

# PAIN 2017

## Programa de apoyo a la iniciación en la investigación

### TÍTULO DE LA INVESTIGACIÓN:

Seguridad en dos ruedas: Análisis de la mejora de la estabilidad de la bicicleta como medio de transporte mediante la implementación de un giroscopio como sistema de seguridad.

### AUTORES:

Mendivil de la Fuente, Álvaro André  
Montalbán Guillén, Giancarlo Jair

### FACULTAD - ESPECIALIDAD:

Ciencias e Ingeniería – Ingeniería Mecánica

### DOCENTE ORIENTADOR(A):

Valverde Guzmán, Quino Martín

### AÑO (\*):

2018

(\*) Año de finalización de la investigación

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Vicerrectorado de Investigación



Texto académico

**Proyecto de investigación:**

Seguridad en dos ruedas: Análisis de la mejora de la estabilidad de la bicicleta como medio de transporte mediante la implementación de un giroscopio como sistema de seguridad.

**Integrantes:**

ALVARO ANDRE MENDIVIL DE LA FUENTE  
GIANCARLO JAIR MONTALBAN GUILLEN

**Docente Orientador:**

QUINO MARTIN VALVERDE GUZMAN

**Facultad:**

Ciencias e ingeniería

**Especialidad:**

Ingeniería Mecánica

Lima, Febrero de 2018

# Índice General

<i>INTRODUCCIÓN</i> .....	3
<i>CAPÍTULO 1. LA BICICLETA COMO MEDIO DE TRANSPORTE</i> .....	5
<i>CAPÍTULO 2. EL CONTROL MOMENT GYROSCOPE COMO SISTEMA DE ESTABILIZACIÓN.</i> .....	9
2. 1. Sistemas de estabilización en vehículos de 2 ruedas .....	9
Control de dirección .....	9
Rueda de reacción.....	9
Control Moment Gyroscope .....	10
2. 2. Funcionamiento de un CMG .....	11
Precesión giroscópica.....	11
Funcionamiento de un CMG.....	13
<i>CAPÍTULO 3. MODELAMIENTO DINÁMICO DE LOS SISTEMAS BICICLETA-CMG.</i> .....	16
3.1 Modelo dinámico desarrollado por Yetkin .....	17
3.2 Modelo dinámico del sistema propuesto .....	18
Para el marco de la bicicleta con las ruedas. ....	22
Para el gimbal.....	23
Para la volante de inercia.....	24
3.3 Breve comparación de ambos modelos. ....	29
<i>CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE LA MEJORA DE LA ESTABILIDAD DE LA BICICLETA</i> .....	32
Torque de precesión (torque estabilizador) .....	33
Tamaño y peso .....	33
Potencia consumida por el giroscopio .....	34
Facilidad de fabricación .....	35
<i>CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES</i> .....	36
<i>BIBLIOGRAFÍA</i> .....	37

## Índice de Tablas

<b>Tabla 1.</b> Tiempo promedio (en minutos) del recorrido convencional de una persona hacia su trabajo utilizando tres diferentes medios de transporte. Fuente: Soluciones Ambientales. _____	5
<b>Tabla 2.</b> Métodos de balanceo según Torque y método de balance. Fuente: Elaboración propia _____	10
<b>Tabla 3.</b> Variables utilizadas en el modelo dinámico de Yetkin _____	17
<b>Tabla 4.</b> Variables usadas en el sistema propuesto. Fuente: Elaboración propia ____	20
<b>Tabla 5.</b> Cuadro comparativo de ambos modelos. Fuente: Elaboración propia ____	29

## Índice de Ilustraciones

<b>Ilustración 1.</b> Diagrama de Reaction Wheel. Fuente: Comparison of control moment gyros and reaction wheels for small earth-observing satellites. Votel, R _____	10
<b>Ilustración 2.</b> Ejemplo de precesión giroscópica [Van Biezen, M]. Fuente: Elaboración propia _____	12
<b>Ilustración 3.</b> Diagrama de Control Moment Gyroscope. Fuente: Comparison of control moment gyros and reaction wheels for small earth-observing satellites Votel, R. _____	14
<b>Ilustración 4.</b> Forma constructiva de un DGCMG. Fuente: High-Precision Control for Magnetically Suspended Rotor of a DGMSCMG Based on Motion Separation, Jinjin Xie1, Gang Liu y Hu Liu _____	15
<b>Ilustración 5.</b> Single Gimbal CMG. Fuente: Development of Control Moment Gyroscopes for Attitude Control of Small Satellites _____	15
<b>Ilustración 6.</b> Marco de referencia de la bicicleta con sus tres ángulos principales. Fuente: Stabilization of Autonomous Bicycle. Harun Yetkin _____	17
<b>Ilustración 7.</b> Modelo del sistema propuesto. Fuente: Elaboración propia _____	19
<b>Ilustración 8.</b> Direcciones positivas y negativas de los ángulos $\alpha$ y $\beta$ . Fuente: Elaboración propia _____	21
<b>Ilustración 9.</b> Velocidad angular del gimbal. Fuente: Elaboración propia _____	23
<b>Ilustración 10.</b> Velocidad angular de la volante. Fuente: Elaboración propia ____	24

# ***INTRODUCCIÓN***

La bicicleta es un medio de transporte bastante popular dentro de la comunidad occidental. Su rapidez y practicidad la convierten en una solución ante el problema del tránsito en el Perú. Sin embargo, dada la falta de seguridad vial, se percibe a la bicicleta como insegura debido a la alta cantidad de accidentes que se registran. El capítulo 1 permitirá al lector comprender la situación tanto internacional como nacional que enfrenta el uso de la bicicleta, así como algunas cifras que justifican nuestro estudio.

Mientras se estudiaba dicha problemática, se consideró varias posibilidades para afrontar e intentar solucionar dicha dificultad. Siendo así, que se identificó uno de los mecanismos más usados en la navegación en donde su uso se orienta a la estabilización de satélites y barcos: El giroscopio. El capítulo 2 inicia con un listado de sistemas de estabilización y su importancia en la correcta elección del sistema para nuestro proyecto. En este apartado se menciona por primera vez lo que es un Control Moment Gyroscope, el cual es un sistema que permite orientar los vehículos con alta precisión y bajo consumo energético. Se introduce al lector a una comprensión de su principio de funcionamiento como medio de estabilización.

Más adelante en el capítulo 3 se presentará mayor rigurosidad matemática al presentar las ecuaciones que gobiernan la dinámica de dichos sistemas de estabilización implementados en una bicicleta, bajo ciertas simplificaciones pertinentes sin pérdida de generalidad. El propósito de este apartado es aplicar un sistema ya desarrollado por Harun Yetkin en su tesis de maestría *Stabilization of Autonomous Bicycle* a quien mencionamos a lo largo de todo este trabajo por ser el referente de nuestra investigación. El primer paso fue la comprensión del sistema CMG-bicicleta y extrapolarlo a uno propio que se presenta dentro del mismo

capítulo con la particularidad de usar dos giroscopios en vez de uno. Seguido se realiza el sistema propio utilizando la formulación de *Lagrange-Euler*, la cual describe el comportamiento de un sistema dinámico en términos del trabajo y la energía almacenados en el sistema. Finalmente se realiza una comparación de ambos modelos en términos de ecuaciones analíticas.

En el capítulo 4 se realizará el análisis de la mejora de la estabilidad del sistema propuesto mediante el uso de criterios de estabilidad tales como: Torque de precesión (torque estabilizador), tamaño y peso, potencia consumida por el giroscopio, facilidad de fabricación y la velocidad angular del volante del giroscopio. Con las cuales se contrastó antes modelos y se evaluó la mejora de la estabilidad de la bicicleta al usar el sistema Control Moment Gyroscope con el uso de dos giroscopios. Finalmente, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones analíticas del trabajo de investigación.

Se pretende motivar a la comunidad científica en la exploración de nuevos retos de ingeniería que pretendan mejorar la calidad de vida de las personas; por ejemplo, la seguridad en un vehículo como la bicicleta, la cual no solo beneficia al usuario, sino que lo mantiene sano y beneficia al planeta reduciendo la contaminación al disminuir el uso de combustibles fósiles.

El presente trabajo cuenta con la colaboración principal de nuestro docente orientador Quino Valverde G., así como el apoyo de diversos docentes de la PUCP a quienes estamos profundamente agradecidos. Dedicamos esta obra a nuestras familias, quienes son nuestro motor para continuar con la dedicada labor de aportar a la Ingeniería. Asimismo, motivamos una vez más al lector al entendimiento de nuestra perspectiva y esperamos sea de su agrado.

Los autores

# ***CAPÍTULO 1. LA BICICLETA COMO MEDIO DE TRANSPORTE***

Durante el siglo XIX, la bicicleta evocó un nuevo y emocionante mundo, en el cual no importaba el estatus social para poder viajar lejos y utilizando únicamente la fuerza humana. Sin embargo, una gran interrogante por muchos años fue si de verdad este invento por el que muchos pelean patentes, estaba destinado a ser el inicio de una nueva era de viajes prolongados y de alta eficiencia o; si era simplemente el juguete de jóvenes tras su paseo por el parque. Han pasado casi dos siglos desde que la bicicleta comenzó a adaptar un concepto tecnológico en el que no pueden pasar desapercibidos años de desarrollo e ingenio que lo convierten en una maravilla de la ingeniería que transformó la imaginación del hombre; convirtiendo a la bicicleta, de esta manera, en una fuente de inspiración y admiración para quienes gustan de los viajes con el pelo al viento. (David V. Herlihy 2005)

De esta manera, la bicicleta se convirtió en uno de los medios de transporte más eficientes, menos contaminantes, más económicos e incluso con beneficios para la salud. En distancias medianas y cortas la bicicleta es uno de los transportes más veloces, ya que puede evadir la congestión. Si la comparamos con el transporte público, la bicicleta es mucho más rápida incluso en distancias largas (Ver Tabla 1.1).

**Tabla 1.** Tiempo promedio (en minutos) del recorrido convencional de una persona hacia su trabajo utilizando tres diferentes medios de transporte. Fuente: Soluciones Ambientales.

AUTOMÓVIL		TRANSPORTE PÚBLICO		BICICLETA
VÍA NORMAL	VÍA CONCESIONADA	VÍA NORMAL	VÍA SEGREGADA	
30-35	6-10	45-50	30-45	20-30

Asimismo, las emisiones de dióxido de carbono y gases contaminantes de la bicicleta son completamente nulas dada la no utilización de combustibles fósiles. De esta manera al no requerir ningún tipo de combustible solo se requiere comprar la bicicleta, en comparación con un automóvil, es al menos 10 veces más barato y no requiere un gasto diario del combustible ya que utiliza la fuerza humana.

El sedentarismo ocasionado por el estilo de vida de las genera altos niveles de obesidad y enfermedades relacionadas a ello. El uso de la bicicleta en este sentido no solo reduce los niveles de riesgo, sino que también aporta una fuente de energía al cuerpo durante el día, mejorando la calidad de vida de las personas. (Soluciones Ambientales 2008)

Sin embargo, surge una problemática que es la que se aborda en el presente trabajo, el problema de los siniestros registrados en las últimas décadas que se produjeron tras el uso masivo de la bicicleta y la falta de cultura y seguridad vial por parte de los agentes externos al ciclista. En adelante, se expondrán las posibles causas de los accidentes en el uso de la bicicleta.

Son múltiples los accidentes reportados en relación con el uso de la bicicleta como medio de transporte. Son diversos los motivos por los cuales las víctimas han sufrido lesiones categorizadas como leves y graves. Entre las causas, se ha identificado la repentina pérdida de la estabilidad dada por la impericia del usuario y que, generalmente, va asociada a factores externos como la marcha sobre calles húmedas o mojadas, sinuosas y con poca visibilidad por la noche. (Sánchez, 2002). Asimismo, se debe considerar el hecho de que el usuario maneje la bicicleta utilizando algún elemento distractor como auriculares o algún otro dispositivo móvil. Al respecto, se ha realizado una investigación en la ciudad de Boston (USA), dado el incremento exponencial del uso de la bicicleta en las calles. El objetivo fue brindarle al usuario mayor confort y percepción de seguridad. El estudio muestra a un total de 1974 ciclistas observados, de los cuales el 31,2% de ellos estuvieron distraídos<sup>1</sup>. Haciéndose notar la distracción auditiva en 17,7% y visual en 13,5%. Ambas

---

<sup>1</sup> Considérese distraído al usuario que realiza cualquier otra actividad simultaneas al pedaleo y la vista atenta de la trayectoria a seguir



estuvieron representadas por audífonos y celulares en mano, respectivamente.(Wolfe et al. 2017)

Un registro de accidentados en la ciudad de Copenhague, muestra que un 37,6% constituyen ciclistas lesionados en 2011 según la base de Datos de Accidentes de Dinamarca.

La percepción de seguridad es un concepto referido a un sentimiento subjetivo resultante de la interacción entorno del tráfico-usuario. No es un concepto absoluto (a diferencia de la seguridad vial) pues varía según la edad y la pericia del ciclista.

Algunas circunstancias de accidentes son calzada resbaladiza (nieve, hielo, hojas húmedas, etc.), agujeros en la carretera, piedras, objetos sueltos (como bolsas de compras o ropa que se queda pegada en la rueda o cadena). Transportar niños pequeños sin un asiento adecuado puede resultar en accidentes cuando el pie del niño queda atrapado en la rueda.

Muchas causas de los accidentes están asociadas a factores intrínsecos a la persona. Los accidentes se pueden prevenir mediante el uso de medidas que cambien el comportamiento del usuario de la vía hacia un comportamiento más seguro. Algunas medidas de seguridad también aumentan la percepción de seguridad, pero no de todas.

Por su parte, muchas ciudades presentan déficit en la gestión de sus vías públicas, entre ellas el Perú. Las calles no se encuentran en buen estado y hay una notoria ausencia de ciclovías. Según el reporte de la OMS<sup>2</sup> del 2013 en Chile, se presentó un caso muy grave-con una cifra de 144 fallecidos- respecto a la situación que afrontan los ciclistas de dicho país. Según la directora de *Bicicultura*, Amarilis Horta, quién afirma lo siguiente: “Chile es uno de los países de la OCDE<sup>3</sup> con los límites de velocidad más altos permitidos; en ciudades europeas tienen el 50% de sus calles limitadas a 20-30 Km/h, lo cual reduce sustancialmente el peligro de muerte por accidente de tránsito”. (La segunda Online, “Ciclistas en riesgo”, 2014)

En el año 2015 se reportaron 60 accidentes de tránsito en la costa Verde de la ciudad de Lima. El colectivo *COSTA VERDE DE TODOS* alzó su voz de protesta para

---

<sup>2</sup> Organización Mundial de la Salud (OMS)

<sup>3</sup> Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE)

manifestar su preocupación ante la falta de compromiso por parte del municipio de Lima de generar espacios públicos para peatones y construir más ciclovías. “La ley es para todos, tenemos los mismos derechos que los automóviles. El Ministerio de Transportes ni siquiera considera a la bicicleta como vehículo de transporte”, afirmó el ciclista Nils Castro (La República, 2015)

## ***CAPÍTULO 2. EL CONTROL MOMENT GYROSCOPE COMO SISTEMA DE ESTABILIZACIÓN.***

### **2. 1. Sistemas de estabilización en vehículos de 2 ruedas**

Los vehículos de dos ruedas (bicicletas y motocicletas) son por naturaleza inestables, debido a que poseen solo un punto de apoyo en cada rueda. Estos vehículos son ideales para el transporte urbano, debido a su maniobrabilidad, reducido tamaño y peso, y practicidad. Sin embargo, no son de uso común, ya que son vehículos inseguros: la más mínima perturbación genera pérdida de estabilidad. A continuación, se menciona y realiza una breve descripción de los sistemas más comunes que el hombre ha desarrollado en su intento por convertir bicicletas y motocicletas en medios de transporte más seguros y estables.

#### **Control de dirección**

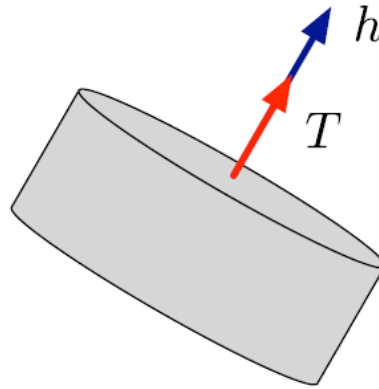
Consiste en controlar el manubrio del vehículo de manera automática para poder direccionarlo en el sentido en el que se esté cayendo, para poder reponer el centro de masa. Este movimiento se ejecuta solo cuando montamos bicicleta a bajas velocidades para evitar caídas.

#### **Rueda de reacción**

Según la tercera ley de Newton, cualquier acción en un objeto estático o en movimiento, una reacción de igual magnitud y dirección contraria se produce. De igual manera se lleva a cabo en los sistemas giratorios, al aplicar un torque a una solido rígido, una reacción de igual magnitud y dirección opuesta se produce en el sistema.

Las ruedas de reacción aprovechan este efecto para maniobrar y colocar en la inclinación deseada una nave sin necesidad de usar combustible. Si bien este método

se usa mayormente en satélites pequeños, se podrían también aplicar a vehículos terrestres. El problema con el uso de la rueda de reacción es que se requeriría de un torque muy grande y que sea aplicado rápidamente para poder estabilizar el vehículo. (Karthikeyan, KC. ,2016).



**Ilustración 1** .Diagrama de Reaction Wheel. Fuente: Comparison of control moment gyros and reaction wheels for small earth-observing satellites. Votel, R

### Control Moment Gyroscope

El Control Moment Gyroscope o CMG es un dispositivo que aprovecha el fenómeno de la precesión giroscópica para producir un torque en el sistema. Consta de una volante de inercia que gira a altas velocidades y es forzada a precesar para generar un torque en el eje deseado. Son usados en su mayoría para orientar naves que se encuentran orbitando en el espacio. El CMG a diferencia de la rueda de reacción produce un torque mayor con una mejor eficiencia energética.

**Tabla 2.** Métodos de balanceo según Torque y método de balance. Fuente: Elaboración propia

Métodos para balanceo de bicicletas		
Sistema	Torque	Consumo de energía
CMG	Alto	Muy Alto
Control de dirección	Bajo para velocidades bajas	Bajo
Rueda-Reacción	Bajo	Medio

Luego de una cuidadosa selección se optó por usar un sistema Control Moment Gyroscope CMG, debido a que este es el que ofrece una mayor fuerza de estabilización, la cual es la que contrarresta al momento producida por la fuerza de gravedad, asimismo es inclusive más preciso que sus análogos. La desventaja de este sistema es que tiene un alto consumo de energía debido al constante giro a alta velocidad del volante de inercia. Para que el CMG funcione la rueda tiene que girar a velocidad constante, eliminando cualquier posibilidad que el usuario sea el que accione el sistema. Por tal motivo, se requerirá el uso de un motor y baterías para su funcionamiento.

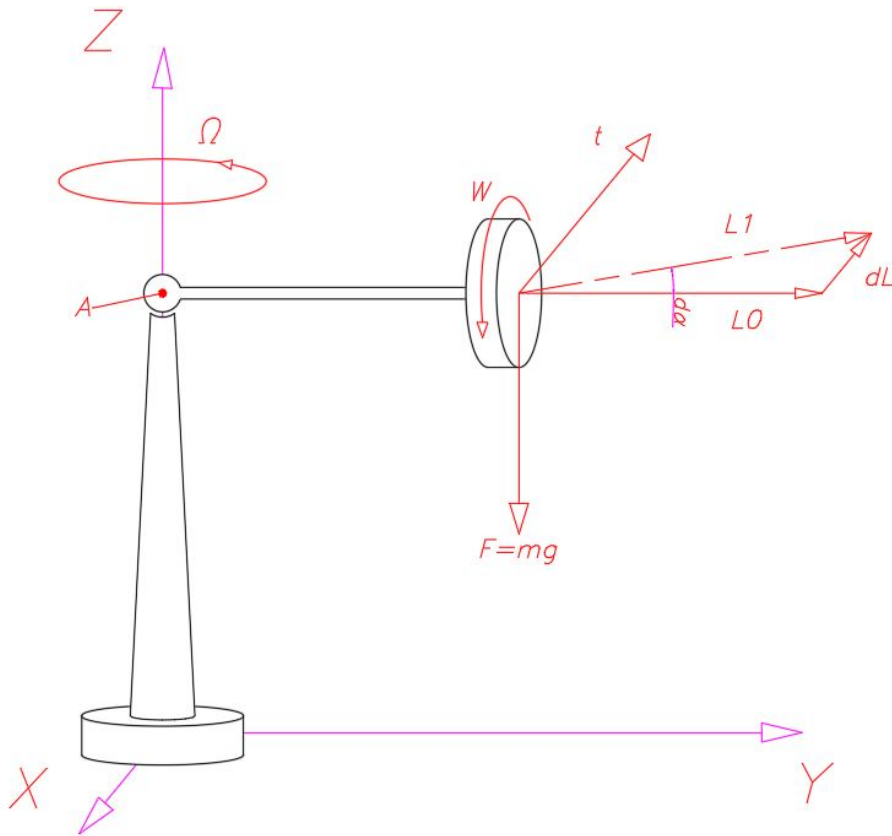
## **2. 2. Funcionamiento de un CMG**

Como se mencionó en la sección anterior el método a usar será el CMG, el cual se basa en el principio de la precesión giroscópica.

### **Precesión giroscópica**

La precesión giroscópica es un fenómeno que ocurre en todos los objetos que poseen un giro sobre alguno de sus ejes. Este ocurre debido a la ley de conservación de momento angular.

En la explicación dada Michel van Biezen para un mejor entendimiento se pone el siguiente ejemplo. Se tiene una rueda en el extremo de una vara que puede rotar libremente (ver ilustración 2). La rueda al girar con velocidad angular  $W$  posee un momento angular  $L_0$ . El peso de la rueda genera un torque  $t$  en dirección de  $-X$ , el cambio de momento angular ( $dL$ ) se da en dirección del torque aplicado, para que este cambio ocurra el disco tendría que moverse en esa dirección. Como la distancia de la rueda a la base es fija, el disco empezara a girar siguiendo la dirección del torque.



**Ilustración 2.** Ejemplo de precesión giroscópica [Van Biezen, M]. Fuente: Elaboración propia

La definición de torque es:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Dada esta definición, el cambio de momento angular  $d\vec{L}$  siempre se dan en el sentido del torque  $\vec{\tau}$ . Además, se puede hallar la velocidad angular a la que se da el movimiento de precesión de la siguiente manera.

Observando el gráfico se tiene que:

$$d\alpha = \sin \alpha = \tan \alpha = \frac{dL}{L_0} \text{ cuando } \alpha \ll 1^\circ$$

Se define:

$$\vec{\Omega} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dL}{L_0} * \frac{1}{dt} = \frac{dL}{dt} * \frac{1}{L_0} = \frac{T}{L_0}$$

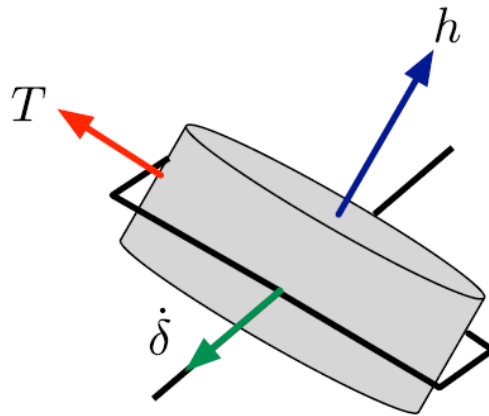
Finalmente se halla la velocidad de precesión:

$$\vec{\Omega} = \frac{r * m * g}{m * r^2 * W} = \frac{g}{r * W}$$

Entonces en general se puede establecer que, si a algún objeto que posea un movimiento angular en algún eje, se le aplica un torque en dirección perpendicular al eje de giro, el objeto iniciará un movimiento de precesión en el eje ortogonal al eje de giro y al eje en donde se aplica el torque.

### **Funcionamiento de un CMG**

El principio de un CMG es de la precesión giroscópica, pero en el caso del CMG el torque el cual realiza el cambio de momento angular es forzado con el fin de generar el torque de precesión en el eje deseado. Esto se realiza con la ayuda de un motor secundario situado en un marco auxiliar que permite del giro de la volante, a este marco se le llama gimbal (ver arreglo de la ilustración 3). El motor secundario al imponerle un torque al eje de giro de la volante y hacerlo girar con ángulo  $\delta$ , el sistema ofrece un torque de resistencia perpendicular al torque que hace girar la volante y al torque de hace girar el eje. El CMG aprovecha este torque para contrarrestar la fuerza generada por la gravedad. La fuerza estabilizadora que ofrece el CMG es proporcional a la velocidad angular tanto de la volante como su eje de giro (Votel, 2012)

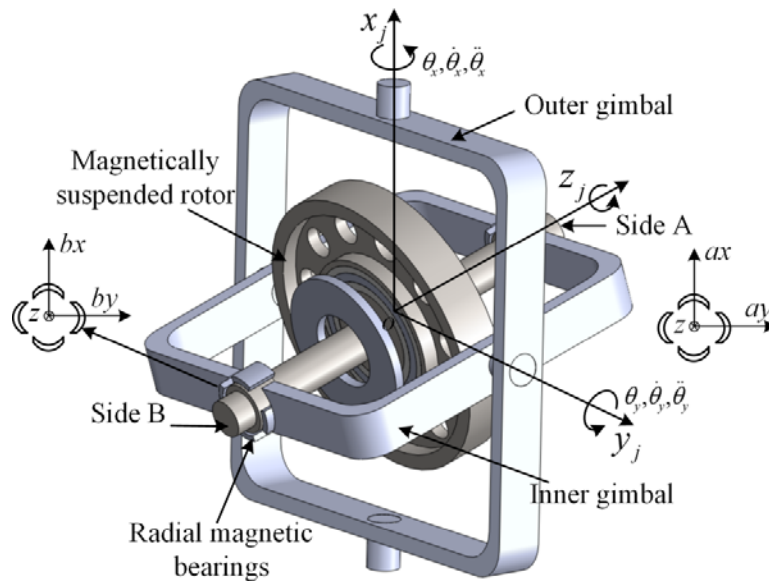


**Ilustración 3.** Diagrama de Control Moment Gyroscope. Fuente: Comparison of control moment gyros and reaction wheels for small earth-observing satellites Votel, R.

En el ejemplo de la sección anterior, si se fija el brazo, se generaría un torque en todo el sistema con dirección en Z.

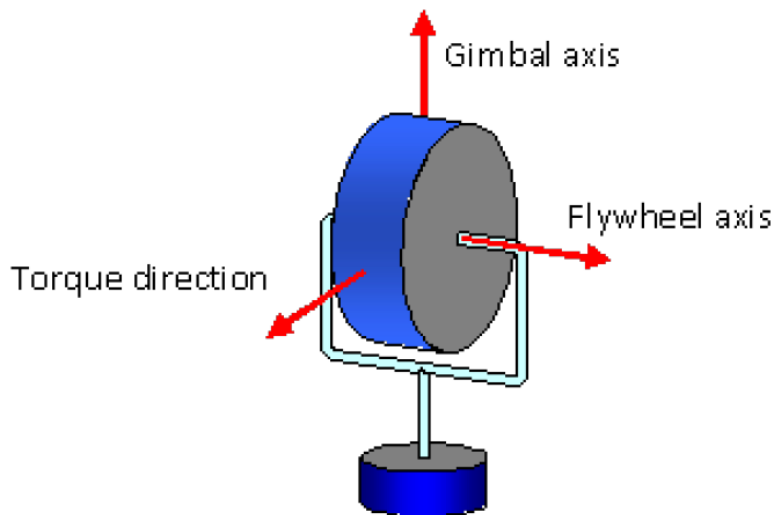
Existen dos tipos de CMG, los de un gimbal o SGCMG (por sus siglas en ingles) y los de doble gimbal o DGCMG (por sus siglas en ingles). El ultimo ofrece la ventaja de poder ejercer el torque de precesión en cualquier eje; sin embargo, son más complicados de controlar. La ilustración 4 muestra una forma constructiva de un DGCMG. El SGCMG es más fácil de controlar pues posee una dinámica más sencilla, por ello será utilizado en el presente trabajo.





**Ilustración 4.** Forma constructiva de un DGCMG. Fuente: High-Precision Control for Magnetically Suspended Rotor of a DGCMG Based on Motion Separation, Jinjin Xie<sup>1</sup>, Gang Liu y Hu Liu

A continuación, se muestra una figura de un CMG con un gimbal. Nótese que la volante solo puede girar en el eje del gimbal, a diferencia de la ilustración 4.



**Ilustración 5.** Single Gimbal CMG. Fuente: Development of Control Moment Gyroscopes for Attitude Control of Small Satellites

## ***CAPÍTULO 3. MODELAMIENTO DINÁMICO DE LOS SISTEMAS BICICLETA-CMG.***

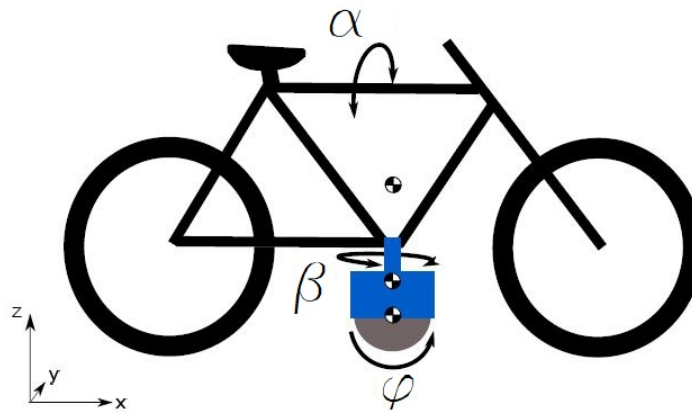
En este capítulo se describirán las ecuaciones de movimiento del sistema cuando tiene una velocidad lineal nula, es decir en equilibrio dinámico. En primer lugar, se presentará el modelo dinámico realizado por Harun Yetkin en su tesis de maestría *Stabilization of Autonomous Bicycle*. Luego, utilizando la misma metodología se realizará con detalle el modelo dinámico de un sistema propuesto, para finalmente hacer una breve comparación entre ambos. En ambos modelos se realizarán las mismas consideraciones para facilitar el modelado. Las consideraciones son las siguientes:

1. La bicicleta se divide en tres solidos rígidos:
  - El marco de la bicicleta con las ruedas
  - Gimbal (El CMG sin la volante de inercia)
  - Flywheel (La volante de inercia)
2. Las ruedas se consideran como apoyos puntuales debido a que se consideraron con ancho despreciable.
3. Las ruedas ofrecen suficiente fuerza de rozamiento para evitar deslizamiento con el suelo.
4. Las masas de la bicicleta y la volante se considerarán concentradas en su centro de gravedad para efectos del cálculo de los momentos.
5. Las variables a controlar serán  $\alpha$  y sus derivadas.
6. El centro de masa de la bicicleta se considera en el asiento debido a que se cuenta a la persona que la está montando.
7. La masa de la bicicleta será la suma de la bicicleta con la masa de un adulto promedio en Perú.

Cabe mencionar que la nomenclatura usada en la tesis de Harun Yetkin es distinta a la que presentamos, esto se debe a que fue cambiada para poder realizar una comparación más sencilla con nuestro modelo.

### 3.1 Modelo dinámico desarrollado por Yetkin

A continuación, se presenta el modelo con la nomenclatura cambiada.



**Ilustración 6.** Marco de referencia de la bicicleta con sus tres ángulos principales.  
Fuente: *Stabilization of Autonomous Bicycle*. Harun Yetkin

La lista de variables usada se presenta a continuación:

**Tabla 3.** Variables utilizadas en el modelo dinámico de Yetkin

Variable	Símbolo	Unidad
Masa de la bicicleta	$m_b$	[kg]
Altura del c.m. de la bicicleta	$h_b$	[m]
Masa del gimbal	$m_g$	[kg]
Altura del c.m. del gimbal	$h_g$	[m]
Masa de la volante	$m_f$	[kg]
Altura del c.m. de la volante	$h_f$	[m]
Velocidad de la volante	$\dot{\phi}$	[rad/s]
Constante de la gravedad	$g$	[m/s <sup>2</sup> ]
Inercia de la bicicleta	$I_{b,x,y,z}$	[kg·m <sup>2</sup> ]

Inercia del gimbal	$I_{gx,y;z}$	[kg. m <sup>2</sup> ]
Inercia de la volante	$I_{fx,y;z}$	[kg. m <sup>2</sup> ]
Angulo de inclinación	$\alpha$	[rad]
Angulo del gimbal	$\beta$	[rad]

Aplicando el método de Lagrange- Euler, llegó a esta ecuación:

$$\ddot{\alpha} = \frac{K_1 g \sin \alpha + 2I * (\dot{\alpha} \cos \beta \sin \beta \dot{\beta}) - I_{fy}(\dot{\phi} \dot{\beta} \cos \beta) + d(t) h_b \sin \alpha}{I_{bx} + K_2 + (I_{gx} + I_{fx}) \cos^2 \beta + (I_{gy} + I_{fy}) \sin^2 \beta}$$

Donde:

$$m_b h_b + m_f h_f + m_g h_g = K_1$$

$$m_b h_b^2 + m_g h_g^2 + m_f h_f^2 = K_2$$

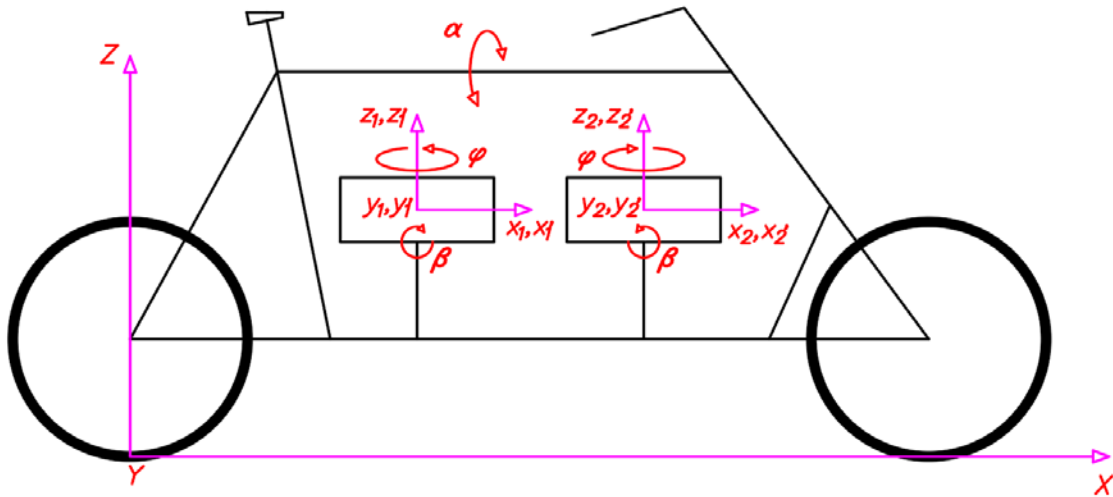
$$I_{gx} + I_{fx} - I_{gy} - I_{fy} = I$$

### 3.2 Modelo dinámico del sistema propuesto

A diferencia del modelo de Yetkin, nuestra propuesta utiliza dos CMG para reducir su tamaño y aumentar el torque de estabilización. Además, que el eje de giro de la volante se encuentra en el eje Z.

Las reacciones en la bicicleta debido al torque del motor para mover la volante y el gimbal son efectos contraproducentes a nuestro modelo. Las consideraciones realizadas anulan estos efectos; sin embargo, en realidad no es así.

La peculiaridad de utilizar dos CMG es que girarán en sentido opuesto el uno con el otro, esto es puesto que, se busca eliminar estos efectos al hacerlos girar en sentidos opuestos; también para que el torque de precesión de ambos CMG actúe sobre el mismo eje y en la misma dirección.



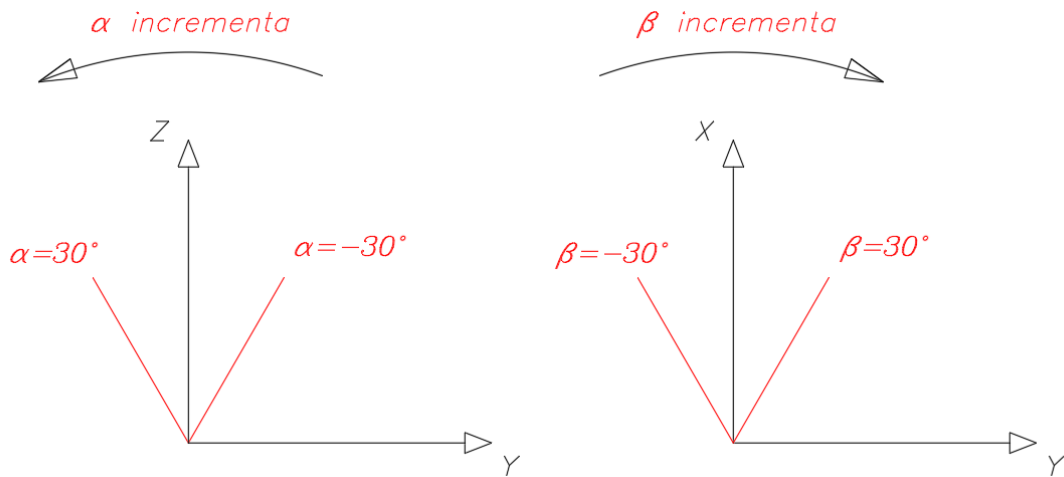
**Ilustración 7.** Modelo del sistema propuesto. Fuente: Elaboración propia

$x'_1, y'_1, z'_1$  es solidario al primer cmg. Posee  $\dot{\varphi} \hat{k}'_1$  y  $\dot{\beta} \hat{j}'_1$

$x'_2, y'_2, z'_2$  es solidario al segundo cmg. Posee  $-\dot{\varphi} \hat{k}'_2$  y  $-\dot{\beta} \hat{j}'_2$

**Tabla 4.** Variables usadas en el sistema propuesto. Fuente: Elaboración propia

Nombre	Símbolo	Unidades
<b>BICICLETA</b>		
Masa de la bicicleta	$m_b$	[kg]
Inercia de la bicicleta con respecto a su eje X	$I_b^x$	[kg *m <sup>2</sup> ]
Distancia del centro de masa de la bicicleta con respecto al suelo	$h_b$	[m]
Angulo de rodadura de la bicicleta	$\alpha$	[rad]
Velocidad angular de rodadura de la bicicleta	$\dot{\alpha}$	[rad/s]
Aceleración angular de rodadura de la bicicleta	$\ddot{\alpha}$	[rad/s <sup>2</sup> ]
Velocidad tangencial del centro de masa	$v_b^\alpha$	[m/s]
<b>VOLANTE DE INERCIA</b>		
Ángulo de giro de la volante	$\varphi$	[rad]
Velocidad angular de la volante	$\dot{\varphi}$	[rad/s]
Aceleración angular de la volante	$\ddot{\varphi}$	[rad/s <sup>2</sup> ]
Masa de la volante de inercia	$m_f$	[kg]
Inercia de la volante respecto a algún eje	$I_f^?$	[kg *m <sup>2</sup> ]
Distancia del centro de masa respecto al suelo	$h_f$	[m]
Velocidad tangencial del centro de masa	$v_f^\alpha$	[m/s]
<b>GIMBAL</b>		
Ángulo de giro del gimbal	$\beta$	[rad]
Velocidad angular del gimbal	$\dot{\beta}$	[rad/s]
Aceleración angular del gimbal	$\ddot{\beta}$	[rad/s <sup>2</sup> ]
Masa del gimbal	$m_g$	[kg]
Inercia del gimbal respecto a algún eje	$I_g^?$	[kg *m <sup>2</sup> ]
Distancia del centro de masa respecto al suelo	$h_g$	[m]
Velocidad tangencial del centro de masa	$v_g^\alpha$	[m/s]
<b>PERTUBACIÓN</b>		
Fuerza de perturbación	$F(t)$	[N]
Distancia a la que la perturbación se aplica respecto al suelo	$l$	[m]



**Ilustración 8.** Direcciones positivas y negativas de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ . Fuente: Elaboración propia

El modelado se realizará utilizando la misma metodología que en la tesis de Yetkin. Mediante el método de Lagrange-Euler.

Se analizará solo un CMG, ya que ambos poseen la misma energía.

Se define el Lagrangiano:

$$L = T - U$$

Donde:

T: Energía cinética del sistema.

U: Energía potencial del sistema.

Se encuentra la energía potencial del sistema.

La energía potencial del sistema es la suma de la energía de cada parte

$$U = (m_b h_b g + 2 m_f h_f g + 2 m_g h_g g) * \cos \alpha$$

Se multiplica las masas por las alturas de la volante y del gimbal por dos, ya que al ser dos CMG idénticos estos valores se duplican.

Se encuentra la energía cinética del sistema

$$T = T_b + T_f + T_g$$

Donde:

$T_b$ : Energía cinética de la bicicleta

$T_f$ : Energía cinética de la volante de inercia

$T_g$ : Energía cinética del gimbal

La energía cinética total de la volante de inercia es 2 veces la energía de una sola, al igual que en el gimbal.

La energía cinética se halla sumando la energía por cada velocidad. Velocidad tangencial y velocidades angulares en cada eje del sólido.

### **Para el marco de la bicicleta con las ruedas.**

La velocidad angular de la bicicleta es:

$$\vec{\omega}_b = \dot{\alpha} \hat{i}$$

La inercia de la bicicleta es:

$$I_b = \begin{bmatrix} I_b^x & 0 & 0 \\ 0 & I_b^y & 0 \\ 0 & 0 & I_b^z \end{bmatrix}$$

La energía cinética se da con la expresión:

$$T_b = \frac{1}{2} * m_b v_b^{\alpha 2} + \frac{1}{2} * I_b \times \vec{\omega}_b^2$$

La velocidad tangencial de la bicicleta es:

$$v_b^{\alpha} = h_b * \dot{\alpha}$$

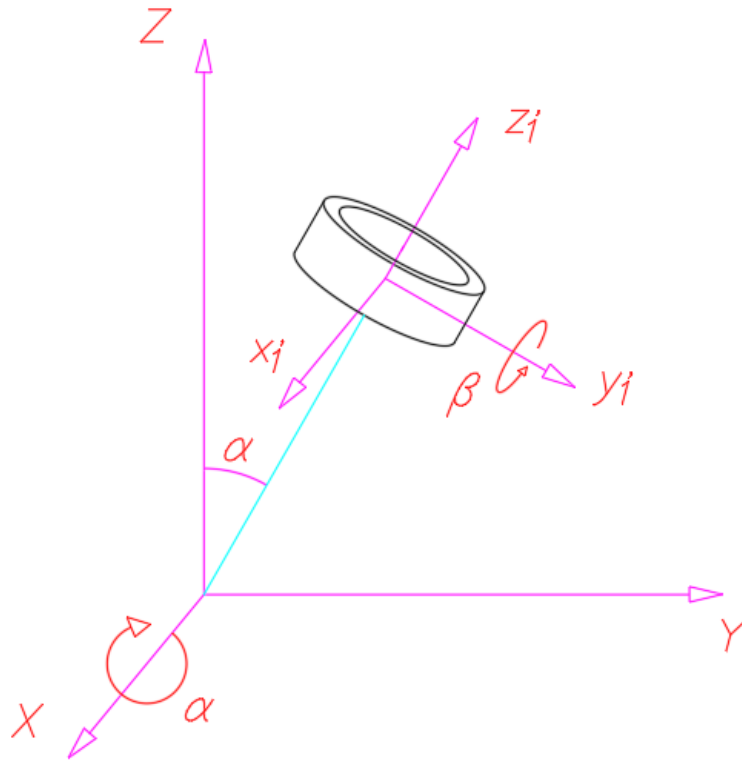
La energía cinética de la bicicleta es:

$$T_b = \frac{m_b h_b^2 * \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{I_b^x \dot{\alpha}^2}{2}$$



Para hallar la energía cinética de la volante y del gimbal se hallará la velocidad angular de cada uno con respecto a sus ejes.

**Para el gimbal.**



**Ilustración 9.** Velocidad angular del gimbal. Fuente: Elaboración propia

La velocidad angular del gimbal es:

$$\vec{W}_g = \dot{\alpha} \hat{I} + \dot{\beta} \hat{J}_1$$

Se tiene que hallar la velocidad con respecto a los ejes del gimbal. Se tiene que:

$$\hat{I} = \sin \beta \hat{k}_1 + \cos \beta \hat{l}_1$$

Entonces la velocidad angular quedaría de la siguiente manera:

$$\vec{W}_g = \dot{\alpha} \cos \beta \hat{l}_1 + \dot{\beta} \hat{J}_1 + \dot{\alpha} \sin \beta \hat{k}_1$$

La velocidad tangencial del centro de masa del gimbal es:

$$v_g^\alpha = h_g * \dot{\alpha}$$

La inercia del gimbal es:

$$I_g = \begin{bmatrix} I_g^{x'_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_g^{y'_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_g^{z'_1} \end{bmatrix}$$

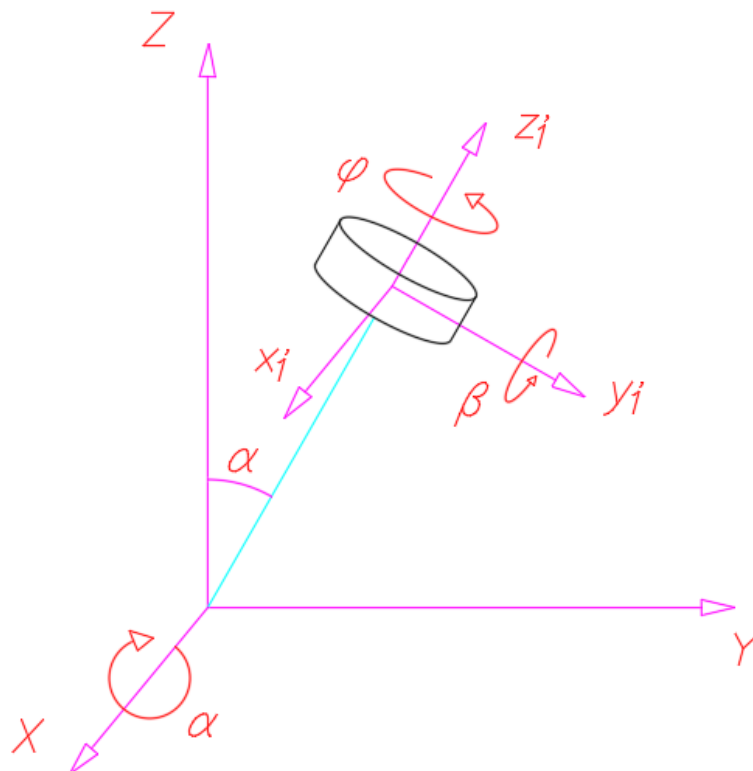
Entonces, su energía cinética es dada por:

$$T_g = 2 * \left( \frac{1}{2} * m_g v_g^{\alpha^2} + \frac{1}{2} * I_g \times \overline{W}_g^2 \right)$$

$$T_g = 2 * \left( \frac{m_g h_g^2 * \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{I_g^{x'_1} \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta}{2} + \frac{I_g^{y'_1} \dot{\beta}^2}{2} + \frac{I_g^{z'_1} \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta}{2} \right)$$

### Para la volante de inercia

De manera similar se analiza la volante de inercia. La diferencia con el gimbal es que la volante posee un giro en el eje z'.



**Ilustración 10.** Velocidad angular de la volante. Fuente: Elaboración propia

La velocidad angular de la volante es:

$$\vec{W}_f = \dot{\alpha} \hat{l} + \dot{\beta} \hat{j}_1 + \dot{\varphi} \hat{k}_1$$

Se necesita la velocidad angular en términos de  $x'_1, y'_1, z'_1$

Se tiene que

$$\hat{l} = \sin \beta \hat{k}_1 + \cos \beta \hat{i}_1$$

Entonces

$$\vec{W}_f = \dot{\alpha} \cos \beta \hat{i}_1 + \dot{\beta} \hat{j}_1 + (\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta) \hat{k}_1$$

La velocidad tangencial del centro de masa es:

$$v_f^\alpha = h_f * \dot{\alpha}$$

Su inercia es:

$$I_f = \begin{bmatrix} I_f^{x'_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_f^{y'_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_f^{z'_1} \end{bmatrix}$$

Entonces la energía cinética de la volante es:

$$T_f = 2 * \left( \frac{1}{2} * m_f v_f^{\alpha 2} + \frac{1}{2} * I_f \times \vec{W}_f^2 \right)$$

$$T_f = 2 * \left( \frac{m_f h_f^2 * \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{I_f^{x'_1} \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta}{2} + \frac{I_f^{y'_1} \dot{\beta}^2}{2} \right. \\ \left. + \frac{I_f^{z'_1} (\dot{\varphi}^2 + 2 \dot{\varphi} \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta)}{2} \right)$$

Teniendo las energías cinéticas de cada sólido, se procede a hallar la energía cinética de todo el sistema.

$$\begin{aligned}
T = & \frac{m_b h_b^2 * \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{I_b^x \dot{\alpha}^2}{2} + 2 \\
& * \left( \frac{m_g h_g^2 * \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{I_g^{x_1} \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta}{2} + \frac{I_g^{y_1} \dot{\beta}^2}{2} + \frac{I_g^{z_1} \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta}{2} \right) + 2 \\
& * \left( \frac{m_f h_f^2 * \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{I_f^{x_1} \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta}{2} + \frac{I_f^{y_1} \dot{\beta}^2}{2} \right. \\
& \left. + \frac{I_f^{z_1} (\dot{\varphi}^2 + 2 \dot{\varphi} \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta)}{2} \right)
\end{aligned}$$

La ecuación de Lagrange es de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = F(t) \hat{j}$$

Se necesita la fuerza en términos de  $\alpha$

$$F(t) \hat{j} = F(t) l \sin \alpha$$

Entonces quedaría de la siguiente manera

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = F(t) l \sin \alpha$$

Hallando cada termino por separado

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial U}{\partial \dot{\alpha}} \right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{\alpha}} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = m_b h_b^2 \dot{\alpha} + I_b^x \dot{\alpha} + 2 * \left( m_g h_g^2 \dot{\alpha} * + I_g^{x_1'} \dot{\alpha} \cos^2 \beta + I_g^{z_1'} \dot{\alpha} \sin^2 \beta \right) + 2$$

$$* \left( m_f h_f^2 \dot{\alpha} + I_f^{x_1'} \dot{\alpha} \cos^2 \beta + I_f^{z_1'} (\dot{\phi} \sin \beta + \dot{\alpha} \sin^2 \beta) \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial U}{\partial \dot{\alpha}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) = m_b h_b^2 \ddot{\alpha} + I_b^x \ddot{\alpha} + 2$$

$$* \left( m_g h_g^2 \ddot{\alpha} * + I_g^{x_1'} \ddot{\alpha} \cos^2 \beta + I_g^{x_1'} \dot{\alpha} (-2 \cos \beta \sin \beta \dot{\beta}) + I_g^{z_1'} \ddot{\alpha} \sin^2 \beta \right.$$

$$\left. + I_g^{z_1'} \dot{\alpha} (2 \cos \beta \sin \beta \dot{\beta}) \right) + 2$$

$$* \left( m_f h_f^2 \ddot{\alpha} + I_f^{x_1'} \ddot{\alpha} \cos^2 \beta + I_f^{x_1'} \dot{\alpha} (-2 \cos \beta \sin \beta \dot{\beta}) + I_f^{z_1'} \ddot{\alpha} \sin^2 \beta \right.$$

$$\left. + I_f^{z_1'} \dot{\alpha} (2 \cos \beta \sin \beta \dot{\beta}) + I_f^{z_1'} \dot{\phi} \cos \beta \dot{\beta} + I_f^{z_1'} \dot{\phi} \sin \beta \right)$$

Agrupando términos se tiene que:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) = \ddot{\alpha} * \left( m_b h_b^2 + I_b^x + 2 m_g h_g^2 + 2 m_f h_f^2 \right) + \left( 2 I_g^{x_1'} + 2 I_f^{x_1'} \right)$$

$$* \left( \ddot{\alpha} \cos^2 \beta - \dot{\alpha} 2 \cos \beta \sin \beta \dot{\beta} \right) + \left( 2 I_g^{z_1'} + 2 I_f^{z_1'} \right)$$

$$* \left( \ddot{\alpha} \sin^2 \beta + \dot{\alpha} 2 \cos \beta \sin \beta \dot{\beta} \right) + 2 I_f^{z_1'} (\dot{\phi} \dot{\beta} \cos \beta + \sin \beta \dot{\phi})$$

También,

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{\partial T}{\partial \alpha} - \frac{\partial U}{\partial \alpha}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = (m_b h_b g + 2 m_f h_f g + 2 m_g h_g g) * -\sin \alpha$$

La ecuación quedaría así:

$$\begin{aligned}
& \ddot{\alpha} * (m_b h_b^2 + I_b^x + 2 m_g h_g^2 + 2 m_f h_f^2) + (2 I_g^{x_1} + 2 I_f^{x_1}) \\
& * (\ddot{\alpha} \cos^2 \beta - \dot{\alpha} 2 \cos \beta \sin \beta \dot{\beta}) + (2 I_g^{z_1} + 2 I_f^{z_1}) \\
& * (\ddot{\alpha} \sin^2 \beta + \dot{\alpha} 2 \cos \beta \sin \beta \dot{\beta}) + 2 I_f^{z_1} (\dot{\varphi} \dot{\beta} \cos \beta + \sin \beta \ddot{\varphi}) \\
& + (m_b h_b g + 2 m_f h_f g + 2 m_g h_g g) * -\sin \alpha = F(t) l \sin \alpha
\end{aligned}$$

Agrupando términos y separando  $\ddot{\alpha}$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\alpha} * (m_b h_b^2 + I_b^x + 2 m_g h_g^2 + 2 m_f h_f^2 + (2 I_g^{x_1} + 2 I_f^{x_1}) \cos^2 \beta \\
& + (2 I_g^{z_1} + 2 I_f^{z_1}) \sin^2 \beta) + (2 I_g^{z_1} + 2 I_f^{z_1} - 2 I_g^{x_1} - 2 I_f^{x_1}) \\
& * (\dot{\alpha} 2 \cos \beta \sin \beta \dot{\beta}) + 2 I_f^{z_1} (\dot{\varphi} \dot{\beta} \cos \beta + \sin \beta \ddot{\varphi}) - (m_b h_b g \\
& + 2 m_f h_f g + 2 m_g h_g g) * \sin \alpha = F(t) l \sin \alpha
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\ddot{\alpha} = \frac{(m_b h_b g + 2 m_f h_f g + 2 m_g h_g g) * \sin \alpha + (2 I_g^{x_1} + 2 I_f^{x_1} - 2 I_g^{z_1} - 2 I_f^{z_1}) * (\dot{\alpha} 2 \cos \beta \sin \beta \dot{\beta}) - 2 I_f^{z_1} (\dot{\varphi} \dot{\beta} \cos \beta + \sin \beta \ddot{\varphi}) + F(t) l \sin \alpha}{(m_b h_b^2 + I_b^x + 2 m_g h_g^2 + 2 m_f h_f^2 + (2 I_g^{x_1} + 2 I_f^{x_1}) \cos^2 \beta + (2 I_g^{z_1} + 2 I_f^{z_1}) \sin^2 \beta)}$$

Dándole nombre a las constantes:

$$m_b h_b g + 2 m_f h_f g + 2 m_g h_g g = C_1$$

$$m_b h_b^2 + 2 m_g h_g^2 + 2 m_f h_f^2 = C_2$$

$$2 I_g^{x_1} + 2 I_f^{x_1} - 2 I_g^{z_1} - 2 I_f^{z_1} = C_3$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{C_1 \sin \alpha + 2 C_3 * (\dot{\alpha} \cos \beta \sin \beta \dot{\beta}) - 2 I_f^{z_1} (\dot{\varphi} \dot{\beta} \cos \beta + \sin \beta \ddot{\varphi}) + F(t) l \sin \alpha}{I_b^x + C_2 + (2 I_g^{x_1} + 2 I_f^{x_1}) \cos^2 \beta + (2 I_g^{z_1} + 2 I_f^{z_1}) \sin^2 \beta}$$

No se aplica Lagrange con respecto a  $\alpha$  ya que esta es la variable a ser controlada, tanto el ángulo como sus derivadas.

Hay que tener en cuenta que al aumentar o disminuir  $\beta$ , el torque de precesión no se aplica únicamente en el eje X, este empieza a tener componente en el eje Z. Este efecto no es deseado ya que contribuiría a un desequilibrio en la bicicleta. En ambos modelos al asumir que las ruedas poseen suficiente fricción este efecto se desprecia, pero es importante tenerlo en cuenta. En *Control Moment Gyroscope Stabilization and Maneuverability of Inherently Unstable Vehicles and Mobile Robots* sugiere que el ángulo  $\beta$  no supere los  $\pm 45^\circ$  ya que pasado este ángulo la componente del torque en Z supera a la componente en X. Por lo que en el momento de aplicar el control lo deseable es que el CMG regrese a su posición inicial  $\alpha = 0^\circ$  lentamente para no afectar la estabilidad.

### 3.3 Breve comparación de ambos modelos.

Se observa que ambos modelos son similares, diferenciándose únicamente en el multiplicador 2, el cual es resultado de tener dos CMG. Esto nos dice que, con las consideraciones hechas, no importa la orientación de los ejes de giro del CMG, el efecto es el mismo. La variante se encuentra en los efectos no deseados y las alturas de los centros de masa.

En el siguiente cuadro se verá lado a lado cada modelo

**Tabla 5.** Cuadro comparativo de ambos modelos. Fuente: Elaboración propia

Modelo por Harun Yetkin	$\ddot{\alpha} = \frac{K_1 g \sin \alpha + 2I * (\dot{\alpha} \cos \beta \sin \beta \dot{\beta}) - I_{fy}(\dot{\phi} \dot{\beta} \cos \beta) + d(t) h_b \sin \alpha}{I_{bx} + K_2 + (I_{gx} + I_{fx}) \cos^2 \beta + (I_{gy} + I_{fy}) \sin^2 \beta}$
Modelo del sistema propuesto	$\ddot{\alpha} = \frac{C_1 \sin \alpha + 2C_3 * (\dot{\alpha} \cos \beta \sin \beta \dot{\beta}) - 2 I_f^{z1}(\dot{\phi} \dot{\beta} \cos \beta + \sin \beta \ddot{\phi}) + F(t) l \sin \alpha}{I_b^x + C_2 + (2 I_g^{x1} + 2 I_f^{x1}) \cos^2 \beta + (2 I_g^{z1} + 2 I_f^{z1}) \sin^2 \beta}$

Donde:

$$m_b h_b + m_f h_f + m_g h_g = K_1$$

$$m_b h_b^2 + m_g h_g^2 + m_f h_f^2 = K_2$$

$$I_{gx} + I_{fx} - I_{gy} - I_{fy} = I$$

$$m_b h_b g + 2 m_f h_f g + 2 m_g h_g g = C_1$$

$$m_b h_b^2 + 2 m_g h_g^2 + 2 m_f h_f^2 = C_2$$

$$2 I_g^{x'} + 2 I_f^{x'} - 2 I_g^{z'} - 2 I_f^{z'} = C_3$$

Nótese que se mantendrá la velocidad de la volante constante por lo que  $\ddot{\phi}=0$ .

De ambas ecuaciones se puede observar que:

- El término con la aceleración de la gravedad, el cual hace referencia al peso del sistema actuando para desequilibrar a la bicicleta y el término con la velocidad angular de la volante  $\dot{\phi}$  tienen signos opuestos, esto se debe a que uno contrarresta al otro. En nuestro caso sería el torque producido por el CMG el que vence al torque producido por la gravedad para estabilizar el sistema y llevarlo a su posición de equilibrio.
- El torque producido por el CMG el cual posee esta forma  $I_f^{z'} \dot{\phi} \dot{\beta} \cos \beta$ , depende tanto de la inercia de la volante, velocidad angular de la volante como la del gimbal, y al ser directamente proporcionales, si cualquiera de los términos aumenta, más torque se producirá. Sin embargo, también significaría mayor gasto de energía para aumentar de velocidad o al mover una mayor inercia.
- Se observa lo que se mencionó anteriormente, el término  $I_f^{z'} \dot{\phi} \dot{\beta} \cos \beta$ , que se refiere al torque producido por el CMG depende de  $\cos \beta$ , esto quiere decir que a mayor ángulo del gimbal menor será el torque que contrarreste a la gravedad y se requerirá aumentar los demás términos, resultando en un



sistema ineficiente. Nótese que al llegar  $\beta = 0^\circ$  el torque se hará cero, incrementando la aceleración de  $\alpha$  y habiendo un mayor desequilibrio.

- Con un centro de masa más bajo, habrá un menor torque producido por la gravedad, siendo más fácil estabilizar la bicicleta.
- En caso exista un aumento de masa (para generar mayor inercia en la volante), se generará un mayor torque producido por la gravedad. Es decir, se necesitará un mayor torque estabilizador.
- El signo de la fuerza de perturbación posee el mismo signo que el término de la gravedad, esto es porque también contribuye al desequilibrio del sistema.

## ***CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE LA MEJORA DE LA ESTABILIDAD DE LA BICICLETA***

Ambos modelos al ser parecidos se procederá a analizar como afectara el que hallan dos CMG, además del efecto que tendrán al colocarlos a una mayor altura.

Para un mejor análisis se definen unos criterios los cuales nos ayudaran a analizar el comportamiento del sistema como vehículo de transporte. Los criterios abarcan desde que tan bien funciona el sistema estabilizante hasta que tan complicada seria la construcción de la bicicleta.

Los criterios son los siguientes:

- a) Torque de precesión (torque estabilizador):** Es el torque generado por el CMG, el cual contrarresta al de la gravedad y evita el desequilibrio de la bicicleta.
- b) Tamaño y peso:** Dentro de las características de un vehículo de dos ruedas, el tamaño y el peso son las cualidades más importantes. Si el vehículo es muy grande o muy pesado perdería maniobrabilidad y practicidad.
- c) Potencia consumida por el giroscopio:** Se refiere a toda la potencia que consume el CMG; este parámetro es muy importante, ya que al ser un vehículo eléctrico necesita de un sistema eficiente para recorrer una mayor distancia. La potencia se calculará sumando las potencias del motor para acelerar la volante a la velocidad requerida y para vencer la fricción, y la del motor del gimbal que estará en constante movimiento para equilibrar la bicicleta
- d) Facilidad de fabricación:** Se refiere a la facilidad de construir la bicicleta y los CMG. Además, de conseguir las piezas y del número de piezas. Se hará un análisis cualitativo de este parámetro
- e) Velocidad angular del volante del giroscopio (rangos permisibles):** Se encontrarán los rangos permisibles de la velocidad angular de la volante, dentro de ese rango el sistema deberá funcionar como lo esperado y sin tener

que girar a velocidades demasiado altas, ya que esto significaría colocar un motor muy potente, el cual además de ser pesado es costoso.

## Torque de precesión (torque estabilizador)

En ambos modelos se puede observar cual es el torque generado por el CMG. Este es para cada modelo:

### Modelo de Yetkin

$$I_{fy}(\dot{\phi} \dot{\beta} \cos \beta)$$

### Modelo propuesto

$$2 I_f^{z_1'}(\dot{\phi} \dot{\beta} \cos \beta)$$

Se observa que el torque del modelo propuesto es el doble, mientras ambos tengan el mismo flywheel. Esto era de esperarse ya que hay 2 volantes actuando sobre el sistema.

## Tamaño y peso

El modelo propuesto se espera que tenga un menor tamaño ya que al tener dos CMG, estos se pueden poner a lo largo del vehículo, ocupando menor espacio. En términos de peso, se analizará el caso en que ambos tengan el mismo torque estabilizante. La inercia del flywheel, cuya geometría se asemeja a un cilindro es  $\frac{m \cdot R^2}{2}$  siendo m la masa del flywheel y R el radio. Si asumimos que la masa de la volante es dada por  $m = u \cdot V$ , donde u es una constante del material y V es el volumen del cilindro, la relación entre el aumento del radio con el de la masa tiene función cuadrática.

Igualando torques y velocidades:

Modelo propuesto:                      Radio= R                      Masa=  $u \cdot \pi \cdot R^2 \cdot l$

Al haber dos flywheel:                      Masa=  $2 \cdot u \cdot \pi \cdot R^2 \cdot l = 2 \cdot m \cdot R^2$

Inercia=  $m \cdot R^4$

Modelo de Yetkin:                      Radio= $r$                       Masa= $u * \pi * r^2 * l = m * r^2$

Igualando torques:

$$m * R^4 = m * r^4 / 2$$

Se tiene que:

$$r = \sqrt[4]{2} * R$$

Entonces las masa quedarían

Modelo propuesto:                       $2 * m * R^2$

Modelo de Yetkin:                       $2 * m * R^2$

Ambas masas son iguales, sin embargo, en el modelo propuesto la masa de cada volante es la mitad. La diferencia radica en el radio, siendo en el modelo de Yetkin 1.2 veces el valor del radio de la volante del modelo propuesto.

## Potencia consumida por el giroscopio

No se cuenta con un método exacto para medir la potencia consumida; sin embargo, con el fin de comparar ambos modelos, la masa de cada volante será el indicador principal, las cuales en movimiento consumirían dicha potencia.

La mayor potencia se consumirá en el motor del gimbal dado que la volante se mantendrá a velocidad constante.

En el apartado de tamaño y peso se concluye que la volante del modelo de Yetkin siempre tendrá más masa que cada volante del modelo propuesto. Sin embargo, en el modelo propuesto se moverán dos volantes. El torque realizado por el motor del gimbal consumirá potencia proporcional a la inercia de la volante en ese eje. Despreciando el espesor de la volante, la inercia se da con la siguiente fórmula:

$\frac{\text{masa} * (\text{radio})^2}{4}$ . Entonces la inercia total se cada modelo es:

$$\text{Modelo propuesto} = 2 * \frac{m * (R)^2 * (R)^2}{4} = 0.5 * m * (R)^4$$

$$\text{Modelo de Yetkin} = \frac{(2 * m * (R)^2) * (1.2 * R)^2}{4} = 0.72 * m * (R)^4$$

La inercia del modelo de Yetkin es el doble, por lo que consumirá mayor potencia.

### **Facilidad de fabricación**

El modelo propuesto posee dos volantes; por lo tanto, se tendrá que usar el doble de piezas, pero con motores de menor capacidad.

## ***CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES***

- ✓ La magnitud del torque estabilizante generado por el Control Moment Gyroscope es independiente al eje al que se encuentra orientado la volante y el gimbal. Ello se evidencia en la contrastación de los modelos, cuyas expresiones  $I_{fy}(\dot{\phi} \dot{\beta} \cos \beta)$  y  $2 I_f^{z_1'}(\dot{\phi} \dot{\beta} \cos \beta)$  no dependen de la orientación del eje de giro.
- ✓ Viendo el cuadro comparativo de los modelos estudiados, la altura con respecto al piso a la que se encuentre el CMG no es una variable determinante en el cálculo del torque de precesión, el cual para diferentes configuraciones permanecerá constante. La altura solo afecta al centro de gravedad del sistema, es decir, al torque generado por la gravedad (desestabilizante).
- ✓ Dado que el torque de precesión es función de la inercia:  $2 I_f^{z_1'}(\dot{\phi} \dot{\beta} \cos \beta)$ , la cual tiene dependencia cuadrática con el radio; la geometría (radio medio) de la volante jugará un rol más importante que su masa.
- ✓ El sistema del CMG será totalmente automatizado, se deberá medir con sensores  $\beta$  y sus derivadas
- ✓ En el análisis realizado de ambos modelos, se concluye que el modelo propuesto tendría un mejor comportamiento como vehículo de transporte. Si bien posee un mayor peso y una mayor complejidad de fabricación, es de menor tamaño, más eficiente y la potencia de los motores requeridos es menor, haciéndolos más sencillos de conseguir y menos costosos.

## **BIBLIOGRAFÍA**

- Eriksson, A. (2013). Seguridad en el tráfico y percepción de seguridad- Cómo ir en bicicleta y sobrevivir. Municipio de Copenhague (Dinamarca). Libro: Ciclistas y ciclismo alrededor del mundo.
- Herlihy, D. (2005). *Bicycle: The History. Technology and Culture* (Vol. 46). Recuperado de: <<https://doi.org/10.1353/tech.2005.0156>>
- Kalouche, S. (2014). *Control Moment Gyroscope Stabilization and Maneuverability of Inherently Unstable Vehicles and Mobile Robots* (tesis de pregrado). The Ohio State University, Estados Unidos.
- Karthikeyan, KC. (2016). How Reaction Wheels and Control Moment Gyros Work?. Consulta: 22 de febrero de 2018. Recuperado de: <<https://geekswipe.net/technology/aerospace/how-reaction-wheels-and-control-moment-gyros-work/>>
- Soluciones Ambientales. (2008). Uso y beneficios de la bicicleta.
- Van Biezen, M. [Michel van Biezen]. (2016, Febrero 8). Physics - Mechanics: The Gyroscope (3 of 5) The Torque of a Spinning Gyroscope [Archivo de video]. Recuperado de: <[https://www.youtube.com/watch?v=qS\\_dcNqs3d4](https://www.youtube.com/watch?v=qS_dcNqs3d4)>
- Vivek Nagabhushan (2009). Development of Control Moment Gyroscopes for Attitude Control of Small Satellites (Tesis de postgrado). University of Florida, Estados Unidos.

- Votel, Ronny & Sinclair, Doug. (2012). SSC12-X-1 Comparison of Control Moment Gyros and Reaction Wheels for Small Earth-Observing Satellites.
  
- Wolfe, E. S., Arabian, S. S., Breeze, J. L., & Salzler, M. J. (2017). Distracted Biking: An Observational Study, *38*(3), 1-22.  
<https://doi.org/10.1097/JTN.0000000000000188>
  
- Yetkin, H., Kalouche, S., Vernier, M., Colvin, G., Redmill, K. y Ozguner, U. (2014). Gyroscopic Stabilization of an Unmanned Bicycle. American Control Conference. doi: 10.1109/ACC.2014.6859392