PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS

SECCION MATEMATICAS

REPORTE DE INVESTIGACION

Nro. 22

SERIE D

Clasificación de los Fibrados Vectoriales

Rubén E. Burga Barboza

San Miguel, noviembre del 2009

Series:

A. INVESTIGACION AVANZADA.

B. DIVULGACION - APLICACION.

C. EDUCACION MATEMATICA.

D. TESIS.

Nro. 22

SERIE D

Clasificación de los Fibrados Vectoriales

Rubén E. Burga Barboza

San Miguel, noviembre del 2009

Departamento de Ciencias
Sección Matemática
Pontificia Universidad Católica del Perú
Apartado 1761
Lima-Perú

Índice

Introducción

Uno de los problemas clásicos en el estudio de una estructura matemática se presenta al momento de clasificarla, el logro de ello nos permite identificarla plenamente. Nuestra tarea esta dirigida a la solución de este problema en un caso particular. La estructura a estudiarse será denominada fibrado vectorial.

Dos son los hechos en lo que radica la importancia del presente trabajo, el primero será identificar los fibrados $m-$dimensionales sobre las esferas reales $\mathbb{S}^n$ con ciertas clases de grupos de homotopía de $GL(m, \mathbb{R})$. El otro se manifiesta al momento de identificar los fibrados vectoriales sobre un espacio X con las aplicaciones continuas de X a $\mathbb{G}_n$.

A grandes rasgos un fibrado vectorial es un espacio topológico X dotado en cada punto de un espacio vectorial finito. Un ejemplo de ello vendría a ser dado por el espacio $X \times \mathbb{R}^n$, al cual denominaremos fibrado trivial. Así en términos más precisos un fibrado vectorial será una generalización de este espacio, es decir, un espacio dotado en cada punto de un espacio vectorial, el cual es localmente trivial.

La condición de trivialidad local impuesta a los fibrados vectoriales nos permitirá construirlos basándonos principalmente en estructuras locales proporcionadas específicamente por conjuntos $O_\alpha \times \mathbb{R}^n$ y ciertas aplicaciones continuas $g_{\alpha\beta} : O_{\alpha\beta} \to GL(\mathbb{R}^n)$ con $O_\alpha \subset X$. Vale decir, si tenemos las piezas que conforman el fibrado, que vendrían a ser dadas por los espacios $O_\alpha \times \mathbb{R}^n$ y la forma como estas deben estar unidas, señaladas por las aplicaciones continuas $g_{\alpha\beta}$, podremos construir un fibrado vectorial sobre X. Los aspectos formales del comentario anterior serán presentados en la Sección 1.3.

Basados en las precisiones iniciales podemos decir que un fibrado vectorial lleva consigo dos estructuras íntimamente ligadas; una estructura vectorial, y una topológica que convierte al espacio total en más que una colección de espacios vectoriales : lo transforma en un espacio topológico. Un isomorfismo $f : E \to E_1$, el cual es un isomorfismo de espacios vectoriales es una aplicación que preserva las propiedades topológicas y algebraicas entre ellos. Con ello, clasificar los fibrados vectoriales sobre X será, para nosotros, identificar las clases de isomorfismos de fibrados.

Empecemos nuestra tarea mostrando los principales ejemplos de fibrados vectoriales : El *pullback,* construcción mediante la cual podemos obtener un fibrado vectorial sobre un espacio X a partir de un fibrado E sobre Y y de una función continua $f : X \to Y$.

El *fibrado universal* al cual denotaremos por γ^n, tiene como espacio base a $\mathbb{G}_n$, la cual consiste de todos los espacios vectoriales $n-$dimensionales de $\mathbb{R}^\infty$ y tiene como fibra sus mismos puntos. Notemos que como $\mathbb{R}^{n+k} \subset \mathbb{R}^\infty$ entonces $\gamma_k^n(\mathbb{R}^{n+k}) \subset \gamma^n$, donde $\gamma_k^n(\mathbb{R}^{n+k})$ se puede identificar con el fibrado γ^n restringido a $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ (el conjunto de espacios vectoriales $n-$dimensionales de $\mathbb{R}^{n+k}$).

Uno de los principales resultados de la Sección 2 será el teorema de invarianza homotópica. Este nos hace saber que los *pullback* de dos aplicaciones homotópicas de un mismo fibrado nos brindan fibrados isomorfos. Así al tomar a $V^n(X)$ como el conjunto de clases de isomorfismo de fibrados $n-$dimensionales sobre X, el teorema de invarianza homotópica, nos dirá cúando podemos establecer una biyección de $V^n(X)$ a $V^n(Y)$; para X e Y dos espacios topológicos. Una consecuencia de este último resultado será probar que todo fibrado sobre un espacio contráctil es trivial.

Otro aspecto interesante introducido para el estudio de los fibrados, son las funciones coordenadas -concepto presentado en la Sección 1.3-. Su importancia se verá reflejada en la clasificación de los fibrados vectoriales sobre una suspensión -Sección 2.2-; cuando, con ayuda del teorema de invarianza homotópica, podamos caracterizar todo fibrado E sobre una suspensión SX a través de su función coordenada $g : X \to GL(n, \mathbb{R})$.

Como $\mathbb{S}^n = S\mathbb{S}^{n-1}$, en particular el resultado señalado anteriormente clasifica los fibrados sobre las esferas reales.

En la Sección 3, la introducción de la función de Gauss $g : E \to \mathbb{R}^\infty$, una aplicación continua, lineal e inyectiva en cada fibra, nos permitirá construir una aplicación f del espacio base de E a $\mathbb{G}_n$, con una característica importante, f y el fibrado universal guardaran toda la información del fibrado E, es decir, el pullback de f y el fibrado universal es isomorfo a E. Esta característica -la cual será garantizada para todo fibrado sobre un espacio paracompacto- nos permitirá clasificar los fibrados vectoriales sobre espacios paracompactos.

La clasificación de los fibrados vectoriales se presentará mediante la construcción de una biyección de $V^n(X)$ al conjunto de clases de homotopía de las aplicaciones $f : X \to \mathbb{G}_n$. Empezaremos asignando a cada clase de homotopía de $f : X \to \mathbb{G}_n$ la clase de $f^*\gamma^n$, donde γ^n es el fibrado universal. Recíprocamente a cada clase de isomorfismo $[E]$ sobre un espacio paracompacto le corresponde la clase de la aplicación $f : X \to \mathbb{G}_n$ obtenida a partir de la aplicación de *Gauss,* para algún representante de $[E]$.

Describiremos ahora dos de los campos a donde nos puede llevar el estudio de los fibrados vectoriales. El primero surge al comprobar que $V(X)$ con la suma de *Whitney* -fibrado obtenido a partir del pullback de la aplicación *diagonal* y del fibrado producto $E \times E$ sobre $X \times X$- es un semigrupo. En efecto, $V(X)$ genera un grupo al cual se le denominará K-teoría de X.

La cohomología de $\mathbb{G}_n$ y las aplicaciones continuas $f : X \to \mathbb{G}_n$ nos llevan a la definición de clases características de los fibrados vectoriales, que es otro campo al cual se puede acceder teniendo como base los resultados del presente trabajo.

1. Fibrados Vectoriales

En esta primera parte trataremos los aspectos básicos de los fibrados vectoriales; daremos sus principales propiedades así como también las definiciones necesarias.

Un aspecto particularmente importante de los fibrados sobre un espacio X es la introducción de funciones coordenadas locales. Ello permite comprender por qué para presentar un fibrado vectorial, sólo es necesario conocer las estructuras locales dadas en esencia por conjuntos $O_\alpha \times \mathbb{R}^n$ y cómo éstas están "pegadas" entre sí por la información proporcionada por ciertas aplicaciones continuas $g_{\alpha\beta} : O_{\alpha\beta} \to GL(n, \mathbb{R})$ donde $O_{\alpha\beta} = O_\alpha \cap O_\beta \subset X$. Así mismo, presentaremos una de las construcciones más importantes de los fibrados vectoriales, la denominada *pullback*. Ésta permite obtener un fibrado vectorial sobre un espacio X a partir de un fibrado E sobre Y y de una función continua $f : X \to Y$.

1.1. Definiciones y Ejemplos Básicos

La forma más conocida de brindar a cada punto de un espacio de una estructura de espacio vectorial es tomando una variedad diferenciable y hallando su fibrado tangente.

Una estructura más general que la del fibrado tangente, se consigue al dotar a cada punto de un espacio topológico X de un espacio vectorial n-dimensional, dándole al nuevo espacio obtenido, una estructura topológica e imponiéndole la condición que localmente, vale decir, en un abierto del espacio construido, se vea como el producto cartesiano de cierto abierto O del espacio X y $\mathbb{R}^n$. Al espacio así obtenido se le denominará un *fibrado vectorial*. En virtud de la condición antes referida, podemos presentar la estructura de un fibrado vectorial tomando localmente los conjuntos $O_\alpha \times \mathbb{R}^n$ para luego pegarlos siguiendo las instrucciones connotadas por aplicaciones continuas $g : O_{\alpha\beta} \to GL(n, \mathbb{R}^n)$

donde $O_\alpha \subset X$ es un cubrimiento abierto de X para ciertos indices α, $\beta \in \Lambda$. La definición que presentaremos a continuación es el concepto preciso que nos permite asimilar muchas de estas ideas.

Definición 1.1. Un **fibrado vectorial** es una terna (E, P, B) donde E y B son espacios topológicos, llamados, **espacio total** y **base**, respectivamente, y

$$P : E \longmapsto B$$

una aplicación continua y sobreyectiva llamada **proyección**. Las relaciones a las cuales deben estar sujetas son las siguientes : el conjunto $P^{-1}(x)$ (llamado **fibra**) tiene una estructura de espacio vectorial de dimensión finita; además se debe cumplir la condición de trivialidad local: *para todo $b \in B$ existe una vecindad U de b y una aplicación (***la trivialización local***)*

$$\phi : P^{-1}(U) \longmapsto U \times \mathbb{R}^n,$$

la cual es un homeomorfismo que restringido a cada fibra es un isomorfismo de espacios vectoriales. A la inversa de ϕ se le llamará **parametrización**.

Ejemplo 1.1. *El fibrado trivial.* Tómese B un espacio topológico arbitrario e impongamos en $E = B \times \mathbb{R}^n$ la topología producto. Acá $\mathbb{R}^n$ cumple una doble función, la de espacio topológico y espacio vectorial. Obsérvese que para satisfacer la condición de trivialidad local es suficiente tomar una vecindad $U = B$ y definir la parametrización como la identidad; obteniéndose así un homeomorfismo global que es un isomorfismo de espacios vectoriales en cada fibra. La proyección la definimos como $P = \pi$, donde π es la proyección sobre la primera componente.

Una estructura así definida es un fibrado vectorial, al cual se le denominará **fibrado trivial.**

Muchas veces por abuso de notación identificaremos el fibrado con el espacio total E, suponiendo en tales casos que la aplicación P es la proyección y B el espacio base.

Ejemplo 1.2. *El fibrado tangente de una variedad diferenciable.* Para la estructuración de este fibrado tomaremos como espacio base una variedad diferenciable $M \subset \mathbb{R}^n$ de dimensión m y una familia de cartas $(O_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$.

Considerando los productos

$$T_\alpha = O_\alpha \times \mathbb{R}^m,$$

y en el conjunto

$$T = \bigcup_{\alpha \in I} T_\alpha,$$

establezcamos una relación en T de la siguiente manera: Sean $(x, v), (y, w)$, dos elementos en T. Cuando $(x, v) \in T_\beta$, $(y, w) \in T_\alpha$ y $x_1 = \varphi_\beta(x)$ decimos que : $(x, v) \sim (y, w)$ si $x = y$ y $D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x_1))v = w$. Gracias a las propiedades elementales de cartas y la regla de la cadena, es fácil ver que la relación así definida es de equivalencia.

La constatación de que el espacio $TM = T/\sim$ es un fibrado vectorial será consecuencia del Teorema 1.2 enunciado más adelante.

Ejemplo 1.3. *El fibrado normal de una variedad diferenciable.* Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una variedad de dimensión m $(m \leq n)$. Tomemos su fibrado tangente TM y a partir de este –asumiendo que $\mathbb{R}^n$ tiene la métrica canónica– formemos el espacio

$$E = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n \text{ tal que } v \text{ es perpendicular } T_x M\}.$$

Por otro lado definamos la aplicación

$$P : E \longmapsto M$$

a través de $P(x, v) = x$, de esta definición se sigue que

$$P^{-1}(x) = \{(x, v) \text{ donde } v \text{ es perpendicular a } T_xM\}.$$

Notemos que estamos asumiendo que cada fibra sobre $x \in M$ esta naturalmente incrustada en $\mathbb{R}^n$. Sean $e_1 = (x, v_1), e_2 = (x, v_2) \in E$. Definamos una operación en $P^{-1}(x)$ de la siguiente manera $te_1 + e_2 := (x, tv_1 + v_2)$. Se prueba que el espacio $E_x = P^{-1}(x)$ con esta operación es un espacio vectorial. La condición de trivialidad será consecuencia de la Proposición 1.7 que se vará más adelante.

Ejemplo 1.4. *El Fibrado Proyectivo.* Existen diferentes maneras de caracterizar el espacio proyectivo real $\mathbb{P}^n$. Una de ellas es tomando el cociente de la esfera $\mathbb{S}^n$ por la relación de equivalencia que equipara a un punto con su antípoda. Esto es : para $x \in \mathbb{S}^n$ e $y \in \mathbb{S}^n$ se dice que $x \sim y$ si y sólo si $x = \pm y$. Denotemos al espacio cociente por $\mathbb{P}^n$ y un elemento genérico por $[\pm x]$.

Ahora definamos el espacio

$$E = \{([\pm x], v) \text{ tal que } v = \lambda \cdot x \text{ donde } \lambda \in \mathbb{R}\},$$

el cual será el espacio total del fibrado proyectivo, y la proyección sobre el primer factor

$$\pi : E \to \mathbb{P}^n,$$

dada por $\pi([\pm x], v) = [\pm x]$.

Analicemos la condición de trivialidad local. Sea $P : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ la aplicación cociente y $U \subset \mathbb{S}^n$ abierto tal que si $x \in U$ entonces $-x$ no esta en U. De la condición impuesta al abierto vemos que $U \approx P(U)$; y esta identificación permite definir una trivialización local

$$\psi : P(U) \times \mathbb{R} \to \pi^{-1}(P(U)),$$

como $\psi([\pm x], \lambda) = ([\pm x], \phi([\pm x])\lambda)$, donde ϕ es el homeomorfismo entre $P(U)$ y U (con ϕ inverso de P). Al fibrado $(E, \mathbb{P}^n, \pi)$ se le denota por γ_n^1.

Definición 1.2. Sean (E_1,X_1,P_1) y (E_2,X_2,P_2) dos fibrados. Un **morfismo** de fibrados será un par (F, f) de aplicaciones continuas para las cuales se cumple $P_2 \circ F = f \circ P_1$; (es decir el diagrama

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P_1"'] & E_2 \arrow[d, "P_2"] \\ X_1 \arrow[r, "f"'] & X_2 \end{tikzcd}$$

conmuta), y además $F : P_1^{-1}(x) \to {P_2}^{-1}(f(x))$ sea una trasformación lineal de espacios vectoriales.

Recordemos que en el contexto de las categorías una vez definidos los morfismos, tenemos implícitamente una idea de qué es un isomorfismo. Sin embargo, queremos resaltar un caso importante de morfismos en nuestro contexto: cuando la aplicación f definida entre los espacios base sea la identidad. Para ello pasamos a dar la siguiente definición.

Definición 1.3. Dos fibrados vectoriales E_1, E_2 sobre un mismo espacio topológico B son **isomorfos sobre** B si existe una aplicación continua

$$F : E_1 \to E_2$$

para la cual el diagrama

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "P_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "P_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir $P_2 \circ F = P_1$, y en cada fibra se tiene en F un isomorfismo de espacios vectoriales.

Definición 1.4. Una aplicación continua $S : B \to E$ del espacio base al espacio total E tal que $P \circ S = id$ se denomina una **sección**.

Definición 1.5. Una sección local es una aplicación continua $S : U \to E$ tal que $P \circ S(b) = b$, para b en U.

Para ver el significado intuitivo de lo anterior es útil referirse a las trivializaciones y ver el efecto de S en ellas. De acuerdo a lo expuesto, una sección local nos hace recordar el gráfico de una función con valores en la fibra $\mathbb{R}^n$; para ello basta recordar que localmente el fibrado es trivial.

Observación. Un subconjunto importante del espacio E es un subespacio, llamado **el espacio nulo** de E, que consta de todos los elementos $e \in E$ nulos en sus respectivas fibras. A este espacio se le puede identificar con el espacio base, pues son homeomorfos.

Definición 1.6. Una sección se le denominará nula si S es la aplicación continua de B al espacio nulo.

Como una observación interesante podemos ver que todo fibrado vectorial tiene una sección local no nula. La prueba se sigue de la condición de trivialidad local que caracteriza a los fibrados vectoriales. No podemos decir lo mismo si la sección esta definida en todo el espacio base; tal como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 1.1. *Para toda sección S en el fibrado γ_n^1 introducido en el Ejemplo* 1.4 *existe $b \in B$ tal que $S(b)$ pertenece al espacio nulo.*

Prueba. Supongase que exista una sección no nula, esto es, una aplicación continua $S : \mathbb{P}^n \to E$, sin elementos en el espacio nulo. La aplicación cociente $P : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ será aquella con la cual formamos el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$.

Veamos algunas características de la composición $S \circ P : \mathbb{S}^n \to E$. Por definición se cumple $S \circ P(x) = (\{{}^{+}_{-}x\}, \lambda(x) \cdot x)$ para alguna función

λ no nula. Como $P(x) = P(-x)$ se cumple $S \circ P(x) = S \circ P(-x)$, de esto se desprende (debido a la defnción de γ_n^1) que $([\pm x], \lambda(x)x) = ([\pm x], \lambda(-x) \cdot (-x))$, y concluimos que

$$\lambda(-x) = -\lambda(x).$$

Debido a que λ es continua (para probar la continuidad de λ es suficiente efectuar el producto interno de $\lambda(x)x$ con x), y está definido en $\mathbb{S}^n$ (la cual es conexa), existe $x_0 \in \mathbb{S}^n$ tal que $\lambda(x_0) = 0$, lo cual es una contradicción pues λ es no nula. ■

Definición 1.7. Las secciones $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sobre un mismo fibrado E reciben el nombre de linealmente independientes si para todo $b \in B$ la colección de vectores $\{S_i(b)\}$, con $i \in \{1, \ldots, n\}$, es linealmente independiente en la respectiva fibra.

Teorema 1.1. *Un fibrado (E, X, P), n dimensional, es trivial si y sólo si admite n secciones linealmente independientes.*

Prueba. Ver [B, Teorema 1.1]

1.2. Construcción de Fibrados Vectoriales

A continuación mostraremos cómo construir fibrados a partir de otros conocidos. Algunas de las construcciones más simples son las siguientes:

El Fibrado Restricción

De manera natural todo sub conjunto de un espacio topológico hereda como tal este derecho. Basándonos pues en el hecho que los fibrados vectoriales son espacios topológicos, es natural pensar que podemos definir una manera de generalizar el concepto de subespacio topológico, para fibrados vectoriales, de forma tal que se preserven las propiedades topológicas y algebraicas.

Supongamos que tenemos un fibrado (E, X, P). Sea $Y \subset X$ un subespacio topológico. Al tomar $E_1 = P^{-1}(Y)$ se obtiene un nuevo fibrado (E_1, P_1, Y) donde $P_1 = P|_{P^{-1}(Y)}$. Las trivializaciones se pueden elegir en forma natural como las aplicaciones restricción si fuese necesario. A este fibrado se le llamará **fibrado restricción** y se le denotará por $(E)_Y$.

Fibrado Inducido o Pullback

Este fibrado será quizás uno de los más empleados en este trabajo y a la vez uno de los más importantes. Para su construcción necesitaremos un fibrado (E, P, X) y una aplicación $f : Y \to X$ continua. Ahora pasemos a describir un espacio total con base Y :

$$E_1 = \{(y, e) \in Y \times E \text{ tal que } f(y) = P(e)\}.$$

Notemos que, como $E_1 \subset Y \times E$ es posible tomar :

$$P_1 : E_1 \to Y$$

como la restricción de la aplicación proyección, la cual al ser continua transfiere esta propiedad a P_1. También podemos definir la aplicación $F : E_1 \to E$ como $F(y, e) = e$; la cual es continua por ser restricción de una aplicación similar. De la definición de F y P vemos la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P_1"'] & E \arrow[d, "P"] \\ Y \arrow[r, "f"'] & X. \end{tikzcd}$$

También de la definición de E_1 se sigue $P_1^{-1}(y) = \{y\} \times P^{-1}(f(y))$, y como $P^{-1}(f(y))$ tiene una estructura de espacio vectorial ésta puede ser inducida en $P_1^{-1}(y)$. Aquí se aprecia claramente que la fibra sobre $y \in Y$ es la fibra correspondiente al punto $f(y)$ en E.

Veamos la condición de trivialidad local : tomemos una trivialización local (U, h) de E donde $U \subset X$ es un conjunto abierto de X. Como f es continua $U_1 = f^{-1}(U)$ es abierto en Y. Ahora definamos

$$h_1 : U_1 \times \mathbb{R}^n \to P_1^{-1}(U_1)$$

por la regla

$$h_1(y, v) = (y, h(f(y), v)).$$

Al ser combinación de aplicaciones continuas, la aplicación así definida goza de la misma propiedad. La inversa está dada por la aplicación continua

$$h_1^{-1}(y, e) = (y, \pi_2 \circ h^{-1}(e)),$$

donde $\pi_2 : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; de donde se desprende que h_1 es un homeomorfismo.

A tal fibrado se le denotará por $f^*(E)$. En conclusión, para poder construir un fibrado en un espacio topológico, es necesario sólo disponer de una aplicación continua hacia un espacio en donde ya se conozca uno.

Si quisiéramos disponer de un fibrado sobre un espacio X, el ejemplo inmediato sería el trivial. Viendo que el pullback traslada en forma continua el espacio total sobre una base a otro, una inquietud natural será el preguntar qué sucede con el pullback de un fibrado trivial. Respondiendo a esta interrogante damos la siguiente proposición.

Proposición 1.2. *Si E es un fibrado trivial sobre X y $f : Y \to X$ una aplicación continua, entonces f^*E es trivial.*

Prueba. Como secciones globales son llevadas a secciones globales, y las colecciones linealmente independientes a conjuntos de las mismas características, el resultado se desprende del Teorema 1.1. ■

Note que si $f : X \to Y$ es una función continua constante tendríamos que f^*E es trivial para todo fibrado sobre Y. Más adelante veremos cómo las aplicaciones homotópicas a una constante también goza de la propiedad de tener sus pullback triviales.

Un isomorfismo $f : E \to E_1$ de dos fibrados vectoriales sobre un mismo espacio base proporciona una invarianza topológica total entre los fibrados E y E_1; es decir, la aplicación f es un homeomorfismo entre ellos, manteniéndose así las propiedades topológicas y vectoriales de los fibrados. En la siguiente proposición comprobaremos que mediante la operación de pullback los fibrados isomorfos no alteran su condición de tales.

Proposición 1.3. *Sean E y E_1 fibrados vectoriales isomorfos sobre un espacio X y $f : Y \to X$ una función continua. Entonces $f^*E \equiv f^*E_1$*

Prueba. Ver [B, Proposición 1.4] ■

Proposición 1.4. *Sea (E, X, P) un fibrado, donde $U \subset X$ e $i : U \to X$ la aplicación inclusión entonces*

$$i^*E \equiv (E)_U$$

Prueba. Se sigue de la definición de fibrado inducido. ■

Proposición 1.5. *Sea (F, f) un morfismo entre los fibrados (E, X, P) y (E_1, Y, P_1), el cual es un isomorfismo en cada fibra. Entonces E es isomorfo a f^*E_1 –ámbos sobre la base base X–.*

Prueba. Defínase la aplicación $h : E \to f^*E$ como $h(e) = (P(e), F(e))$. Como F es un isomorfismo en cada fibra, h también lo es; de donde por definición h es un isomorfismo de fibrados . ■

La conclusión de la Proposición 1.5 se basa primordialmente en la existencia de una función continua $F : E \to E_1$, la cual es un isomorfismo de espacios vectoriales en cada fibra. Así debido a que F es en realidad la que genera la aplicación $f : X \to Y$, si queremos obtener la misma conclución de la proposición, se requiere sólo buscar una función F que cumpla las hipótesis planteadas. Este argumento será una de las bases en donde descansará la clasificación de los fibrados vectoriales.

La Suma de Whitney

Si vemos a un fibrado vectorial como una generalización de un espacio vectorial podemos de alguna manera extender las operaciones entre espacios vectoriales (como por ejemplo suma directa, producto tensorial de espacios vectoriales) a operaciones entre fibrados vectoriales. Un ejemplo de ello es *la suma de Whitney* que viene a ser la extensión de la suma directa de dos espacios vectoriales.

Para poder obtener este fibrado necesitamos del llamado *fibrado producto* del cual sólo mencionaremos un caso particular (cuando los espacios base involucrados son el mismo).

Sean dos fibrados E_1, E_2 (a los cuales sólo identificaremos por sus espacios totales) sobre la misma base X, construyamos el espacio total $E = E_1 \times E_2$ del **fibrado producto**. La aplicación proyección estará dada por $P = (P_1, P_2)$, y las trivializaciones por $(h = (h_1, h_2), U \times V)$ donde (h_1, U) (h_2, V) son trivializaciones de E_1 y E_2 respectivamente. Debido a que tanto h_1 y h_2 son homeomorfismos, h también lo es. Si bien, hasta ahora hemos analizado el espacio total, es fácil ver que la base es el espacio topológico $X \times X$.

Para dar la definición precisa de la **suma de Whitney** tomemos la aplicación diagonal

$$diag : X \to X \times X$$

dada por

$$diag(x) = (x, x),$$

y definamos **la Suma de Whitney** como : $E_1 \oplus E_2 = diag^*(E_1 \times E_2)$; la cual, por lo expuesto en la sección anterior, es un fibrado.

Una propiedad que da indicios de la estrecha relación existente entre el fibrado inducido y la suma de Whitney está dada por la siguiente proposición.

Proposición 1.6. *Sean E, E_1 fibrados sobre X y $f : Y \to X$ continua. Entonces $f^*(E \oplus E_1) \equiv f^*E \oplus f^*E_1$*

Prueba. Para concluir esta afirmación es suficiente considerar la aplicación

$$F : f^*(E \oplus E_1) \to f^*E \oplus f^*E_1$$

definida como

$$F(y, (x, e, e_1)) = (y, (y, e), (y, e_1)).$$

Esta aplicación es continua y un isomorfismo en cada fibra, y, en consecuencia por definición constituye un isomorfismo de fibrados vectoriales sobre Y.

■

Subfibrados y Fibrado Euclídeo

Definición 1.8. Consideremos dos fibrados E, E_1 sobre el espacio base X donde $E_1 \subset E$. El conjunto E_1 es llamado un **subfibrado** si cada fibra de E_1 es un subespacio vectorial de E.

Lema 1.1. *Sean E^1, E^2 dos subfibrados de E tal que $E_b = E_b^1 \oplus E_b^2$ entonces E es isomorfo a la suma de Whitney $E^1 \oplus E^2$*

Prueba. El isomorfismo está dado por

$$f : E^1 \oplus E^2 \to E,$$

donde $f(x, e_1, e_2) = e_1 + e_2$ ■

Definición 1.9. Un fibrado vectorial se llama **euclidiano** si existe una aplicación continua

$$\mu : E \oplus E \to \mathbb{R}$$

que en cada fibra es una forma bilineal definida positiva. Tal función es llamada **métrica.**

Notemos que la definición no es vacia pues todo fibrado trivial admite una **métrica**

$$\mu : X \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

dada por $\mu(x, v, w) =< v, w >$. Nótese que no se pierde generalidad al suponer que el espacio total tiene la forma de un producto.

La motivación tras esta definición es la de responder a la siguiente pregunta. Si E_1 es un subfibrado de E entonces ¿existirá otro subfibrado E_2 que lo complemente en el sentido de cumplirse :

$$E_1 \oplus E_2 = E?$$

Si agregamos una condición adicional a la premisa, podemos responder afirmativamente a esta pregunta usando los resultados obtenidos hasta el momento.

En efecto, cuando E sea un fibrado euclidiano podemos definir

$$E_b^{1\perp} = \{e \in E_b\colon \mu_b(e, e_1) = 0 \ \forall e_1 \in E_b^1\}$$

el cual localmente se deja leer como

$$E_b^{1\perp} = \{e \in E_b \text{ que son perpendiculares a } E_b^1\}.$$

Al tomar la unión $E_1^\perp$ se satisface el siguiente resultado.

Proposición 1.7. *El espacio $E_1^\perp$ es un subfibrado de E y ${E_1}^\perp \oplus E_1 \equiv E$*

Prueba. Será suficiente demostrar la condición de trivialidad local. Sea $b_0 \in X$ y $U \subset X$ un conjunto abierto –vecindad de b_0–, de tal forma que tanto E como E_1 restringidos a U sean triviales. Asumamos que $S_1 \ldots S_m$ son secciones locales linealmente independientes en E_1. Si tomamos los vectores $S_i(b_0)$, siendo estos linealmente independientes, podemos completar la base con $\{e_{m+1}, \cdots, e_n\}$ para la fibra sobre el punto b_0. Sin embargo, en virtud de la continuidad del determinante y viendo que la matriz

$$[S_1(b_0) \cdots S_m(b_0)\ e_{m+1} \cdots e_n]$$

tiene determinante no nulo podemos asumir que para algún abierto, vecindad de b_0, las aplicaciones $S_1(b_0) \cdots S_m(b_0), e_{m+1}, \cdots, e_n$ son secciones del fibrado E. Al realizar el proceso de ortogonalización de *Gramm-Schmidt* obtenemos secciones ortogonales entre sí. Al considerar las $m - n$ últimas secciones conseguimos una trivialización del espacio ${E_1}^{\perp}$ cerca de b_0. ■

Como una aplicación importante podemos concluir que el Ejemplo 1.3 proporciona un fibrado vectorial debido a que $T_xM \bigoplus T_xM^{\perp} = \{x\} \times \mathbb{R}^n$.

Este último resultado nos encamina a un problema de mayor envergadura: el de buscar para cada fibrado E sobre X algún otro E' tal que $E \bigoplus E'$ sea trivial. La importancia de esta comentario se presenta en el contexto de la K-teoría, fuera de los alcances de este trabajo. Sin embargo esta inquietud será abordada parcialmente en el Sección 4.

Tomemos un espacio vectorial V y un subespacio W. Establezcamos una relación en el espacio V : para $v, w \in V$ pondremos $v \sim w$ cuando $v - w \in W$. Claramente se puede apreciar que ésta es una relación de equivalencia.

Al tomar el cociente de V por esta relación obtendremos un nuevo espacio vectorial denotado por V/W, comúnmente llamado **espacio cociente**.

De forma conceptual algo distinta, pero con la misma finalidad –la de construir un espacio con características similares del que lo originó-, podemos tomar un espacio topológico arbitrario X y un subespacio cerrado A de éste y formar el espacio topológico *cociente* de ambos, denotado, en forma similar, por X/A –bajo la relación $x \sim y$ si y sólo si $x = y$ ó $x, y \in A$–.

Interpretando nuevamente un fibrado como una generalización de un espacio vectorial, y apoyándonos en la construcción del espacio vectorial cociente, podemos extender esto al ambiente de fibrados. El fibrados que tenemos en mente será llamado **fibrado cociente**.

Para construir este fibrado requerimos dos fibrados E y E_1 donde E_1 es un subfibrado de E. Lo primero que necesitamos son las fibras sobre cada punto $x \in X$. Como $P_1^{-1}(x) \subset P^{-1}(x)$ son espacios vectoriales podemos tomar como fibras del fibrado cociente el espacio vectorial $P^{-1}(x)/P_1^{-1}(x)$.

En la siguiente proposición veremos que, efectivamente, el camino seguido ha sido el correcto y $E/E_1 = \bigcup_{x\in X} P^{-1}(x)/P_1^{-1}(x)$ posee de manera canónica una estructura de fibrado sobre X. Hasta el momento sabemos que el espacio E/E_1 es sólo un conjunto de fibras, habrá que imponer una topología. Ella se perdió en el camino, al momento de definir de esta forma el fibrado; es decir, ganamos en el sentido intuitivo pero perdimos en el analítico. Para solucionar este *impasse* es imperativo presentar una relación de equivalencia que nos permita inducir en el nuevo espacio una topología. Para ello enunciamos la siguiente proposición :

Proposición 1.8. *Sea (E_1, X, P_1) un subfibrado de (E, X, P). Establezcamos en E la siguiente relación de equivalencia : $e \sim e_1$ si y sólo si $P(e_1) = P(e)$ y $e_1 - e \in E_1$. Entonces, con la topología cociente $E/_\sim$ es un fibrado vectorial.*

Prueba. Notemos que fibra por fibra se cumple $E/_\sim = E/E_1$. Entonces, al dotar al espacio E/E_1 de la topología cociente y definir P_2 como la aplicación inducida por P, en el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "q"] \arrow[d, "P"'] & E/E_1 \arrow[d, dashed, "P_2"] \\ X \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

conmutativo, leeremos $i \circ P = P_2 \circ q$. Ello nos permite concluir de inmediato que $P_2 \circ q$ es continua, y siendo q la aplicación cociente, automáticamente P_2 es continua –véase [B, Apéndice A1]–.

Para probar la trivialidad local debemos tomar un abierto $O \subset X$ en el cual ambos $P^{-1}(O), {P_1}^{-1}(O)$ sean triviales, y m secciones del subfibrado E_1. Partiendo de las m secciones del fibrado E_1 la idea es repetir el procedimiento de la Proposición 1.7 para completar una parametrizacioń de $P^{-1}(O)$. Es decir, podemos asumir que existe

$$\varphi : O \times \mathbb{R}^n \to P^{-1}(O),$$

dada por

$$\varphi(x, v) = v_1 \cdot S_1(x) + \cdots + v_n \cdot S_n(x),$$

donde las primeras m secciones caracterizan el subfibrado E_1. Entonces, la aplicación inversa, a la cual la denotaremos por

$$\Psi : P^{-1}(O) \to O \times \mathbb{R}^n,$$

estará definida por: $\Psi(e) = (P(e), e \cdot S_1(P(e)), \ldots, e \cdot S_n(P(e))$.

De la definición se sigue que Ψ es continua y además un isomorfismo en cada fibra. Por otro lado, si tomamos la proyección sobre las últimas $n-m$ coordenadas $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$, podemos formar la aplicación

$$\Phi : {P_2}^{-1}(O) \to O \times \mathbb{R}^{n-m}$$

definida por $\Phi([e]) = (i \times \pi) \circ \Psi(e) = (P(e), e \cdot S_{n-m+1}(P(e)), \cdots, e \cdot S_n(P(e)))$. donde e es un representante arbitrario de la clase $[e]$. La buena definición se desprende de la linealidad de π. La aplicación inversa estará dada por

$$\Phi^{-1}(x, v) = [v_1 \cdot S_{n-m+1}(x) + \ldots + v_{n-m} \cdot S_n(x)],$$

la cual es continua. Se concluye así que Φ es una trivialización local del espacio E/E_1. ■

Fibrados Adheridos

Ahora pasaremos a analizar la construcción específica de un fibrado que ayudará a la clasificación de los fibrados sobre una suspensión de un espacio topológico X paracompacto. Para esta construcción tomaremos dos fibrados E_1, E_2, definidos respectivamente sobre espacios $X_1, X_2 \subset X$ cerrados que satisfagan $X = X_1 \cup X_2$. Suponemos que $X_1 \cap X_2$ es no vacío y además que los fibrados restricción $(E_1)_{X_1 \cap X_2}$ y $(E_2)_{X_1 \cap X_2}$ son isomorfos. En tal caso podemos formar un nuevo fibrado tomando una fibra sobre $x \in X_1 \cap X_2$ de E_1 y E_2, e identificando la fibra de E_1 con la de E_2 mediante el isomorfismo. De esta forma, dos elementos $e_1 \in E_1$ y $e_2 \in E_2$ estarán en la misma clase cuando $f(e_1) = e_2$, donde f es el isomorfismo entre $(E_1)_{X_1 \cap X_2}$ y $(E_2)_{X_1 \cap X_2}$; en otras palabras, de las dos fibras que teníamos al inicio, obtenemos una. Las propiedades de espacio vectorial son preservadas debido a que la aplicación f es lineal en cada fibra. En las restantes fibras $P^{-1}(x)$, sobre puntos $x \in X_i - X_1 \cap X_2$, la clase $[e]$ consta de un elemento, pues no hay con qué identificarlo.

Proposición 1.9. *Sea X un espacio compacto de Hausdorff con X_1, X_2 subconjuntos cerrados. Asumamos que existen fibrados E_1, E_2 sobre tales espacios, cuyas restricciones a $X_1 \cap X_2$ sean isomorfas. Siendo específicos tenemos $f : (E_1)_{X_1 \cap X_2} \to (E_2)_{X_1 \cap X_2}$. Entonces existe un fibrado sobre $X = X_1 \cup X_2$, denotado por $E_1 \cup_f E_2$, tal que $E_1 \cup_f E_2|_{X_i} \equiv E_i$ para $i \in \{1, 2\}$.*

Prueba. En la unión disjunta $E_1 \cup_d E_2$ de los fibrados establezcamos la siguiente relación (que luego probaremos es de equivalencia). Decimos que dos elementos $e_1, e_2 \in E_1 \cup_d E_2$ son equivalentes y, escribimos $e_1 \sim e_2$, si cumplen cualquiera de las siguientes tres condiciones :

(a) $e_1 = e_2$, ó
(b) Si $e_1 \in E_{1X_1 \cap X_2}$ y $e_2 \in E_{2X_1 \cap X_2}$ entonces $f(e_1) = e_2$, ó
(c) Si $e_2 \in E_{1X_1 \cap X_2}$ y $e_1 \in E_{2X_1 \cap X_2}$ entonces $f^{-1}(e_1) = e_2$.

Se prueba que la relación definida líneas atrás es de equivalencias.

Ahora podemos tomar $E_1 \cup_d E_2/\sim$ el cociente bajo esta relación de equivalencia.

Dotando al conjunto $E_1 \cup_d E_2$ de una topología (un conjunto abierto en el espacio $E_1 \cup_d E_2$ será aquel que se pueda escribir como la unión de abiertos del espacio E_1 y E_2); podemos inducir la topología cociente en el espacio $E_1 \cup_d E_2/\sim$ y una aplicación proyección entre el espacio cociente $E_1 \cup_d E_2/\sim$ y $X_1 \cup X_2$ del siguiente modo. Sea $P : E_1 \cup_d E_2 \to X_1 \cup_d X_2$ definido como $P(e) = P_i(e)$ dependiendo a cual E_i pertenezca e. Sin dificultad se infiere que la aplicación así definida es continua. Al tomar las aplicaciones cocientes $q_1 : E_1 \cup_d E_2 \to E_1 \cup_d E_2/\sim$ y $q_2 : X_1 \cup_d X_2 \to X_1 \cup X_2$, donde ésta última está definida por la identificación de puntos iguales, tenemos que la proyección será aquella inducida por el diagrama:

$$\begin{tikzcd} E_1 \cup_d E_2 \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "P"'] & E_1 \cup_d E_2/\sim \arrow[d, dashed, "\widetilde{P}"] \\ X_1 \cup_d X_2 \arrow[r, "q_2"] & X_1 \cup X_2. \end{tikzcd}$$

Debido a que $q_2 \circ P$ es continua se sigue que $\widetilde{P} \circ q_1$ también lo es, y del hecho que q_1 es la aplicación cociente discurre la continuidad de $\widetilde{P}$.

Ahora pasemos a analizar la condición de trivialidad local. Para mayor comodidad organizaremos este problema en dos partes:

Sea $x \in X_1 \cup X_2$ de tal forma que no esté en la intersección de X_1 y X_2. Entonces, como la intersección es cerrada y X es de Hausdorff, se puede conseguir un abierto de x que no se interseque con $X_1 \cap X_2$, y una trivialización

$$\varphi_i : P_i(O) \to O \times \mathbb{R}^n$$

para $x \in X_i$ según sea el caso. Ésta será la parametrización en el nuevo fibrado.

El caso que necesitará más atención será cuando $P_i(e) \in X_1 \cap X_2$. Empecemos con un abierto $O_\alpha \subset X_1$, para el cual se tenga una trivialización $\varphi_\alpha : P_1^{-1}(\overline{O}_\alpha) \to \overline{O}_\alpha \times \mathbb{R}^n$. Hecho que se garantiza debido a que el espacio X_1 es normal.

Al tomar el isomorfismo de fibrados

$$f : (E_1)_{\overline{O}_\alpha \cap X_1 \cap X_2} \longmapsto (E_2)_{\overline{O}_\alpha \cap X_1 \cap X_2}$$

obtenemos la aplicación

$$F = \varphi_\alpha \circ f^{-1} : (E_2)_{(\overline{O}_\alpha \cap X_1 \cap X_2)} \to (\overline{O}_\alpha \cap X_1 \cap X_2) \times \mathbb{R}^n.$$

Específicamente una trivialización local de E_2 sobre un conjunto cerrado.

A partir de F construiremos una trivialización para el fibrado E_2 en el sentido estricto de la definición, en donde las fibras isomorfas bajo f sean llevadas al mismo espacio vectorial por la trivialización φ_α y la trivialización local de E_2 a construirse. Para ello daremos una extensión de F. Esto garantizará el cumplimiento de los requisitos establecidos lineas atrás y nos proporcionará una trivialización del fibrado adherido.

Iniciemos tomando cubrimientos $(U_i)_{i\in\Lambda}$ y $(V_i)_{i\in\Lambda}$ de X_2, localmente finitos, para los cuales $\overline{V}_i \subset U_i$ y $(E_2)_{U_i}$ sea trivial para todo i en Λ. Bajo este último hecho F restringuida a $(E_2)_{(B\cap\overline{V}_i)}$ (donde $B = (\overline{O}_\alpha \cap X_1 \cap X_2)$) puede ser vista como una función

$$g : B \cap \overline{V}_i \longmapsto GL(n, \mathbb{R}),$$

la cual puede ser extendida (vea Teorema de Tietze) a una función

$$g : U_i \longmapsto GL(n, \mathbb{R}).$$

A partir de g podemos extender

$$F : (E_2)_{X_2 \cap \overline{V}_i} \to X_2 \times \mathbb{R}^n$$

a una aplicación

$$F_i : (E_2)_{U_i} \to U_i \times \mathbb{R}^n,$$

esto último se sigue del hecho que el fibrado $(E_2)_{U_i}$ es trivial y $X_2 \cap \overline{V}_i \subset U_i$.

Así mismo, tomando una partición de la unidad $(\lambda_i)_{i\in\Lambda}$, subordinada al cubrimiento $(U_i)_{i\in\Lambda}$, podemos extender F_i (de una función definida sobre el espacio $(E)_{U_i}$ a una aplicación definida sobre todo el fibrado E), asignando

$$F_i(e) = \begin{cases} \lambda_i(P(e))F_i(e) & \text{si } P(e) \in U_i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A partir de esto último podemos definir el morfismo

$$\widetilde{F} : E_2 \longmapsto X_2 \times \mathbb{R}^n$$

por $\widetilde{F}(e) = \sum_i F_i(e)$, y obtener así una extensión de F. Siendo ella continua podemos hallar un abierto O_β para el cual $(E_2)_{O_\beta}$ sea trivial.

De aquí podemos obtener una trivialización Ψ de $E_1 \cup_f E_2$ sobre $O_\alpha \cup O_\beta$.

Finalmente, debemos probar $E_1 \cup_f E_2|_{X_1} \equiv E_1$. Para tal efecto presentamos la aplicación

$$H : E_1 \cup_f E_2|_{X_1} \to E_1,$$

definida como $H([e]) = e$, donde $[e] = \{e, f(e)\}$, la cual satisface el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(E_1 \cup_f E_2)|_{X_1} \arrow[r, "H"] & E_1 \\
E_1. \arrow[u, "P"] \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

De este mismo hecho se concluye que H a de ser continua. Así mismo, si nos restringimos a una fibra la aplicación es un isomorfismo de espacios vectoriales, de ello se desprende que H es un isomorfismo de fibrados sobre X_1. ■

Corolario 1.1. *Sean $g_1 : E_1 \to E_1^{'}$ y $g_2 : E_2 \to E_2'$ dos isomorfismos sobre X_1 y X_2, respectivamente, y f, $f^{'}$ isomorfismos de fibrados sobre $X_1 \cap X_2$ de modo que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
E_{1X_1\cap X_2} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_1"] & E_{2X_1\cap X_2} \arrow[d, "g_2"] \\
E_1{}^{'}_{X_1\cap X_2} \arrow[r, "f'"] & E_2{}^{'}_{X_1\cap X_2}
\end{tikzcd}$$

conmute. Entonces se satisface

$$E_1 \cup_f E_2 \equiv E_1^{'} \cup_{f'} E_2^{'}$$

Prueba. Tomemos las uniones disjuntas de los espacios E_1, E_2 y $E_1^{'}$, $E_2^{'}$ respectivamente, y definamos entre ellos la aplicación:

$$F : E_1 \cup_d E_2 \to E_1^{'} \cup_d E_2^{'},$$

vía $F(e) = g_i(e)$, si $e \in E_i$. Al tomar los cocientes vemos que F induce una aplicación $\widetilde{F}$ de tal modo que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
E_1 \cup_d E_2 \arrow[r, "P"] \arrow[d, "F"'] & E_1 \cup_f E_2 \arrow[d, dashed, "\widetilde{F}"] \\
E_1^{'} \cup_d E_2^{'} \arrow[r, "P^{'}"'] & E_1^{'} \cup_{f'} E_2^{'}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

De la conmutatividad del diagrama y la continuidad de P y $P^{'}$ se concluye que la aplicación $\widetilde{F}$ es continua.

Por otro lado F acepta claramente una aplicación inversa H. Ello implica la conmutatividad

$$\begin{tikzcd} E_1 \cup_d E_2 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P"'] & E_1' \cup_d E_2' \arrow[r, "H"] \arrow[d, "P'"] & E_1 \cup_d E_2 \arrow[d, "P"] \\ E_1 \cup_f E_2 \arrow[r, dashed, "\widetilde{F}"'] & E_1^{'} \cup_{f'} E_2^{'} \arrow[r, dashed, "\widetilde{H}"'] & E_1 \cup_f E_2. \end{tikzcd}$$

Como $H \circ F = id$, y la función inducida es única, $\widetilde{H} \circ \widetilde{F} = \widetilde{H \circ F} = \widetilde{id}$. Así $\widetilde{F}$ admite una inversa, la cual debe ser un isomorfismo sobre la fibra.

■

1.3. Funciones Coordenadas

Supongamos que tenemos un fibrado (E, X, P) y un sistemas de trivializaciones (ϕ_i, U_i) donde $i \in \Lambda$. Si para dos trivializaciones (ϕ_i, U_i), (ϕ_j, U_j) se tiene que $U_i \cap U_j$ es no vacio, entonces al tomar $U_{ij} = U_i \cap U_j$ podemos definir

$$\phi_{ij} : U_{ij} \times \mathbb{R}^n \to U_{ij} \times \mathbb{R}^n$$

vía

$$\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1},$$

que es de la forma (id, g_{ij}). Así obtenemos una función continua

$$g_{ij} : U_{ij} \longmapsto GL(n, \mathbb{R}).$$

Directamente de la definición podemos comprobar las siguientes tres condiciones

$$g_{ii} = I_{n\times n},$$

$$g_{ij}(x) \cdot g_{jk}(x) = g_{ik}(x) \;\text{ en } U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k,$$

$$(g_{ij})^{-1} = g_{ji}.$$

Inmediatamente vemos que de las trivializaciones locales hemos conseguido aplicaciones g_{ij} que tienen ciertas características particulares. Una pregunta natural es : si tuviésemos ciertas aplicaciones que cumplan las propiedades dadas ¿será posible obtener un fibrado del cual podamos recuperar las transformación de coordenadas? Lo que queremos formular es lo siguiente. A partir de las estructuras locales y la forma de pegar las trivializaciones (dadas por las aplicaciones g_{ij}) ¿podremos recuperar un fibrado? Para poder dar respuesta a esta interrogante debemos poner sobre terreno sólido estos conceptos. Para ello daremos paso a la siguiente definición.

Definición 1.10. Sistema de transformación de coordenadas. Supongase que se tenga una colección de abiertos $(U_j)_{j\in\Lambda}$ de un espacio topológico X. Se llama sistema de *transformación de coordenadas* a una colección de aplicaciones continuas $g_{ij} : U_{ij} \to GL(n, \mathbb{R})$ (con $U_{ij} = U_i \cap U_j$) que satisface (1) $g_{ij}(x) = (g_{ji}(x))^{-1}$,(2) $g_{ij}(x) = g_{ik}(x) \cdot g_{kj}(x)$ en U_{ijk}, (3) $g_{ii}(x) = I_{n\times n}$.

Teorema 1.2. *Sea (g_{ij}) un sistema de transformación de coordenadas de un cubrimiento $(V_i)_{i\in\Lambda}$ de X. Entonces existe un fibrado vectorial real E con cartas (ϕ_i, V_i) y con cambio de cartas $(\phi_i)^{-1} \circ \phi_j = (Id, g_{ij})$.*

Prueba. Formemos los espacios $T_j = V_j \times \mathbb{R}^n \times \{j\}$ y unámoslos para obtener

$$T = \bigcup_{j\in J} V_j \times \mathbb{R}^n \times \{j\}.$$

Impongamos en cada T_j la topología producto, donde el conjunto de índices tiene la topología discreta y la topología de T es obtenida a partir de los T_j. Establezcamos una relación de equivalencia en T como sigue: (x, v, j) y (y, w, k) serán equivalentes si y sólo si $x = y$ y $g_{kj}(x)v = w$. Gracias a las condiciones impuestas a las transformación de coordenadas, dicha relación es de equivalencia.

A continuación tomemos la aplicación cociente

$$\pi : T \to E = T/\sim$$

que asigna a cada (x, v, i) su clase $\{(x, v, i)\}$. Induciendo en E la topología cociente definamos la aplicación proyección

$$P : E \to X$$

poniendo $P(\{(x, v, j)\}) = x$. La continuidad se sigue de observar que localmente, en $V_i \times \mathbb{R}^n \times \{i\}$, $P \circ \pi = \pi_1$ donde $\pi_1 : V_i \times \mathbb{R}^n \times \{i\} \to V_i$.

Ahora pasaremos a definir el sistema de parametrizaciones. Definamos

$$\phi_j : V_j \times \mathbb{R}^n \to P^{-1}(V_j)$$

por $\phi_j(x, v) = \pi(x, v, j)$. Podemos ver que debido a la continuidad de π, estas ϕ_j son continuas; aún más, como $P \circ \pi(x, v, j) = x$, se tiene $P \circ \phi_j(x, v) = x$. De esta igualdad tenemos $\phi_j(x, v) \in P^{-1}(V_j)$ lo que nos permite concluir que $\phi_j(V_j \times \mathbb{R}^n) \subset P^{-1}(V_j)$. Por otro lado si $b = \{(x, v, k)\} \in P^{-1}(V_j)$ entonces $x \in V_j \cap V_k$ y $(x, v, k) \sim (x, g_{jk}(x)v, j)$ donde $(x, g_{jk}(x)v) \in V_j \times \mathbb{R}^n$, y por tanto $\phi_j(x, g_{jk}(x)v) = b$ de donde concluimos $P^{-1}(V_j) \subset \phi_j(V_j \times \mathbb{R}^n)$.

Para ver que la aplicación ϕ_j sea inyectiva, tomamos $(x, v), (y, w)$ tal que $\phi_j(x, v) = \phi_j(y, w)$. Por definición $\pi(x, v, j) = \pi(y, w, j)$, pero esto ocurre si y sólo si $x = y$ y $v = g_{jj}(x)v = w$. verificando así la inyectividad.

Analicemos la continuidad de la aplicación inversa: dada su inyectividad será suficiente ver que la aplicación es abierta. Tomemos $W \subset V_j \times \mathbb{R}^n$ un subcunjunto abierto; debemos probar que el conjunto $\phi_j(W)$ también los es. Es decir, por definición tenemos que verificar si $M = \pi^{-1}(\phi_j(W))$ es abierto en T. Sabemos que

$$T = \bigcup V_k \times \mathbb{R}^n \times \{k\}$$

donde cada $T_k = V_k \times \mathbb{R}^n \times \{k\}$ es abierto. Entonces, si probamos que el conjunto $M \cap T_k$ es relativamente abierto en T_k, veremos que todo M es abierto. Pero de $W \subset V_j \times \mathbb{R}^n$ se obtiene que cada conjunto $M \cap T_k$ esta contenido en $(V_k \cap V_j) \times \mathbb{R}^n \times k$.

Al tomar las aplicaciones:

$$\omega : (V_j \cap V_k) \times \mathbb{R}^n \times k \to V_j \times \mathbb{R}^n$$

donde $\omega(x, v, k) = (x, g_{jk}(x)v)$ y $\phi_j : V_j \times \mathbb{R}^n \to P^{-1}(V_j)$, continuas ambas, podemos ver que $\phi_j \circ \omega = \pi$ y de aquí

$$\pi^{-1} \circ \phi_j(W) = (\phi_j \circ \omega)^{-1} \circ \phi_j(W) = \omega^{-1}(W),$$

el cual es abierto por ser ω continua. En consecuencia ϕ es abierta y por tanto es un homeomorfismo.

Consideremos las funciones $\phi_{jx}(v) = \phi_j(x, v)$ con $j \in \Lambda$ y las aplicaciones

$$\phi_{jx}{}^{-1} \circ \phi_{ix} : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n.$$

Si $x \in V_j \cap V_i$ y $\phi_{jx}{}^{-1} \circ \phi_{ix}(v) = w$ entonces $\phi_i(x, v) = \phi_j(x, w)$ de donde tenemos $\pi(x, v, i) = \pi(x, w, j)$ y por tanto $(x, v, i) \sim (x, w, j)$. De la relación definida en T tenemos entonces que $\phi_{jx}{}^{-1} \circ \phi_{ix}(v) = w = g_{ji}(x)v$ de donde concluimos que $\phi_{jx}{}^{-1} \circ \phi_{ix} = g_{ji}(x)$ ■

Con este último teorema podemos formalizar las conclusiones expresadas en el Ejemplo 1.2.

Teorema 1.3. *Sea E' un fibrado que tenga la misma transformación de coordenadas que el fibrado E, construido en el teorema anterior. Entonces $E' \equiv E$.*

Prueba. Definamos la aplicación

$$f : E' \longmapsto E$$

por $f(e) = [\varphi'(e)] = [x, v]$, donde $\varphi : P^{-1}U_i \to U_i \times \mathbb{R}^n$ es la trivialización local de E. Veamos la buena definición de esta aplicación. Si tomamos otra trivialización local $\varphi'_j : P^{-1}(U_j) \to U_j \times \mathbb{R}^n$ tal que $x \in U_i \cap U_j$ entonces tenemos $f(e) = [\varphi'_j(e)] = [x, w]$. Pero $g_{ij}(x)w = v$, implicado ello que (x, v) y (x, w) están en la misma clase. Lo cual nos lleva a la buena definición de la aplicación f. La continuidad se obtiene debido a que localmente $f = \pi \circ \varphi_i$. ■

Como conclusión debemos decir que sólo basta tener la estructura local de los fibrados vectoriales y la forma cómo estos se pegan –es decir los g_{ij}– para poder construir un fibrado vectorial. Aún más, el último teorema nos invita a definir un fibrado a partir de un sistema de transformación de coordenadas; estableciendo que un fibrado sobre X es en esencia una colección de transformaciones de coordenadas $(g_{ij})_{i,j\in\Lambda}$ de un cubrimiento $(V_i)_{i\in\Lambda}$ de X. A modo de ejemplo brindamos la siguiente construcción.

El Fibrado $Hom(E, E_1)$

Sea X un espacio topológico. Supóngase que sobre éste existan dos fibrados E y E_1 cuyas fibras son espacios vectoriales n, m dimensionales, respectivamente.

Ahora supóngase que tenemos una colección de abiertos $(O_i)_{i\in\Lambda}$ tales que $(E)_{O_i}$ y $(E_1)_{O_i}$ sean triviales. El fibrado $Hom(E, E_1)$ estará dado localmente por los espacios :

$$O_i \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

Para ser precisos, tomemos trivializaciones locales (φ_i, O_i), (ψ_i, O_i), con $i \in \Lambda$, de E_1, E respectivamente. Vamos a definir un sistema de transformación de coordenadas

$$g_{ij} : O_i \cap O_j \to GL(mn, \mathbb{R})$$

donde $g_{ij}(x) : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Para esto tomemos

$$\varphi_i : O_i \times \mathbb{R}^n \to P^{-1}(O_i)$$

$$\varphi_j : O_j \times \mathbb{R}^n \to P^{-1}(O_j)$$

dos parametrizaciones locales de E y

$$\psi_i : O_i \times \mathbb{R}^m \to P_1^{-1}(O_i)$$

$$\psi_j : O_j \times \mathbb{R}^m \to P_1^{-1}(O_j)$$

parametrizaciones de E_1.

Sabemos que $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j = (Id,\ g'_{ij})$ y $\psi_i^{-1} \circ \psi_j = (Id,\ g''_{ij})$ con lo cual podemos definir la aplicación

$$g_{ij} : O_i \cap O_j \longmapsto GL(nm, \mathbb{R})$$

como

$$g_{ij}(x)f = g''{}_{ij}(x) \cdot f \cdot g'{}_{ji}(x).$$

De aquí fácilmente se consigue

$$g_{ii} = I.$$

De otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}
g_{ij}(x) \circ g_{jk}(x)(f) &= g_{ij}(x)(g''_{jk}(x) \cdot f \cdot g'_{kj}(x)) \\
&= g''_{ij}(x) \cdot g''_{jk}(x)(f) g'_{kj}(x) \cdot g'_{ji}(x) \\
&= g''_{ik}(x) \cdot f \cdot g'_{ki}(x)
\end{aligned}$$

que junto con las propiedades de las transformación de coordenadas de g'_{ij} y g''_{ij} nos hacen ver la igualdad

$$g_{ij} \cdot g_{jk} = g_{ik}.$$

Finalmente probemos la última condición de las transformaciones de coordenadas. Es decir, debemos verificar la igualdad $g_{ij} = (g_{ji})^{-1}$. En efecto tenemos $g_{ij} \cdot (g_{ji}) = g_{ii} = I$ de las primeras propiedades. Con lo que podemos concluir que las aplicaciones g_{ij} son las aplicaciones de **transformaciones de coordenadas**. Por el teorema anterior, existe un fibrado vectorial, localmente dado como $O_i \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y que tiene como cambio de coordenadas a las aplicaciones (Id, g_{ij}).

Este fibrado sobre X de dimensión mn será denotado por $Hom(E, E_1)$.

1.4. El Fibrado γ_n^k

El fibrado que pasamos a analizar es uno de los más importantes en el desarrollo de este trabajo. Tal fibrado tiene como espacio base la variedad *Grassmaniana*, denotada por $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$, que simboliza el conjunto de sub-espacios vectoriales n-dimensionales de $\mathbb{R}^{n+k}$. La pregunta es cómo dotar a este espacio de una topología, ya que nosotros necesitamos como espacio base un espacio topológico. Notemos que en este espacio los "puntos" son planos n-dimensionales. Para poder dotar a este espacio de topología debemos apoyarnos en otro, de aquí la necesidad de definir previamente las variedades **Stiefel**.

Para comenzar tomemos el espacio $\mathbb{R}^{n+k} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n+k}$ (n- veces) y formemos el siguiente subconjunto :

$$V_n(\mathbb{R}^{n+k}) = \{(v_1, \ldots, v_n) \ / \ v_i \text{ son linealmente independientes } \}$$

A tal conjunto se le llama la variedad *Stiefel*, el cual representa un conjunto abierto del producto cartesiano $\mathbb{R}^{n+k} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n+k}$. Ahora definamos la aplicación

$$\pi : V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \to \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$$

que asigna a cada n-tupla el espacio n-dimensional generado por tales vectores. Notemos que podemos definir una relación de equivalencia en el conjunto $V_n(\mathbb{R}^{n+k})$ de la siguiente manera $(v_1, \ldots, v_n) \sim (w_1, \ldots, w_n)$ si existe una matriz $(a_{ij})_{nn}$, no singular, tal que $(a_{ij}) \times (v_1, \ldots, v_n) = (w_1, \ldots, w_n)$. Si tomamos el cociente del espacio $V_n(\mathbb{R}^{n+k})$ respecto a tal relación tendríamos también la variedad $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ o para ser más precisos tendríamos un conjunto que se puede identificar con el conjunto de subespacios de $\mathbb{R}^{n+k}$, puesto que si $(v_1, \ldots, v_n) \sim (w_1, \ldots, w_n)$ entonces los espacios que generan ambas $n - tuplas$ son los mismos, y bajo la aplicación π, conseguimos el mismo hiperplano. Es decir π se convertiría en la aplicación cociente. En consecuencia la topología del espacio $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ será la topología cociente, inducida por la aplicación π. Si tomamos el espacio $V_n^o(\mathbb{R}^{n+k}) \subset V_n(\mathbb{R}^{n+k})$ consistente de todos las n-tuplas que son ortonormales, podemos ver que tal espacio es un conjunto limitado y cerrado, y por tanto, compacto.

Lema 1.2. *La variedad de Grassmann* $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ *es compacto.*

Prueba. Del hecho que todo plano tiene una base ortonormal podemos concluir que : $\pi(V_n^o(\mathbb{R}^{n+k})) = \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$, y debido a la continuidad de π y compacidad de $V_n^o(\mathbb{R}^{n+k})$ se desprende que $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ es compacto. ■

La Variedad de Grassmann y el Fibrado γ_k^n

Nuestro principal objetivo será construir un fibrado sobre $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$, para ello veremos primero que $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^{n+k}$, este hecho facilitará la prueba de la trivialización local del fibrado γ_k^n . La construcción de este fibrado nos permitirá posteriormente caracterizar todo los fibrados sobre un espacio base X compacto de Hausdorff con una aplicación f de X a $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$.

Teorema 1.4. *Todo punto* $X_0 \in \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ *tiene una vecindad* U *homeomorfa a* $Hom(X_0, X_0^\perp) = \mathbb{R}^{nk}$

Prueba. Sea $X_0 \in \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ y

$$U = \{Y \in \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k}) : Y \oplus X_0^\perp = \mathbb{R}^{n+k}\}.$$

Para espacios E, F, con $E \oplus F = \mathbb{R}^{n+k}$, definamos

$$\Pi_F(E) : \mathbb{R}^{n+k} \to E$$

como la proyección a lo largo de F. Bajo esta definición se verifica que la aplicación

$$T : U \to Hom(X_0, X_0^{\perp})$$

definida como $T(Y) = \Pi_{X_0}(Y, {X_0}^{\perp}) \circ (\Pi_{{X_0}^{\perp}}(Y, X_0))^{-1}$, es un homeomorfismo (vea [M] o [B, Teorema 1.4]). ■

En conclución podemos decir que, localmente, la variedad de Grasmann es homeomorfa a $\mathbb{R}^{nk}$. El siguiente paso es construir un espacio total E sobre $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$. Para tal fin definamos el conjunto:

$$E = \{(X, v) \text{ tal que } v \in X,\ X \in \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})\}$$

y $P : E \to \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ por $P(X, x) = X$. En base a la estructura de los elementos X de la variedad de Grassmann, tenemos que el conjunto $P^{-1}(X) = \{(X, v) \text{ tal que } v \in X\}$ ya tiene una estructura de espacio vectorial n-dimensional. Finalmente como $E \subset \mathbb{G}(\mathbb{R}^{n+k}) \times \mathbb{R}^n$, podemos inducir en E la topología de $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k}) \times \mathbb{R}^n$. Con ella P es evidentemente continua.

Proposición 1.10. *La estructura construida anteriormente*

$$(E, P, \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k}))$$

es un fibrado vectorial.

Prueba. Sea X_0 arbitrario y U una vecindad de X_0 como se dio anteriormente, definamos

$$\mathbf{h} : U \times X_0 \to P^{-1}(U)$$

como $\mathbf{h}(Y, x) = (Y, x + T(Y)x)$ la cual es continua puesto que T lo es. La inversa estará dada por : $\mathbf{h}^{-1}(Y, y) = (Y, \Pi_{X_0^{\perp}}(X_0)y)$ la cual también es continua, de lo que se desprende que $\mathbf{h}$ es un homeomorfismo. La inyectividad en cada fibra se obtiene de la definición de T. ■

1.5. El Fibrado Universal

Si prestamos atención a la definición del fibrado γ_k^n veremos la dependencia existente de γ_k^n con la dimensión de $\mathbb{R}^{n+k}$. Este problema será solucionado con la introducción del fibrado universal. A grandes rasgos, si identificamos canónicamente $\mathbb{R}^n$ con un subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$ podemos admitir, al menos intuitivamente, que γ_k^n esta contenido en γ_{k+1}^n; ello nos sugiere que existe una manera de interpretar $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k^n$ como un fibrado vectorial sobre $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$.

Grassmaniano Infinito

Definamos el espacio vectorial

$$\mathbb{R}^\infty = \{x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)\colon x_i \neq 0 \text{ para un número finito de índices}\}.$$

Identificando el punto $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ con $(x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots)$ sucede que $\mathbb{R}^n$ queda incrustado en $\mathbb{R}^\infty$. Ello permite definir el **grassmaniano infinito** como

$$\mathbb{G}_n = \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^\infty) = \{X \text{ que son subespacios n-dimensionales de } \mathbb{R}^\infty\}$$

Una manera alternativa de definir el $grassmaniano\ infinito$ (que permitirá dotar de una topología a $\mathbb{G}_n$) es mediante el cociente de una determinada variedad, bajo una relación de equivalencia. Tal relación identifica dos n-tuplas de vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^\infty$ que generan el mismo plano n-dimensional en $\mathbb{R}^\infty$; para ello presentamos a continuación el espacio que desenpeñará el papel de la variedad en cuestión. Sea

$$(\mathbb{R}^\infty)^{*n} = \{(v_1, \ldots, v_n) \text{ tal que } v_i \in \mathbb{R}^\infty \text{ son linealmente independientes}\}$$

Definamos una relación de equivalencia en este conjunto del siguiente modo $(v_1, \ldots, v_n) \sim (w_1, \ldots, w_n)$ si y sólo si existe una matriz $(a_{ij})_{nn}$

no singular tal que $(v_1, \dots v_n) = (a_{ij})_{nn}(w_1, \dots, w_n)$. Observemos que si esto ocurre, la $n-$tupla $(v_1, \dots v_n)$ es combinación lineal de los vectores $(w_1, \dots, w_n)$, y por lo tanto, genera el mismo espacio vectorial; es decir, los planos generados son los mismos. Entonces, si tomamos el cociente de este espacio por esta relación de equivalencia podemos identificar un plano como una clase de equivalencia en el espacio cociente, de donde se concluye $\mathbb{G}_n = (\mathbb{R}^\infty)^{*n} / \sim$.

La Topología de $\mathbb{G}_n$

Para dotar de una topología a este espacio es necesario presentar un resultado preliminar técnico, el cual nos permitirá definir la topología del límite directo en $\mathbb{G}_n$.

Tomando la aplicación inclusión $j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\infty$ inducimos una aplicación $J : \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k}) \to \mathbb{G}_n$, con ayuda de ésta, identificando el espacio $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ con su imagen bajo J, obtenemos el siguiente resultado.

Lema 1.3. $\mathbb{G}_n = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$.

Prueba. Ver [B, Lema 1.3]. ■

Ello permite introducir una topología en el espacio $\mathbb{G}_n$ de la siguiente manera: decimos que un conjunto $A \subset \mathbb{G}_n$ es abierto si y sólo si $A \cap \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ es abierto en $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ para todo k. A tal topología se le denomina topología de *límite directo* o topología débil.

El estudio de los fibrados vectoriales que realizaremos en las siguientes secciones será basada principalmente en aquellos que tengan como base a un espacios paracompactos. Ello nos obliga a acatar el siguiente resultado. Para lo cual nos remitimos a [H, Página 34].

Lema 1.4. *El grassmanniano $\mathbb{G}_n$ es paracompacto.*

Prueba. Ver [H, Página 34]. ■

El Fibrado Universal

- **Construcción Del Espacio Total**

Comencemos tomando un subespacio $E \subset \mathbb{G}_n \times \mathbb{R}^\infty$ el cual será el espacio total del fibrado universal. Tal espacio esta definido como

$$E = \{(X, v) \text{ tal que } X \in \mathbb{G}_n \text{ y } v \in X\}$$

La proyección estará dada por $P(X, v) = X$, la cual es evidentemente continua.

- **La Condición de Trivialidad Local**

Se verifica que E es localmente trivial (para los detalles nos remitimos a [B, Página 35]).

2. Propiedades Homotópicas de los Fibrados Vectoriales

El pullback, operación mediante la cual obtenemos un fibrado a partir de una aplicación continua y un fibrado E, nos permitirá construir todo fibrado vectorial, sobre un espacio paracompacto, a partir del fibrado universal γ_k^n y de una aplicación continua entre sus espacios base. En conclución toda la información del fibrado es proporcionada por cierta aplicación entre su espacio base y $\mathbb{G}_n$. En forma más precisa veremos que el conjunto de clases de isomorfismos de fibrados sobre un espacio X, al cual denotaremos por $V^n(X)$, esta completamente identificado por ciertas clases equivalencias de aplicaciones entre X y $\mathbb{G}_n$. Empecemos estableciendo una de las bases en las que se sustentará la afirmación que hemos establecido líneas atrás.

Si tenemos una aplicación continua $f : X \to Y$ y podemos identificar los fibrados sobre Y –saber su estructura y cuántos y cuáles fibrados sobre Y podemos tener–, entonces indirectamente podremos identificar los fibrados f^*E sobre X. Un aspecto importante a tomarse en cuenta será confirmar si todo fibrado E' sobre X es isomorfo al pullback f^*E para algún otro dado sobre un Y fijo, o de lo contrario, ver si todo fibrado E' sobre X es isomorfo a f^*E para algún $f : X \to Y$ arbitrario. Más adelante veremos que el primer análisis nos llevará al teorema de invarianza homotópica. La última insinuación corresponderá ya al teorema de clasificación de los fibrados vectoriales.

Retomando los comentarios iniciales vemos que si $f : X \to Y$ es una aplicación continua y E es un fibrado sobre Y, f^*E es un fibrado sobre X. Entonces podemos definir una aplicación entre los espacios $V^n(Y)$ y $V^n(X)$ como $[E] \longmapsto [f^*E]$. La buena definición se sigue de la Proposición 1.3 de la primera sección. Lo que nos interesa de esta aplicación es saber cuándo tiene inversa, pues una respuesta afirmativa nos permitiría identificar los fibrados de un espacio y otro. La condición necesaria la veremos en esta sección, específicamente en la primera subsección. Si bien es cierto, esta identificación nos amplía el ámbito donde podemos estudiar los fibrados –y a la vez nos simplifica algo el trabajo–, este resultado será obtenido de un teorema de igual importancia al antes mencionado: el **Teorema de invarianza homotópica**. Este resultado será de vital importancia en nuestro trabajo en el futuro. Nos ayudará, junto con todas las propiedades que aquí veremos, a obtener una clasificación de los fibrados sobre una suspensión. Este último resultado traerá como consecuencia la clasificación de fibrados sobre las esferas.

2.1. Pullback a lo largo de Funciones Homotópicas

En esta primera parte veremos que en realidad lo necesario es una relación de invarianza homotópica para comprobar si la aplicación $[E] \to [f^*E]$ es biyectiva, para $f : X \to Y$ dada. La prueba de ello no será directa sino que necesitaremos un resultado previo. Tal resultado será denominado el **Teorema de Equivalencia Homotópica**

Con ayuda del teorema de equivalencia homotópica también demostraremos el teorema de clasificación de fibrados vectoriales sobre un espacio paracompacto, el principal resultado de este trabajo.

Para demostrar el teorema de invarianza homotópica nos apoyaremos en unos lemas previos. El primero de ellos indica que toda sección local definida en un conjunto cerrado se puede extender continuamente a toda la base.

Lema 2.1. *Sea (E, X, P) un fibrado sobre X (un espacio paracompacto). Sea $A \subset X$ un conjunto cerrado y*

$$S : A \to E|_A$$

una sección. Entonces existe una sección global

$$S_0 : X \to E$$

tal que $S_0|_A = S$.

Prueba. Sea $(O_\alpha)_{\alpha\in I}$ un cubrimiento localmente finito del espacio X, tal que $(E)_{O_\alpha}$ sea trivial. Tomemos la sección $S : O_\alpha \cap A \to E$ –restricción de S– que por el Teorema de Tietze (ver [B, Apéndice A]) puede ser extendida a una aplicación continua $S_{O_\alpha} : O_\alpha \to E$.

Para definir una extensión de S_{O_α} usaremos la partición de la unidad en espacios paracompactos. Tomemos $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $(O_\alpha)_{\alpha\in I}$ y definamos las aplicaciones :

$$S_\alpha : X \to E$$

tal que

$$S_\alpha(y) = \begin{cases} \phi_\alpha(y) S_{O_\alpha}(y) & \text{si } y \in O_\alpha \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como $supp(\phi_\alpha) \subset O_\alpha$ y S_{O_α} es continua en O_α entonces S_α es continua en X. Ahora podemos definir

$$S_0 : X \to E$$

como

$$S_0(y) = \sum_{\alpha\in I} S_\alpha(y)$$

La buena definición se sigue del hecho de que el cubrimiento $(O_\alpha)_{\alpha\in I}$ fue elegido localmente finito. En efecto como el espacio X es paracompacto todo $y \in X$ sólo se interseca con un número finito de $supp(\phi_\alpha)$, entonces la suma presentada en la definición de S_0 es finita.

Ahora veamos qué sucede si tomamos $y \in A$:

$$\begin{aligned} S_0(y) &= \sum_{\alpha\in I} S_\alpha(y) \\ &= \sum \phi_\alpha(y) S_{O_\alpha}(y) \\ &= (\sum \phi_\alpha(y)) S(y) \\ &= S(y), \end{aligned}$$

con lo que finalizamos la demostración. ■

Como consecuencia inmediata podemos apreciar que todo isomorfismo de fibrados definido sobre un cerrado se puede extender continuamente a una vecindad abierta del cerrado en cuestión. Tal como lo pasamos a enunciar formalmente en el siguiente lema.

Lema 2.2. *Sean (E_1, X, P_1) y (E_2, X, P_2) dos fibrados n-dimensionales. Si $A \subset X$ es un conjunto cerrado y*

$$f : E_{1_{|A}} \to E_{2_{|A}}$$

es un isomorfismo de fibrados sobre A, entonces existe $U \subset X$ abierto y

$$f_1 : E_{1_{|U}} \to E_{2_{|U}}$$

que es un isomorfismo de fibrados sobre U, con $A \subset U$ y $f_1 \mid_A = f$

Prueba. La Representación local de f, $\varphi_\alpha \circ f \circ (\phi_\alpha)^{-1} = (x, g(x)v)$ define la sección

$$S : A \to Hom(E_1|_A, E_2|_A)$$

$S(x) = [(x, g(x)]$, la que se extiende continuamente a una seccíon $S_0 : X \to Hom(E_1, E_2)$, y nos proporciona el morfismo requerido

$$f_1 : E_{1_{|U}} \longmapsto E_{2_{|U}}$$

definido por: $f_1(e) = S(P(e))e$. ■

Observación. En otros términos el isomorfismo $f : E_1|_A \to E_2|_A$ puede ser visto como una sección del fibrado $Hom(E_1|_A, E_2|_A)$. Para tal efecto es suficiente definir la sección como $S(x) = f \mid_{P^{-1}(x)}$. Entonces, del Lema 2.1, obtenemos una extensión de S y por ende una extensión del morfismo f. Siendo $\bar{S}$, la extensión de S y $GL(n, \mathbb{R})$ abierto, entonces existe un conjunto abierto, llamado en el lema U para el cual el morfismo f_1, extensión de f, se convierte en un isomorfismo de fibrados sobre U.

En seguida veremos que si tenemos una homotopía $F : X \times [0,1] \to X$ y E un fibrado sobre X entonces F^*E no es más que la colección de fibrados $F_t^*E \times \{t\}$ sobre $X \times \{t\}$ unidos continuamente por la aplicación F, con $F(x,t) = F_t(x)$, y la topología de $X \times [0,1]$. Es decir, si tomamos $X \times [0,1]$ como la unión de los espacios $X \times t$ con $t \in [0,1]$, entonces sobre cada $X \times t$ podemos colocar el fibrado $F_t^*E \times t$. De aquí podemos interpretar que F^*E es una transformación continua del fibrado original F_0^*E al fibrado F_1^*E. Más adelante veremos que este cambio continuo preserva las propiedades topológicas, y algebraicas entre ellos, es decir se cumple $F_0^*E \equiv F_t^*E$ para todo $t \in [0,1]$. Empecemos presentando los argumentos formales que justifican los comentarios iniciales.

Lema 2.3. *Sea E un fibrado sobre Y y $F : X \times [0,1] \to Y$ continua. Entonces $F^*E|_{X\times\{t\}} \equiv F_t^*E \times \{t\}$.*

Prueba. Para la demostración es suficiente recordar que $F_t(x) = F(x,t)$. ■

Lema 2.4. *Sea $F : X \times I \to Y$ una aplicación continua, E un fibrado sobre Y y $\pi : X \times [0,1] \to X$. Entonces $(\pi^* F_{t_1}^* E)_{|X\times\{t_1\}} \equiv F_{t_1}^*E \times \{t_1\}$.*

Prueba. Ver [B, Lema 2.4]. ■

Lema 2.5. *Sean X, Y y Z espacios topológicos, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ aplicaciones continuas. Si E es un fibrado sobre Z entonces $(g \circ f)^*E$ y $f^*(g^*E)$ son fibrados isomorfos sobre X.*

Prueba. De la definición del fibrado inducido obtenemos

$$(g \circ f)^*E = \{(x,e)/P(e) = g \circ f(x)\}$$

y

$$f^*g^*E = \{(x,(y,e))/f(x) = y\}.$$

De aquí podemos construir una aplicación

$$f' : f^*g^*E \to (g \circ f)^*E$$

como $f'(x,(y,e)) = (x,e)$. Ésta es continua, y como $P(e) = g(y) = g(f(x))$, entonces está bien definida y es un isomorfismo en cada fibra; concluyendo así que f' es un isomorfismo de fibrados. ∎

Ahora desarrollaremos el resultado para el cual estábamos trabajando. Como se dijo anteriormente, éste permitirá ligar íntimamente el fibrado con su espacio base.

Teorema 2.1. *Sea X un espacio compacto y (E,P,Y) un fibrado. Si f, $g : X \to Y$ son continuas y homotópicas entonces $f^*E \equiv g^*E$.*

Prueba. Sea

$$F : X \times [0,1] \longmapsto Y$$

una homotopía de f a g. Construyamos una familia de aplicaciones

$$F_t : X \longmapsto Y$$

definidas como $F_t(a) = F(a,t)$. Siendo ellas continuas, utilizando el pull-back tendremos que F_t^*E es un fibrado sobre X.

Por otro lado, al tomar la proyección sobre la primera componente

$$\pi : X \times [0,1] \longmapsto X,$$

siendo F_t^*E un fibrado sobre X, se sigue que $F^*E|_{X\times t}$ es isomorfo a $\pi^*F_t^*E_{|X\times t}$. Así apelando a las mismas técnicas del Lema 2.2 inferimos la existe de un abierto $U \supset X \times t$ para el cual

$$F^*E|_U \equiv \pi^*F^*E_t|_U.$$

Por supuesto, podemos asumir que el abierto U es de la forma $X \times (t-\epsilon, t+\epsilon)$ y por tanto

$$F^*E|_{X\times(t-\epsilon,t+\epsilon)} \equiv \pi^*F_t^*E|_{X\times(t-\epsilon,t+\epsilon)}.$$

Con lo cual se llega (empleando el Lema 2.3) a que $F_t^*E \times t_1$ es isomorfo a $F^*E_{|X\times t_1} \equiv F_{t_1}^*E \times t_1$ y por ende $F_t^*E \equiv F_{t_1}^*E$ para $t_1 \in (t-\epsilon, t+\epsilon)$. Un argumento similar nos lleva a concluir que $F_t^*E \equiv F_{t_2}^*E$, para $t_2 \in U$ y diferente a t_1. Evidentemente, por transitividad se obtiene $F_{t_2}^*E \equiv F_{t_1}^*E$ para $t_1, t_2 \in (t-\epsilon, t+\epsilon)$.

Si tomamos a $V^n(X)$ como las clases de equivalencia de los fibrados isomorfos sobre un mismo espacio base, y dotámos a este espacio de la topología discreta, podemos definir una aplicación continua

$$\tau : [0,1] \longmapsto V^n(X)$$

expresada por $\tau(t) = [F_t^*E]$. Entonces con los hechos probados tenemos que la aplicación τ es localmente constante. Siendo τ continua y definida en un espacio conexo vemos que es globalmente constante; de donde podemos inferir que los fibrados F_t^*E pertenecen a una misma clase en $V^n(X)$ independientemente del punto $t \in [0,1]$; por tanto $F_0^*E \equiv F_1^*E$ y como F es una homotopía entre f, g se llega a $f^*E \equiv g^*E$ ■

El resultado anterior se generaliza enunciando:

Teorema 2.2. Equivalencia homotópica. *Sea X un espacio paracompacto y (E, P, Y) un fibrado. Si $f,\ g : X \to Y$ son continuas y homotópicas entonces $f^*E \equiv g^*E$.*

Prueba. Vea [O, Proposición 4.3]. ■

En conclución, este teorema precisa que los cambios continuos en una aplicación f, expresados por medio de una homotopía de f, no alteran las propiedades topológicas de los pullback por ellas construidos.

Observación. Aunque parezca redundante mencionarlo, queremos hacer notar que los fibrados vectoriales sobre un punto son triviales.

En adelante para no cargar las hipótesis supondremos que estamos trabajando sobre espacios base paracompactos.

Proposición 2.1. *Los fibrados sobre espacios contráctiles son triviales.*

Prueba. Si X es un espacio contráctil entonces es homotópicamente equivalente a un punto, es decir existen aplicaciones

$$\phi : X \to \{p\}$$

y

$$\varphi : \{p\} \to X$$

con $\varphi \circ \phi$ homotópica a Id. Sea E un fibrado sobre X. Por la observación anterior tenemos que $\varphi^* E$ es trivial, y por tanto $\phi^* \varphi^* E$ también lo es. Pero $(\varphi \circ \phi)^* E \equiv Id^* E \equiv E$ y además $\phi^* \varphi^* E \equiv (\varphi \circ \phi)^* E$; es decir E es trivial. ■

El siguiente resultado generalizará la proposición anterior. Éste nos indicara que bajo una equivalencia homotópica entre dos espacios topológicos, los fibrados están en relación uno a uno.

Teorema 2.3. *Si X es homotópicamente equivalente a Y entonces existe una biyección entre los conjuntos $V^n(X)$ y $V^n(Y)$*

Prueba. Para una equivalencia homotópica

$$f : Y \to X$$

definimos

$$f^* : V^n(X) \longmapsto V^n(Y)$$

por $f^*([E]) = [f^* E]$. La buena definición se sigue de la Proposición 1.3. Como f es una equivalencia homotópica, existe una inversa homotópica

$$h : X \to Y$$

que permite definir

$$h^* : V^n(Y) \longmapsto V^n(X).$$

Así mismo de la relación de homotopía $h \circ f \simeq Id$ podemos ver que $f^* \circ h^*([E]) = [f^* h^* E] = [(h \circ f)^* E] = [E]$. De manera similar se cumple $h^* \circ f^*([E]) = [E]$. ■

2.2. La Clasificación de los Fibrados sobre una Suspensión

Abocados a nuestro objetivo (clasificar los fibrados sobre una suspensión) daremos algunos resultados que nos permitirán conocer en que momento podemos tener fibrados isomorfos en una suspención SX bajo la información que guarden los fibrados sobre $C_{-}X$ y $C_{-}X$. As í, podemos indicar que

Lema 2.6. *π^*E es isomorfo a $E \times [0,1]$*

Prueba. Es suficiente definir la aplicación $f : \pi^*E \to E \times [0,1]$ como $f(x,t,e) = (e,t)$. ■

Lema 2.7. *Si E es un fibrado sobre $X \times [0,1]$ entonces $E \equiv E' \times [0,1]$ para algún fibrado E' sobre X*

Prueba. Sea $\pi : X \times [0,1] \to X$ la proyección e $i_0 : X \to X \times [0,1]$ la inclusión natural. Como $i_0 \circ \pi \simeq Id_{X\times[0,1]}$, se llega a $(i_0 \circ \pi)^*(E) \equiv E$ y $\pi^*(i_0^*E) \equiv E$. Por tanto si tomamos $E' = (i_0^*E)$ tendremos $\pi^*(E') \equiv E$. Lo cual en virtud del Lema 2.6, culmina la demostración. ■

Definición 2.1. Sean dos fibrados E_1 y E_2 sobre X_1 y X_2, respectivamente y

$$f_1, f_2 : (E_1)_{X_1\cap X_2} \to (E_2)_{X_1\cap X_2}$$

dos isomorfismos de fibrados sobre $X_1 \cap X_2$. Decimos que f_1 y f_2 son homotópicas si y sólo si existe un isomorfismo de fibrados

$$H : \pi^* E_{1(X_1\cap X_2)\times[0,1]} \longmapsto \pi^* E_{2(X_1\cap X_2)\times[0,1]}$$

que restringido a $(X_1 \cap X_2) \times \{0\}$ y a $(X_1 \cap X_2) \times \{1\}$ nos devuelve las aplicaciones f_1 y f_2

Observación. Interpretando la definición con ayuda del Lema 2.7 tenemos

$$H : (E \times [0,1])_{(X_1\cap X_2)\times[0,1]} \to (E_1 \times [0,1])_{(X_1\cap X_2)\times[0,1]}.$$

De aquí sí podemos ver claramente que H es una homotopía entre f_1 y f_2 en el sentido ya conocido. Es decir, a partir de H podemos definir aplicaciones

$$H_t : (E \times [0,1])_{(X_1 \cap X_2)\times t} \to (E_1 \times [0,1])_{(X_1 \cap X_2)\times t}$$

las cuales inducen

$$H_t : (E)_{X_1 \cap X_2} \to (E_1)_{(X_1 \cap X_2)}$$

donde $H_0 = f_1$, $H_1 = f_2$ y $(E \times [0,1])_{(X_1 \cap X_2)\times t} \equiv (E)_{X_1 \cap X_2} \times t$.

Lema 2.8. *Dos isomorfismos homotópicos*

$$f_0, f_1 : (E_1)_{X_1 \cap X_2} \to (E_2)_{X_1 \cap X_2}$$

satisfacen

$$E_1 \cup_{f_0} E_2 \equiv E_1 \cup_{f_1} E_2.$$

Prueba. De acuerdo al Lema 2.6, $\pi^* E_i$ resulta ser isomorfo a $E_i \times [0,1]$. Ello nos proporciona para todo $t \in [0,1]$ un isomorfismo

$$H_t : (E_1)_{X_1 \cap X_2} \longmapsto (E_2)_{X_1 \cap X_2}.$$

Tomando la aplicación i_t definida de X en $X \times [0,1]$ como $i_t(x) = (x,t)$, afirmamos que se cumple

$$i_t^*(\pi^* E_1 \cup_H \pi^* E_2) \equiv E_1 \cup_{H_t} E_2,$$

pues la aplicación continua $(x,[e,x,t]) \to [e]$ es un isomorfismo en cada fibra. Siendo entonces i_0 e i_1 homotópicas, se cumple

$$E_1 \cup_{H_0} E_2 \equiv E_1 \cup_{H_1} E_2$$

y se puede concluir $E_1 \cup_{f_0} E_2 \equiv E_1 \cup_{f_1} E_2$ ■

Con todos los preliminares desarrollados pasaremos a presentar el resultado principal de la sección. Tomaremos un espacio X y analizaremos su suspensión, denotada por SX. El primer paso será dividirla en dos subconjuntos C_+X y C_-X contráctiles ellos, llamados conos (ver [B, Apéndice A1].)

Sean E y E_1 fibrados sobre C_+X y C_-X. Como estos espacios base son contráctiles, los fibrados tomados son triviales y por tanto, al restringirlos sobre $C_+X \cap C_-X = X$ ambos tendrán la forma $X \times \mathbb{R}^n$. Podemos entonces definir una infinidad de isomorfismos, entre los fibrados $(E)_X$ y $(E_1)_X$, cada uno correspondiente a una aplicación continua $g : X \to GL(n, \mathbb{R})$. En efecto el isomorfismo está dado como $(Id, g) : X \times \mathbb{R}^n \to X \times \mathbb{R}^n$, donde $(Id, g)(x, v) = (x, g(x)v)$. Con él podemos formar un fibrado adherido sobre SX. Un caso particularmente importante son el de las esferas $\mathbb{S}^n$ para $n \geq 0$ debido a que $S\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^{n+1}$.

Como hemos visto, basta tener una aplicación continua $g : X \to GL(n, \mathbb{R})$ para formar un fibrado sobre SX. Así, si tomamos un fibrado E sobre SX y lo restringimos a los espacios C_+X y C_-X tendremos dos fibrados triviales. Si tomamos sus respectivas trivializaciones locales $\phi : (SX)_{C_-} \to C_- \times \mathbb{R}^n$ y $\varphi : (SX)_{C_+} \to C_+ \times \mathbb{R}^n$ tenemos $\phi \circ \varphi^{-1} = (Id, g)$ con $g : X \to GL(n, \mathbb{R})$ una función continua. Argumentos simples nos llevan a concluir que el fibrado $C_-X \times \mathbb{R}^n \cup_{(Id,g)} C_+X \times \mathbb{R}^n$ es isomorfo al fibrado original E. Desligándose de ello, que el conjunto de las aplicaciones continuas $g : X \to GL(n, \mathbb{R})$ clasifican eficientemente a los fibrados sobre la suspensión.

Por otro lado, si tenemos una homotopía entre las aplicaciones (Id, g) y (Id, g_1) los fibrados adheridos generados son isomorfos. Entonces, si tomamos una relación de homotopía entre las aplicaciones g bajo la condición que $g(x_0) = I_{n \times n}$, para algún $x_0 \in X$ arbitrario pero fijo; tendremos que el conjunto de dichas clases de homotopía, al cual denotaremos por $[X; GL(n, \mathbb{R})]_0$, identifican a los fibrados –isomorfos– sobre una suspensión.

Pero cabe la posibilidad de que esta identificación –entre $[X; GL(n,\mathbb{R})]_0$ y $V^n(X)$– no sea uno a uno. Es decir que tengamos elementos en distintas clase de homotopía que den origen a fibrados isomorfos. En efecto veremos que en realidad necesitamos una relación más fina entre las clases de aplicaciones homotópicas.

Unos resultados que nos ayudarán en la presentación del teorema que formaliza el comentario anterior son los que vienen a continuación.

Proposición 2.2. *Si E es un fibrado sobre el espacio SX entonces*

$$E \equiv C_+X \times \mathbb{R}^n \cup_f C_-X \times \mathbb{R}^n$$

donde $f = \phi \circ (\varphi)^{-1}$, con $\phi : E_{C_-} \to C_- \times \mathbb{R}^n$ y $\varphi : E_{C_+} \to C_+ \times \mathbb{R}^n$ las trivializaciones.

Prueba. Para la demostración es necesario recurrir al Corolario 1.1 de la Sección 1 : en este caso tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(E)_X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & (E)_X \arrow[d, "\phi"'] \\
X \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "{(I,g)}"] & X \times \mathbb{R}^n,
\end{tikzcd}$$

con

$$\varphi : (E)_X \to X \times \mathbb{R}^n = (C_+X \times \mathbb{R}^n)_X$$

y

$$\phi : (E)_X \to X \times \mathbb{R}^n = (C_-X \times \mathbb{R}^n)_X$$

las trivializaciones locales. Garantizando así, por el corolario, que

$$E \equiv C_+X \times \mathbb{R}^n \cup_f C_-X \times \mathbb{R}^n$$

■

Observación. Notemos que al tener en el fibrado E como única transformación de coordenadas a g y al ser los espacios C_-X y C_+X contráctiles, la construcción hecha en el fibrado adherido es la misma que la realizada en la sección de funciones de coordenadas.

Lema 2.9. *Sean* $g, g_1 : X \to GL(n, \mathbb{R})$ *con* $g_1(x) = a^{-1} \cdot g(x) \cdot a$ *continuas; y* $a \in GL(n, \mathbb{R})$. *Si* $f(x, v) = (x, g(x)v)$ *y* $f_a(x, v) = (x, g_1(x)v)$ *entonces*

$$C_-X \times \mathbb{R}^n \cup_f C_+X \times \mathbb{R}^n \equiv C_-X \times \mathbb{R}^n \cup_{f_a} C_+X \times \mathbb{R}^n$$

Prueba. Vea [B, Lema 2.9] ■

Este lema nos indica que la relación comentada anteriormente entre el conjunto $V^n(SX)$ y $[X, GL(n, \mathbb{R})]_0$ no es uno a uno debido a que las clase $[g]$ y $[a \cdot g \cdot a^{-1}]$, con $a \in GL(n, \mathbb{R})$ fuera de la componente conexa de la identidad, inducen fibrados isomorfos. Es por ello que necesitamos una relación de equivalencia que identifique estos elementos en $[X, GL(n, \mathbb{R})]_0$. Notemos que el mismo lema nos proporciona la relación que deben guardar los elementos de $[X, GL(n, \mathbb{R})]_0$, para que ahora si podamos obtener una relación biyectiva.

Lema 2.10. *Si* $E \equiv E'$ *son fibrados sobre* SX*, entonces podemos obtener aplicaciones*

$$g, g' : X \longmapsto GL(n, \mathbb{R})$$

de E *y* E' *respectivamente, que son iguales.*

Prueba. Tomemos dos trivializaciones locales de E

$$f^+ : E_{C_+} \to C_+ \times \mathbb{R}^n \ , \quad f^- : E_{C_-} \to C_- \times \mathbb{R}^n$$

y de ellas construyamos trivializaciones locales para E' de la siguiente manera $f_1^- = f^- \circ F$ y $f_2^+ = f^+ \circ F$ –con F el isomorfismo entre E y E'–, de donde podemos ver que la aplicación g, obtenida de las trivializaciones de E, es igual a g' obtenida a partir de las trivializaciones f_1^- y f_2^+ ■

Seguidamente presentaremos el teorema de clasificación de fibrados sobre una suspensión. A grandes rasgos este resultado nos dirá que los fibrados sobre una suspensión SX, los podemos clasificar por la información que nos proporciona $g : X \to GL(n, \mathbb{R})$, su única transformación de coordenadas. Es decir, basta saber la manera cómo los fibrados triviales están unidos para identificar un fibrado sobre una suspención.

Teorema 2.4. *Sea X un espacio de Hausdorff compacto y $x_0 \in X$ entonces existe una biyección entre*

$$V^n(SX) \text{ y } [X, GL(n, \mathbb{R})]_0 / \sim .$$

Donde $[X, GL(n, \mathbb{R}]_0 = \{[g] \text{ tal que } g(x_0) = e\}$ y la relación $\sim$ es la que identifica a los elementos g y $a \cdot g \cdot a^{-1}$, para $a \in GL(n, \mathbb{R})$ y $det(a) < 0$.

Prueba. La demostración consistirá en la construcción de dos funciones, inversas una a la otra, entre los conjuntos $V^n(SX)$ y $[X, GL(n, \mathbb{R})]_0/_\sim$.

Sea $[g]$ una clase en el conjunto $[X, GL(n, \mathbb{R})]_0/_\sim$. Si tomamos un representante $g : X \to GL(n, \mathbb{R}^n)$ de la clase de homotopía y E_1, E_2 dos fibrados sobre el espacio C_+X y C_-X de la forma $C_+ \times \mathbb{R}^n$ y $C_- \times \mathbb{R}^n$ podemos definir una aplicación

$$f : (E_1)_X \to (E_2)_X$$

como $f(x, v) = (x, g(x)v)$ y con ella el fibrado $E = C_- \times \mathbb{R}^n \cup_f C_+ \times \mathbb{R}^n$. Si tomamos una aplicación g' homotópica a g, el Lema 2.8 nos dice que $E \equiv C_- \times \mathbb{R}^n \cup_{f'} C_+ \times \mathbb{R}^n$, con $f' = (id, g')$, observando de ello que a partir de funciones g, g' homotópicas obtenemos fibrados isomorfos. En conclusión, a cada clase en $[X, GL(n, \mathbb{R})]_0$ le podemos asignar un único elemento de $V^n(X)$.

Por otro lado, si tomamos dos elementos equivalentes en la relación $\sim$, digamos g y $a \cdot g \cdot a^{-1}$ y con ellas funciones f y f_a como las definidas anteriormente (Lema 2.8), induciremos fibrados isomorfos. De esta forma podemos definir una aplicación de $[X, GL(n, \mathbb{R})]_0/_\sim$ a $V^n(SX)$ como

$$[g] \longmapsto [E].$$

Continuando con la demostración, debemos definir una aplicación de $V^n(X)$ al conjunto $[X, GL(n,\mathbb{R})]_0/\sim$, y para ello tomaremos un representante E de la clase $[E]$, fibrado sobre SX. Escojamos dos trivializaciones

$$f^+ : E_{C_+X} \to C_+X \times \mathbb{R}^n$$

y

$$f^- : E_{C_-X} \to C_-X \times \mathbb{R}^n,$$

las cuales, sin perdida de generalidad (Vea [B, Teorema 2.3]) podemos asumir que cumplen

$$f^+|_{P^{-1}(x_0,1/2)} = f^-|_{P^{-1}(x_0,1/2)}, \tag{1}$$

para algún punto x_0 en X arbitrario y fijo. Si nos restringimos al espacio $(E)_X$ aparecen aplicaciones

$$f_0^+ : (E)_X \longmapsto X \times \mathbb{R}^n,$$

$$f_0^- : (E)_X \longmapsto X \times \mathbb{R}^n$$

y

$$f_0^+ \circ (f_0^-)^{-1} : X \times \mathbb{R}^n \longmapsto X \times \mathbb{R}^n$$

donde $f_0^+ \circ (f_0^-)^{-1}(x, v) = (x, g(x)v)$ y, que debido a la condición (1) $g(x_0)$=I. En resumen, al tomar un representante E, hemos conseguido, a partir de ciertas trivializaciones locales, una aplicación

$$g : X \longmapsto GL(X, \mathbb{R})$$

y al tomar su clase $[g]$, un elemento en $[X, GL(n,\mathbb{R})]_0/\sim$. La Clase $[g]$ no depende del representante tomado en $[E]$ (Vea [B, Teorema 2.3]). Con esto garantizamos la existencia de una aplicación

$$[E] \longmapsto [g]$$

de $V^n(X)$ a $[X, GL(n,\mathbb{R}^n)]_0/\sim$, y la inversa de $[g] \longmapsto [E]$ (vea [B, Teorema 2.3].) ■

3. La Función de Gauss

3.1. Motivación y Definición

Tener una aplicación continua $g : E \to \mathbb{R}^m$, la cual es un monomorfismo lineal en cada en fibra, nos permite definir una aplicación $f : X \to \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^m)$, tomando $f(x) = g(P^{-1}(x))$, esto es, la imagen en $\mathbb{R}^m$ de la fibra sobre x. Ésta a su vez induce un morfismo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P"'] & \gamma_k^n \arrow[d, "P_1"'] \\ X \arrow[r, "f"'] & \mathbb{G}(\mathbb{R}^{n+k}), \end{tikzcd}$$

–(F, f)– de E a γ_k^n, el cual, restringido a cada fibra es un isomorfismo, donde $F(e) = (f \circ P(e), g(e))$. En consecuencia el fibrado E sobre X quedaría totalmente caracterizado por la aplicación f debido a la relación $f^*\gamma_k^n \equiv E$. A la función $g : E \to \mathbb{R}^m$ le llamaremos aplicación de Gauss. Ella generaliza de alguna manera la aplicación Gauss definida en geometría diferencial clásica; la cual asigna a cada punto p de una hipersuperficie $M^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ su vector normal, es decir que se puede suponer que la aplicación de Gauss le asigna a cada hipersuperficie su espacio tangente. En nuestro caso, la aplicación Gauss nos permite asignar a cada punto de X un elemento en $\mathbb{G}_n$ o $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$, es decir un espacio n dimensional.

Definición 3.1. Una aplicación de **Gauss** de un fibrado vectorial (E, P, X) es una función continua

$$g : E \longmapsto \mathbb{R}^m$$

donde $0 \leq m \leq \infty$, la cual es un monomorfismo de espacios vectoriales en cada fibra. Pensando a $\mathbb{R}^m$ como un fibrado sobre $\{0\}$ tenemos que g es un morfismo de fibrados entre E y $\mathbb{R}^m$.

Proposición 3.1. *Sea (F, f) un morfismo entre (E, X, P) y γ_k^n tal que F es un isomorfismo en cada fibra. Entonces $\pi_2 \circ F : E \to \mathbb{R}^{n+k}$ es una aplicación de Gauss –con $\pi_2 : \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k}) \times \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$–. De igual modo si $g : E \to \mathbb{R}^{n+k}$ es una aplicación de Gauss entonces existe un morfismo (F, f) del fibrado (E, X, P) al fibrado $\gamma_k^n = (\mathbb{G}(\mathbb{R}^{n+k}), E(\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})), \mathbf{q})$, tal que F es un isomorfismo en cada fibra.*

Prueba. Siendo π_2 y F (por hipótesis) monomorfismos de espacios vectoriales en cada fibra. $\pi \circ F$ es una aplicación Gauss.

De igual modo si $g : E \to \mathbb{R}^{n+k}$ es una aplicación de Gauss será suficiente tomar la función $f : X \to \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ definida por $f(x) = g(P^{-1}(x))$ (la prueba de su continuidad es similar a las realizadas en la primera sección) y como g es una función de Gauss, $f(x)$ es un plano n-dimensional de $\mathbb{R}^{n+k}$, es decir un elemento en $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$. Así (F, f) con $F(e) = (f(P(e)), g(e))$ establece el morfismo de fibrados requerido entre E y γ_k^n. ■

En el siguiente corolario se muestra la urgencia de contar con una aplicación de Gauss para que así un fibrado E pueda ser caracterizado por una aplicación $f : X \to \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ en el sentido $E \equiv f^*\gamma_k^n$.

Corolario 3.1. *Sea E un fibrado sobre el espacio X. Entonces E es isomorfo a $f^*(E(\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k}))$ para algún $f : X \to \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ si y sólo si existe una aplicación de Gauss $g : E \to \mathbb{R}^{n+k}$.*

Prueba. Vea [B, Corolario 3.1]. ■

Basados en esta última afirmación podemos indicar que obtener un fibrado E sobre un espacio X equivale a contar con una aplicación Gauss $g : E \to \mathbb{R}^{n+k}$ y esto, a su vez, a tener una aplicación f con las características del corolario.

En adelante abordaremos el estudio de la aplicación Gauss desde diferentes puntos de vista. Estos irán paulatinamente desde cuando el espacio base es compacto, paracompacto, abordando también las homotopías de las aplicaciones Gauss las cuales inducirán fibrados isomorfos.

3.2. La Aplicación de Gauss en Espacios Compactos de Hausdorff

El principal objetivo será construir una aplicacíon de Gauss para cada fibrado sobre un espacio compacto. El procedimiento hace uso de técnicas propias de topología, para que a partir de aplicaciones Gauss locales obtengamos una aplicación Gauss definida en todo el fibrado.

Como consecuencia podremos presentar una primera clasificación de los fibrados vectoriales sobre un espacio compacto.

Teorema 3.1. *Para cualquier fibrado $n-$dimensional E sobre un espacio compacto de Hausdorff X existe una función de Gauss .*

Prueba. (Vea [B, Teorema 3.1]). ■

Con lo desarrollado hasta el momento podemos enunciar un resultado preliminar importante que nos permitirá identificar a los fibrados vectoriales con apenas un fibrado vectorial, y una aplicación continua entre sus respectivas bases.

Corolario 3.2. *Si E es un fibrado sobre un espacio base compacto de Hausdorff X, entonces E es isomorfo al pullback del fibrado γ_n^k para alguna aplicación continua $f : X \to \mathbb{G}(\mathbb{R}^{n+k})$ y k suficientemente grande.*

Prueba. Supóngase que se tenga un fibrado E sobre un espacio base X compacto de Hausdorff. Por el teorema anterior tenemos que existe una aplicación de Gauss, la cual permite construir (F, f), un morfismo de fibrados entre el espacio E y γ_n^k isomorfo en cada fibra. De esta forma el pullback $f^*\gamma_k^n$ es isomorfo al espacio E ya sobre el espacio X. ■

Este resultado aunado al Teorema 2.2 nos permite establecer una relación entre los fibrados sobre un espacio X y las clases de homotopía de $f : X \to \mathbb{G}(\mathbb{R}^{n+k})$, las cuales denotaremos por $[X, \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})]$ para k natural. Convertir esta relación en biunívoca nos lleva a presentar los siguientes resultados.

La inclución natural $j : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k+1}$ induce

$$J : \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k}) \to \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k+1}).$$

Proposición 3.2. *Los fibrados γ_k^n y $J^*\gamma_{k+1}^n$ son isomorfos.*

Prueba. En efecto, es suficiente ver que la aplicación j es un monomorfismo, pues ello implica que (J, j) es un isomorfismo en cada fibra y por tanto $J^*\gamma_{k+1}^n \simeq \gamma_k^n$. ■

Proposición 3.3. *$f^*\gamma_k^n$ y $(J \circ f)^*\gamma_{k+1}^n$ son fibrados isomorfos*

Prueba. Sabemos que $J^*\gamma_{k+1}^n$ es isomorfo a γ_k^n. Sea G el isomorfismo entre ambos. La aplicación $F(x, e) = ((x, G(e))$ definida entre $f^*\gamma_k^n$ y $(J \circ f)^*\gamma_{k+1}^n$ es un isomorfismo de fibrados. ■

Esta última conclusión nos indica la manera de cómo debe estar relacionada las clases $[f]$ y $[g]$ en los conjuntos $[X, \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})]$. Definamos una relación entre estas clases : $f \sim g$ donde $f : X \to \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ y $g : X \to \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k_1})$ si y sólo si existe una aplicación inclusión $J : \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k}) \to \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k_1})$ (suponiendo $k_1 \geq k$) tal que $(J \circ f)^*\gamma_{k_1} \equiv g^*\gamma_{k_1}$.

Si definimos

$$\underrightarrow{\text{lím}}_k [X, \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})] = \bigcup_k d[f : X \to \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})]/\sim \tag{2}$$

obtenemos :

Teorema. (Clasificación de Fibrados sobre Espacios Compactos de Hausdorff.) *Sea X un espacio compacto de Hausdorff. Entonces existe una biyección de conjuntos entre $V^n(X)$ y $\underrightarrow{lim}_k[X, \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})]$.*

Prueba. Sea $[E]$ una clase en $V^n(X)$. Si tomamos a E como un representante de esta clase entonces, por el Teorema 3.1, existe una aplicación de Gauss

$$g : E \longmapsto \mathbb{R}^{n+k},$$

con la cual es posible formar un único morfismo de fibrados (F, f), tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P"'] & E(\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})) \arrow[d, "P_1"'] \\ X \arrow[r, "f"] & \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k}) \end{tikzcd}$$

conmuta. Si tomamos otro representante de la clase $[E]$, como por ejemplo E', tendremos otro morfismo de fibrados

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "F'"] \arrow[d, "P"'] & E(\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k_1})) \arrow[d, "P_1"'] \\ X \arrow[r, "f'"] & \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k_1}) \end{tikzcd}$$

con otra aplicación f'. Si G establece el isomorfismo entre E y E', el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "G"] \arrow[d, "P"] & E' \arrow[dl, "P'"] \\ X & \end{tikzcd}$$

conmuta, y podemos establecer el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "G"] \arrow[dr, "P"'] & E' \arrow[r, "F'"] \arrow[d, "P"'] & E(\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k_1})) \arrow[r, "(J{,}j)"] \arrow[d, "P_1"'] & E(\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})) \arrow[d, "P"] \\ & X \arrow[r, "f'"] & \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k_1}) \arrow[r, "J"] & \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k}). \end{tikzcd}$$

Claro esta, debido a que $(J, j) \circ F'$ es un isomorfismo en cada fibra, que $(J \circ f')^* \gamma_k^n \equiv E'$, aun más, debido a que $E' \equiv E \equiv f^* \gamma_k^n$, $(J \circ f')^* \gamma_k^n \equiv f^* \gamma_k^n$ podemos establecer una aplicación

$$\Omega : V^n(X) \longmapsto \varinjlim_k [X, \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})].$$

Asignando a cada elemento $[E]$ la clase $[f]$ sujeta a la condición $f^* \gamma_k^n \equiv E$.

Ahora definamos una aplicación en sentido contrario, es decir

$$\Upsilon : \varinjlim_k [X, \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})] \to V^n(X).$$

Para esto tomemos una clase $[f] \in \varinjlim_k [X, \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})]$ (vea igualdad (2)) de la cual elijamos un representante $f : X \to \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$. El pullback $f^* \gamma_k^n$ nos proporciona un fibrado sobre el espacio X, y $[f^* \gamma_k^n]$ su clase de equivalencia, la imagen buscada.

Veamos ahora la buena definición de esta aplicación. Si tomamos una función f' homotópica a f tenemos que la buena definición se sigue del teorema de invarianza homotópica. Si tomamos una aplicación $f : X \to \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ y otra $f' : X \to \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k_1})$ $(f \sim f')$, donde $k_1 \geq k$, debe cumplirse $(J \circ f)^* \gamma_{k_1}^n \equiv {f'}^* \gamma_{k_1}^n$ y con ello ${f'}^* \gamma_{k_1}^n \equiv f^* \gamma_k^n$ por la Proposición 3.3, lo que proporciona la buena definición de Υ.

Finalmente debemos probar que una es inversa de la otra.

En efecto, sea $[E]$ una clase en $V^n(X)$, al evaluar la función Ω en $[E]$ obtenemos la clase $[f]$, bajo la condición $f^* \gamma_k^n \equiv E$. Por tanto, debido a las condiciones en las cuales se definió la función Υ, podemos establecer que $\Upsilon \circ \Omega([E]) = [E]$.

De igual modo al evaluar Υ en una clase $[f]$, obtenemos $\Upsilon([f]) = [f^* \gamma_k^n]$ y de aquí $\Omega([f^* \gamma_k^n]) = [f]$, pues para cualquier función f' para la cual se tenga la relación $f'^* \gamma_{k_1}^n \equiv f^* \gamma_k^n$ se obtiene $[f] = [f']$. ■

Como hemos podido observar, en espacios compactos siempre existen cubrimientos finitos y es debido a esto que la aplicación de Gauss va a un espacio $\mathbb{R}^{n+k}$.

El siguiente paso es ver que sucede cuando ya no es viable un cubrimiento finito.

3.3. La Aplicación de Gauss en Espacios Paracompactos

En este caso el procedimiento para construir una aplicacíon Gauss sufre algunos cambios. El primero de ellos se lee en la siguiente proposición.

Proposición 3.4. *Si E es un fibrado sobre un espacio paracompacto X, entonces existe un cubrimiento $(O_i)_{i\in\Lambda}$ de X donde el conjunto de índices Λ es enumerable, y $(E)_{O_i}$ es trivial.*

Prueba. Véase [B, Proposición 3.4]. ■

Al igual que en el caso compacto podemos definir

$$h_i(e) = \begin{cases} \lambda_i(P(e)) \cdot g_i(e) & \text{si } P(e) \in O_i \\ 0 & \text{si } P(e) \in X - O_i. \end{cases}$$

Donde $\lambda_i : O_i \longmapsto \mathbb{R}$ es tal que

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in W_i \\ 0 & \text{si } x \in O_i - U_i, \end{cases}$$

siendo los (W_i), (O_i) cubrimientos del espacio base con $\overline{W_i} \subset U_i$ y $\overline{U_i} \subset O_i$.

Proposición 3.5. *Si E es un fibrado sobre un espacio X paracompacto. Existe una aplicación de Gauss $g : E \to \mathbb{R}^\infty$.*

Prueba. Definamos la aplicación Gauss

$$g : E \longmapsto \mathbb{R}^{\infty}$$

como $g(e) = (h_1(e), h_2(e), \ldots, h_n(e), \ldots)$, donde los h_i son los construidos anteriormente). ■

Una Vez obtenida la aplicación de Gauss definida sobre un fibrado E podemos presentar un resultado útil a futuro.

Proposición 3.6. *Todo fibrado sobre un espacio X paracompacto es isomorfo al pullback $f^*\gamma^n$ para alguna aplicación continua $f : X \to \mathbb{G}_n$.*

Prueba. Vea [B, Proposición 3.6]. ■

3.4. Homotopía de las Aplicaciones de Gauss

En esta parte veremos que dos aplicaciones de Gauss definidas en un mismo fibrado son homotópicas. Esto nos hace pensar las funciones f nacidas de ellas guardan la misma relación. Tal resultado se verá en siguiente capítulo

Proposición 3.7. *Las aplicaciones de Gauss y los morfismos de fibrado sobre un espacio paracompacto al fibrado universal –que restringidos a cada fibra son un isomorfismos de espacios vectoriales–, están en relación uno a uno.*

Prueba. La demostración es similar a la Proposición 3.1. Para ver la inyectividad es suficiente ver que la aplicación de Gauss obtenida del morfismo de fibrados –tomando $\pi_2 \circ F$, con $\pi_2 : \mathbb{G}_n \times \mathbb{R}^{\infty}$– es la misma que le dio origen. ■

La relación que indica la proposición anterior será mantenida bajo homotopía. Adelantando resultados podemos indicar que aplicaciones Gauss homotópicas darán origen a funciones $f : X \to \mathbb{G}_n$ homotópicas. Encaminándonos hacia este resultado tomemos una función de Gauss

$$g : E \longmapsto \mathbb{R}^\infty$$

donde $g(e) = (g_1(e), \cdots, g_n(e), \cdots)$ y definamos

$$g' : E \longmapsto \mathbb{R}^\infty$$

como $g'(e) = (g_1(e), 0, g_2(e), \cdots, 0, g_n(e), 0, \cdots)$, también aplicación de Gauss. Seguidamente veremos que estas aplicaciones son homotópicas. Tal resultado será presentado a continuación como una proposición.

Proposición 3.8. *Las aplicaciones de Gauss g y g' definidas anteriormente son homotópicas.*

Prueba. La aplicación $\widetilde{g} : E \times [0,1] \longmapsto \mathbb{R}^\infty$ con $(e,t) \mapsto (1-t) \cdot g(e) + t \cdot g'(e)$ define la homotopía buscada. $\blacksquare$

Corolario 3.3. *Dos aplicaciones de Gauss g y h, definidas en un fibrado E, son homotópicas.*

Prueba. Vea [B, Corolario 3.3].

4. La Clasificación de los Fibrados Vectoriales

En esta seción presentaremos la clasificación de fibrados sobre un espacio paracompacto y daremos ejemplos de los principales teoremas de clasificación desarrollados, viendo con esto que en algunos casos no sólo podemos clasificar a los fibrados sobre un espacio sino que podemos mostrarlos explícitamente.

También daremos algunas consecuencias del análisis entre los fibrados sobre un espacio paracompacto y el fibrado universal que hemos venido desarrollando. Siendo una de éstas la existencia de una métrica en los fibrados. La prueba pudo haberse dado en la primera sección, pero esto hubiese implicado una demostración engorrosa y recargada. En nuestra segunda sección este afirmación resultará sencilla.

4.1. El Teorema de Clasificación de Fibrados

Ahora ahondaremos en el siguiente detalle : desde un principio todas las aplicaciones $f_0 : X \to \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ y $f_1 : X \to \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k_1})$ que cumplían con la condición $f_0^*\gamma_k^n \equiv f_1^*\gamma_{k_1}^n$ resultarán homotópicas. Para esto bastará recordar que el espacio $\mathbb{G}(\mathbb{R}^{n+k}) \subset \mathbb{G}_n$ –para todo k–, la aplicación inclución $J : \mathbb{G}(\mathbb{R}^{n+k}) \to \mathbb{G}_n$ es un isomorfismo en cada fibra, y con ello tomar las funciones f_0, f_1 definida como de X al espacio $\mathbb{G}_n$, pues $\mathbb{G}(\mathbb{R}^{n+k}) \subset \mathbb{G}_n$.

Así pues eliminando la relación $\sim$ en 3.2, mediante la introducción del espacio $\mathbb{G}_n$, obtendremos el teorema de clasificación de los fibrados vectoriales sobre espacios paracompactos. Empecemos dando las bases donde se sustentará este resultado.

Teorema 4.1. *Sean dos aplicaciones*

$$f_0, f_1 : X \longmapsto \mathbb{G}_n$$

tales que $f_0^*\gamma^n \equiv f_1^*\gamma^n$. Entonces las aplicaciones f_0 y f_1 son homotópicas.

Prueba. De la definición de los fibrados $f_0^*\gamma^n$ y $f_1^*\gamma^n$ obtenemos morfismos (F_0, f_0) y (F_1, f_1) tal que los diagramas

$$\begin{tikzcd} f_0^*\gamma^n \arrow[r, "F_0"] \arrow[d, "P"'] & \gamma^n \arrow[d, "P_2"] \\ X \arrow[r, "f_0"] & \mathbb{G}_n, \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} f_1^*\gamma^n \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "P_1"'] & \gamma^n \arrow[d, "P_2"] \\ X \arrow[r, "f_1"] & \mathbb{G}_n, \end{tikzcd}$$

conmutan. Siendo los fibrados $f_0^*\gamma^n$, $f_1^*\gamma^n$ isomorfos –pertenecen a la misma clase y en escencia son lo mismo–; podemos asumir en los diagramas que los fibrados obtenidos por el pullback son los mismos. Con esta simplificación obtenemos los diagramas

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "F_0"] \arrow[d, "P"'] & \gamma^n \arrow[d, "P_2"] \\ X \arrow[r, "f_0"] & \mathbb{G}_n \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "P"'] & \gamma^n \arrow[d, "P_2"] \\ X \arrow[r, "f_1"] & \mathbb{G}_n, \end{tikzcd}$$

de los cuales podemos construir las aplicaciones de Gauss

$$g_0, g_1 : E \longmapsto \mathbb{R}^\infty$$

las cuales son conectadas a través de una homotopía

$$g : E \times [0,1] \longmapsto \mathbb{R}^{\infty}$$

–también función de Gauss– con $g|_{E\times 0} = g_0$ y $g|_{E\times 1} = g_1$. A tal aplicación de Gauss le corresponde un morfismo (F, f) entre el fibrado $E \times [0,1]$ y el fibrado universal, es decir tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} E \times [0,1] \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P"'] & \gamma^n \arrow[d, "P_2"'] \\ X \times [0,1] \arrow[r, "f"] & \mathbb{G}_n \end{tikzcd}$$

Si restringimos F al espacio $E \times \{0\}$ aparece la aplicación de Gauss $g = g_0$ la cual a su vez, genera f_0. De igual modo al trabajar en $E \times \{1\}$, g genera g_1 que a su vez origina f_1. De otro lado de las restricciones de la aplicación g a $E \times \{0\}$ y $E \times \{1\}$ obtenemos los diagramas

$$\begin{tikzcd} E \times \{0\} \arrow[r, "F|_{E\times\{0\}}"] \arrow[d, "P"'] & \gamma^n \arrow[d, "P_2"'] \\ X \times \{0\} \arrow[r, "f|_{X\times\{0\}}"] & \mathbb{G}_n, \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} E \times \{1\} \arrow[r, "F|_{E\times\{1\}}"] \arrow[d, "P"'] & \gamma^n \arrow[d, "P_2"'] \\ X \times \{1\} \arrow[r, "f|_{X\times\{1\}}"] & \mathbb{G}_n. \end{tikzcd}$$

Pero cada aplicación de Gauss da origen a sólo una función $f_i : X \to \mathbb{G}_n$, y como la aplicación g restringida a $E \times \{0\}$ y $E \times \{1\}$ es igual a g_0 y a g_1, respectivamente y éstas a su vez generan a f_0 y a f_1, la aplicación $f|_{X\times\{0\}}$ es igual a f_0 y de igual modo la aplicación $f|_{X\times\{1\}}$ coincide con f_1. En consecuencia f es una homotopía entre f_0 y f_1. ■

Con este resultado, tomando a $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k}) \subset \mathbb{G}_n$, obtenemos que la relación $\sim$, que se definió en la clasificación de fibrados en la Sección 3, no es necesaria. Las aplicaciones $f_0 : X \to \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ y $f_1 : X \to \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k_1})$, bajo la condición $f_0^*\gamma_k^n \equiv f_1^*\gamma_k^n$, son homotópicas; tomándolas como aplicaciones $f_0, f_1 : X \to \mathbb{G}_n$.

En conclusión para eliminar la relación $\sim$ establecida en el Sección 3, tomamos el espacio $\mathbb{R}^\infty \supset \mathbb{R}^{n+k}$ y la variedad $\mathbb{G}_n \supset \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$.

Una vez establecido estos parámetros, podemos ver que la relación entre las aplicaciones $f : X \to \mathbb{G}_n$ con los fibrados sobre X es uno a uno salvo invarianza homotópica o isomorfismos de fibrados. Por lo cual al tomar el conjunto de clases de homotopía de $\mathcal{A} = \{f : X \to \mathbb{G}_n\}$, al cual denotaremos por

$$[X, \mathbb{G}_n] = \{[f] \ / \ [f] = \{g : X \to \mathbb{G}_n \ / \text{ son homotopicas a } f \ \}\},$$

y el conjunto $V^n(X)$, ya definido, pasamos a enunciar el principal resultado de este trabajo. El cual ya nos precisa que las clases de isomorfismos de fibrados y homotopía de aplicaciones están en relación uno a uno.

Teorema 4.2. Teorema de clasificación de los fibrados vectoriales *Existe una biyección entre los conjuntos $V^n(X)$ y $[X, \mathbb{G}_n]$.*

Prueba. Empezemos definiendo una aplicación

$$\Xi : V^n(X) \to [X, \mathbb{G}_n].$$

Sea $[E]$ un elemento en $V^n(X)$. Tómese a E como representante de esta clase, entonces –por la Proposición 3.6– existe una aplicación $f : X \to \mathbb{G}_n$, donde $f^*\gamma^n \equiv E$. Definamos $\Xi([E]) = [f]$.

Veamos que la definición de Ξ no depende del representante E elegido. Para ello tomemos E' otro representante, la Proposición 3.6 nos proporciona otra aplicación $f' : X \to \mathbb{G}_n$, para la cual

$$f'^*\gamma^n \equiv E'.$$

De donde se obtiene la relación $f^*\gamma^n \equiv f'^*\gamma^n$. De la cual, remitiéndonos al Teorema 4.1, se desprende que $f \simeq f'$ y con ello la buena definición de la función Ξ.

Ahora definiremos una aplicación

$$\mho : [X, \mathbb{G}_n] \to V^n(X)$$

en sentido contrario, la cual presentaremos a continuación.

Sea $[f]$ un clase de homotopía. Tomemos un representante $f : X \to \mathbb{G}_n$ y definamos $\mho([f]) = [f^*\gamma^n]$. Al igual que en el primer caso, verifiquemos que la clase $[f^*\gamma^n]$ no depende del representante f elegido.

Sea f' otro representantes de $[f]$. Como $f \simeq f'$, del teorema de equivalencia homotópica, se sigue que $f^*\gamma^n \equiv f'^*\gamma^n$, de lo cual se infiere la buena definición de la aplicación $\mho$.

Veamos ahora que las aplicaciones definidas son una inversa de la otra. Si $[E]$ es una clase en $V^n(X)$ con $\Xi([E]) = [f]$ tenemos $f^*\gamma^n \equiv E$. Por otro lado se cumple

$$\mho([f]) = [f^*\gamma^n]$$

y así $\mho \circ \Xi([E]) = [E]$.

De otro lado, si $[f]$ es una clase en $[X, \mathbb{G}_n]$ tal que

$$\mho([f]) = [f^*\gamma^n]$$

y $\Xi([f^*\gamma^n]) = [f']$ se tiene $f'^*\gamma^n \equiv f^*\gamma^n$. En consecuencia (por el Teorema 4.1) las aplicaciones f y f' son homotópicas, con lo cual

$$\Xi \circ \mho([f]) = [f],$$

y concluimos la prueba del teorema. ■

4.2. Aplicaciones

En esta parte presentaremos algunas aplicaciones de los principales resultados de clasificación desarrollados, y de cómo estos permiten identificar los fibrados sobre un espacio.

Un resultado ya conocido es el que presentamos en el siguiente lema. Este enuncia el resultado de la Proposición 2.1 en el lenguaje de las clases de isomorfismos de fibrados vectoriales.

Lema 4.1. *Sea X un espacio paracompacto y contráctil. Entonces $V^n(X)$ tiene un único elemento.*

Prueba. Como X es contráctil $id \simeq cte$, entonces si $f : X \longmapsto \mathbb{G}_n$ se tiene $f \simeq cte$, es decir en el conjunto $[X, \mathbb{G}_n]$ existe sólo un elemento. En consecuencia $V^n(X)$ tiene sólo un elemento, y como sobre todo espacio se puede construir el fibrado trivial tenemos que todo fibrado sobre X es trivial. ■

Ahora pasamos a identificar los fibrados unidimensionales sobre la esfera $\mathbb{S}^1$ y no solo veremos que podemos saber cúantos son, sino cómo son.

Antes de presentar el resultado comentado anteriormente daremos un lema preliminar. El cual nos indica que las clases de homotopía de

$$g, a^{-1} \cdot g \cdot a : X \to GL(n, \mathbb{R})$$

con $det(a) < 0$ son iguales, si n es impar.

Lema 4.2. *Si n es impar entonces*

$$[X, GL(n, \mathbb{R})]_0 / \sim = [X, GL(n, \mathbb{R})]_0$$

Prueba. Si n es impar tenemos que $det(-I) < 0$. Entonces si $det(a) < 0$, a y $-I$ están en la misma componente arco conexa. Por otro lado si $g \sim g_1$ entonces $g_1 = a_1 \cdot g \cdot a_1^{-1}$. Como a_1 y $-I$ están en la misma componente arcoconexa tenemos que existe una curva

$$\alpha : [0,1] \longmapsto GL(n,\mathbb{R})$$

que une la matriz $-I$ y a_1. Con ayuda de α podemos definir una aplicación

$$F : X \times [0,1] \longmapsto GL(n,\mathbb{R})$$

como $F(x,t) = \alpha(t) \cdot g(x) \cdot \alpha(t)^{-1}$ la cual es una homotopía entre g y g_1 lo cual nos dice que $g_1 \simeq g$ y $[g] = [a_1 \cdot g \cdot a_1^{-1}] = [g_1]$. Entonces la relación $\sim$ ya no es necesaria puesto que la relación de homotopía ya identifica a estos elementos (refiriéndonos a g y g_1). ■

Proposición 4.1. *Los únicos fibrados de dimensión* 1 *sobre* $\mathbb{S}^1$ *son la banda de Moebius y el trivial.*

Prueba. Sabemos que $S\mathbb{S}^0 \approx \mathbb{S}^1$. Entonces con el lema dado anteriormente y el Teorema 2.4 tenemos

$$V^1(\mathbb{S}^1) = [\mathbb{S}^0, GL(1,\mathbb{R})]_0.$$

Pero $[\mathbb{S}^0, GL(1,\mathbb{R})]_0 = \pi_0(GL(1,\mathbb{R}))$ (el grupo de homotopía a nivel cero de $GL(1,\mathbb{R})$) y como $GL(1,\mathbb{R})$ tiene dos componentes arcoconexas, $\pi_0(GL(1,\mathbb{R}))$ es un grupo de orden dos. Así $V^1(\mathbb{S}^1)$ tiene dos elementos. Uno de ellos es el fibrado trivial. Para poder obtener el otro fibrado debemos analizar las aplicaciones $g : \mathbb{S}^0 \to GL(1,\mathbb{R})$. Las dos aplicaciones posibles son

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_0 = 1 \\ -1 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

y

$$g_1(x) = 1 \text{ para } x = \pm 1$$

(la cual corresponde al fibrado trivial, pues el cambio de cartas es la identidad y esto nos indica que las cartas son restricción de alguna trivialización local $\psi : E \to S^1 \times \mathbb{R}$.) La aplicación g corresponderá al otro fibrado, el cual nos indica que la forma de "pegar" las fibras es invirtiendo la orientación de la fibra $\mathbb{R}$ en un extremo y manteniendo la orientación en el otro. ■

Ahora extenderemos el resultado dado anteriormente para fibrados de dimensión impar, el cual presentaremos en la siguiente proposición.

Proposición 4.2. *Si n es impar entonces*

$$V^n(\mathbb{S}^1) = \pi_0(GL(n, \mathbb{R})).$$

Prueba. Sabemos del Lema 4.2 que $[X, GL(n, \mathbb{R})]_0/_\sim = [X, GL(n, \mathbb{R})]_0$. Entonces –del teorema de clasificación de fibrados vectoriales sobre una suspensión–

$$V^n(\mathbb{S}^1) = [\mathbb{S}^0; GL(n, \mathbb{R})]_0.$$

Por otro lado, resultados del grupo de homotopía π_0 nos proporcionan la igualdad

$$\pi_0(GL(n, \mathbb{R})) = [\mathbb{S}^0, GL(n, \mathbb{R})]_0.$$

En consecuencia $\pi_0(GL(n, \mathbb{R})) = V^n(\mathbb{S}^1)$. ■

Corolario 4.1. *Si n es impar $V^n(\mathbb{S}^1)$ tiene dos elementos.*

Prueba. Como $GL(n, \mathbb{R})$ tiene dos componentes arco conexas entonces $\pi_0(GL(n, \mathbb{R}))$ tiene dos elementos. En consecuencia –de la proposición anterior– $V^n(\mathbb{S}^1)$ tiene dos elementos. ■

Ahora veremos el caso general. Debido a que el espacio $\mathbb{S}^0$ sólo cuenta con dos elementos podemos analizar el conjunto $[\mathbb{S}^0, GL(n, \mathbb{R})]_0/\sim$. Si $x_0 = 1$ (el punto distinguido) tenemos que las posibles aplicaciones son

$$f_i : \mathbb{S}^0 \longmapsto GL(n, \mathbb{R})$$

definidas de la siguiente forma:

$$f_1(x) = \begin{cases} I & \text{si } x = x_0 = 1 \\ a & \text{si } x = -1, \end{cases}$$

donde $Det(a) < 0$, y

$$f_2(x) = \begin{cases} I & \text{si } x = x_0 = 1 \\ b & \text{si } x = -1, \end{cases}$$

con $Det(b) > 0$. Seguidamente daremos un lema que garantiza que éstas son las únicas, o mejor dicho estas son representantes de las dos únicas clases del conjunto $[\mathbb{S}^0, GL(n, \mathbb{R})]_0$

Lema 4.3. *Si f es un representante de una clase en $[\mathbb{S}^0, GL(n, \mathbb{R})]_0$ entonces es homotópica a alguna aplicación f_i definida anteriormente.*

Prueba. Si f está definida en $\mathbb{S}^0$ y además tenemos que su clase está en $[\mathbb{S}^0, GL(n, \mathbb{R})]_0$ entonces

$$f(x) = \begin{cases} I & \text{si } x = x_0 = 1 \\ c & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

donde $Det(c) > 0$ o $Det(c) < 0$, analizaremos el primer caso (el otro es completamente análogo). Si esto ocurre ($Det(c) > 0$) podemos definir una curva

$$\alpha : [0, 1] \longmapsto GL(n, \mathbb{R})$$

que una la matriz c con la matriz b (i.e $\alpha(0) = b$ y $\alpha(1) = c$) y con ello definir la aplicación

$$F(x, t) = \begin{cases} I & \text{si } x = x_0 = 1 \\ \alpha(t) & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

la cual es una homotopía de f y f_2. ■

Corolario 4.2. *Las únicas clases en $[X, GL(n, \mathbb{R})]_0$ son $[f_1]$ y $[f_2]$.*

Prueba. Ver [B, Corolario 4.2] ■

Con el análisis previo podemos dar la siguiente proposición.

Proposición 4.3. *Si n es par entonces existen sólo dos fibrados, salvo isomorfismo, de dimensión n sobre $\mathbb{S}^1$.*

Prueba. Será suficiente ver que las clases de $[f_1]$ y $[f_2]$ antes definidas no son equivalentes bajo $\sim$.

En efecto si existiese una matriz c de tal forma que $c \cdot f_1(x) \cdot c^{-1} = f_2(x)$, entonces $c \cdot a \cdot c^{-1} = b$ –donde $Det(c) < 0$ y $Det(a) < 0$– con lo que tendríamos que $Det(b) < 0$, una contradicción con la definición de f_2. Entonces las únicas clases en $V^n(\mathbb{S}^1)$ son $[f_1]$ y $[f_2]$. ■

Por otro lado, identificando los elementos de $[\mathbb{S}^0, \mathbb{G}_n]$ con las componentes arco conexas de $\mathbb{G}_n$, bajo el hecho de que dos aplicaciones definidas en $\mathbb{S}^0$ cuyas imágenes del punto -1, bajos estas dos aplicaciones, en $\mathbb{S}^0$ que están en la misma componente arco conexa son homotópicas –la homotopía es proporcionada por la curva que une los elementos en la misma componente arco conexa–, podemos proporcionar el siguiente resultado .

Proposición 4.4. *$\mathbb{G}_n$ es arco conexo.*

Prueba. $\mathbb{S}^0$ es un espacio con sólo dos puntos. Entonces él único fibrado que se puede construir sobre el es el trivial. Por tanto $[\mathbb{S}^0, \mathbb{G}_n]$ tiene sólo un elemento y con esto vemos que $\mathbb{G}_n$ tienen sólo una componente arcoconexa. ■

Proposición 4.5. *$\pi_1(\mathbb{G}_n)$ es un grupo de orden 2.*

Prueba. Habiendo caracterizado los fibrados n dimensionales sobre $\mathbb{S}^1$ con un grupo de orden 2, obtenemos, apoyándonos en los teoremas de clasificación de fibrados vectoriales,

$$V^n(\mathbb{S}^1) = [\mathbb{S}^0, GL(n, \mathbb{R})]_0/_\sim = [\mathbb{S}^1, \mathbb{G}_n] = \pi_1(\mathbb{G}_n),$$

es decir $\pi_1(\mathbb{G}_n)$ es un grupo de orden dos. ■

En la primera sección fue presentado el fibrado euclidiano y mediante éste pudimos identificar su fibrado ortogonal. En seguida veremos que todo fibrado sobre un espacio paracompacto es euclidiano.

Proposición 4.6. *El fibrado γ^n es euclidiano*

Prueba. Para dar la prueba es suficiente definir la siguiente aplicación

$$\mu : E(\gamma^n) \oplus E(\gamma^n) \to \mathbb{R}$$

como $\mu(X, v, v) = \|v\|$ ■

Proposición 4.7. *Todo fibrado sobre un espacio paracompacto es euclidiano*

Prueba. Sabemos que para todo fibrado E sobre X existe un morfismo de fibrados (F, f) al fibrado γ^n, el cual es un isomorfismo en cada fibra. Definamos entonces

$$\mu_0 : E \oplus E \to \mathbb{R}$$

como $\mu_0(e, e) = \mu(F(e), F(e))$ ■

Proposición 4.8. *Todo fibrado E sobre un espacio compacto de Hausdorff tiene un fibrado normal, viendo a E como un subfibrado del pullback de algún γ_k^n.*

Prueba. En efecto sabemos que existe un morfismo de fibrados (F, f) de E al fibrado γ_k^n, esto nos permite definir $(\gamma_k^n)^\perp = \{(X, w)/w \perp X \text{ con } w \in \mathbb{R}^{n+k}\}$ el cual es un fibrado. Entonces es suficiente tomar $f^*(\gamma_k^n)^\perp$, e inducir en E la métrica de γ_k^n. ■

Corolario 4.3. *Para todo fibrado E sobre un espacio X compacto de Hausdorff existe E_1 tal que $E \oplus E_1$ es trivial.*

Prueba. Para esto es suficiente ver que la suma directa de las fibras sobre X de γ_k^n y $(\gamma_k^n)^\perp$ es $\mathbb{R}^{n+k}$ entonces aplicando el Lema 1.1 tenemos que $\gamma_k^n \oplus (\gamma_k^n)^\perp = \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{n+k}) \times \mathbb{R}^{n+k}$. ■

Observación. No se puede prescindir de la condición de que X sea compacto pues no existe un fibrado E para el cual la suma de Whitney con γ^n sea trivial. La prueba se basa en las existencia de clases características para cada fibrado sobre un espacio base X.

Referencias

[A] A. Apaza, *Índice de Morse*, Tesis de Maestria, PUCP, 1999.

[AM] R. Abraham, J. Marsden, *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*, Springer Verlag, 1988.

[At] M. Atiyah, *K-Theory* , Benjamin, 1967.

[Br] T. Bröcker, K. Jänich, *Introducción a la topología Diferencial*, AC 1977.

[B] R. Burga, *Clasificación de los Fibrados Vectoriales*, Tesis de Maestría, PUCP, 2001.

[D] A. Dold, *Partitions of Unit in the Theory of Fibrations*, Annals of Math, Vol 78, Vol N^0 2, pag 223-255.

[Du] Dugundji, *Topology* , Ally and Bacon, 1966.

[G] B. Gray, *Homotopy Theory* , Academic Press, 1975.

[Gr] W. Greub, S. Halperin, *Connections, Curvature and Cohomology*, Vol I, A.P, 1972.

[At] W. Greub, S. Halperin, *Connections, Curvature and Cohomology*, Vol II, A.P, 1973.

[H] A. Hatcher, *Vector Bundle and K-Theory* , First installment, august 1998.

[K] J. L. Kelley, *General topology*, Van Nostrand R.,1955.

[M] J. Milnor, *Characteristic Classes* , Annals of Math Studies $N^0$76, 1974.

[Mu] J. Munkres, *Topology, A Frist Course* , Printice Hall, 1975.

[O] E. H Osborn, *vector Bundle Vol. I*, Academic Press, 1982.

[S] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundle*, Princeton U.P, 1951.

[Sw] R. Switzer, *Algebraic topology-Homotopy and Homology*, Springer Verlag, 1975.

[Wh] G. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*, Springer Verlag, 1978.