy^3 - 2x^2y^2.$
   (h) $f(x, y) = y^3 - y - x^4 - 3x^2 + 2.$
   (i) $f(x, y) = x^3 - 2y^2 - 2y^4 + 3x^2y$

2. Dada la función $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) - \int_0^x \frac{2t}{1+t^4}dt$, determinar si f tiene extremos relativos.

3. Sea $f(x, y) = a\,[2xy + y^2 + x^2y + \cos(x + y)] + x^2(a^2 - y)$, $a \neq 0$.

   (a) Hallar los valores de a para los cuales f tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$.
   (b) ¿Para qué valores de a, f tiene un punto de silla?

4. El plano $x - y + z = 0$ corta al cilindro $x^2 + y^2 - 8 = 0$ en una elipse ε. Hallar los puntos de ε más cercanos al origen y el punto de ε más alejado del origen.

5. Usando los Multiplicadores de Lagrange, hallar los puntos de la superficie $z^2 = xy - z^2 + 4$ más próximos al punto $P(1, 1, 1)$.

6. Encontrar los extremos relativos de la función $f(x, y, z) = x + z$ en la esfera

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

7. Hallar todos los puntos de la esfera $\varepsilon :.\ x^2 + y^2 + z^2 = 4$, donde la función

$$f(x, y, z) = 2xy^2z$$

   alcanza sus valores máximo y mínimo, sabiendo que dichos valores son no nulos.

Capítulo 3

Funciones vectoriales de variables vectoriales

3.1 Función vectorial de variable vectorial

Una aplicación $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m, n, m \geq 2$, la denominamos campo vectorial. En el caso en que $m = 1$ la denominamos campo escalar.

Cuando consideramos funciones de una sola variable el concepto de límite está referido a la aproximación que hacemos a un punto ya sea por la derecha o por la izquierda. En el caso de campos vectoriales la aproximación a un punto puede hacerse por infinitos caminos. Iniciemos con unos ejemplos:

Ejemplo 3.1 *Sea*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Si dejamos una variable, por ejemplo x, fija vemos que $f(x,y)$ se aproxima a 0 cuando y se aproxima a 0. Pero si tomamos la recta $x = y$ entonces $f(x,y) = \frac{1}{2}$ y, aunque (x,y) se aproxime a $(0,0)$, no se tiene que $f(x,y)$ se aproxime a 0.

Tenemos la siguiente

Definición 3.1 *Sea $f : R^n \to R^m$. Decimos que*

$$\lim_{P \to A} f(P) = L$$

Si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, que depende de ε, tal que si $\|P - A\| < \delta$ entonces $\|f(P) - L\| < \varepsilon$.

Esto es **lo que no sucede** en el ejemplo anterior, podemos tener puntos $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tales que $\|(x,y) - (0,0)\|$ sea muy pequeña y no obstante $|f(x,y) - 0| = \frac{1}{2}$.

Definición 3.2 *Sea $f : R^n \to R^m$. Decimos que f es continua en un punto $A \in R^n$ si la función f está definida en A y además*

$$\lim_{P \to A} f(P) = f(A).$$

Nota: Un campo vectorial $f : R^n \to R^m$, $n, m \geq 2$ está definido por m campos escalares $f_1, ...f_m$. Es fácil ver que

$$\lim_{P \to A} f(P) = L$$

si y sólo si

$$\lim_{P \to A} f_i(P) = l_i, \; i = 1, ...m,$$

en donde $L = (l_1, ...l_m)$. Esto nos dice que podemos restringir nuestra discusión al caso de campos escalares.

3.2 Diferenciación

El grán inconveniente de la derivada débil que introdujimos en la sección dos consiste en que ella no implica continuidad. Para subsanar esa debilidad introduciremos, ahora, la noción de derivada fuerte o derivada de Frechet.

Definición 3.3 *Sea $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ un campo escalar. Decimos que f es fuertemente diferenciable en $P \in \mathbf{R}^n$ si existe una transformación lineal $T_P : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ tal que para todo $Y \in \mathbf{R}^n$ se tiene que*

$$f(P+Y) - f(P) = T_P(Y) + o(P, \|Y\|),$$

Definición 3.4 *en donde $o(P, \|Y\|)$ es tal que* $\lim_{Y \to 0} \frac{|o(P,\|Y\|)|}{\|Y\|} = 0.$

La *transformación lineal* T_A se le llama la diferencial fuerte de f en el punto A. Es costumbre denotar $T_A = f'(A)$.

Lo primero que debemos advertir de la definición es que si la función f es fuertemente diferenciable en P entonces es débilmente diferenciable en P y las dos derivadas coinciden. Esto es

$$f'(P, Y) = f'(P)(Y),$$

para todo $Y \in \mathbf{R}^n$

También advertimos de la definición que si f es fuertemente diferenciable en A entonces la función f es continuia en P. Sólo es suficiente tener en cuenta que la *transformación lineal* T_P es siempre una función continua y $T_P(0) = 0$. Además, de la caracterización que hicimos de $o(P, \|Y\|)$ concluímos que $o(P, \|Y\|) \to 0$ cuando $Y \to 0$.

Ahora, sea $Y \in \mathbf{R}^n$. Entonces $Y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$ donde $\{e_1, ..., e_n\}$ representa la base canónica de $\mathbf{R}^n$. Esto es, $e_k = (0, 0..., 1, 0, ...0)$ donde el 1 aparece en el lugar k-ésimo. Por la linealidad de $T_P = f'(P)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} f'(P)(Y) &= f'(P)(\textstyle\sum_{k=1}^{n} y_k e_k) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} y_k f'(A)(e_k) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} y_k f'(A, e_k) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} y_k D_k f(A). \end{aligned}$$

Esto es, podemos expresar la diferencial fuerte en términos de las derivadas parciales de f. En resumen tenemos

$$f'(P)(Y) = \sum_{k=1}^{n} y_k D_k f(P). \qquad (3.3.2)$$

Si denotamos $\nabla f(P) = (D_1 f(P), ..., D_n f(P)) \in \mathbf{R}^n$ la expresión anterior toma la siguiente forma:

$$f'(P)(Y) = \langle \nabla f(P), Y \rangle .$$

Esto quiere decir que la diferencial fuerte, o simplemente la diferencial, de ahora en adelante, de f en P, $f'(P)$, la podemos representar por medio del vector

$$\nabla f(P) = (D_1 f(P), ..., D_n f(P)) \in \mathbf{R}^n.$$

Este vector es conocido como el gradiente de f en P.

Es muy importante tener una fórmula que nos permita calcular la diferencial de un campo escalar, pero la pregunta crucial de esta sección es: Cuando un campo escalar es diferenciable ? La respuesta la tenemos en el siguiente

Teorema 3.1 *$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es diferenciable en P, ésto es, existe $f'(P)$, si las derivadas parciales $D_k f$, $k = 1, 2..., n$, existen en alguna bola $B(P, r)$ y son continuas en P.*

Demostración: Sea $Y \in B(P,r)$. Denotemos con $Y_k = \sum_{j=1}^{k} y_j e_j$, además, $Y = Y_n$ y $Y_0 = 0$. Ahora, obsevemos que

$$f(P+Y) - f(P) = \sum_{j=1}^{n} \{f(P+Y_j) - f(P+Y_{j-1})\}$$

nos dice que

$$f(P+Y_j) - f(P+Y_{j-1}) = y_j D_j f(C_j),$$

en donde C_j es un vector que se encuentra en el segmento que une a los vectores $P+Y_j$ y $P+Y_{j-1}$. Y cuando $Y \to 0$ entonces $C_j \to P$. De lo anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} f(P+Y) - f(P) \;\; = \;\; & \textstyle\sum_{j=1}^{n} y_j D_j f(P) \\ & + \textstyle\sum_{j=1}^{n} y_j \{D_j f(C_j) - D_j f(P)\} . \end{aligned}$$

Denotemos con

$$o(P, \|Y\|) = \sum_{j=1}^{n} y_j \{D_j f(C_j) - D_j f(P)\} .$$

Puesto que las derivadas parciales $D_j f$, $j = 1, 2, ..., n$, son continuas en $B(P,r)$ es fácil ver que $\frac{|o(P,\|Y\|)|}{\|Y\|} \to 0$ cuando $\|Y\| \to 0$. Deducimos que

$$f'(P)(Y) = \sum_{j=1}^{n} y_j D_j f(P) = \langle \nabla f(P), Y \rangle \quad .$$

Ejemplo 3.2 *Sea $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definido como $f(X) = \|X\|^2$. Calculemos $\nabla f(X)$.*

La fórmula nos dice que

$$f'(X)(Y) = \langle \nabla f(X), Y \rangle$$

También sabemos que

$$f'(X)(Y) = f'(X,Y) = 2 \langle X, Y \rangle .$$

Por lo tanto obtenemos que $\nabla f(X) = 2X$.

Ejemplo 3.3 *Sea* $f(x,y,z) = xy + yz + zx$. *Calculemos* $f'(a,b,c)(m,n,r)$. *La fórmula nos dice que*

$$f'(a,b,c)(m,n,r) = \langle \nabla f(a,b,c), (m,n,r) \rangle$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \nabla f(a,b,c) &= (D_1 f(a,b,c), D_2 f(a,b,c), D_3 f(a,b,c)) \\ &= (b+c, a+c, b+a). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f'(a,b,c)(m,n,r) &= \langle (b+c, a+c, b+a), (m,n,r) \rangle \\ &= mb + mc + na + nc + rb + ra \end{aligned}$$

3.3 Regla de la cadena

Sea $\mathbf{f} : S \to \mathbf{R}^m$, donde S es un conjunto abierto de $\mathbf{R}^n$, un campo vectorial. El campo $\mathbf{f}$ tiene m funciones componentes $f_i : S \to \mathbf{R}$ tales que $\mathbf{f}(X) = (f_1(X), ..., f_m(X))$. La derivada direccional del campo vectorial $\mathbf{f}$ en un punto X y en la dirección Y se define de la misma forma como lo hicimos para campos escalares, ésto es,

$$\mathbf{f}'(X,Y) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{f}(X+tY) - \mathbf{f}(X)}{t}.$$

En términos de las funciones componentes de $\mathbf{f}$ vemos que

$$\mathbf{f}'(X,Y) = \sum_{k=1}^{m} f_k'(X,Y) e_k. \qquad (3.5.1)$$

Análogamente, la derivada fuerte o derivada de Frechet del campo vectorial $\mathbf{f}$ en el punto X se define como la transformación lineal $\mathbf{f}'(X) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ tal que para todo $Y \in \mathbf{R}^n$ se cumple que

$$\mathbf{f}(X+Y) - \mathbf{f}(X) = \mathbf{f}'(X)(Y) + o(X,Y),$$

en donde $o(X,Y) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es tal que $\frac{\|o(X,Y)\|}{\|Y\|} \to 0$ cuando $Y \to 0$.

La transformación lineal $\mathbf{f}'(X)$ la llamamos la diferencial fuerte o de Frechet. Frechet o simplemente la diferencial de $\mathbf{f}$ en el punto X.

Es fácil ver que si $\mathbf{f}$ es diferenciable en X entonces todas sus funciones componentes son diferenciables y tenemos que

$$\mathbf{f}'(X)(Y) = \mathbf{f}'(X,Y).$$

Por lo anterior obtenemos

$$\mathbf{f}'(X)(Y) = (\langle \nabla f_1(X), Y \rangle, ..., \langle \nabla f_m(X), Y \rangle).$$

La expresión anterior la podemos presentar en forma matricial, así:

$$\mathbf{f}'(X)(Y) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(X) & D_2 f_1(X) & . \; . \; . & D_n f_1(X) \\ D_1 f_2(X) & D_2 f_2(X) & . \; . \; . & D_n f_2(X) \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ D_1 f_m(X) & D_2 f_m(X) & & D_n f_m(X) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

en donde $Y = (y_1, ...y_n)$. La matriz de m filas por n columnas que definen la transformación lineal $\mathbf{f}'(X)$ es conocida como la matriz jacobiana de $\mathbf{f}$ en X. La notaremos como $M_{\mathbf{f}'(X)}$.

Regla de la cadena

Supongamos que f y g son dos campos vectoriales tales que $\mathbf{g} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es diferenciable en X y $\mathbf{f} : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ es diferenciable en $\mathbf{g}(X)$. Entonces $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ es diferenciable en X y tenemos que

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})'(X) = \mathbf{f}'(\mathbf{g}(X)) \circ \mathbf{g}'(X). \qquad (1)$$

Para ver (1) procedemos así: Sea $Z = \mathbf{g}(X+Y) - \mathbf{g}(X)$, entonces $Z = \mathbf{g}'(X)(Y) + o_1(X,Y)$. Ahora,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(X+Y) - (\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(X) &= \mathbf{f}(\mathbf{g}(X+Y)) - \mathbf{f}(\mathbf{g}(X)) \\
&= \mathbf{f}(\mathbf{g}(X) + Z) - \mathbf{f}(\mathbf{g}(X)) \\
&= \mathbf{f}'(\mathbf{g}(X))(Z) + o_2(\mathbf{g}(X), Z) \\
&= \mathbf{f}'(\mathbf{g}(X))\left(\mathbf{g}'(X)(Y) + o_1(X,Y)\right) + o_2(\mathbf{g}(X), Z) \\
&= \mathbf{f}'(\mathbf{g}(X))(\mathbf{g}'(X)(Y)) + \mathbf{f}'(\mathbf{g}(X))(o_1(X,Y)) + o_2(\mathbf{g}(X), Z) \\
&= \mathbf{f}'(\mathbf{g}(X))(\mathbf{g}'(X)(Y)) + o_3(X,Y) \\
&= \left(\mathbf{f}'(\mathbf{g}(X)) \circ \mathbf{g}'(X)\right)(Y) + o_3(X,Y).
\end{aligned}$$

Dejamos al lector que verifique la siguiente igualdad:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{g}(X))(o_1(X,Y)) + o_2(\mathbf{g}(X), Z) = o_3(X,Y).$$

La regla de la cadena (1) tiene la siguiente representación matricial en términos de la matriz jacobiana:

$$M_{(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})'(X)} = M_{\mathbf{f}'(\mathbf{g}(X))} \cdot M_{\mathbf{g}'(X)}, \qquad (2)$$

en donde el producto de la derecha de (2) es un producto de matrices. Es importante advertir que $M_{\mathbf{g}'(X)}$ es una matriz de orden $m \times n$, ésto es, m filas por n columnas, y $M_{\mathbf{f}'(\mathbf{g}(X))}$ es de orden $p \times m$, entonces $M_{(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})'(X)}$ es de orden $p \times n$.

Para entender bien el uso de (2) consideremos el siguiente ejemplo: Sea $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ y $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$. Para simplificar llamemos $\mathbf{g}(X) = Y$. Entonces, en representación matricial, tenemos

$$\mathbf{g}'(X) = \begin{pmatrix} D_1 g_1(X) & D_2 g_1(X) \\ D_1 g_2(X) & D_2 g_2(X) \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{f}'(Y) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(Y) & D_2 f_1(Y) \\ D_1 f_2(Y) & D_2 f_2(Y) \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$D_1(f_1 \circ g)(X) = D_1 f_1(Y).D_1 g_1(X) + D_2 f_1(Y).D_1 g_2(X)$$

y

$$D_2(f_1 \circ g)(X) = D_1 f_1(Y).D_2 g_1(X) + D_2 f_1(Y).D_2 g_2(X).$$

De manera análoga tendremos $D_1(f_2 \circ g)(X)$ y $D_2(f_2 \circ g)(X)$.

Consideremos otro ejemplo: Sea $f(x, y)$ un campo escalar. El punto (x, y) expresado en coortlenadas polares satisface

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= rsen\theta. \end{aligned}$$

Denotemos $w(r,\theta) = f(r\cos\theta, rsen\theta)$. Por la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{\partial w(r,\theta)}{\partial r} = \frac{\partial f(r\cos\theta, rsen\theta)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f(r\cos\theta, rsen\theta)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}.$$

Esto es

$$\frac{\partial w(r,\theta)}{\partial r} = \frac{\partial f(r\cos\theta, rsen\theta)}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f(r\cos\theta, rsen\theta)}{\partial y}sen\theta.$$

En forma similar se calcula $\frac{\partial w(r,\theta)}{\partial \theta}$.

Ejemplo 3.4 *Sea $f(x.y) = xy$.*

Supongamos que

$$x = x(s,t) = st, \quad y = y(s,t) = s + t$$

Ejemplo 3.5 *Sea $w(s,t) = f(st, s+t)$. Entonces*

$$\frac{\partial w(s,t)}{\partial s} = \frac{\partial f(x(s,t), y(s,t))}{\partial x}.\frac{\partial x(s,t)}{\partial s} + \frac{\partial f(x(s,t), y(s,t))}{\partial y}.\frac{\partial y(s,t)}{\partial s}$$

Esto es,

$$\frac{\partial w(s,t)}{\partial s} = (s+t)t + st.$$

Ejemplo 3.6 *Sean $f(x,y) = (xy, x+y)$ y $g(x,y) = (e^x, e^y)$. Entonces la representación matricial de $f'(x,y)$ y $g'(x,y)$ es:*

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \; g'(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^y \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la representación matricial de $(f \circ g)'(x,y)$ es

$$(f \circ g)'(x,y) = f'(e^x, e^y)\, g'(x,y) = \begin{pmatrix} e^y & e^x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^y \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.7 *Esto es,*

$$f \circ g'(x,y) = \begin{pmatrix} e^{y+x} & e^{y+x} \\ e^x & e^y \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.8 *Dada una función $u = f(x,y)$ de clase C^2.El cambio de variable $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ transforma la ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = A(r,\theta)\frac{\partial u}{\partial x} + B(r,\theta)\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Hallar las funciones $A(r,\theta)$ y $B(r,\theta)$.

Solución.

$$u = f(x,y) \quad \begin{array}{l} \nearrow \; x \begin{array}{l} \nearrow r \\ \searrow \theta \end{array} \\ \searrow \; y \begin{array}{l} \nearrow r \\ \searrow \theta \end{array} \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial x}{\partial r} &=& \cos\theta \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} &=& -r\sin\theta \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} &=& \sin\theta \\ \dfrac{\partial y}{\partial \theta} &=& r\cos\theta \end{array} \right.$$

Ahora :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial r} &= \cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial y} \quad \cdots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= -r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y} \cdots (2) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left[\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right] \\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left[\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial r}\left[\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right] \\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdots (*) \end{aligned}$$

Pero :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\,\frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\sin\theta \cdots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\,\frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin\theta \cdots (4) \end{aligned}$$

Reemplazando (3) y (4) en $(*)$ obtenemos :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\
&= \cos\theta\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\sin\theta\right]+\sin\theta\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin\theta\right]\\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdots(5)
\end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right]\\
\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left[-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right]\\
\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \left[-r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]+\left[\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\cdots(**)
\end{aligned}$$

Pero :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial\theta}\\
\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= -r\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+r\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\cdots(6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial\theta}\\
\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= -r\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+r\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdots(7)
\end{aligned}$$

Reemplazando (6) y (6) en (**) obtenemos :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \left[-r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]+\left[-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}+r\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\\
&= \left\{-r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}-r\sin\theta\left[-r\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+r\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right]\right\}\\
&\quad+\left\{-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}+r\cos\theta\left[-r\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+r\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]\right\}\\
&= \left\{-r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right\}\\
&\quad+\left\{-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}-r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= -r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}+r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\
\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= -\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}+\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdots(8)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \left[\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]+ \\
&\quad \left[-\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}+\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] \\
&= \left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y} \\
&= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]-\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \left(-\frac{1}{r}\cos\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(-\frac{1}{r}\sin\theta\right)\frac{\partial u}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$A(r,\theta)=-\frac{1}{r}\cos\theta, B(r,\theta)=-\frac{1}{r}\sin\theta$$

Ejemplo 3.9 *Sean*

$$z=f(x,y)\ ,\quad x=e^v\sec u\quad ,\quad y=e^v\tan u$$

donde f es una función de clase C^2.
Hallar las funciones

$$g(u),\quad h(x,y)\quad y\quad k(x,y)$$

tales que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}=g(u)\left[h(x,y)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+k(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right]$$

Solución.

$$
z=f(x,y)\quad
\begin{array}{l}
\nearrow\ x\ \begin{array}{l}\nearrow u\\ \searrow v\end{array}\\
\searrow\ y\ \begin{array}{l}\nearrow u\\ \searrow v\end{array}
\end{array}
$$

$$
\Longleftrightarrow\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} &= e^v\sec u\tan u\\
\frac{\partial x}{\partial v} &= e^v\sec u\\
\frac{\partial y}{\partial u} &= e^v\sec^2 u\\
\frac{\partial y}{\partial v} &= e^v\tan u
\end{aligned}
\right.
$$

Ahora :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\
\frac{\partial z}{\partial u} &= e^v\sec u\tan u\,\frac{\partial z}{\partial x}+e^v\sec^2 u\,\frac{\partial z}{\partial y}\cdots(1)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v}\\
\frac{\partial z}{\partial v} &= e^{v}\sec u\frac{\partial z}{\partial x}+e^{v}\tan u\frac{\partial z}{\partial y}\cdots(2)
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} &= \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial z}{\partial v}\right]=\frac{\partial}{\partial u}\left[e^{v}\sec u\frac{\partial z}{\partial x}+e^{v}\tan u\frac{\partial z}{\partial y}\right]\\
\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} &= \frac{\partial}{\partial u}\left[e^{v}\sec u\frac{\partial z}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial u}\left[e^{v}\tan u\frac{\partial z}{\partial y}\right]\\
\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} &= \left[e^{v}\sec u\tan u\ \frac{\partial z}{\partial x}+e^{v}\sec u\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]+\\
&\quad\left[e^{v}\sec^2 u\ \frac{\partial z}{\partial y}+e^{v}\tan u\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right]\cdots(*)
\end{aligned}$$

Pero :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\ \frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\ \frac{\partial y}{\partial u}\\
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= e^{v}\sec u\tan u\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+e^{v}\sec^2 u\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdots(3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\ \frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\ \frac{\partial y}{\partial u}\\
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= e^{v}\sec u\tan u\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+e^{v}\sec^2 u\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdots(4)
\end{aligned}$$

Reemplazando (3) y (4) en $(*)$ obtenemos :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} &= \left\{e^{v}\sec u\tan u\ \frac{\partial z}{\partial x}+e^{v}\sec u\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\}+\left\{e^{v}\sec^2 u\ \frac{\partial z}{\partial y}+e^{v}\tan u\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right\}\\
\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} &= \left\{e^{v}\sec u\tan u\ \frac{\partial z}{\partial x}+e^{v}\sec u\ \left[e^{v}\sec u\tan u\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+e^{v}\sec^2 u\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right]\right\}+\cdots\\
&\quad\cdots+\left\{e^{v}\sec^2 u\ \frac{\partial z}{\partial y}+e^{v}\tan u\ \left[e^{v}\sec u\tan u\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+e^{v}\sec^2 u\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]\right\}\\
\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} &= e^{v}\sec u\tan u\ \frac{\partial z}{\partial x}+e^{2v}\sec^2 u\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+e^{2v}\sec^3 u\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\cdots\\
&\quad\cdots+e^{v}\sec^2 u\ \frac{\partial z}{\partial y}+e^{2v}\sec u\tan^2 u\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+e^{v}\sec^2 u\tan u\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} &= \underbrace{\left[e^v \sec u \tan u\, \frac{\partial z}{\partial x} + e^v \sec^2 u\, \frac{\partial z}{\partial y}\right]}_{\dfrac{\partial z}{\partial u}} + e^{2v} \sec^2 u \tan u \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \cdots \\
&\cdots + e^{2v} \sec u \left(\sec^2 u + \tan^2 u\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} &= \sec u \left[(e^v \sec u)\ \ (e^v \tan u)\right] \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \\
&\quad \sec u \left[(e^v \sec u)^2 + (e^v \tan u)^2\right] \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} &= \sec u\ [xy] \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \sec u\ \left[x^2 + y^2\right] \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} &= \underbrace{\sec u}_{g(u)} \left[\underbrace{xy}_{h(x,y)} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \underbrace{(x^2 + y^2)}_{k(x,y)} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$g(u) = \sec u, \quad h(x,y) = xy \quad y \quad k(x,y) = x^2 + y^2.$$

Ejercicios Propuestos:Regla de la cadena

1. Sea $z = f\ (x,y)$, una función de clase C^2 en $\mathbf{R}^2$.Consideremos la rotación de ejes

   $$x = u\cos\alpha - v\sin\alpha \qquad y = u\sin\alpha + v\cos\alpha$$

   donde α es una constante. Hallar las constante A, B tales que

   $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = A\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

2. Sea $w = f\ (x,y)$, $u = x + y$, $v = x - y$ y una función f de clase C^2 en $\mathbf{R}^2$, demostrar que

   $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

3. Sea $z = f\ (x,y)$, $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ y f una función de clase C^2 en $\mathbf{R}^2$, tal que

   $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

   Si $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} = a\dfrac{\partial z}{\partial y} + P(x)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$,donde a es una constante y $P(x)$ es un polinomio en x , hallar, justificando su respuesta, a y $P(x)$.

4. El cambio de variables

   $$\begin{cases} x &= u^2 - v^2 \\ y &= uv^2 \end{cases}$$

transforma a $z = f\,(x, y)$ de clase C^2 en $z = g\,(u, v)$.

Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1) = 3$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,1) = 1$,calcular $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(1,1)$.

5. El cambio de variables $\begin{cases} x &= r\ \cos\theta \\ y &= r\ \sin\theta \end{cases}$ transforma a la ecuación $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = A\,(r, \theta)\,.$$

Hallar $A\,(r, \theta)$.

6. Sea $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ una función de clase C^2.Se define la función $g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ por la condición

$$g\,(x, y) = f\,\left(x^2, y^2\right).$$

Si $h\,(x, y) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y)$, hallar el gradiente de h en términos de las derivadas parciales de f.

Capítulo 4

Integración Múltiple

Este capítulo está dedicado a la Teoría de la Integración. En la primera sección estudiamos la integral de línea: Introducimos el concepto de curvas equivalentes y presentamos dos interpretaciones físicas de ella, presentamos los dos teoremas fundamentales del cálculo para integrales de línea y mostramos una aplicación al principio de conservación de la energía. Finalmente hacemos un estudio de los campos conservativos o gradientes.

La segunda y tercera sección están dedicadas a establecer los principios básicos de la integral doble de campos escalares definidos en regiones de $\mathbb{R}^2$.

La cuarta sección la dedicamos a las aplicaciones de la integral doble a problemas como: volúmenes bajo una superficie, áreas de regiones limitadas por curvas, cálculo de centros de gravedad y cálculo de volúmenes de revolución.

La quinta y sexta sección la dedicamos al estudio del Teorema de Green que constituye uno de los teoremas más importantes del cálculo. Lo hacemos tanto para regiones simplemente conexas como múltiplemente conexas. Como consecuencia del Teorema de Green deducimos las fórmulas de Green, de gran utilidad en el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales, y damos aplicaciones al cálculo de regiones planas y al número de giros que una curva da alrededor de un punto.

En la última sección estudiamos una de las técnicas más importantes de la teoría de la integración, la cual es el cambio de variable. Damos ejemplos al caso de coordenadas polares y cambio de coordenadas por transformaciones lineales.

En la octava sección mostramos cómo las ideas expuestas en la sección séptima se pueden extender al caso de campos escalares de más de dos variables. En particular estudiamos el caso de cambios de variable por coordenadas cilíndricas y esféricas.

Cada sección tiene un grupo de problemas que el estudiante debe resolver. Adicionalmente hemos incluído en cada sección, una corta autoevaluación que el estudiante debe realizar frente a su computador. Es importante que el estudiante haga las autoevaluciones para garantizar la cabal comprensión de cada tema.

4.1 Integrales Dobles

En esta sección estudiaremos la integral doble definida sobre conjuntos acotados de $\mathbf{R}^2$. Denotaremos con $\mathcal{R}$ el rectángulo $[a,b] \times [c,d]$. Si $A = \{x_0 = a, x_1, x_2, ...x_n = b\}$ es una partición de $[a,b]$ y $B = \{y_0 = c, y_1, y_2, ...y_m = d\}$ es una partición de $[c,d]$ entonces $\mathbf{P} = A \times B$ será una partición del rectangulo $\mathcal{R}$. Los subrectángulos de $\mathcal{R}$ definidos por la partición $\mathbf{P}$ los denotaremos con $\mathcal{R}_{ij}$.

Definición 4.1 *Una función $f : \mathcal{R} \to \mathbf{R}$ tal que $f(X) = c_{ij}$, para todo $X \in \mathcal{R}_{ij}$ se llama una función escalonada.*

Es facil ver que si f y g son funciones escalonadas definidas por las particiones $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}'$ de $\mathcal{R}$ respectivamente entonces $\alpha f + \beta g$, para todo α y β números reales, es una función escalonada definida por la partición $\mathbf{P} \cup \mathbf{P}'$.

Definición 4.2 *Sea $f : \mathcal{R} \to \mathbf{R}$ una función escalonada. Definimos la integral doble de f sobre $\mathcal{R}$ como*

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} f &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &= \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dxdy. \end{aligned}$$

Por ejemplo, si $f(x,y) = k$, entonces

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} f &= k(b-a)(d-c) \\ &= \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)dy \right\} dx \end{aligned}$$

La fórmula permanece válida para funciones escalonadas puesto que éstas son constantes en cada subrectángulo $\mathcal{R}_{ij}$.

Propiedades

Para f y g funciones escalonadas definidas en $\mathcal{R}$ tenemos las siguientes propiedades:

1. $\iint_{\mathcal{R}} \alpha f + \beta g = \alpha \iint_{\mathcal{R}} f + \beta \iint_{\mathcal{R}} g$.
2. $\iint_{\mathcal{R}} f = \iint_{\mathcal{R}_1} f + \iint_{\mathcal{R}_2} f$, en donde $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}$ y $\mathcal{R}_1^\circ \cap \mathcal{R}_2^\circ = \Phi$.
3. Si h y g son escalonadas en $\mathcal{R}$ y $h \leq g$ entonces $\iint_{\mathcal{R}} h \leq \iint_{\mathcal{R}} g$.

La integral de una función acotada

Sea f una función acotada sobre $\mathcal{R}$, esto es, $|f(x,y)| \leq M$, para alguna constante $M > 0$. Consideremos el conjunto Ψ de todas las funciones escalonadas h y g definidas sobre $\mathcal{R}$ tales que $h \leq f \leq g$. Puesto que f es acotada, Ψ no es vacío.

Definición 4.3 *Si para toda $h,\ g \in \Psi$ existe un único número I tal que $\iint_{\mathcal{R}} h \leq I \leq \iint_{\mathcal{R}} g$, decimos que f es integrable sobre $\mathcal{R}$ y $\iint_{\mathcal{R}} f = I$.*

Integral Superior e Inferior de f

Sea

$$S = \left\{ \iint_{\mathcal{R}} h,\ h \leq f,\ h \text{ escalonada sobre } \mathcal{R} \right\}$$

y

$$T = \left\{ \iint_{\mathcal{R}} g,\ \ g \geq f,\ g \text{ escalonada sobre } \mathcal{R} \right\}$$

Entonces,

$$\iint_{\mathcal{R}} h \leq \sup S \leq \inf T \leq \iint_{\mathcal{R}} g.$$

Llamamos $\sup S = I_{\text{inf}}(f)$, la integral inferior de f y llamamos $\inf T = I_{\text{sup}}(f)$, la integral superior de f.

De la definición anterior se sigue inmediatamente que si $I_{\text{inf}}(f) = I_{\text{sup}}(f)$ entonces f es integrable y

$\iint_{\mathcal{R}} f = I_{\text{inf}}(f) = I_{\text{sup}}(f)$.

En esta sección estudiaremos la integral de funciones continuas definidas en $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbf{R}^2$. Observemos que si f es integrable en $\mathcal{R}$ y para cada $y \in [c,d]$ la integral

$$A(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

existe y además $\int_c^d A(y)dy$ existe, entonces

$$\iint_{\mathcal{R}} f = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)dx \right\} dy.$$

En efecto: Para cualquier par de funciones escalonadas h y g tales que $h \leq f \leq g$ se cumple que

$$\int_a^b h(x,y)dx \leq \int_a^b f(x,y)dx \leq \int_a^b g(x,y)dx,$$

por lo tanto

$$\iint_{\mathcal{R}} h \leq \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)dx \right\} dy \leq \iint_{\mathcal{R}} g.$$

Puesto que f es integrable,

$$\iint_{\mathcal{R}} f = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)dx \right\} dy$$

Queremos demostrar que la fórmula anterior es válida para funciones continuas definidas sobre $\mathcal{R}$.

Teorema 4.1 *Sea f una función continua sobre el rectángulo $\mathcal{R}$. Entonces f es integrable y se satisface la igualdad anterior.*

Demostración: Puesto que f es continua y $\mathcal{R}$ es un conjunto compacto entonces f es acotada. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y consideremos una partición de $\mathcal{R}$ tal que en cada subrectángulo $\mathcal{R}_{ij}$

$$\max_{\mathcal{R}_{ij}} f - \min_{\mathcal{R}_{ij}} f < \varepsilon.$$

Llamemos $\max_{\mathcal{R}_{ij}} f = M_{ij}$ y $\min_{\mathcal{R}_{ij}} f = m_{ij}$. Entonces las funciones escalonadas g y h definidas por M_{ij} y m_{ij} respectivamente satisfacen

$$\iint_{\mathcal{R}} g - \iint_{\mathcal{R}} h \leq \varepsilon\,(d-c)\,(b-a)\,.$$

Hacemos que $\varepsilon \to 0$ y obtenemos que f es integrable.

Finalmente, puesto que f es continua, lo es con respecto a cada una de sus variables. Esto nos dice que $A(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ existe. Además, es fácil ver que $A(y)$ es continua y por lo tanto $\int_c^d A(y)dy$ existe. Concluímos, entonces, que (4.3.1) se satisface.

Otras regiones de integración

Hasta ahora hemos considerado integrales sobre rectángulos. Sea $S \subset \mathbf{R}^2$ un conjunto abierto y acotado. Sea, entonces $\mathcal{R}$ un rectángulo de $\mathbf{R}^2$ tal que $S \subset \mathcal{R}$. Si f es una función continua definida en $\overline{S}$. Definimos la integral $\iint_S f$ de la siguiente manera: Sea

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) \text{ si } (x,y) \in S \\ 0 \text{ si } (x,y) \in \mathcal{R} - S \end{cases}$$

Entonces definimos $\iint_S f = \iint_{\mathcal{R}} \tilde{f}$. La dificultad de extender la integral a regiones más generales radica en que la nueva función $\tilde{f}$ no es continua en $\mathcal{R}$ y no sabemos si $\tilde{f}$ es integrable. Las discontinuidades se están presentando en ∂S. Para sobrepasar esa dificultad es necesario introducir el concepto de **contenido nulo** de un conjunto para concluír que una función continua en $\mathcal{R}$, salvo un subconjunto de contenido nulo, es integrable en $\mathcal{R}$.

Definición 4.4 *Sea $A \subset \mathbf{R}^n$. Decimos que A tiene contenido nulo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número finito de rectángulos $\mathcal{R}_i, i = 1, 2..n$ tales que $A \subset \cup \mathcal{R}_i$ y $\sum |\mathcal{R}_i| < \varepsilon$, en donde $|\mathcal{R}_i|$ representa el área del rectángulo $\mathcal{R}_i$.*

Por ejemplo, el intervalo cerrado $[0, 1]$ visto como un subconjunto de $\mathbf{R}^2$ es de contenido nulo, más no es de contenido nulo si lo miramos como subconjunto de $\mathbf{R}$.

También, sea ϕ una función continua sobre el intervalo $[a, b]$, entonces ϕ es uniformemente continua. Esto nos sirve para probar que el conjunto $\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ y = \phi(x)\right\}$ es de contenido nulo.

Teorema 4.2 *Sea f una función acotada sobre el rectángulo $\mathcal{R}$. Si el conjunto D de discontinuidades de f es de contenido nulo, entonces f es integrable sobre Q.*

Demostración: Sea $M > 0$ tal que $|f| \leq M$. Sean ε, $\delta > 0$ escogidos arbitrariamente. Tomemos, entonces, una partición de $\mathcal{R}$ tal que la suma de las áreas de los subrectángulos $\mathcal{R}_{ij}$ que contienen a D sea menor que δ. Los otros subrectángulos, en los que f es continua, los escogemos tales que en cada uno de ellos $\max f - \min f \leq \varepsilon$. Podemos definir las siguientes funciones escalonadas: $h = \min f$ sobre los subrectángulos donde f es continua y sobre los subrectángulos que contienen a D la definimos como $h = -M$. Así mismo, $g = \max f$ sobre los subrectángulos en donde f es continua y $g = M$ sobre los subrectángulos que contienen a D.

Tenemos, entonces, que

$$0 \leq \iint_{\mathcal{R}} g - h \leq \varepsilon |\mathcal{R}| + 2M\delta.$$

Esto nos indica que $0 \leq I_{\sup}(f) - I_{\inf}(f) \leq \varepsilon |\mathcal{R}| + 2M\delta$. Si hacemos que $\varepsilon, \delta \to 0$, concluímos que f es integrable sobre $\mathcal{R}$.

Por ejemplo, sobre conjuntos de la forma

$$S_1 = \{(x, y\}, \phi(x) \leq y \leq \psi(x), x \in [a, b],\ \phi, \psi \text{ continuas}\}$$

tenemos que

$\iint_{S_1} f = \iint_Q \tilde{f} = \int_a^b \left\{ \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy \right\} dx$

O sobre conjuntos del tipo

$$S_2 = \{(x, y\}, \phi(y) \leq x \leq \psi(y), y \in [c, d],\ \phi, \psi \text{ continuas}\}$$

tenemos que

$\iint_{S_2} f = \iint_Q \tilde{f} = \int_c^d \left\{ \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx \right\} dy$

Una gran variedad de conjuntos de $\mathbf{R}^2$ los podemos reducir a una reunión de conjuntos del tipo S_1 o S_2.

Ejemplo 4.1 *Sea $f(x, y) = xy^2$. Calculemos $\iint_S f(x, y)$, en donde S es la región que se encuentra entre las curvas $y = x$ y $y = x^2$.*

Cómo se indica en la figura,

$$\iint_S xy^2\, dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^{x} xy^2\, dy \right\} dx = \int_0^1 \frac{x^4 - x^7}{3}\, dx = \frac{1}{40}$$

Y también,

$$\iint_S xy^2\, dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_{y}^{\sqrt{y}} xy^2\, dx \right\} dy = \int_0^1 \frac{y^3 - y^4}{2}\, dy = \frac{1}{40}$$

4.1.1 Cambio de variable

En esta sección estudiaremos el cambio de variable en una integral doble. En el caso de una sola variable sabemos que si $g : [a,b] \to [c,d]$ es una aplicacion biyectiva y diferenciable entonces

$$\int_{g(a)=c}^{g(b)=d} f(x)dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)dt.$$

En el caso de dos variables deduciremos, con la ayuda del Teorema de *Green.*, una fórmula similar a la anterior.

Sea $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una aplicación diferenciable que transforma un conjunto abierto y acotado $\mathcal{R}$ de $\mathbf{R}^2$ en otro conjunto S de $\mathbf{R}^2$. Escribimos $F(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$. La derivada de F en un punto $(u,v) \in R$ la podemos representar por medio de la matriz

$$F'(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

El determinante de $F'(u,v)$ que notaremos cómo $J_F(u,v)$ lo llamaremos el **jacobiano** de F en el punto (u,v). La expresión que obtendremos es:

$$\iint_S f(x,y)dx\, dy = \iint_{\mathcal{R}} f(x(u,v), y(u,v))\, |J_F(u,v)|\, du\, dv, \quad \cdots (1)$$

en donde f es un campo escalar integrable en S.

En el caso en que $f = 1$ el miembro izquierdo de $\cdots(1)$ representa el área de la región de integración S y entonces

$$|S| = \iint_S dx\, dy = \iint_{\mathcal{R}} |J_F(u,v)|\, du\, dv. \quad \cdots (2)$$

Tenemos razones de tipo geométrico para aceptar la validéz de lo anterior. Consideremos el rectángulo de lados Δu y Δv que se indica en la figura.

Para v fijo, $\alpha(u) = (x(u,v), y(u,v))$ representa una curva cuya imagen se encuentra en S y cuyo vector tangente es

$$V_1 = \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} \right)$$

Análogamente, para u fijo $\beta(v) = (x(u,v), y(u,v))$ define otra curva con imagen en S cuyo vector tangente es

$$V_2 = \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \right).$$

Podemos pensar que para incrementos Δu y Δv muy pequeños el área del pequeño *rectángulo* transformado por la aplicación F es casi igual al área del paralelogramo que definen los vectores $\Delta u.V_1$ y $\Delta v.V_2$. Es fácil ver que esta área es $|J_F(u,v)|\,(\Delta u.\Delta v)$. Entonces $|J_F(u,v)|$ es un factor de ampliación o contracción de áreas.

Antes de dar una prueba de (1) veamos algunos ejemplos.

Coordenadas polares

La aplicación $F(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta))$, en donde

$$\begin{aligned} x(r,\theta) &= r\cos\theta \\ y(r,\theta) &= r\ sen\ \theta, \end{aligned} \qquad \cdots (3)$$

define una aplicación del rectángulo $R = [0,a] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en el primer cuadrante D de un círculo de centro en el origen y radio a. Es claro que $J_F(r,\theta) = r$. De acuerdo con (2)

$$\begin{aligned} \textstyle\iint_D \ dx\, dy &= \textstyle\iint_R r dr\, d\theta \\ &= \textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^a r dr \right\} d\theta \\ &= \tfrac{\pi a^2}{4}, \end{aligned}$$

como era de esperarse.

Es claro de (1) que la fórmula no es válida si $J_F(u,v) = 0$ sobre conjuntos abiertos de la región R. La fórmula permanece válida si $J_F(u,v) = 0$ sobre subconjuntos de contenido nulo. Por ejemplo $J_F(r,\theta) = 0$ sobre puntos de la forma $(0,\theta)$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, que constituyen un subconjunto de R de contenido nulo.

Transformaciones lineales

La aplicación $F = (x(u,v), y(u,v))$, en donde

$$\begin{aligned} x(u,v) &= au + bv \\ y(u,v) &= cu + dv, \end{aligned}$$

es una transformación lineal de $\mathbf{R}^2$ en si mismo y $J_F(u,v) = ad - bc$. Vemos entonces que para utilizar transformaciones lineales en lo anterior es necesario que sean inyectivas.

Ilustramos su uso en el siguiente

Ejemplo 4.2 *Calculemos $\iint_S \ e^{\frac{y-x}{x+y}} dxdy$ en donde S es la región de $\mathbf{R}^2$ limitada por los ejes coordenados y por la recta $x + y = 2$.*

Hacemos el cambio de variable $y - x = u$, $x + y = v$, ésto es, $F = (x(u,v), y(u,v))$, en donde

$$\begin{aligned} x(u,v) &= \tfrac{v-u}{2} \\ y(u,v) &= \tfrac{v+u}{2}. \end{aligned}$$

Entonces $J_F(u,v) = -\frac{1}{2}$. Ahora, es fácil ver que la región R limitada por las rectas $v = 2$, $v = u$ y $v = -u$ es transformada en la región S por la transformación lineal F anterior.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\iint_S e^{\frac{y-x}{x+y}}dxdy &= \frac{1}{2}\iint_R e^{\frac{u}{v}}dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2\left\{\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}du\right\}dv \\ &= e-\frac{1}{e}.\end{aligned}$$

Prueba de (1):

$$\iint_S f(x,y)dx\ dy = \iint_R f(x(u,v),y(u,v))\left|J_F(u,v)\right| du\ dv$$

Para probar (1) primero probamos (2)Para probar lo último primero probamos lo anterior. Supongamos que el conjunto S es un rectángulo. Denotemos con r y s las curvas que circundan las regiones R y S respectivamente, teniendo en cuenta que $F\circ r = s$.

Por el Teorema de Green, para $Q(x,y)=x$ y $P(x,y)=0$,tenemos

$$\begin{aligned}\iint_S dxdy &= \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \\ &= \oint_s Pdx+Qdy \quad \cdots(4) \\ &= \oint_s xdy\end{aligned}$$

De otra parte

$$\begin{aligned}J_F(u,v) &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \\ &+x\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}-x\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} \\ &= \frac{\partial}{\partial u}\left(x\frac{\partial y}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(x\frac{\partial y}{\partial u}\right).\end{aligned}$$

De nuevo usamos el Teorema de *Green* y obtenemos

$$\iint_R J_F(u,v)dudv = \oint_r x\frac{\partial y}{\partial u}du + x\frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

La prueba quedará terminada si probamos que

$$\oint_s xdy = \oint_r x\frac{\partial y}{\partial u}du + x\frac{\partial y}{\partial v}dv. \quad \cdots(5)$$

En efecto, supongamos que $r(t)=(u(t),v(t))$, $t\in[a,b]$. Entonces

$$s(t) = (x(u(t),v(t)), y(u(t),v(t))).$$

Por lo tanto

$$s'(t) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}u'+\frac{\partial x}{\partial v}v', \frac{\partial y}{\partial u}u'+\frac{\partial y}{\partial v}v'\right). \quad \cdots(6)$$

De (6) se sigue inmediatamente (5).

Ya hemos probado (2). Para ver (4) procedemos así: Primero observamos que de (2) se sigue, claramente, (1) para funciones f escalonadas. Ahora, si f es acotada e integrable, para todo par de funciones escalonadas h y g tales que $h\le f\le g$ tenemos que

$$\begin{aligned}\iint_S h\ dxdy &= \iint_R h\ \left|J_F(u,v)\right|dudv \\ &\le \iint_R f\ \left|J_F(u,v)\right|dudv \qquad (7) \\ &\le \iint_R g\ \left|J_F(u,v)\right|dudv \\ &= \iint_S g\ dxdy.\end{aligned}$$

Puesto que f es integrable, deducimos de (7) la validez de (1).

4.1.2 Aplicaciones de la integral doble

En esta sección daremos algunas aplicaciones de la integral doble.

1. Volúmenes

El conjunto

$$\Psi = \{(x,y,z)\,,\ z = f(x,y),\ (x,y) \in S = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbf{R}^2\}$$

representa una superficie en $\mathbf{R}^3$. Entonces $\iint_S f$ representará el volumen del sólido que está limitado por arriba con la superficie Ψ y por debajo con la región S. También tenemos

$$\iint_Q f = \int_c^d A(y)dy,$$

en donde $A(y) = \int_a^b f(x,y)dx$. Ahora, $A(y)$ representa el área bajo la curva $f(x,y)$, en donde estamos dejando a y fijo. Entonces de la

ecuación nos dice que un volumen es igual a la *suma* de las áreas $A(y)$ cuando y varía ente c y d.

En el caso de regiones del tipo S_1 o S_2 que consideramos en la sección 3 de este capítulo, procedemos de manera similar. Consideremos el siguiente

Ejemplo 4.3 *Sea*

$$f(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

y

$$S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\ , x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

Entonces Ψ representa el hemisferio superior de una esfera de centro en el origen y radio r. Por lo tanto $\iint_S f$ representará el volumen de la semiesfera. Si utilizamos la simetría de la esfera para calcular su volumen vemos que el volumen de la semiesfera de radio r es

$$V(r) = 4 \iint_N \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}dxdy,$$

en donde N es el primer cuadrante del círculo de centro en el origen y radio r. Esto es,

$$V(r) = 4 \int_0^r \left\{ \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}dy \right\} dx$$

Sabemos que

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}dy = \frac{1}{4}a^2\pi,$$

por lo tanto

$$\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}dy = \frac{1}{4}\left(r^2 - x^2\right)\pi.$$

Es así cómo

$$V(r) = 4 \int_0^r \frac{1}{4}\left(r^2 - x^2\right)\pi dx = \frac{2}{3}\pi r^3$$

El volumen de la esfera completa será $\frac{4}{3}\pi r^3$

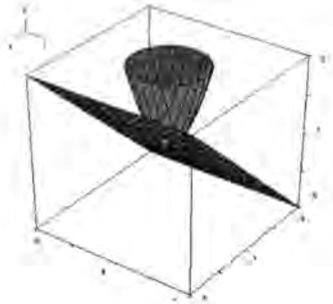


Figure 4-1:

Ejemplo 4.4 *Calcular el volumen del sólido encerrado entre las superficies* $f(x,y) = z = x^2 + y^2$ *y el plano* $g(x,y) = z = 1$.

Solución: Si hacemos $f(x,y) = g(x,y)$ vemos que las dos superficies se cortan para valores de x e y tales que $x^2 + y^2 = 1$.

Por lo tanto el volumen del sólido es

$$\iint_S \{g(x,y) - f(x,y)\}\, dx\, dy$$

Esto es:

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(1 - x^2 - y^2\right) dy dx = \tfrac{1}{2}\pi$$

2. Areas

Es Claro que $\iint_S dx\, dy$ representa el área de la región S. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 4.5 *Sea* $S = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 + y^2 \le r^2\right\}$, *entonces* $\iint_S\ dx\ dy$ *es el área del círculo de centro en el origen y radio* r. *Es así cómo*

$$\iint_S dxdy = \int_{-r}^{r} \left\{ \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \right\} dx = \pi r^2$$

Ejemplo 4.6 *Hallemos el área de la región limitada por las curvas* $y = x^2 - 2$ *y* $y = x$. *Las curvas se cortan en los puntos* $x = -1$ *y* $x = 2$ *y cómo se indica en la figura*

la región S está limitada, por arriba, por la curva $y = x$ y, por debajo, por la curva $y = x^2 - 2$. Entonces

$$\iint_S dxdy = \int_{-1}^{2} \left\{ \int_{x^2-2}^{x} dy \right\} dx = \frac{9}{2}$$

Ejemplo 4.7 *Hallar el volumen del sólido limitado entre las superficies*

$$\mathcal{S} : z = x^2 + y^2 \quad y \quad \mathcal{K} : z = x.$$

Solución.
Sea

$$\Gamma : \begin{cases} z &= x^2+y^2 \cdots (1) \\ z &= x \qquad \cdots (2) \end{cases}$$

Considere $- := \mathrm{Proy}_{XY}\ \mathcal{C}$: eliminando z

$$x^2+y^2=x \Longrightarrow \left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Longrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ z &= x \end{cases}$$

Proyectando $\mathcal{C}$ sobre el plano XY

$$\Gamma := \mathrm{Proy}_{XY}\ \mathcal{C} : \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ z &= 0 \end{cases}$$

Límites variables :$-\sqrt{x-x^2} \le y \le \sqrt{x-x^2}$
Límites constantes :$0 \le x \le 1$.
Así,

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ -\sqrt{x-x^2} \le y \le \sqrt{x-x^2}\right\}$$

Por tanto, el volumen viene dado por:

$$V(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{R}} (z_{\text{sup}} - z_{\text{inf}})\,dxdy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \left[x-\left(x^2+y^2\right)\right]\,dy\,dx$$

$$V(\mathcal{S}) = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \left[\left(x-x^2\right)-y^2\right]\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\left(x-x^2\right)y-\tfrac{1}{3}y^3\right]_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}dx$$

$$V(\mathcal{S}) = \int_0^1 \left\{\left[\left(x-x^2\right)\sqrt{x-x^2}-\tfrac{1}{3}\left(\sqrt{x-x^2}\right)^3\right]-\left[-\left(x-x^2\right)\sqrt{x-x^2}+\tfrac{1}{3}\left(\sqrt{x-x^2}\right)^3\right]\right\}dx$$

$$V(\mathcal{S}) = \int_0^1 \tfrac{4}{3}\left(\sqrt{x-x^2}\right)^3 dx = \int_0^1 \tfrac{4}{3}\left(\sqrt{\tfrac{1}{4}-(x-\tfrac{1}{2})^2}\right)^3 dx$$

$$V(\mathcal{S}) = \frac{4}{3}\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sqrt{1-(2x-1)^2}\right)^3 dx$$

Haciendo cambio de variable trigonométrico: $2x-1=\sin\theta \Longrightarrow dx=\dfrac{1}{2}\cos\theta\ d\theta$

$$\left(\sqrt{1-(2x-1)^2}\right)^3 = \left(\sqrt{1-\sin\theta^2}\right)^3 = \cos^3\theta$$

Si $x=0 \Longrightarrow \theta=-\dfrac{\pi}{2}$

Si $x=1 \Longrightarrow \theta=\dfrac{\pi}{2}$

Así,

$$V(\mathcal{S}) = \frac{2}{3}\int_0^1 \left(\sqrt{1-(2x-1)^2}\right)^3 dx = \frac{2}{3}\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta =$$

$$V(\mathcal{S}) = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = \frac{1}{12}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right)^2 d\theta$$

$$V(\mathcal{S}) = \frac{1}{12}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$V(\mathcal{S}) = \frac{1}{12}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2}+2\cos 2\theta+\frac{\cos 4\theta}{2}\right) d\theta = \frac{1}{12}\left[\frac{3}{2}\theta+2\sin 2\theta+\frac{\sin 4\theta}{8}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$V(\mathcal{S}) = \frac{1}{12}\left[\frac{3}{2}\frac{\pi}{2} - \left(\frac{3}{2}\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{8}u^3.$$

Ejemplo 4.8 *Calcular la* ***masa*** *de una lámina que tiene la forma de la región $\mathcal{R}$ limitada por las curvas*

$$y = x^2 \ , \quad y = 1,$$

y la ***densidad*** *en cada punto (x, y) de la lámina es*

$$\delta(x, y) = x^2 + y^2.$$

Solución.
La parábola se cortan con la recta $y = 1$, en los puntos $(-1, 1)$ y $(1, 1)$.
Observemos que la región $\mathcal{R}$, es una región de tipo I.Por lo podemos escribir :

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, \ x^2 \leq y \leq 1\right\}$$

$$M = \iint_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2)\, dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} (x^2 + y^2)\, dy\, dx = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} (x^2 + y^2)\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} \left[x^2 y + \tfrac{1}{3}y^3\right]_{x^2}^{1}$$

dx

$$M = \int_{-1}^{1} \left[\left(x^2 + \tfrac{1}{3}\right) - \left(x^4 - \tfrac{1}{3}x^6\right)\right] dx = \int_{-1}^{1} \left[\left(x^2 + \tfrac{1}{3}\right) - \left(x^4 - \tfrac{1}{3}x^6\right)\right] dx$$

$$M = \left[\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{21}x^7\right]_{-1}^{1} = \tfrac{88}{105}$$

Ejemplo 4.9 *Calcular*

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}\, dx\ dy$$

donde $\mathcal{R}$ es la región limitada por las curvas

$$y = \sqrt{4 - x^2} \ , \quad y = \sqrt{1 - x^2} \quad , \quad y = |x| \, .$$

Solución.
Escribiendo en coordenadas polares ,tenemos
De : $y = \sqrt{4 - x^2} \Longrightarrow x^2 + y^2 = 4 \Longrightarrow r = 2.$
De : $y = \sqrt{1 - x^2} \Longrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow r = 1.$
As´, $1 \leq r \leq 2.$
De : $y = x \Longrightarrow r \sin\theta = r\cos\theta \Longrightarrow \tan\theta = 1 \Longrightarrow \tan\theta = 1 \Longrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$
De : $y = -x \Longrightarrow r\sin\theta = -r\cos\theta \Longrightarrow \tan\theta = -1 \Longrightarrow \theta = \dfrac{3\pi}{4}$
As´, $\dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{4}.$
Por lo tanto la región $\mathcal{R} = \left\{(r, \theta) : \dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{4}, 1 \leq r \leq 2\right\}$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_{1}^{2}\left(\frac{\cos^2\theta}{r}\right)rdrd\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_{1}^{2}\cos^2\theta drd\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos^2\theta\,[r]_1^2\,d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos^2\theta d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{(1+\cos 2\theta)}{2}d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{3\pi}{4}+\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{2}\right]-\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2}\right]\right\}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_{1}^{2}\left(\frac{\cos^2\theta}{r}\right)rdrd\theta = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right]\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-1\right] = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

Ejemplo 4.10 *Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por el cono* $z = 2-\sqrt{x^2+y^2}$ *e inferiormente por el disco* $\mathcal{R}: (x-1)^2+y^2 \leq 1$.

Solución.

$$Vol\,(\Omega) = \iint_{\mathcal{R}}\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

Calcularemos la integral pasando a coordenadas polares.

Escribiendo en coordenadas polares ,tenemos

De : $(x-1)^2+y^2 = 1 \Longrightarrow x^2+y^2 = 2x \Longrightarrow r^2 = 2r\cos\theta$, que podemos simplificar para obtener $r = 2\cos\theta$.

Por lo tanto la región $\mathcal{S} = \left\{(r,\theta) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2\cos\theta\right\}$.

Luego,

$Vol\,(\Omega) = \iint_{\mathcal{R}}\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy = \iint_{\mathcal{R}}2dxdy - \iint_{\mathcal{S}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy = 2\,(\text{área } \mathcal{R}) - \iint_{\mathcal{S}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy =$

$= 2\pi - \iint_{\mathcal{S}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy.$

Calculamos la segunda integral,

$$I = \iint_{\mathcal{S}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \iint_{\mathcal{S}}(r)\;r\;drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{2\cos\theta}r^2drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\cos\theta}d\theta =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{8\cos^3\theta}{3} - \frac{0}{3}\right] d\theta$$

$$I = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\cos\theta d\theta = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta d\theta = \frac{8}{3}\left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$I = \frac{8}{3}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{32}{9}.$

por lo tanto,

$Vol\,(\Omega) = 2\pi - \frac{32}{9}.$

Ejemplo 4.11 *Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por el cono* $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$ *e inferiormente por el planoz* $= 0$ *y lateralmente por el cilindro* $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Solución.

$$Vol\,(\Omega) = \iint_{\mathcal{R}} \left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy$$

Calcularemos la integral pasando a coordenadas polares.

Escribiendo en coordenadas polares ,tenemos

De : $(x-1)^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 2x \Longrightarrow r^2 = 2r\cos\theta$, que podemos simplificar para obtener $r = 2\cos\theta$.

Por lo tanto la región $\mathcal{S} = \left\{(r,\theta) : -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2\cos\theta\right\}$.

Luego,

$$Vol\,(\Omega) = \iint_{\mathcal{R}} \left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy = \iint_{\mathcal{R}} 2dxdy - \iint_{\mathcal{S}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy =$$

$$Vol\,(\Omega) = 2\,(\text{área } \mathcal{R}) - \iint_{\mathcal{S}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy = 2\pi - \iint_{\mathcal{S}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy.$$

Calculamos la segunda integral,

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \iint_{\mathcal{S}} (r)\ r\ drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^2 drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{8\cos^3\theta}{3} - \frac{0}{3}\right] d\theta = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\cos\theta d\theta$$

$$I = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta d\theta = \frac{8}{3}\left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{32}{9}.$$

por lo tanto,

$Vol\,(\Omega) = 2\pi - \frac{32}{9}.$

3. Centros de gravedad

Supongamos que tenemos dos puntos p_1 y p_2 sobre una recta y en cada punto está ubicada una masa m_i, $i = 1, 2$, respectivamente. Queremos hallar un punto p en el segmento que une a p_1 con p_2 tal que en ese punto la

varilla p_1p_2 esté en equilibrio. Entonces la suma de los momentos $(p_2 - p)\, m_2 + (p_1 - p)\, m_1 = 0$. Esto es,

$$p = \frac{p_1 m_1 + p_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

El punto p es conocido como el centro de masa o centroide del sistema de puntos p_1, p_2 . Si en lugar de dos puntos tenemos n puntos $(x_i, y_i), i = 1, 2, ...n$ del plano $\mathbf{R}^2$, en donde hemos ubicado n masas, $m_1, ...m_n$, el centro de gravedad del sistema de puntos vendrá expresado cómo

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (1)$$

Esto es,
$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$ y $\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$,
en donde $\overline{x}$ y $\overline{y}$ representan las coordenadas del centro de masa p. Lo anterior lo podemos extender al caso de una placa S en donde en cada punto de la placa está definida una función de densidad $f(x, y)$. La densidad mide la cantidad de material por unidad de volumen. Entonces la masa total de la placa es $M = \iint_S f(x, y) dx dy$. Extendemos (1) al caso de la placa S y obtenemos que las coordenadas del centro de masa son

$$\overline{x} = \frac{\iint_S x\ f(x, y) dx\ dy}{\iint_S f(x, y) dx\ dy}\ ,\ \overline{y} = \frac{\iint_S y\ f(x, y) dx\ dy}{\iint_S f(x, y) dx\ dy} \qquad (2)$$

En el caso en que la placa sea *homogénea* la densidad f es constante y las coordenadas del centro de masa o centroide serán:

$$\overline{x} = \frac{\iint_S x\ dx\ dy}{|S|}\ ,\ \overline{y} = \frac{\iint_S y\ dx\ dy}{|S|}, \qquad (3)$$

en donde $|S|$ representa el área de la placa S.

En el caso en que la placa presente ejes de simetría, el centroide se encontrará en ellos. Por ejemplo, una placa en forma de circunferencia tendrá su centroide en el centro geométrico de ella. Por ejemplo el centroide de una placa en forma de semicircunferencia de radio r es $(0, \overline{y})$, en donde

$$\overline{y} = \frac{1}{\frac{1}{2}r^2\pi} \int_{-r}^{r} \left\{ \int_0^{\sqrt{(r^2 - x^2)}} y\ dy \right\} dx = \frac{\frac{2}{3}r^3}{\frac{1}{2}r^2\pi} = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}.$$

4. Volúmenes de Revolución

El centroide se puede utilizar para calcular volúmenes de revolución. Sea

$$S = \{(x, y), 0 \leq h(x) \leq y \leq g(x),\ x \in [a, b]\}.$$

Hacemos girar esta región sobre el eje x y obtenemos un sólido de revolución Ω. Es fácil ver que

$$V(\Omega) = \pi \left\{ \int_a^b g^2(x) - h^2(x)\ dx \right\}.$$

El Teorema de Pappus: nos dice que $V(\Omega) = 2\pi\overline{y}\, |S|$, como puede comprobarlo el lector. Por ejemplo si Ω es la esfera de centro en el origen y radio r, conseguida haciendo girar el semicírculo de radio r, vemos que

$$V(\Omega) = 2\pi\left(\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)\left(\frac{1}{2}r^2\pi\right) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

4.2 Integrales triples

Los conceptos de integración que expusimos en las secciones 2 y 3 de este capítulo los podemos extender al caso de integrales triples, cuádruples...etc. Ilustraremos su uso con algunos ejemplos.

Ejemplo 4.12 *Hallar el volumen del sólido* **S** *limitado por las superficies*

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ z &= 0 \\ x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Solución: Es importante formarnos una representación gráfica del sólido. Observemos que el plano $x+y+z=1$ se intersecta con los planos $z=0$, $x=0$ y $y=0$ en las rectas

$$\begin{aligned} x+y &= 1 \\ y+z &= 1 \\ x+z &= 1 \end{aligned}$$

respectivamente.Entonces,

$$\begin{aligned} V(\mathbf{S}) &= \textstyle\iiint_{\mathbf{S}} dxdydz \\ &= \textstyle\int_0^1 \left\{\int_0^{1-x}\left\{\int_0^{1-x-y} dz\right\} dy\right\} dx \\ &= \textstyle\int_0^1 \left\{\int_0^{1-y}\left\{\int_0^{1-y-z} dx\right\} dz\right\} dy \\ &= \textstyle\int_0^1 \left\{\int_0^{1-z}\left\{\int_0^{1-x-z} dy\right\} dx\right\} dz \\ V(\mathbf{S}) &= \tfrac{1}{6} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.13 *Hallar* $\iiint_{\mathbf{S}} xyz\ dxdydz$ *en donde*

$$\mathbf{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right\}$$

Solución: es fácil advertir que el sólido **S** es un octante de la esfera de $\mathbf{R}^3$ de centro en el origen y radio 1, cómo se observa en la figura

. Por lo tanto

$$\iiint_{\mathbf{S}} xyz\ dxdydz = \int_0^1 \left\{\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left\{\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\ dz\right\} dy\right\} dx = \frac{1}{48}$$

Cambio de variable

Los conceptos de cambio de variable que expusimos en la sección anterior los podemos extender al caso de dimensiones superiores. Si $F(u) = (x_1(u), ...x_n(u))$ representa una transformación de una región R a otra región S de $\mathbf{R}^n$ entonces

$$\int \cdots \int_S f(x)dx_1...dx_n = \int \cdots \int_R f(F(u))\,|J_F(u)|\,du_1...du_n,$$

en donde

$$J_F(u) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1(u)}{\partial u_1} & . & . & \frac{\partial x_1(u)}{\partial u_n} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ \frac{\partial x_n(u)}{\partial u_1} & & & \frac{\partial x_n(u)}{\partial u_n} \end{vmatrix},$$

$x = (x_1, ...x_n)$, $u = (u_1, ...u_n)$ y f un campo escalar definido sobre S. Para que la fórmula de cambio de variable tenga validez en necesario que $J_F(u) \neq 0$. No obstante la podemos extender al caso $J_F(u) = 0$ siempre y cuando el conjunto en donde se anula el jacobiano tenga contenido nulo. Este es el caso en los ejemplos que consideraremos.

Los ejemplos mas clásicos de cambio de variable son:

Coordenadas Cilíndricas

La trasnsformación $F(r, \theta, z)$ tiene como funciones componentes a

$$\begin{aligned} x &= x(r,\theta,z) = r\cos\theta \\ y &= y(r,\theta,z) = r\ sen\ \theta \\ z &= z(r,\theta,z) = z, \end{aligned}$$

cómo se indica en la figura.

Si queremos que la tranformación sea inyectiva debemos tomar, por ejemplo, $\theta \in [0, 2\pi)$.

Es fácil ver que el jacobiano $J_F(r, \theta, z) = r$. De las dos primeras ecuaciones anteriores se deduce que $x^2 + y^2 = r^2$. Esto nos dice, por ejemplo, que el plano, en coordenadas cilíndricas, $z = k$ se transforma en el cilindro circular recto paralelo al eje z y definido por la ecuación, en coordenadas rectangulares, $x^2 + y^2 = k^2$.

Cómo una aplicación de las coordenadas cilíndricas, consideremos el siguiente ejemplo: Calculemos la integral

$$\iiint_{\mathbf{S}} (x^2 + y^2)\, dxdydz$$

en donde **S** es el sólido limitado por las superficies $x^2 + y^2 = 2z$ y el plano $z = 2$. En coordenadas cilíndricas el sólido **S** está determinado por las superficies $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$, $r^2 = 2z$ y $z = 2$, cómo se indica en la figura.

Puesto que $J_F(r, \theta, z) = r$, vemos que

$$\begin{aligned} \textstyle\iiint_{\mathbf{S}} (x^2+y^2)\, dxdydz &= \textstyle\int_{-2}^{2} \left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{2} (x^2+y^2)\, dz \right) dy \right) dx \\ &= \textstyle\int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left(\int_{\frac{r^2}{2}}^{2} r^3 dz \right) dr \right) d\theta \\ &= \tfrac{16}{3}\pi \end{aligned}$$

Coordenadas Esféricas

La transformación $F(r, \theta, \phi)$ tiene como funciones componentes a

$$\begin{aligned} x = x(r,\phi,\theta) &= r\ \ sen\ \phi\ \ \cos\theta \\ y = y(r,\phi,\theta) &= r\ \ sen\ \phi\ \ sen\ \theta \\ z = z(r,\phi,\theta) &= r\ \ \cos\phi. \end{aligned}$$

Si queremos que la transformación sea inyectiva debemos tomar, por ejemplo, $\theta \in [0, 2\pi)$ y $\phi \in [0, \pi)$

Es fácil ver que el jacobiano $J_F(r, \theta, \phi) = -(\sin\phi)\, r^2$. De las tres ecuaciones anteriores se deduce que $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Es así cómo el plano, en coordenadas esféricas, $r = k$, se transforma por medio de F en la esfera cuya ecuación es $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$, en coordenadas rectangulares.

De la misma forma: El plano, en coordenadas esféricas, $\theta = k$, se transforma por medio de F en el plano $y = \tan k.x$, en coordenadas rectangulares. También, el plano $\phi = k$, en coordenadas esféricas, se transforma en la curva

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x^2 + y^2 = (r\ sen\ k)^2\ ,\ z = r \cos k\right\}$$

Veamos ahora un ejemplo del uso de las coordenadas esféricas: Calculemos, usando coordenadas esféricas, el volumen de un octante de la esfera de centro en el origen y radio 1. Esto es, hallemos $V(\mathbf{S})$ en donde

$$\mathbf{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right\}$$

Procedemos así: Es fácil advertir que el paralelipípedo $[0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en el espacio $r\ \theta\ \phi$ se transforma en el sólido $\mathbf{S}$, puesto que $|J_F(r, \theta, \phi)| = (\sin\phi)\, r^2$ tenemos que

$$V(\mathbf{S}) = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin\phi d\phi\right) d\theta\right) dr = \frac{1}{6}\pi$$

Volumen de la esfera n-dimensional

Como una última aplicación del cambio de variables en la integración veamos el volumen de una esfera de centro cero y radio a en el espacio $\mathbf{R}^n$. Para ello es necesario introducir la función Gama. Esta se define así:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt\ ,\ \ s > 0.$$

Las propiedades más importantes de la función Gama son:

1). $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

2). $\Gamma(n+1) = n!$, en donde $n \in \mathbf{N}$.

La función Gama está definida para $s > 0$. No obstante la propiedad 1) anterior nos dice que podemos extenderla a los reales negativos salvo los enteros negativos. Por ejemplo, para $-1 < s < 0$ tenemos que $0 < s + 1 < 1$, en donde está definida la función gama, entonces definimos $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$. Procedemos recurrentemente y definimos la función Gama en los intervalos $(-2, -1)$, $(-3, -2)$ ... etc.

La propiedad 2) anterior nos permite extender la noción de factorial de un número natural al caso de un número real, así: $p! = \Gamma(p+1)$, para $p + 1$ diferente de un entero negativo o cero.

Un cálculo directo nos dice que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ y por la propiedad 1) obtenemos $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ y $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$. Así mismo $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(2) = 1$.

El volumen de la esfera n-dimensional de radio a es

$$V_n(a) = a^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}, \qquad n \geq 1.$$

Es claro que es cierta para $n = 1, 2$. Demostrémola para $n \geq 3$. Consideremos la transformación

$$F(u_1, ...u_n) = (x_1, ...x_n) = a(u_1, ...u_n),$$

$a > 0$. Entonces $J_F(u_1, ...u_n) = a^n$. Por lo tanto

$$V_n(a) = \int \cdots \int_{B(0,a)} dx_1...dx_n = a^n \int \cdots \int_{B(0,1)} du_1...du_n$$

Esto es, $V_n(a) = a^n V_n(1)$. Para calcular $V_n(1)$ procedemos así:

$$\overline{B(0,1)} = \left\{ (u_1, ...u_n) \in \mathbf{R}^n, \ \sum_{j=1}^{n} u_i^2 \leq 1. \right\}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
V_n(1) &= \iint_{u_n^2+u_{n-1}^2 \leq 1} \left\{ \int \cdots \int_{u_1^2+...u_{n-2}^2 \leq 1-u_n^2-u_{n-1}^2=p^2} du_1...du_{n-2} \right\} du_{n-1} du_n \\
&= \iint_{u_n^2+u_{n-1}^2 \leq 1} V_{n-2}(p) du_{n-1} du_n \\
&= \iint_{u_n^2+u_{n-1}^2 \leq 1} V_{n-2}(1) p^{n-2} du_{n-1} du_n \\
&= V_{n-2}(1) \iint_{u_n^2+u_{n-1}^2 \leq 1} \left(1 - u_n^2 - u_{n-1}^2\right)^{\frac{n}{2}-1} du_{n-1} du_n \\
&= V_{n-2}(1) \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(1 - r^2\right)^{\frac{n}{2}-1} r \, dr \, d\theta \\
&= V_{n-2}(1) \frac{2\pi}{n}.
\end{aligned}$$

Ahora, puesto que $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, vemos que la sucesión

$$f(n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

Ejerccios Propuestos:Integración múltiples

1. Calcular

$$\int_1^2 \int_0^x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dy \right) dx.$$

2. Invertir el orden de integración y evaluar

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \left(\frac{y}{\sqrt{16+x^2}} dx \right) dy.$$

3. Invertir el orden de integración y evaluar

$$\int_1^2 \int_0^{\log x} \left((x-1)\sqrt{1+e^{2y}} dy \right) dx.$$

4. Sea

$$I = \int_0^3 \int_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)\, dx\, dy$$

   (a) Dibujar la región de integración y luego expresar la integral I con el orden de integración invertido.

   (b) Calcular el valor de la siguiente integral doble

$$\int_0^3 \int_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{4-y}} \sqrt{1+x^2} dx\, dy$$

5. Calcular el volumen del sólido limitado lateralmente por los cilindros

$$\begin{cases} x = \sqrt{y}, \\ y = \sqrt{x}, \end{cases}$$

   superiormente por el plano $y - z + 2 = 0$ e inferiormente por el plano XY.

6. Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies:

$$z = 0, \quad z = x^2 + y^2, \quad x^2 - 2y - 4 = 0, \quad x^2 + 2y - 4 = 0.$$

7. Hallar el volumen del sólido que se encuentra sobre el plano XY y está limitado por

$$z = xy \ , \quad x^2 + y^2 = 4.$$

8. Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies

$$z = 10, \quad z = x + y^2, \ x = 0.$$

9. Sea
$$a = \int_1^4 \frac{sen x}{x} dx.$$
Calcular, en términos de a, el valor de
$$\int_0^1 \int_{1+y}^2 \frac{sen\ x}{x} dxdy + \int_0^1 \int_2^4 \frac{sen\ x}{x} dxdy + \int_1^3 \int_{1+y}^4 \frac{sen\ x}{x} dxdy$$

10. Demostrar que
$$\iint_{\mathcal{S}} c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy$$
siendo
$$\mathcal{S} = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}.$$
(Dicha integral es el volumen de la mitad de un elipsoide)

11. Calcular
$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx\, dy$$
siendo
$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\}$$

12. Calcular el volumen del sólido ubicado en el primer octante y limitado por las superficies
$$z = x^2 + y^2, \quad xy = 1, \quad xy = 2, \quad 2y = x, \ y = 2x, \ z = 0.$$

13. Hallar el área de la región limitada por la curva
$$(x^2 + y^2)^2 = xy.$$

14. Calcular
$$\iint_{\mathcal{R}} e^{\frac{2xy}{x^2+y^2}} dxdy\ ,$$
donde $\mathcal{R}$ es la región limitada por la curva
$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2,$$
en el primer cuadrante.

15. Calcular
$$\iint_{\mathcal{R}} (x + y)^2 \cos(x - y) dxdy$$
donde $\mathcal{R}$ es la región limitada por el triángulo de vértices $(0, 0)$, (π, π), $(-\pi, \pi)$.

16. Expresar en coordenadas polares las siguientes integrales:

(a) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(x,y)dxdy$

(b) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dxdy$

17. Evaluar

$$\iint\limits_{\mathcal{R}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

donde $\mathcal{R}$ es la región limitada por el cuadrado $[0,1]\times[0,1]$.

18. Calcular

$$\iint\limits_{\mathcal{R}} \frac{12}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dxdy,$$

donde $\mathcal{R}$ es la región limitada por la semicircunferencia

$$x=\sqrt{2ay-y^2} \text{ y la recta } y=x.(a>0)$$

19. Calcular

$$\iint\limits_{\mathcal{R}} \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy,$$

donde $\mathcal{R}$ es la región limitada por las curvas

$$y=\sqrt{3}\,|x| \ , \ y=\frac{x^2}{3}.$$

20. Evaluar la integral doble

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dA,$$

donde $\mathcal{S}$ es la región encerrada por las gráficas de las ecuaciones

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-4y+4=0 \ , \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x \ , \ \ y=\sqrt{3}x. \end{cases}$$

21. Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies

$$z=2, \ x^2+y^2-z^3+1=0.$$

22. Hallar la masa de una lámina que tiene la forma de la región, en el primer cuadrante,exterior a la parábola $y^2=x$ e interior a la circunferencia $x^2+y^2-4x=0$,con densidad superficial

$$\rho(x,y)=y.$$

23. Una lámina tiene la forma del triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(\pi,\pi)$, y $C(2\pi,0)$. Hallar su masa si su densidad es

$$\delta(x,y)=(x+y)^2\,\left|\ \sin(x^2-y^2)\right|.$$

24. Calcular el centro de gravedad de la lámina que tiene la forma de la región limitada por

$$y = x, \quad y = -x, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 6$$

y que se encuentra situada arriba del eje X. La densidad en cada punto (x, y) de la lámina es

$$\delta(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

25. Hallar la distancia al plano XY del centro de gravedad del sólido limitado por las superficies

$$z = 0, \; x^2 + y^2 = R^2, \; x^2 + y^2 = r^2, \; 0 < r < R, \; Hy + 2Rz = HR, \; H > 0.$$

26. Calcular

$$\iiint_{\mathcal{K}} xyz dxdydz$$

donde $\mathcal{K}$ es el sólido limitado por el cubo [-1,1]×[-1,1]×[-1,1].

27. a) Graficar el sólido K, en el primer octante, limitado por

$$z = x^2 + y^2, \quad z = 4, \quad x = 0, \quad y = 0$$

b) Calcular

$$\iiint_{K} x\sqrt{z} dxdydz.$$

28. Calcular

$$\iiint_{\mathcal{K}} \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz$$

donde $\mathcal{K}$ es el sólido limitado por las superficies

$$z = x^2 + y^2, \quad z = 8 - (x^2 + y^2).$$

29. Sea

$$\int_0^2 \int_0^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{3}} \int_{x^2+y^2}^{4-8y^2} f(x, y, z) dzdydx.$$

Cambiar el orden de integración de manera que la nueva integral sea de la forma

$$\int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} f(x, y, z) dxdzdy$$

30. La integral triple de una función contínua f sobre el sólido $\mathcal{K}$ limitado por el paraboloide $z = 8 - x^2 - y^2$, el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z = 2$ se ha expresado en la forma :

$$I = \int \left\{ \int \left(\int f(x, y, z) \; dz \right) \; dy \right\} dx.$$

Hallar los límites de integración de las integrales.

31. Calcular

$$\iiint\limits_{\otimes} \sqrt{x^2+y^2}dx\ dy\ dz$$

siendo $\otimes$ es el sólido limitado por el paraboloide $y = x^2 + y^2$ y el plano $y = 4$.

32. Calcular

$$\iiint\limits_{\mathcal{K}} xydxdydz,$$

donde $\mathcal{K}$ es el sólido limitado por los planos

$$y = x, \quad y = 4, \quad z = 0, \quad z = 4, \quad x = 0.$$

33. Calcular

$$\iiint\limits_{\mathcal{K}} ydxdydz,$$

donde $\mathcal{K}$ es el sólido limitado por

$$y = 0, y = \sqrt{2x - x^2},$$

que está debajo de la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y sobre el plano XY.

Bibliografía

[1] Apostol, Tom M.: Calculus, volumen 2. Editorial Reverté. 1992.
[2] Berman, G.N.: Problemas y ejercicios de Análisis Matemático. Editorial Mir-Moscú. 1983.
[3] Deminovich, B.P.: 5.000 problemas de Análisis Matemático. Editorial Paraninfo Thomson
Learning. 2000.
[4] Stewart, J.: Cálculo, trasecedentes tempranas. Editorial Thompson. 1998.
[5] Lages Lima Elon: Análisis Real, volumen 2. Imca-Uni. 1997
[6] Leithold, L.: El Cálculo. Oxfors University Press. 1994
[7] Thomas, George B. Jr.: Cálculo, de varias variable Editorial Pearson. 12a edición. 2010.
[8] Hasser, Norman: Análisis Matemático 2. Editorial Trillas. México 1980.
[9] Lang, Serge: Cálculo 2. Fondo Educativo Interamenricano S.A. 1986.
[10] Lehmann, Charles: Geometría Analítica. Editorial Limusa. 1986.

Se terminó de imprimir en los talleres gráficos de:

Dist. Imp. Edit. Lib. MOSHERA S.R.L.

Jr. Tacna 2969, San Martín de Porres

Telefax: 567-9299

Febrero, 2013

Tiraje 500 ejemplares

Lima - Perú

ISBN: 978-612-46343-1-4