

CÁTEDRA JOSÉ TOLA PASQUEL

Introducción a la Geometría Analítica Local

Felipe Cano Torres

Editor y Redactor: Francisco Ugarte Guerra



El Dr. Felipe Cano Torres es Catedrático de la Universidad de Valladolid, Director del Centro Tordesillas de Relaciones con Iberoamérica de la Universidad de Valladolid y codirector del grupo de investigación Ecuaciones y Singularidades (ECSING); reconocido como grupo de excelencia por la Junta de Castilla y León.

El Dr. Cano ha pertenecido al comité editorial de la Revista: Ann. Scient. Fac. Sci. Toulouse entre los años 1996 – 2002.

Ha participado como miembro de tribunales de tesis doctorales en las universidades: de Bourgogne, de Rennes, de Lisboa, de Bilbao y de la Autónoma de Barcelona.

El Dr. Cano es reconocido como uno de los mejores especialistas en la resolución de singularidades.

A sugerencia de H. Hironaka y utilizando un método radicalmente nuevo a la resolución de singularidades en característica positiva, resolvió las singularidades de formas diferenciales junto con su maestro el Dr. J.M. Aroca, profesor honorario de la PUCP (2001) y Cátedra José Tola Pasquel 2009.

Introducción a la Geometría Analítica Local

Felipe Cano Torres
Editor y Redactor: Francisco Ugarte Guerra

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS
SECCIÓN MATEMÁTICAS

Introducción a la Geometría Analítica Local

Felipe Cano Torres

Editor y Redactor: Francisco Ugarte Guerra

Copyright© 2011 Departamento de Ciencias, Sección Matemáticas

Pontificia Universidad Católica del Perú

Av. Universitaria 1801, San Miguel

Teléfono: 6262000

Correo electrónico: publicacionesdac@pucp.edu.pe

<http://www.pucp.edu.pe>

Derechos reservados, prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores.

Primera edición: julio de 2011

100 ejemplares

Impreso en Perú - Printed in Peru

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N°2011-07746

ISBN:978-612-45391-4-5

Diseño de cubierta e impresión: R & F Publicaciones y Servicios S.A.C.

Diagramación de interiores: los autores

Índice general

1. El espacio ambiente	9
1.1. Variedades analíticas	11
1.2. Haces de funciones	11
1.3. Ejemplos	13
1.4. Espacios anillados	19
1.5. Gérmenes de espacio ambiente	21
1.6. El espacio proyectivo	24
1.7. La explosión de un punto	27
2. Anillos de series	31
2.1. El teorema de preparación de Weierstrass	33
2.2. Consecuencias del teorema de preparación	35
2.3. El lema de Hensel	37
2.4. El cono tangente de una curva plana	39
3. Gérmenes de curvas analíticas	41
3.1. La multiplicidad, ramas y puntos singulares	42
3.2. Explosiones y curvas analíticas	43
3.3. Reducción de singularidades	45
3.4. Uniformización local	49
3.5. Estrategia para la uniformización local.	51
3.6. El poliedro de Newton y el juego de Hironaka	52
3.7. El caso libre	55
3.8. El polígono de Newton-Puiseux	56

4. Equisingularidad	61
4.1. El grafo dual	61
4.2. Estructura cónica de las singularidades	64
4.3. Equivalencia topológica de gérmenes de curvas	65
4.4. Topología y equisingularidad	67
4.5. El estrato de Samuel y las explosiones permitidas	71
4.6. La estrategia global	73
4.7. Contacto maximal vertical	77
4.8. El juego fuerte de Hironaka en dos variables	80
5. Uniformización local	83
5.1. Enunciados	84
5.2. Paquetes de Puiseux de explosiones	87
5.3. Primeras reducciones e inducción	88
5.4. El juego de Hironaka	91
5.5. Rango racional máximo	92
5.6. El polígono de Newton-Puiseux	93
5.7. El invariante de control	94
5.8. Estabilidad del invariante de control	97
5.9. Contacto maximal	100

Presentación

Este libro es el resultado del curso denominado *Introducción a la Geometría Analítica Local*, que se ofreció en el marco de la Cátedra José Tola Pasquel 2010 y que estuvo a cargo del Dr. Felipe Cano Torres, catedrático de la Universidad de Valladolid, Director del Centro Tordesillas de Relaciones con Iberoamérica de la misma Universidad y codirector del grupo de investigación Ecuaciones y Singularidades (ECSING), reconocido como grupo de excelencia por la Junta de Castilla y León.

Como organizador de la Cátedra José Tola Pasquel 2010, me produce una gran satisfacción el haber concretado la publicación de este libro, que contiene los temas que fueron tratados en las 30 horas que duró el curso, pues ahora estarán a disposición de todos los estudiantes y matemáticos del Perú que tengan interés por iniciarse en estos temas.

Quiero agradecer a la Dra. Nadia Gamboa y al Dr. César Carranza, Jefa y Director de la Oficina de Publicaciones del Departamento de Ciencias, respectivamente, por haberme nombrado representante de la Sección Matemática ante esta Oficina a lo largo de estos años. Finalmente quiero dejar constancia que gracias al Vicerectorado de investigación, al Proyecto DGI0090-2010 y al grupo ECSING, que financiaron parcialmente mi estadía en la Universidad de Valladolid, pude colaborar con el Dr. F. Cano en la redacción de este libro e impulsar su finalización.

Dr. Francisco Ugarte Guerra

Introducción

Estas notas han servido de base para el curso *Introducción a la geometría analítica local*, impartido en setiembre-octubre 2010 en la Pontificia Universidad Católica del Perú. No pretenden desarrollar un curso exhaustivo sobre anillos de series, ni sobre curvas singulares, foliaciones, ni mucho menos sobre la geometría analítica local. Para estos objetivos hay manuales muy completos que no pretendo emular aquí, aún cuando, para ayuda del lector, daré una lista seleccionada en la bibliografía.

Lo que desearía es mantener el espíritu de las exposiciones del curso, ir descubriendo de manera natural los objetos básicos de la geometría analítica local compleja (también en muchos casos real), a partir de preguntas también naturales. Mi idea, el lector dirá si lo consigo, es ir remontando las dificultades a medida que se van planteando a partir de preguntas geométricas elementales.

Lo único que deseo es estimular la curiosidad del lector, y así se sienta motivado para una aventura de conocimiento en estos temas.

Dr. Felipe Cano Torres

Capítulo 1

El espacio ambiente

En geometría suele existir un *espacio ambiente* M , en el cual colocamos los objetos de nuestro estudio, por ejemplo rectas, curvas, subvariedades, campos de vectores, fibrados, sistemas dinámicos, etc. El espacio ambiente pertenece a una *categoría*, como puede ser la categoría de espacios vectoriales, de espacios afines, de variedades diferenciables, de variedades analíticas reales o complejas, de variedades algebraicas, de esquemas. La categoría determina el tipo de transformaciones (los isomorfismos) que son considerados admisibles, así las propiedades de los espacios vectoriales son las que persisten por aplicaciones lineales, las de las variedades diferenciables por difeomorfismos, las de las variedades riemannianas por isometrías.

El espacio ambiente tiene una consideración eminentemente “global”, ya que efectivamente pensamos colocar en él todos los objetos de estudio. Muy frecuentemente es el espacio euclídeo \mathbb{R}^n ó \mathbb{C}^n (aunque este nombre esté reservado para otras estructuras específicas). Ahora bien, en \mathbb{C}^n concurren muchas estructuras diferentes y esto es causa de cierta confusión. Por ejemplo, tenemos la estructura de espacio vectorial de \mathbb{C}^n , en la que hay una suma y una multiplicación por escalares complejos; en esta el origen $(0, 0, \dots, 0)$ tiene una consideración privilegiada como el elemento neutro de la suma, las rectas y los subespacios pasan todos por este elemento. Está la estructura de espacio afín, similar pero podemos tener rectas paralelas y así no todas ellas pasan por el origen. También podemos considerar \mathbb{C}^n como un espacio topológico con la topología usual y entonces los homeomorfismos no tienen por qué ser lineales. La estructura que consideraremos aquí será la de variedad analítica compleja,

sin perder de vista la de variedad algebraica.

En todo caso, el espacio ambiente por excelencia es el espacio proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$. Contiene el hiperplano del infinito: el lugar donde “se van a encontrar” las rectas paralelas. Lo consideraremos dotado de estructura de variedad algebraica o de variedad analítica compleja. En el contexto real también el espacio proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ es un ambiente global muy utilizado, aunque en este caso en competencia directa con las esferas \mathbb{S}^n , por su falta de orientabilidad en ciertas dimensiones.

Merece la pena recordar brevemente la definición de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, para familiarizarnos con su tratamiento. Se trata del conjunto de rectas vectoriales de \mathbb{C}^{n+1} . Así, existe una aplicación canónica

$$p : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$$

que a cada $z = (z_0, z_1, \dots, z_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ le hace corresponder la recta vectorial $p(z) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ que contiene z . Denotemos por

$$[z_0, z_1, \dots, z_n] = [z] = p(z).$$

Diremos que z_0, z_1, \dots, z_n son las *coordenadas homogéneas* de $p(z)$. Evidentemente, dos juegos de coordenadas homogéneas para un mismo punto proyectivo son proporcionales.

El espacio proyectivo puede ser recubierto por una colección de $n+1$ cartas afines. De modo preciso, si denotamos

$$U_i = \{[z]; z_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

tenemos una identificación

$$\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$$

dada por $\phi_i([z]) = (z_0/z_i, z_1/z_i, \dots, z_{i-1}/z_i, z_{i+1}/z_i, \dots, z_n/z_i)$. Así podemos “leer” en cartas coordenadas las zonas del proyectivo. Una importante observación es que los cambios de carta $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ están dados por funciones racionales, lo que permite dotar a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ de estructura de variedad algebraica, además de la estructura de variedad analítica compleja. Ni que decir tiene que las construcciones anteriores son también válidas en el caso del espacio proyectivo real $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$.

1.1. Variedades analíticas

De forma totalmente general, nuestro espacio ambiente M será una *variedad analítica compleja*, o real en su caso. Precisemos aquí la definición de estos objetos y lo que se entiende por morfismos entre ellos, es decir, la *categoría de variedades analíticas complejas*.

Una variedad analítica M tiene dos partes diferenciadas. En primer lugar está el *soporte topológico* $|M|$, que frecuentemente se denota M si no hay necesidad de precisar más. Se trata de un espacio topológico localmente isomorfo a un espacio euclídeo, esto es, cada punto $p \in M$ tiene un entorno abierto U que es homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^d , donde d es un número que se da por fijado y es la dimensión real de M . Una propiedad que se exige generalmente es que sea *Haussdorf*, esto es, dado un par de puntos p, q hay un entorno de p y otro de q que no se cortan. En segundo lugar, está el *haz estructural de funciones* \mathcal{O}_M . Dicho haz confiere la estructura diferencial a M y esencialmente reúne los datos de las funciones analíticas definidas en abiertos de M .

Para ser más preciso, una variedad analítica real o compleja será un tipo particular de *espacio anillado en anillos locales de funciones*, que será localmente isomorfa a un abierto de un espacio euclídeo. En las próximas secciones desarrollaremos estos conceptos.

1.2. Haces de funciones

Recordemos brevemente lo que es un *haz de funciones reales o complejas sobre un espacio topológico* X . Para poder tratar simultáneamente el caso real y el complejo, denotemos por \mathbb{K} el cuerpo real \mathbb{R} o el cuerpo complejo \mathbb{C} . Un haz de \mathbb{K} -funciones \mathcal{O}_X se define como una asignación

$$U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$$

que a cada abierto no vacío U del espacio topológico X le asocia una \mathbb{K} -álgebra de funciones $\mathcal{O}_X(U)$ definidas en U . Esto último quiere decir que los elementos g de $\mathcal{O}_X(U)$ son funciones

$$g : U \rightarrow \mathbb{K}.$$

Las propiedades fundamentales de un haz de funciones son las siguientes

- *Restricción.* Dados dos abiertos $U \supset V$ de X , las asignaciones

$$U \mapsto \mathcal{O}_X(U); \quad V \mapsto \mathcal{O}_X(V)$$

son compatibles con la restricción usual de funciones. Es decir, si g es un elemento de $\mathcal{O}_X(U)$ entonces su restricción $g|_V$ es un elemento de $\mathcal{O}_X(V)$. Observemos que, dado que trabajamos con funciones, se tiene el siguiente resultado de *determinación de las secciones por datos locales*:

Si $U = \cup_{i \in I} V_i$ y $g, g' \in \mathcal{O}_X(U)$ son tales que $g|_{V_i} = g'|_{V_i}$ para todo $i \in I$, entonces $g = g'$.

- *Pegado de datos locales.* Supongamos que $U = \cup_{i \in I} V_i$ y que seleccionamos $g_i \in \mathcal{O}_X(V_i)$ para cada $i \in I$ de modo que

$$g_i|_{V_i \cap V_j} = g_j|_{V_i \cap V_j}, \quad \text{para todo } i, j \in I.$$

Entonces existe $g \in \mathcal{O}_X(U)$ (necesariamente única) tal que $g|_{V_i} = g_i$ para todo $i \in I$.

Diremos que un haz de funciones es un *haz de \mathbb{K} -álgebras* si cada $\mathcal{O}_X(U)$ es una \mathbb{K} -álgebra, para las operaciones naturales de funciones sobre \mathbb{K} . Precisando, debe ocurrir que

1. Las funciones constantes $U \mapsto \mathbb{K}$ pertenecen a $\mathcal{O}_X(U)$. En particular, la función cero es el elemento neutro para la suma y la función constante igual a 1 es el elemento neutro para la multiplicación.
2. Si $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$, entonces $f - g \in \mathcal{O}_X(U)$.
3. Si $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$, entonces $fg \in \mathcal{O}_X(U)$.

Una observación que se cumple en nuestro caso, pero importante en contextos más generales, es que las aplicaciones de restricción

$$\rho_{UV} : \mathcal{O}_X(U) \mapsto \mathcal{O}_X(V), \quad (U \supset V)$$

son homomorfismos de \mathbb{K} -álgebras.

En todo haz, dado un punto $p \in X$ se puede definir *la fibra en p* , que denotaremos por $\mathcal{O}_{X,p}$ como el conjunto cociente

$$\mathcal{O}_{X,p} = \bigcup_{U \ni p} \{U\} \times \mathcal{O}_X(U) / \sim$$

donde \sim es la relación de equivalencia que determina el concepto de *germen de función en p* , es decir

$$(U, g) \sim (U', g') \Leftrightarrow \text{existe } p \in V \subset U \cap U', \text{ tal que } g|_V = g'|_V.$$

Si \mathcal{O}_X es un haz de \mathbb{K} -álgebras, entonces la fibra $\mathcal{O}_{X,p}$ tiene también estructura de \mathbb{K} -álgebra. La suma y el producto de gérmenes de funciones se realiza tomando representantes en un entorno común del punto p .

Recordemos que un anillo conmutativo con unidad A se dice *local* si tiene un único ideal propio maximal $\mathcal{M} \subset A$. Es útil saber que un anillo es local si y solo si el conjunto de no unidades es un ideal, que precisamente coincidirá con su ideal maximal. Diremos que \mathcal{O}_X es un *haz de \mathbb{K} -álgebras locales* si cada fibra $\mathcal{O}_{X,p}$ es un anillo local. En nuestro contexto esta propiedad tiene una interpretación interesante. En efecto, dado $U \ni p$, podemos considerar el homomorfismo de evaluación

$$e_{U,p} : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathbb{K}; \quad g \mapsto g(p).$$

Tiene un núcleo $\mathcal{M}_{p,U}$ que es un ideal maximal, puesto que se trata de un homomorfismo de anillos con llegada en un cuerpo. Asimismo este homomorfismo se extiende a la fibra

$$e_p : \mathcal{O}_{X,p} \rightarrow \mathbb{K}; \quad (U, g) \sim \mapsto g(p)$$

y tiene como núcleo un ideal maximal \mathcal{M}_p . Si \mathcal{M}_p es el único ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,p}$, esto quiere decir que todo germen \mathbf{g} representado por (U, g) con $g(p) \neq 0$ es *invertible*, es decir, existe un representante (V, h) , con $p \in V \subset U$ tal que $h(g|_V) = 1$, en particular $g|_V$ es invertible en $\mathcal{O}_X(V)$.

1.3. Ejemplos

Demos a continuación algunos ejemplos de haces de haces de \mathbb{K} -álgebras locales de funciones \mathcal{O}_X .

Para cualquier espacio topológico X , sea tan general o “exótico” como queramos, el haz de las funciones continuas \mathcal{C}_X^0 en \mathbb{K} es un haz de \mathbb{K} -álgebras locales de funciones. Para ello basta observar que las operaciones en \mathbb{K} son continuas, esto permite obtener la estructura de \mathbb{K} -álgebra de $\mathcal{C}_X^0(U)$, así como

que la propiedad de ser continua es una propiedad *local*, verificable en entornos pequeños, lo que asegura las propiedades de restricción y de determinación de las secciones por datos locales. El hecho de que la fibra $\mathcal{C}_{X,p}^0$ sea un anillo local se sigue de que toda función continua $g : U \rightarrow \mathbb{K}$ con $g(p) \neq 0$ es localmente inversible como función continua, basta componer con $z \mapsto 1/z$ en $g^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$.

Otro ejemplo es el de una variedad diferenciable. Recordemos que una variedad diferenciable es un espacio topológico M provisto de un atlas \mathcal{A} cuyos elementos son cartas

$$\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

que son homeomorfismos entre un abierto de M (el dominio de la carta) y un abierto de \mathbb{R}^n , de modo que los dominios recubren todo M y los cambios de carta

$$\phi(U \cap U') \xrightarrow{\phi^{-1}} U \cap U' \xrightarrow{\phi'} \phi'(U \cap U')$$

definen aplicaciones de clase \mathcal{C}^∞ entre abiertos de \mathbb{R}^n . Dado un abierto W de M , una función $g : W \rightarrow \mathbb{R}$ se dice diferenciable si para cada punto $p \in W$ existe una carta $\phi : U \rightarrow V$ con $p \in U$ de modo que la función

$$\phi(W \cap U) \xrightarrow{\phi^{-1}} W \cap U \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

sea de clase \mathcal{C}^∞ . Los mismos argumentos que han servido en el caso de funciones continuas nos permiten construir el haz \mathcal{C}_M^∞ de gérmenes de funciones diferenciables en M , que es un haz de \mathbb{R} -álgebras locales de funciones. Nótese que denotamos por $\mathcal{C}_M^\infty(W)$ la \mathbb{R} -álgebra de funciones diferenciables definidas en W .

Denotemos por $\mathbb{R}[[t_1, t_2, \dots, t_n]]$ el anillo de series de potencias formales en n variables t_1, t_2, \dots, t_n ; es decir, sus elementos son expresiones formales

$$\sigma = \sum_{I=(i_1, i_2, \dots, i_n)} c_I t_1^{i_1} t_2^{i_2} \dots t_n^{i_n},$$

que se suman y multiplican invocando las reglas habituales para los polinomios y observando que para obtener cada coeficiente solo es necesaria la intervención de un número finito de coeficientes de los sumandos o factores.

Sea M es una variedad diferenciable. Fijemos $p \in M$ y una carta local $\phi : U \rightarrow V$ tal que $\phi(p) = \mathbf{0}$. Entonces podemos establecer un homomorfismo de \mathbb{R} -álgebras

$$\tau_{\phi,p} : \mathcal{C}_{M,p}^\infty \rightarrow \mathbb{R}[[t_1, t_2, \dots, t_n]]$$

donde $\tau_{\phi,p}(\mathbf{g})$ denota el desarrollo de Taylor en el origen de $g \circ \phi^{-1}$, donde g es un representante de \mathbf{g} . Sabemos que $\tau_{\phi,p}$ es suprayectivo, pero no inyectivo, su núcleo está formado por los gérmenes de *funciones planas* en p y no depende de la carta elegida. (Una observación curiosa, aunque poco interesante pues se suele ver a la inversa, es que como consecuencia se tiene que $\mathbb{R}[[t_1, t_2, \dots, t_n]]$ es local, pues la existencia de un morfismo sobre de anillos $A \rightarrow B$, donde A es local, garantiza que B también es local).

Incidentalmente, diremos que una clase *casi-analítica de funciones* es un anillo de funciones con una aplicación inyectiva en $\mathbb{R}[[t_1, t_2, \dots, t_n]]$. Estos tipos de familias de funciones son útiles en las ampliaciones o -minimales de la teorías de conjuntos semi y subanalíticos de \mathbb{R}^n , aunque aquí no entraremos en esos temas.

Una serie de potencias formal

$$\sigma = \sum_{I=(i_1, i_2, \dots, i_n)} c_I t_1^{i_1} t_2^{i_2} \cdots t_n^{i_n}, \quad c_I \in \mathbb{R},$$

es *convergente* si existe un multirradio $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$, con $\rho_i > 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$ de manera que la serie

$$\sigma = \sum_{I=(i_1, i_2, \dots, i_n)} |c_I| \rho_1^{i_1} \rho_2^{i_2} \cdots \rho_n^{i_n},$$

sea convergente. Esto último se entiende en el sentido de convergencia (absoluta) de series de elementos positivos: las sumas parciales tienden hacia un límite. En estas condiciones, para cada multivalor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ con $|a_i| < \rho_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$ existe una suma bien definida

$$s_\sigma(\mathbf{a}) = \sum_{I=(i_1, i_2, \dots, i_n)} c_I a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_n^{i_n}.$$

Queda así establecida una función $s_\sigma : \Delta(\rho) \rightarrow \mathbb{R}$, donde

$$\Delta(\rho) = \{\mathbf{a}; |a_i| < \rho_i, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Recordemos las propiedades de esta función:

1. Es una función de clase \mathcal{C}^∞ en cada punto de $\Delta(\rho)$.
2. El desarrollo de Taylor en el origen de s_σ es σ .

3. El desarrollo de Taylor en un punto $\mathbf{a} \in \Delta(\rho)$ de s_σ está dado por la identificación

$$\sum_I c_I^{\mathbf{a}} (t_1 - a_1)^{i_1} (t_2 - a_2)^{i_2} \dots (t_n - a_n)^{i_n} = \sum_I c_I t_1^{i_1} t_2^{i_2} \dots t_n^{i_n}.$$

Esta identificación se puede hacer porque las sumas parciales necesarias son suma de series convergentes.

4. Para cada $\mathbf{a} \in \Delta$ la serie $\sigma^{\mathbf{a}} = \sum_I c_I^{\mathbf{a}} t_1^{i_1} t_2^{i_2} \dots t_n^{i_n}$ es convergente y define una función $s_{\sigma^{\mathbf{a}}}$ que cumple

$$s_{\sigma^{\mathbf{a}}} \circ T_{\mathbf{a}} = s_\sigma$$

en un entorno de \mathbf{a} , donde $T_{\mathbf{a}} : \mathbf{b} \mapsto \mathbf{b} - \mathbf{a}$.

Denotaremos por $\mathbb{R}\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ el anillo de las series convergentes.

Consideremos un abierto V de \mathbb{R}^n con $\mathbf{0} \in V$. Diremos que una función $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ es *analítica en \mathbf{a}* si $f \circ T_{\mathbf{a}}$ es la suma de una serie convergente centrada en el origen. La función es analítica si lo es en cada punto. A la vista de las propiedades enunciadas en el párrafo anterior, si V es conexo y f, f' son dos funciones analíticas en V con el mismo germen en un punto $\mathbf{a} \in V$, entonces $f = f'$.

Ahora ya podemos dar una definición de *variedad analítica real*. Diremos que M es una variedad analítica real si es una variedad diferenciable con un atlas tal que los cambios de cartas definan por proyección funciones analíticas. Esto es, las funciones

$$\phi(U \cap U') \xrightarrow{\phi^{-1}} U \cap U' \xrightarrow{\phi'} \phi'(U \cap U') \xrightarrow{\pi_i} \mathbb{R}$$

son analíticas, donde $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la proyección sobre la coordenada i -sima, para $i = 1, 2, \dots, n$. Así, si W es un abierto de M se puede dar la definición de *función analítica definida en W* por lectura de la propiedad en cartas. Obtenemos así el haz \mathcal{O}_M de *gérmenes funciones analíticas* en M . De nuevo los argumentos invocados para el caso continuo y diferenciable son válidos en este contexto (por ejemplo, si f es analítica en p y $f(p) \neq 0$ entonces $1/f$ es analítica en p). Así, tenemos un haz de \mathbb{R} -álgebras locales. Si fijamos una carta ϕ centrada en $p \in M$, el homomorfismo de \mathbb{R} -álgebras

$$\tau_{\phi,p} : \mathcal{O}_{M,p} \rightarrow \mathbb{R}\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$$

es un isomorfismo.

La definición de *variedad analítica compleja* sigue formalmente los mismos pasos que para el caso real, aunque hay propiedades particulares que señalar. Recordemos primero brevemente el concepto de serie de potencias convergente con coeficientes complejos. Una serie de potencias formal

$$\sigma = \sum_I c_I t_1^{i_1} t_2^{i_2} \dots t_n^{i_n}; \quad c_I \in \mathbb{C}$$

se dice *convergente* si la serie de potencias con coeficientes reales positivos dada por

$$|\sigma| = \sum_I |c_I| t_1^{i_1} t_2^{i_2} \dots t_n^{i_n}$$

es convergente, donde $|c_I|$ denota el módulo del número complejo c_I . Es decir,

$$|\sigma| \in \mathbb{R}\{t_1, t_2, \dots, t_n\}.$$

Denotamos, como ya se habrá adivinado, por $\mathbb{C}\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ el anillo de las series de potencias convergentes con coeficientes complejos. Lógicamente se tiene una contención de anillos

$$\mathbb{C}\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subset \mathbb{C}[[t_1, t_2, \dots, t_n]]$$

donde $\mathbb{C}[[t_1, t_2, \dots, t_n]]$ es el anillo de las series de potencias formales con coeficientes complejos. Supongamos que ρ es el multirradio de convergencia de $|\sigma|$ y consideremos el *polidisco* centrado en el origen de multirradio ρ

$$\Delta_{\mathbb{C}}(\rho; \mathbf{0}) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n; |z_i| < \rho_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

Entonces la serie de potencias convergente σ define una función suma

$$s_{\sigma} : \Delta_{\mathbb{C}}(\rho; \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{C},$$

para la que tenemos propiedades similares al caso real, a saber:

1. Si identificamos $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ y entonces $\Delta_{\mathbb{C}}(\rho; \mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^{2n}$, las partes real $\operatorname{Re}(s_{\sigma})$ e imaginaria $\operatorname{Im}(s_{\sigma})$ son funciones de clase \mathcal{C}^{∞} .
2. Podemos expresar formalmente $\sigma = \operatorname{Re}(\sigma) + \sqrt{-1}\operatorname{Im}(\sigma)$. Esta descomposición se obtiene escribiendo las variables $t_i = u_i + \sqrt{-1}v_i$ y los coeficientes $c_i = \operatorname{Re}(c_i) + \sqrt{-1}\operatorname{Im}(c_i)$ y haciendo el desarrollo formal complejo. Entonces tenemos

$$\operatorname{Re}(\sigma), \operatorname{Im}(\sigma) \in \mathbb{R}[[u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n]].$$

Una observación evidente es que si $c_i \in \mathbb{R}$, entonces

$$\operatorname{Re}(\sigma) \in \mathbb{R}[[u_1, u_2, \dots, u_n]]; \quad \operatorname{Im}(\sigma) \in \mathbb{R}[[v_1, v_2, \dots, v_n]].$$

La propiedad que queremos señalar es que el desarrollo de Taylor en el origen de $\operatorname{Re}(s_g)$ es $\operatorname{Re}(\sigma)$ y el desarrollo de Taylor en el origen de $\operatorname{Im}(s_g)$ es $\operatorname{Im}(\sigma)$.

3. El desarrollo de Taylor complejo en el origen de s_σ es σ . El establecimiento de esta propiedad se hace, como en el caso real, variable a variable, por medio de las derivadas parciales. Cuando $n = 1$, estamos diciendo que la función s_σ es derivable, en el sentido complejo, en un entorno del origen, es decir que existe el límite

$$s'_\sigma(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{s_\sigma(z) - s_\sigma(a)}{z - a}$$

para los puntos a de un entorno del origen (en el caso complejo esto implica automáticamente la posibilidad de derivar indefinidamente) y además se tiene

$$\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_\sigma^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

4. Como en el caso real, el desarrollo de Taylor complejo en un punto $\mathbf{a} \in \Delta_{\mathbb{C}}(\rho; \mathbf{0})$ de s_σ está dado por la identificación

$$\sum_I c_I^{\mathbf{a}} (t_1 - a_1)^{i_1} (t_2 - a_2)^{i_2} \dots (t_n - a_n)^{i_n} = \sum_I c_I t_1^{i_1} t_2^{i_2} \dots t_n^{i_n}.$$

5. Para cada $\mathbf{a} \in \Delta_{\mathbb{C}}(\rho; \mathbf{0})$ la serie $\sigma^{\mathbf{a}} = \sum_I c_I^{\mathbf{a}} t_1^{i_1} t_2^{i_2} \dots t_n^{i_n}$ es convergente y define una función $s_{\sigma^{\mathbf{a}}}$ que cumple

$$s_{\sigma^{\mathbf{a}}} \circ T_{\mathbf{a}} = s_\sigma$$

en un entorno de \mathbf{a} , donde $T_{\mathbf{a}} : \mathbf{b} \mapsto \mathbf{b} - \mathbf{a}$.

Del mismo modo que en el caso real, si $V \subset \mathbb{C}^n$ es un abierto de \mathbb{C}^n y $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ es una función, diremos que f es *analítica compleja* u *holomorfa* en un punto $\mathbf{a} \in V$ si coincide en un entorno de \mathbf{a} con la suma de una serie de potencias convergente centrada en \mathbf{a} . En ese caso, por supuesto será analítica

en un entorno de \mathbf{a} . Diremos que f es analítica en V si lo es en todo punto de V .

Nótese que “analítica compleja” u “holomorfa” es exactamente la misma propiedad. La denominación holomorfa hace referencia a propiedades muy interesantes de estas funciones en relación con la conservación de ángulos (conformes) y de las formas, en las que no vamos a entrar.

Ahora ya podemos dar una definición de *variedad analítica compleja*, similar a la del caso real. Diremos que M es una variedad analítica compleja de dimensión n si es una variedad diferenciable de dimensión par $2n$ con un atlas tal que los cambios de cartas definan por proyección funciones analíticas complejas. Esto es, las funciones

$$\mathbb{C}^n \sim \mathbb{R}^{2n} \supset \phi(U \cap U') \xrightarrow{\phi^{-1}} U \cap U' \xrightarrow{\phi'} \phi'(U \cap U') \xrightarrow{\pi_i^{\mathbb{C}}} \mathbb{C}$$

son analíticas, donde $\pi_i^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es la proyección sobre la coordenada compleja i -ésima, para $i = 1, 2, \dots, n$. Así, si W es un abierto de M se puede decir si una función $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ es *analítica (u holomorfa)* por lectura de la propiedad en cartas. Obtenemos así el haz $\mathcal{O}_M^{\mathbb{C}}$ de *gérmenes funciones complejas analíticas* en M . De nuevo los argumentos invocados para el caso continuo y diferenciable son válidos en este contexto (por ejemplo, si f es analítica en p y $f(p) \neq 0$ entonces $1/f$ es analítica en p). Así, tenemos un haz de \mathbb{C} -álgebras locales. Si fijamos una carta ϕ centrada en $p \in M$, el homomorfismo de \mathbb{C} -álgebras

$$\tau_{\phi,p} : \mathcal{O}_{M,p}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$$

es un isomorfismo.

Si no hay confusión sobre el contexto complejo en el que trabajamos, escribiremos \mathcal{O}_M en lugar de $\mathcal{O}_M^{\mathbb{C}}$. Nótese que el atlas que da la estructura analítica compleja da asimismo una estructura analítica real de dimensión doble. No obstante, la relación entre el haz real \mathcal{O}_M y el complejo $\mathcal{O}_M^{\mathbb{C}}$ no es completamente directa. Dejamos al lector explorar este extremo.

1.4. Espacios anillados

En los ejemplos anteriores hemos visto que las estructuras geométricas para el espacio ambiente se han obtenido dotando el espacio topológico de base M

de un haz estructural \mathcal{O}_M de \mathbb{K} -álgebras de funciones en anillos locales. Para integrar ambos datos en un mismo concepto, vamos a cambiar ligereamente las notaciones, así, el espacio ambiente será un par

$$M = (|M|, \mathcal{O}_M),$$

en donde $|M|$ es el espacio topológico *subyacente* y \mathcal{O}_M es un haz de gérmenes de funciones que es un haz de \mathbb{K} -álgebras en anillos locales. Tal objeto será denominado *espacio anillado ambiente*.

Por supuesto el lector ya habrá adivinado que existe una teoría más amplia de espacios anillados, que comprende en particular esquemas y variedades algebraicas y analíticas con singularidades. Nosotros no entraremos en los detalles más avanzados de esta teoría, nuestros objetos de estudio, singulares o no, se considerarán “dentro” del espacio ambiente y sus singularidades y otras particularidades se obtendrán a partir de las ecuaciones que los definen (haz de ideales).

Supongamos que M_1 y M_2 son dos espacios ambiente. Un *morfismo*

$$\phi : M_1 \rightarrow M_2$$

es el dato de una aplicación continua $f_\phi : |M_1| \rightarrow |M_2|$ con la propiedad de que para cada abierto $U \subset M_2$ la aplicación

$$\phi_U : \mathcal{O}_{M_2}(U) \rightarrow \mathcal{O}_{M_1}(f_\phi^{-1}(U))$$

dada por $h \mapsto h \circ f_\phi$ está bien definida. Esto es suficiente para asegurar que se tiene un homomorfismo ϕ_U de \mathbb{K} -álgebras. El concepto de composición de morfismos es evidente. Un isomorfismo es un morfismo inversible, en particular f_ϕ es un homeomorfismo. Tenemos así establecida la *categoría de espacios anillados ambiente*.

Supongamos que $p_1 \in |M_1|$ y que $p_2 = f_\phi(p_1)$. Tenemos definido un morfismo de anillos locales

$$\phi_{p_1} : \mathcal{O}_{M_2, p_2} \rightarrow \mathcal{O}_{M_1, p_1}$$

que se define en gérmenes por $\mathbf{h} \mapsto \mathbf{h} \circ f_\phi$. Es muy sencillo ver que se trata de un homomorfismo de anillos, más interesante es la comprobación de que es un homomorfismo de anillos locales, es decir, que

$$\phi_{p_1}(\mathcal{M}_{M_2, p_2}) \subset \mathcal{M}_{M_1, p_1}.$$

Para ello basta recordar que $\mathcal{M}_{M, p}$ son los gérmenes con valor 0 en p .

1.5. Gérmenes de espacio ambiente

La idea de germen de espacio ambiente ha sido pocas veces implementada explícitamente en la literatura, excepto para la construcción de objetos más sofisticados, como espacios formales etc.. Sin desear entrar en tales tecnicismos, nos gustaría dar una interpretación a la notación $(\mathbb{C}^n, 0)$ muy habitual sin embargo.

Estamos acostumbrados a que los gérmenes se hacen “en un punto”, pero es posible “germificar” el espacio ambiente alrededor de cualquier subconjunto del espacio topológico subyacente; por razones prácticas, que se verán al hablar de las explosiones, nos limitaremos a hacerlo en torno a compactos. Así, consideremos un espacio ambiente M y un compacto $E \subset |M|$. Vamos a definir el concepto de *germen de espacio ambiente* (M, E) . Recordemos primero que dado un abierto $U \subset |M|$ tenemos un espacio anillado $M|_U = (U, \mathcal{O}_M|_U)$. Por definición, el germen de espacio ambiente (M, E) es el conjunto de todos los $M|_U$ donde $U \supset E$.

Nótese que, según esta definición, no es lo mismo el germen (M, E) que el germen $(M|_U, E)$ para un abierto $U \supset E$. Sin embargo, estos objetos serán isomorfos en la *categoría de gérmenes de espacios ambiente*, cuyos morfismos introducimos a continuación.

Sean (M_1, E_1) y (M_2, E_2) dos gérmenes de espacio ambiente. Consideremos el conjunto de morfismos

$$\mathcal{A} = \{\phi : M_1|_{U_1} \rightarrow M_2|_{U_2}; \quad E_1 \subset U_1, E_2 \subset U_2, \quad f_\phi(E_1) \subset E_2\}.$$

Establezcamos en \mathcal{A} la relación de equivalencia cuyas clases serán los gérmenes de morfismos entre (M_1, E_1) y (M_2, E_2) . Consideremos dos elementos ϕ, ϕ' del conjunto \mathcal{A} , donde

$$f_\phi : U_1 \rightarrow U_2; \quad f_{\phi'} : U'_1 \rightarrow U'_2.$$

Diremos que ϕ, ϕ' definen el *mismo germen de morfismo* entre (M_1, E_1) y (M_2, E_2) si existe un abierto W de $|M_1|$ tal que

$$E_1 \subset W \subset U_1 \cap U'_1,$$

de modo que las restricciones de f_ϕ y de $f_{\phi'}$ a W coincidan. Se tiene así establecida una relación de equivalencia, cuyas clases son por definición los morfismos

de gérmenes de espacio ambiente

$$\Phi : (M_1, E_1) \rightarrow (M_2, E_2).$$

En este contexto podemos interpretar $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$ como el germen en el origen de \mathbb{C}^n , sabiendo que es isomorfo a cualquier abierto que contenga el origen, como germen en el origen.

La composición de dos gérmenes de morfismo es otro germen de morfismo. Consideremos dos gérmenes de morfismo

$$\Phi : (M_1, E_1) \rightarrow (M_2, E_2); \quad \Psi : (M_2, E_2) \rightarrow (M_3, E_3)$$

y elijamos representantes ϕ, ϕ' de Φ y ψ, ψ' de Ψ , donde

$$\begin{aligned} \phi : M_1|_{U_1} &\rightarrow M_2|_{U_2}; & \phi' : M_1|_{U'_1} &\rightarrow M_2|_{U'_2}; \\ \psi : M_2|_{U''_2} &\rightarrow M_3|_{U_3}; & \psi' : M_2|_{U'''_2} &\rightarrow M_3|_{U'_3}. \end{aligned}$$

Sea W_1 un abierto conveniente para la pareja ϕ, ϕ' y W_2 uno conveniente para la pareja ψ, ψ' . Entonces $W_1 \cap f_\phi^{-1}(W_2)$ es conveniente para la composición.

Una observación fundamental es la siguiente:

Sean (M_1, p_1) y (M_2, p_2) dos gérmenes de espacio ambiente en sendos puntos p_1 y p_2 . Si (M_1, p_1) y (M_2, p_2) son isomorfos, entonces existe un isomorfismo de \mathbb{K} -álgebras locales entre los anillos locales \mathcal{O}_{M_1, p_1} y \mathcal{O}_{M_2, p_2} .

La propiedad recíproca también es cierta entre el tipo de espacios ambiente que nos interesa y es la que justifica el estudio de anillos de series que emprenderemos más adelante:

Teorema 1. *Sean (M_1, p_1) y (M_2, p_2) dos gérmenes de espacio ambiente en sendos puntos p_1 y p_2 . Supongamos que M_1 y M_2 son variedades analíticas complejas (entonces $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) o bien que son variedades analíticas reales (entonces $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Si existe un isomorfismo de \mathbb{K} -álgebras locales entre \mathcal{O}_{M_1, p_1} y \mathcal{O}_{M_2, p_2} entonces (M_1, p_1) y (M_2, p_2) son isomorfos.*

En nuestro contexto este resultado, clave para un desarrollo más abstracto de la Geometría Analítica y Algebraica, es muy evidente. No obstante, vamos a comentar su prueba. Restrinjámonos al caso complejo, el caso real seguiría los

mismos pasos. Sabemos que (M_1, p_1) es isomorfo a $(\mathbb{C}^{n_1}, \mathbf{0})$ y que (M_2, p_2) es isomorfo a $(\mathbb{C}^{n_2}, \mathbf{0})$. Así que, en términos de anillos locales, se trata de probar que si las \mathbb{C} -álgebras de series convergentes

$$\mathbb{C}\{t_1, t_2, \dots, t_{n_1}\} \text{ y } \mathbb{C}\{u_1, u_2, \dots, u_{n_2}\}$$

son isomorfas, entonces $n_1 = n_2$. Esto invoca lógicamente teoremas clásicos del Análisis. Veamos cómo. Sea

$$\phi : \mathbb{C}\{t_1, t_2, \dots, t_{n_1}\} \rightarrow \mathbb{C}\{u_1, u_2, \dots, u_{n_2}\}$$

el isomorfismo que nos dan por hipótesis, cuyo inverso puede denominarse ψ . Así, tenemos series convergentes

$$\begin{aligned} \phi(t_i) &= \tau_i(u_1, u_2, \dots, u_{n_2}); & i &= 1, 2, \dots, n_1. \\ \psi(u_j) &= \mu_j(t_1, t_2, \dots, t_{n_1}); & j &= 1, 2, \dots, n_2. \end{aligned}$$

Como paso previo, consideremos $\sigma = \sigma(t_1, t_2, \dots, t_{n_1})$ una serie de potencias convergente e intentemos averiguar cuál es su imagen por ϕ . La primera idea que tenemos todos es la sustitución

$$\sigma(\tau) = \sigma(\tau_1(u_1, u_2, \dots, u_{n_2}), \tau_2(u_1, u_2, \dots, u_{n_2}), \dots, \tau_{n_1}(u_1, u_2, \dots, u_{n_2})).$$

Ahora bien esto no es inmediato, dado que un homomorfismo de álgebras respeta las operaciones de suma y producto finitas, no las infinitas, aún cuando nuestros conocimientos de Análisis elemental nos recuerdan que efectivamente la sustitución define bien una serie convergente. Ciertamente, la sustitución sería la respuesta correcta si σ fuera un polinomio. Lo que podemos hacer ahora es truncar para hacer un razonamiento asintótico. Así, expresemos

$$\sigma = S^N + \tilde{S}^N$$

donde S^N es un polinomio y \tilde{S}^N una serie de potencias en cuyo desarrollo todos los monomios tienen grado mayor que N . Una verificación simple nos dice que

$$\sigma(\tau) = S^N(\tau) + \tilde{R}^N,$$

donde \tilde{R}^N es una serie de potencias en cuyo desarrollo todos los monomios tienen grado mayor que N . Por otro lado

$$\phi(\sigma) = \phi(S^N) + \phi(\tilde{S}^N) = \sigma^N(\tau) + \phi(\tilde{S}^N).$$

Como \tilde{S}^N es una suma finita de monomios de grado mayor que N multiplicados por series de potencias y además cada $\tau_i(0) = 0$, se ve que $\phi(\tilde{S}^N)$ es una serie de potencias en u_1, u_2, \dots, u_{n_2} en cuyo desarrollo todos los monomios tienen grado mayor que N . Así pues, para cada N tenemos que

$$\sigma(\tau) - \phi(\sigma) = \tilde{R}^N - \phi(\tilde{S}^N).$$

La única posibilidad es que $\sigma(\tau) = \phi(\sigma)$ pues la diferencia no podría tener ningún monomio en su desarrollo.

Ahora ya podemos probar que $n_1 = n_2$. En efecto, de lo anterior se concluye que

$$t_i = \tau_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n_2}); \quad u_j = \mu_j(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n_1}).$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n_1$ y todo $j = 1, 2, \dots, n_2$. Aplicando la regla de la cadena a estas sustituciones de series convergentes, se concluye que la matriz jacobiana en el origen

$$\left(\frac{\partial \tau_i}{\partial u_j}(\mathbf{0}) \right)$$

es inversible y, por lo tanto, es cuadrada. Así pues $n_1 = n_2$.

1.6. El espacio proyectivo

El espacio ambiente global por excelencia es el espacio proyectivo. Tiene además la ventaja de que su construcción es completamente universal y por consiguiente válida en todos los contextos de la geometría: desde al aritmética, geometría sobre cuerpos abstractos, el caso real, el caso complejo, la estructura puramente algebraica (topología de Zariski), la topología usual real o compleja, la estructura analítica, etc.. Más aún hay resultados (lema de Chow) de globalidad que permiten asegurar que algunos objetos geométricos analíticos globalmente definidos sobre el espacio proyectivo son de hecho también algebraicos, es decir pueden estar dados por polinomios. La expresión más completa de estos resultados está en los teoremas GAGA de Serre.

El *espacio proyectivo de dimensión n sobre \mathbb{K}* , que denotaremos $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ es por definición el conjunto de rectas vectoriales de \mathbb{K}^{n+1} . Así existe una aplicación suprayectiva

$$\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$$

que a cada $(x_0, x_1, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ le hace corresponder la recta

$$[x_0, x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$$

que pasa por el origen de \mathbb{K}^{n+1} y por (x_0, x_1, \dots, x_n) . Diremos que

$$(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

son las *coordenadas homogéneas* de $[x_0, x_1, \dots, x_n]$. Evidentemente dos juegos de coordenadas homogéneas definen el mismo punto proyectivo si y solamente si son proporcionales. La *topología usual* del espacio proyectivo es la topología cociente de la de $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Podemos dar cartas estandarizadas en el espacio proyectivo:

$$\phi_i : U_i = \{x_i \neq 0\} \rightarrow \mathbf{K}^n$$

definidas por:

$$[x_0, x_1, \dots, x_n] \in U_i \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) = (y_1^i, y_2^i, \dots, y_n^i).$$

Diremos que $(y_1^i, y_2^i, \dots, y_n^i)$ son las *coordenadas afines* en la carta i -ésima del punto $[x_0, x_1, \dots, x_n]$. Se obtiene así la estructura de variedad analítica del espacio proyectivo con la que trabajaremos.

No vamos a detallar aquí demasiado las propiedades del espacio proyectivo, con las que suponemos que el lector está familiarizado. Sin embargo, a título de ejemplo realizaremos algunos cálculos en el espíritu del lema de Chow.

Tomemos el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Veamos que las únicas funciones holomorfas globalmente definidas $f : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{C}$ son las constantes. Denotemos $f_i = f|_{U_i}$, entonces cada f_i se corresponde con una serie entera

$$\sigma_i = \sum_I a_I^i y^{iI}$$

a la que podemos dar valores arbitrarios en las coordenadas afines. Al mismo tiempo el límite según una recta afín de U_i en el infinito debe ser un valor finito. Se deduce que σ_i y por tanto f_i es una constante, que debe ser el valor constante de f .

Veamos ahora, sin entrar en demasiados detalles técnicos, que una hipersuperficie analítica de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ es de hecho *algebraica*, es decir, dada por los ceros de

polinomios en las cartas afines. Este resultado, conocido como *Lema de Chow* es el punto de partida para la comparación, a nivel proyectivo, de la Geometría Algebraica y la Geometría Analítica Compleja. No entraremos en la zona más profunda del mismo, que es la razón cohomológica de que una hipersuperficie de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ se extiende a una hipersuperficie de \mathbb{C}^{n+1} . El argumento es así, sea $H \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ una hipersuperficie y consideremos la aplicación canónica

$$p : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n.$$

Entonces $p^{-1}(H)$ es una hipersuperficie de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, que se extiende a una hipersuperficie $CH \subset \mathbb{C}^{n+1}$ la cual, por construcción, es un cono, es decir, si contiene un punto, contiene toda la recta que lo une con el origen. Supongamos que $F(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$ es una ecuación de CH y escribamos

$$F(x_0, x_1, \dots, x_n) = F_d + F_{d+1} + \dots,$$

donde los F_i son polinomios homogéneos de grado i . Dado un punto $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, distinto del origen, del cono CH , para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene

$$0 = F(\lambda \mathbf{a}) = \lambda^d F_d(\mathbf{a}) + \lambda^{d+1} F_{d+1}(\mathbf{a}) + \dots.$$

Se sigue que $0 = F_d(\mathbf{a}) = F_{d+1}(\mathbf{a}) = \dots$. En particular $F_d = 0$ es una hipersuperficie contenida en $H = \{F = 0\}$. Por “irreducibilidad” se concluye que $H = \{F_d = 0\}$. (En este curso no entraremos en conceptos como la irreducibilidad con toda su extensión, aunque sí lo detallaremos para el caso de curvas). Ahora ya es evidente que

$$H_i = H \cap U_i = \{f_i(\mathbf{y}^i) = 0\},$$

donde $f_i(\mathbf{y}^i) = x_i^d F(x_0/x_i, x_1/x_i, \dots, x_n/x_i)$ es un polinomio de grado menor o igual que d .

Observación 1. Un ejercicio interesante es el siguiente. Supongamos que $H \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ es tal que $H_i = H \cap U_i$ está dada por $f_i = 0$, donde cada f_i es un polinomio. Entonces existe un polinomio homogéneo $F(x_0, x_1, \dots, x_n)$ de un cierto grado d tal que

$$H = \{[x_0, x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n; F(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$

1.7. La explosión de un punto

Vamos a introducir un ejemplo de morfismo de espacios ambientes que será muy útil en lo sucesivo. Consideremos el espacio proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ y el punto

$$P_0 = [1, 0, 0, \dots, 0].$$

(Es el *origen* de la primera carta). En una dimensión menos (así pues supon-
dremos $n \geq 2$) tenemos una identificación del *hiperplano del infinito*

$$H_{\infty} = \{x_0 = 0\}$$

con $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1}$, dada por $[0, x_1, x_2, \dots, x_n] \leftrightarrow [x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Observemos que H_{∞} se puede identificar con el conjunto de rectas proyec-
tivas que pasan por P_0 , ya que cada punto Q de H_{∞} determina una y solo una
recta proyectiva $Q + P_0$ que pasa por P_0 y Q . (Estas rectas son en realidad el
“proyectivizado” de las rectas afines de U_0 que pasan por P_0 ; de una manera
más precisa, una recta proyectiva está dada por los puntos del espacio proyec-
tivo que se corresponden con los de un subespacio vectorial de dimensión dos
de \mathbb{K}^{n+1}). Ahora podemos considerar la proyección

$$p : \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \setminus \{P_0\} \rightarrow H_{\infty} = \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1},$$

que a cada punto Q' hace corresponder el punto $Q \in H_{\infty}$ tal que $P_0 + Q' =$
 $P_0 + Q$. El grafo de la proyección

$$G(p) \subset (\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \setminus \{P_0\}) \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1}$$

está descrito por las ecuaciones

$$([\mathbf{x}], [\mathbf{z}]) \in G(p) \Leftrightarrow x_i z_j - x_j z_i = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Recordemos que, como en todo grafo, la aplicación proyección sobre el primer
factor es un isomorfismo:

$$\pi|_{G(p)} : G(p) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \setminus \{P_0\}.$$

Dado que tenemos detectadas ecuaciones para $G(p)$, podemos extenderlas sin
problemas al espacio $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1}$ y considerar el conjunto

$$M = \{([\mathbf{x}], [\mathbf{z}]) \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1}; x_i z_j - x_j z_i = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Como hemos visto

$$G(p) = M \cap (\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \setminus \{P_0\}) \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1}.$$

Además, es inmediato comprobar que

$$E = M \cap \{P_0\} \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1} = \{P_0\} \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1}.$$

Así pues, el *divisor excepcional* E se identifica con $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1}$ o, más precisamente, con el conjunto H_{∞} de las rectas que pasan por P_0 .

Definición 1. La restricción $\pi : M \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ de la primera proyección

$$\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$$

se llama explosión de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ con centro P_0 .

Es de señalar que en la definición anterior se usa una selección previa de coordenadas de manera importante. Cabe preguntarse si este morfismo es en realidad independiente de las coordenadas. No solamente lo es, sino que esto se obtiene gracias a una propiedad universal que hace de las explosiones los morfismos más importantes de la Geometría Algebraica. Nosotros no entraremos demasiado en estos detalles, las construcciones de explosiones sucesivas que efectuemos serán en realidad particulares, aunque el lector debe tener el convencimiento de que todas están bien definidas salvo isomorfismo único (como corresponde a las propiedades universales).

La primera tarea que tenemos es comprobar que M es un espacio ambiente. Esto será cierto de hecho en cualquiera de las categorías en las que trabajemos. Observemos que

$$M = \pi^{-1}(U_0) \cup \bigcup_{i=1}^n \pi^{-1}(U_i).$$

Dado que $P_0 \notin U_i$ para $i \geq 1$, se puede identificar $\pi^{-1}(U_i)$ con U_i , para así configurar algunas de las cartas de M . El problema se concentra pues en la descripción de $\pi^{-1}(U_0)$. Vamos a describir $\pi^{-1}(U_0)$ como unión de abiertos coordenados

$$\pi^{-1}(U_0) = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n$$

de la manera siguiente. Recordemos que en U_0 tenemos coordenadas

$$(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

donde $y_i = x_i/x_0$. Definamos

$$W_j = \{([1, y_1, y_2, \dots, y_n], [z_1, z_2, \dots, z_n]) \in M; \quad z_j \neq 0\}.$$

Identificaremos cada W_j con \mathbb{K}^n mediante aplicaciones coordenadas

$$(u_1^j, u_2^j, \dots, u_n^j) : W_j \rightarrow \mathbb{K}^n,$$

donde $u_s^j = y_s/y_j$ para $s \neq j$ y $u_j^j = y_j$. De esta manera obtenemos la estructura deseada de M como espacio ambiente y, de paso, una descripción en coordenadas del morfismo de explosión $\pi : M \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$. Nótese que el divisor excepcional E tiene como ecuaciones $E \cap W_j = \{u_j = 0\}$.

Como segunda parte de esta sección, nos podemos preguntar si es posible hacer la *explosión de un espacio ambiente M_0 con centro en un punto $P_0 \in M_0$* . Esto es así, sin entrar en detalles para probar que el procedimiento está definido intrínsecamente (la referida propiedad universal), describamos dicho morfismo. En la construcción anterior, si $U \ni P_0$ es un abierto de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ que contiene P_0 , definimos la *explosión de U con centro P_0* como la restricción

$$\pi|_{\pi^{-1}(U)} : \pi^{-1}(U) \rightarrow U.$$

Ahora, elijamos un atlas de M_0 formado por abiertos que no contienen P_0 y un único abierto U que contiene P_0 . Dado que $\pi^{-1}(U \setminus \{P_0\})$ es isomorfo a $U \setminus \{P_0\}$, podemos reconstruir una variedad M_1 a partir de un atlas en el que sustituimos U por $\pi^{-1}(U)$ y conservamos el resto de los abiertos coordenados, relacionados con $\pi^{-1}(U)$ a través de la identificación citada. Así se tiene también un morfismo

$$\pi : M_1 \rightarrow M_0$$

que es la *explosión de M_0 con centro P_0* .

Capítulo 2

Anillos de series

En esta sección presentaremos las propiedades algebraicas más notables de los anillos locales $\mathcal{O}_{M,p}$ en los casos análítico complejo y analítico real. Supondremos una cierta familiaridad del lector con las series formales y los rudimentos del Algebra Conmutativa. Recordemos que

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{M,p} = \mathbb{K}\{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

donde n es la dimensión del espacio ambiente M . Consideraremos asimismo los anillos de series formales

$$\hat{\mathcal{O}} = \mathbb{K}[[x_1, x_2, \dots, x_n]].$$

Estos anillos se definen como el conjunto de series de potencias en las variables

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

sin exigir ninguna condición de convergencia. Lógicamente tenemos

$$\mathcal{O} = \mathbb{K}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{K}[[x_1, x_2, \dots, x_n]] = \hat{\mathcal{O}}$$

y así toda serie convergente se expresa también como una serie formal:

$$\sigma = \sum_{I=(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_I \mathbf{x}^I; \quad a_I \in \mathbb{K}.$$

Reorganizando los monomios por su grado, podemos expresar σ como una descomposición infinita

$$\sigma = \sigma_\nu + \sigma_{\nu+1} + \dots,$$

donde cada σ_d es un polinomio homogéneo de grado d y $\sigma_\nu \neq 0$. El valor $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ se denomina el *orden de la serie* σ . Ya sabemos que en el caso convergente $\nu = 0$ si y solamente si σ es una unidad. Esto también es cierto en el caso formal. En efecto, escribamos $\lambda = \sigma(0)$ y $\sigma = \lambda(1 - \eta)$, donde η tiene orden ≥ 1 . Entonces tenemos

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\lambda} (1 + \eta + \eta^2 + \cdots).$$

En particular se deduce que ambos anillos son locales, su ideal maximal \mathcal{M} , respectivamente $\hat{\mathcal{M}}$, se corresponde con las series de orden ≥ 1 . Este ideal visiblemente está generado por las coordenadas x_1, x_2, \dots, x_n .

Otras propiedades de estos anillos son un poco más difíciles de obtener. En esta sección probaremos las siguientes:

- Los anillos \mathcal{O} y $\hat{\mathcal{O}}$ son noetherianos. Esto quiere decir que cada ideal tiene un sistema finito de generadores.
- El teorema de las funciones implícitas es válido en estos anillos. Es un resultado clásico para el caso convergente, que se puede extender al caso formal y que nosotros veremos como una consecuencia del teorema, más general, de preparación de Weierstrass.
- Los anillos \mathcal{O} y $\hat{\mathcal{O}}$ son dominios de factorización única. Esto quiere decir que cada elemento se factoriza de modo esencialmente único como producto de elementos irreducibles. Las consecuencias geométricas, que estudiaremos extensamente en el caso de curvas planas, permiten definir gérmenes de hipersuperficies, como unión de hipersuperficies irreducibles y desarrollar el análogo formal.
- Los anillos \mathcal{O} y $\hat{\mathcal{O}}$ son henselianos. En el caso de curvas planas esto implica que si hay varias tangentes, entonces hay varias componentes irreducibles, al menos una para cada tangente.

Muchas de estas propiedades (y otras relacionadas, por ejemplo, con la reducción de singularidades y que no mencionaremos aquí) se obtienen como consecuencia de los teoremas de preparación y división de Weierstrass.

2.1. El teorema de preparación de Weierstrass

Sea $\sigma = \sum_I a_I \mathbf{x}^I$ una serie formal o convergente de orden $\nu > 0$. Diremos que σ es *distinguida en la variable x_n* si y solamente si $\sigma_\nu(0, 0, \dots, 1) \neq 0$. Dicho de otro modo, la serie σ es distinguida en la variable x_n si podemos escribir

$$\sigma = \lambda x_n^\nu + x_n \eta + \zeta,$$

donde $\lambda \neq 0$ y η, ζ son series de modo que el orden de ζ es $> \nu$ (naturalmente, el orden de η debe ser $\geq \nu$, puesto que el orden de σ es igual a ν).

Escribamos $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\mathbf{x}) = (\mathbf{y}, x_n)$, con $(\mathbf{y}) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$.

Dado $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, un *polinomio distinguido de orden ν en la variable x_n* es una serie (formal o convergente) de la forma

$$P = x_n^\nu + \alpha_1(\mathbf{y})x_n^{\nu-1} + \alpha_2(\mathbf{y})x_n^{\nu-2} + \dots + \alpha_\nu(\mathbf{y}),$$

donde cada α_i es una serie (formal o convergente, según el caso) en las variables $(\mathbf{y}) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ de orden $\geq i$. Se sigue, claro está, que P es una serie de orden ν .

El teorema de preparación de Weierstrass se enuncia como sigue:

Teorema 2 (Teorema de preparación). *Sea σ una serie formal (respectivamente convergente) de orden $\nu \geq 1$ distinguida en la variable x_n . Entonces existe una unidad formal U (resp. convergente) y un polinomio P distinguido de orden ν en la variable x_n formal (resp. convergente) tal que*

$$\sigma = UP.$$

Intimamente asociado con el teorema de preparación, tenemos el teorema de división de Weierstrass, que se enuncia como sigue:

Teorema 3 (Teorema de división). *Sea σ una serie formal (respectivamente convergente) de orden $\nu \geq 1$ distinguida en la variable x_n . Dada cualquier otra serie formal τ (resp. convergente) existen dos series formales únicas (resp. convergentes) Q y R tales que*

$$\tau = Q\sigma + R$$

donde R tiene la forma $R = x_n^{\nu-1}R_{\nu-1}(\mathbf{y}) + x_n^{\nu-2}R_{\nu-2}(\mathbf{y}) + \dots + R_0(\mathbf{y})$.

Veamos que el teorema de división implica el teorema de preparación. Dividamos x_n^ν por σ , se tiene

$$x_n^\nu = Q\sigma + R$$

y por tanto $Q\sigma = x_n^\nu - R$. Basta ver que Q es unidad, pero esto es evidente, ya que el orden de $x_n^\nu - R$ es $\leq \nu$ y el orden de $Q\sigma$ es mayor o igual que ν más el orden de Q , que entonces debe ser cero.

También se puede comprobar que el teorema de preparación implica el de división. En efecto, supongamos $\sigma = UP$, donde P es un polinomio distinguido de orden ν en la variable x_n . Dada una serie τ , si pudiéramos dividir τ por P de forma única

$$\tau = Q'P + R$$

tendríamos que $\tau = Q'U^{-1}\sigma + R$ es la división buscada. Basta pues buscar la descomposición $\tau = Q'P + R$ y probar su unicidad. Para toda potencia x_n^a tenemos una expresión única

$$x_n^a = T_a P + R^{(a)}; R^{(a)} = R_{\nu-1}^{(a)}(\mathbf{y})x_n^{\nu-1} + R_{\nu-2}^{(a)}(\mathbf{y})x_n^{\nu-2} + \cdots + R_0^{(a)}(\mathbf{y})$$

que se obtiene sin más que “rebajar” sucesivamente el grado en x_n de la parte no divisible por P , aplicando la fórmula $x_n^\nu = P - (P - x_n^\nu)$. Además, de estas manipulaciones, se concluye que el orden de $T_a(\mathbf{y})$ y de cada $R_b^{(a)}(\mathbf{y})$, para $0 \leq b \leq \nu - 1$, tiende a $+\infty$ cuando el exponente a aumenta.

Ahora ya podemos efectuar nuestra división. Si

$$\tau = \sum_{i=0}^{\infty} \tau_i(\mathbf{y})x_n^i$$

escribiremos

$$\tau = \left(\sum_{a=0}^{\infty} \tau_a(\mathbf{y})T_a(\mathbf{y}) \right) P + \sum_{j=0}^{\nu-1} \left(\sum_{a=0}^{\infty} \tau_a(\mathbf{y})R_j^{(a)}(\mathbf{y}) \right) x_n^j.$$

La unicidad de la descomposición $\tau = Q'P + R$ se deduce inmediatamente de la unicidad para el caso de que τ sea la serie idénticamente nula.

Finalmente, observemos también que el teorema de preparación implica el teorema de la función implícita. En efecto este último se corresponde al caso de una serie σ distinguida de orden uno en la variable x_n . Entonces

$$\sigma = U(\mathbf{y}, x_n)(x_n - f(\mathbf{y})).$$

Por consiguiente, dado que U es una unidad, en un entorno del origen la ecuación $\sigma = 0$ es equivalente a $x_n = f(\mathbf{y})$.

Hay muchas pruebas de estos teoremas en la literatura. Es relativamente fácil organizar una prueba por coeficientes indeterminados correspondiente al caso formal. Trabajando con cuidado, además se puede demostrar que este método iterativo produce series convergentes si los datos de partida lo son. Una buena referencia de este punto de vista es el libro de Abhyankar (Local Analytic Geometry).

2.2. Consecuencias del teorema de preparación

Recordemos que un anillo (conmutativo con unidad) se dice *noetheriano* si todo ideal admite un sistema finito de generadores, lo que además equivale a decir que todo sistema de generadores contiene un sub-sistema finito de generadores. Desde el punto de vista geométrico, para anillos de funciones, esta propiedad implica que el lugar geométrico de los ceros de un sistema finito o infinito de funciones es la intersección de un número finito de hipersuperficies.

El anillo de polinomios en n variables con coeficientes en un anillo noetheriano es noetheriano. Este resultado, conocido como el *teorema de la base de Hilbert*, es muy clásico y al mismo tiempo admite una prueba elemental, que no detallaremos.

Veamos a continuación que

$$\mathcal{O} = \mathbb{K}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad \hat{\mathcal{O}} = \mathbb{K}[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$$

son noetherianos.

Razonaremos por inducción sobre el número n de variables. Si $n = 1$, todo ideal es una potencia de $x_1\mathcal{O}$. Sea $I \subset \mathcal{O}$ un ideal no nulo y seleccionemos $f \in I$, $f \neq 0$. Después de un cambio lineal de variables suficientemente general (el cuerpo \mathbb{K} es infinito), podemos suponer que $f(\mathbf{x})$ que es regular en x_n de orden $\nu > 0$. Dividamos cada elemento g de I por f :

$$g = qf + r; \quad r(\mathbf{x}) = r_{\nu-1}(\mathbf{y})x_n^{\nu-1} + r_{\nu-2}(\mathbf{y})x_n^{\nu-2} + \dots + r_0(\mathbf{y}).$$

Nótese que $g - qf = r \in I \cap \mathbb{K}\{\mathbf{y}\}[x_n]$. Aplicando la hipótesis de inducción y el teorema de la base de Hilbert, existe una colección finita de polinomios

$p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{K}\{\mathbf{y}\}[x_n]$ que generan el ideal $I \cap \mathbb{K}\{\mathbf{y}\}[x_n]$. Ahora es ya evidente que f, p_1, p_2, \dots, p_k generan I . Este mismo argumento es válido para el anillo de series formales $\hat{\mathcal{O}}$.

Otra consecuencia muy importante de los teoremas de preparación y división es que \mathcal{O} y $\hat{\mathcal{O}}$ son dominios de factorización única. De nuevo para ello invocamos un procedimiento de inducción basado en el siguiente hecho algebraico

Si A es un dominio de factorización única, entonces el anillo de polinomios en una variable $A[X]$ también lo es.

Consideremos un elemento no nulo $f \in \mathcal{O}$ y efectuemos, si fuera necesario, un cambio de coordenadas para que f sea regular de orden $\nu > 0$ en la variable x_n . Por el teorema de preparación tenemos

$$f = UP; \quad P(\mathbf{x}) = x_n^\nu + P_1(\mathbf{y})x_n^{\nu-1} + \dots + P_\nu(\mathbf{y}) \in \mathbb{K}\{\mathbf{y}\}[x_n].$$

Por hipótesis de inducción y aplicación del susodicho resultado algebraico, tenemos una descomposición en polinomios irreducibles y mónicos

$$P = P_1 P_2 \cdots P_k; \quad P_j \in \mathbb{K}\{\mathbf{y}\}[x_n], \quad j = 1, 2, \dots, k$$

que además son polinomios de Weierstrass. Después de esta observación, es suficiente probar que si P es un polinomio de Weierstrass irreducible como elemento de $\mathbb{K}\{\mathbf{y}\}[x_n]$, también es irreducible como elemento de \mathcal{O} . Supongamos que

$$P = gh,$$

donde g, h son no unidades. Es visible que g y h son regulares en x_n de órdenes respectivos ν_1, ν_2 , con $\nu_1 + \nu_2 = \nu$. Aplicando el teorema de preparación de nuevo tenemos

$$P = U_1 U_2 G H, \quad W = U_1 U_2,$$

donde G, H son polinomios de Weierstrass y W es una unidad. Ahora podemos ver que $W = W(\mathbf{y})$ y por tanto se puede "absorber" en uno de los polinomios de Weierstrass, contradiciendo que P es irreducible.

2.3. El lema de Hensel

La propiedad de Hensel es la que permite encontrar un sustituto de la topología clásica de manera abstracta en Geometría Algebraica, con anillos locales suficientemente ricos. Concretamente y poniendo un ejemplo a nivel de anillos de polinomios y funciones polinómicas: la curva algebraica plana

$$x^2 - y^2 + x^3 = 0$$

es globalmente irreducible (el polinomio $x^2 - y^2 + x^3$ es irreducible) pero en el origen tiene un cono tangente, dado por $x^2 - y^2 = 0$, que es la unión de dos rectas.

Ciertamente, si tomáramos un entorno del origen en la topología clásica, veríamos dos componentes de la curva, pero estas no se pueden separar por la topología de Zariski, que es la naturalmente asociada a las funciones polinómicas, menos fina que la topología usual de \mathbb{K}^n .

La topología que obtendríamos de manera abstracta se llama la *topología étale*, cuyos anillos de gérmenes son naturalmente henselianos, con la propiedad antes citada. No entraremos en los detalles técnicos de esta construcción. Nos limitaremos a comprobar que los anillos que nos interesan \mathcal{O} y $\hat{\mathcal{O}}$ son henselianos.

Recordemos que todo elemento no nulo $f \in \mathcal{O}$ se escribe

$$f = f_\nu(\mathbf{x}) + f_{\nu+1}(\mathbf{x}) + \cdots,$$

donde $f_\nu \neq 0$ y cada $f_j(\mathbf{x}) \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ es un polinomio homogéneo de grado j . En realidad, la *forma inicial* f_ν tiene un sentido intrínseco, como elemento del espacio vectorial

$$\mathcal{M}^\nu / \mathcal{M}^{\nu+1}.$$

Para ser más preciso, el *anillo graduado*

$$\mathrm{Gr}_{\mathcal{M}}\mathcal{O} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{M}^i / \mathcal{M}^{i+1}$$

es isomorfo al anillo de polinomios $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$, donde los coeficientes están dados por $\mathbb{K} = \mathcal{O}/\mathcal{M}$ y las variables son $X_j = x_j + \mathcal{M}^2 \in \mathcal{M}/\mathcal{M}^2$, para $j = 1, 2, \dots, n$.

Consideremos un anillo local (A, \mathcal{M}) , de cuerpo residual $\kappa = A/\mathcal{M}$ y sea Y una indeterminada. Dado un polinomio mónico

$$f(Y) = Y^d + a_{d-1}Y^{d-1} + \cdots + a_0 \in A[Y]$$

escribiremos $\bar{f}(Y) \in \kappa[Y]$ el polinomio

$$\bar{f}(Y) = Y^d + \bar{a}_{d-1}Y^{d-1} + \cdots + \bar{a}_0 \in \kappa[Y],$$

donde $\bar{a}_j \in \kappa$ es la clase de a_j módulo \mathcal{M} .

Definición 2. Un anillo local (A, \mathcal{M}) se dice henseliano, o que satisface la propiedad de Hensel, si dado $f(Y) \in A[Y]$ mónico tal que $\bar{f}(Y)$ se descompone

$$\bar{f}(Y) = G(Y)H(Y)$$

donde $G(Y)$ y $H(Y)$ no tienen factores comunes en $\kappa[Y]$, entonces existen $g(Y), h(Y) \in A[Y]$ mónicos tales que

$$f(Y) = g(Y)h(Y)$$

y además $\bar{g}(Y) = G(Y)$, $\bar{h}(Y) = H(Y)$.

Los anillos \mathcal{O} y $\hat{\mathcal{O}}$ son henselianos. Este resultado es cierto para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, de hecho, en el caso de series formales, lo es para cualquier cuerpo de coeficientes. Comentaremos una prueba (véase de nuevo el libro de Abhyankar) para el caso complejo, utilizando que \mathbb{K} es algebraicamente cerrado (este es el clásico “Lema de Hensel”).

Dado que \mathbb{C} es algebraicamente cerrado, podemos escribir

$$\bar{f}(Y) = \prod_{i=1}^k (Y - c_i)^{m_i},$$

donde los c_i son distintos dos a dos. Después del cambio de variable $Z = Y - c_1$, tenemos

$$\bar{f}(Z + c_1) = G(Z); \quad G(Z) = \bar{g}(Z), \quad g(Z) = f(Z + c_1)$$

y además $g(Z) \in \mathcal{O}[Z]$ es regular en Z de orden m_1 . Aplicando el teorema de preparación, tenemos

$$g(Z) = \gamma(\mathbf{x}, Z)P(Z),$$

donde $\gamma(\mathbf{0}, 0) \neq 0$. Dado que $g(Z)$ es un polinomio, aplicando el teorema de división de $g(Z)$ por $P(Z)$, vemos que $\gamma \in \mathcal{O}[Z]$, pues la relación anterior coincide con la división euclídea. Además $\bar{P}(Z) = Z^{m_1}$. Deshaciendo el cambio, se obtienen todos los factores.

2.4. El cono tangente de una curva plana

Vamos ahora a aplicar el hecho de que el anillo \mathcal{O} es henseliano para probar rápidamente un primer resultado geométrico. Supongamos que trabajamos en dimensión $n = 2$ y que tenemos una serie irreducible f . Nos interesa el germen de curva $f = 0$, como subconjunto de $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$. Evidentemente, para la evaluación local de los ceros de f obtendremos el mismo resultado si multiplicamos f por una unidad, que no se anula en un entorno del origen. Así pues, salvo multiplicar por una unidad y efectuar un cambio lineal de coordenadas, podemos suponer que el germen \mathcal{C} de curva está dado por los ceros $P = 0$ de un polinomio de Weierstrass

$$P(x, y) = y^\nu + P_1(x)y^{\nu-1} + \cdots + P_\nu(x)$$

donde el orden de $P_i(x)$ es mayor o igual que i . Denotemos por $\text{In}^i(P_i) = \lambda_i x^i$ la parte de grado i de $P_i(x)$. Así la forma inicial de P es

$$\text{In}(P)(x, y) = y^\nu + \lambda_1 x y^{\nu-1} + \cdots + \lambda_\nu x^\nu$$

El *cono tangente* de \mathcal{C} se define por $\text{In}(P)(x, y) = 0$. Es un conjunto de rectas que pasan por el origen, ya que el polinomio $\text{In}(P)(x, y)$ es homogéneo en dos variables.

Supongamos ahora que $\text{In}(P)(x, y)$ se descompone

$$\text{In}(P)(x, y) = \prod_{s=1}^t (y - \mu_s x)^{m_s},$$

donde los μ_s son distintos entre sí. Esto nos da las t rectas distintas del cono tangente. Veamos ahora que de hecho se tiene

$$P(x, y) = P_1(x, y)P_2(x, y) \cdots P_t(x, y)$$

donde cada $P_s(x, y)$ es un polinomio de Weierstrass cuya forma inicial es $(y - \mu_s)^{m_s}$. Lógicamente tendremos entonces que

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_t,$$

donde cada \mathcal{C}_s es la curva $P_s(x, y) = 0$.

Pasemos a dar una idea de la demostración de estos hechos. Lo haremos vía una transformación *de explosión*, cuyo alcance desarrollaremos en secciones posteriores. Consideremos una variable adicional T y escribamos $y = Tx$. Hagamos

$$G(x, T) = P(x, Tx)/x^\nu = \prod_{s=1}^t (T - \mu_s)^{m_s} + x(\cdots).$$

Aplicando el lema de Hensel a $\mathbb{C}\{x\}$, tenemos una descomposición

$$G(x, T) = G_1(x, T)G_2(x, T) \cdots G_t(x, T),$$

tal que $G_s(x, 0) = (T - \mu_s)^{m_s}$, donde cada $G_s(x, T)$ es un polinomio en la variable T de grado m_s . Si ahora hacemos

$$P(x, y) = x^\nu G(x, y/x) = \prod_{s=1}^t x^{m_s} G_s(x, y/x),$$

tenemos la descomposición $P(x, y) = \prod_{s=1}^t P_s(x, y)$, donde

$$P_s(x, y) = x^{m_s} G_s(x, y/x).$$

Capítulo 3

Gérmenes de curvas analíticas

La geometría algebraica tiene como objeto básico de estudio las soluciones de ecuaciones polinómicas, es decir los conjuntos algebraicos. Como ya hemos indicado, su espacio ambiente más natural es el espacio proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ de dimensión n . Los primeros objetos interesantes son las *curvas algebraicas planas*. Una curva algebraica plana $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$ es un subconjunto del plano proyectivo dado por el lugar de ceros de un polinomio homogéneo $P(X_0, X_1, X_2)$, es decir,

$$\mathcal{C} = \{[a_0, a_1, a_2] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2; \quad P(a_0, a_1, a_2) = 0\}.$$

Hay dos tipos de propiedades que nos pueden interesar en el estudio de las curvas algebraicas planas. En primer lugar tenemos las propiedades globales, como puede ser el grado mínimo de un polinomio homogéneo $P(X_0, X_1, X_2)$ que defina la curva. El grado tiene una interpretación geométrica muy clara, es el número de puntos de corte de la curva con una recta del plano proyectivo, si se cuentan con la multiplicidad (multiplicidad de intersección) adecuada. En segundo lugar tenemos toda una colección de preguntas acerca de la naturaleza de la curva en un entorno de un punto de la misma, estas son las propiedades *locales*. En estas notas nos vamos a centrar sobre todo en estas últimas, aunque como veremos hay muchos aspectos globales también en el estudio local de los puntos de una curva.

Las funciones naturalmente definidas en un entorno de un punto dependen, tal como vimos al hablar del espacio ambiente, de la topología con la que trabajamos, ya sea la de Zariski, adaptada a polinomios, o la usual, en la que las funciones analíticas serán nuestra elección. El uso de la topología de Zariski

exige, para el tratamiento de problemas locales, la introducción de entornos etale y henselianizados; son estas herramientas sutiles y muy interesantes, destinadas a paliar la inexistencia del lema de Hensel para los anillos locales de variedades algebraicas, pero no las detallaremos en estas notas.

3.1. La multiplicidad, ramas y puntos singulares

Un *germen de curva analítica compleja en el origen de \mathbb{C}^2* es por definición un germen $(\mathcal{C}, \mathbf{0})$ de subconjunto de $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ dado por los ceros de una función analítica $f(x, y)$ en dos variables definida en un entorno del origen. Lo escribiremos

$$(\mathcal{C}, \mathbf{0}) = \{f(x, y) = 0\}.$$

Es evidente que uf define el mismo germen de curva analítica cuando u es un germen de función que no se anula en el origen (unidad de \mathcal{O}). Por otro lado, si tenemos

$$f = f_1^{r_1} f_2^{r_2} \cdots f_k^{r_k},$$

entonces $f = 0$ coincide con $f_1 f_2 \cdots f_k = 0$ y tenemos una descomposición

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_k,$$

donde $\mathcal{C}_i = \{f_i = 0\}$.

Llamaremos *rama analítica* a todo germen de curva analítica $f = 0$, donde f es irreducible como elemento de \mathcal{O} . Así, todo germen de curva analítica es unión de ramas analíticas.

Ya tenemos definida la multiplicidad $\nu(f)$ de un elemento $f(x, y) \in \mathcal{O}$. Diremos que el origen $\mathbf{0} \in \mathcal{C}$ es un punto no singular de \mathcal{C} si la curva está definida por una ecuación $f = 0$ con $\nu(f) = 1$. Es evidente que si el origen es no singular, entonces \mathcal{C} es una rama analítica. De un modo más general, la multiplicidad $\nu_{\mathbf{0}}\mathcal{C}$ en el origen se define como la más pequeña de las multiplicidades $\nu(f)$ donde $f = 0$ es una ecuación de \mathcal{C} . Así pues, el origen es un *punto singular* si tenemos $\nu_{\mathbf{0}}\mathcal{C} \geq 2$.

Nótese que si el germen de curva analítica es no singular, entonces es uno de los ejes coordenados, salvo cambio local de coordenadas. En efecto, la ecuación $f = 0$ que define la curva puede considerarse la de un eje, pues si f tiene multiplicidad 1 tenemos un cambio de variables $(x, y) \mapsto (f, g)$.

Las definiciones anteriores se adaptan también a espacios ambiente más generales. Supongamos que M es una variedad analítica compleja de dimensión dos y consideremos un punto $p \in M$. Un *germen de curva analítica* (\mathcal{C}, p) es un germen de subconjunto de (M, p) que se traslada a un germen de curva analítica en el origen de \mathbb{C}^2 por una (y por tanto por todas ellas) carta centrada en el punto p . Diremos que un subconjunto $\mathcal{C} \subset M$ es una *curva analítica de M* si el germen de \mathcal{C} en cada uno de sus puntos es un germen de curva analítica. Esta definición permite objetos relativamente generales. Un primer ejemplo es una curva algebraica de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, que es efectivamente una curva analítica del plano proyectivo. Podemos ir un poco más lejos y fijar un subconjunto compacto $K \subset M$, que da lugar al germen de conjunto (M, K) . En este sentido, una *curva analítica de (M, K)* es un subconjunto (de gérmenes) $(\mathcal{C}, \mathcal{C} \cap K) \subset (M, K)$ que para cada $p \in \mathcal{C} \cap K$ define un germen de curva analítica. Aún cuando esta última definición parezca un poco artificiosa, veremos su utilidad en el contexto de la reducción de singularidades.

3.2. Explosiones y curvas analíticas

Consideremos un espacio ambiente M de dimensión dos, que sea una variedad analítica compleja y sea $\mathcal{C} \subset M$ una curva analítica. Vamos también a fijar un punto $p \in \mathcal{C}$. Así tenemos un germen de curva analítica

$$(\mathcal{C}, p) \subset (M, p).$$

Efectuemos la explosión de M con centro p : $\pi : M_1 \rightarrow M$. Recordemos que el divisor excepcional $E_1 = \pi^{-1}(p)$ se identifica con una recta proyectiva $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ y que tenemos un morfismo de gérmenes de espacio ambiente

$$\pi : (M_1, E_1) \rightarrow (M, p).$$

La primera pregunta que nos planteamos es si $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ es una curva analítica de M_1 . Nótese que $E_1 \subset \pi^{-1}(\mathcal{C})$ dado que $p \in \mathcal{C}$. De hecho veremos que hay una descomposición única

$$\pi^{-1}(\mathcal{C}) = E_1 \cup \mathcal{C}_1,$$

donde \mathcal{C}_1 es una curva analítica de M_1 que no contiene E_1 . Estos objetos reciben los siguientes nombres: el *transformado total de \mathcal{C} por π* es $\pi^{-1}(\mathcal{C})$, mientras que \mathcal{C}_1 es el *transformado estricto de \mathcal{C} por π* .

Para probar que el transformado total $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ es una curva analítica de M_1 solamente debemos preocuparnos de verificarlo en los puntos del divisor excepcional E_1 , ya que fuera de esos puntos la explosión define un isomorfismo. Es decir, ya sabemos que

$$\pi^{-1}(\mathcal{C}) \setminus E_1 \subset M \setminus E_1$$

es una curva analítica. Elijamos ahora un punto $p_1 \in E_1$. Después de un cambio lineal de coordenadas locales en p , tenemos coordenadas locales (x', y') en p_1 que cumplen

$$x' \circ \pi = x; \quad y' x' \circ \pi = y.$$

Para simplificar las notaciones, escribiremos: $x = x', y = x'y'$. Supongamos que \mathcal{C} está localmente dado en p por $f(x, y) = 0$, donde

$$f(x, y) = f_\nu(x, y) + f_{\nu+1}(x, y) + \cdots,$$

siendo los $f_i(x, y)$ polinomios homogéneos de grado i . Entonces $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ está localmente dado en p_1 por $g(x', y') = 0$, donde

$$g(x', y') = f(x', x'y') = x'^\nu (f_\nu(1, y') + x'f_{\nu+1}(1, y') + \cdots) = x'^\nu f'(x', y').$$

Esto demuestra claramente que $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ define un germen de curva analítica en p_1 . Consideremos el germen (\mathcal{C}_1, p_1) definido por $f'(x', y') = 0$. Es evidente que (E_1, p_1) no está contenido en (\mathcal{C}_1, p_1) , ya que $E_1 = \{x' = 0\}$ y $f'(0, y') = f_\nu(1, y') \neq 0$. Por otro lado observemos que $(\mathcal{C}_1, p_1) \setminus E_1 = \pi^{-1}(\mathcal{C}) \setminus E_1$ y además, salvo que (\mathcal{C}_1, p_1) sea el vacío, entonces

$$(\mathcal{C}_1, p_1) = ((\pi^{-1}(\mathcal{C}) \setminus E_1) \cup \{p_1\}, p_1),$$

donde entendemos esta igualdad com gérmenes. Ahora queremos mostrar que $\mathcal{C}_1 \subset M_1$ es una curva analítica, donde \mathcal{C}_1 se obtiene añadiendo a

$$\pi^{-1}(\mathcal{C}) \setminus E_1$$

precisamente los puntos p_1 donde (\mathcal{C}_1, p_1) no sea el vacío. Sin entrar en detalles, esto no tiene ningún problema una vez que veamos que el conjunto de dichos puntos p_1 es finito. Este cálculo ya lo hemos hecho, pues dichos puntos corresponden al *proyektivizado del cono tangente* $f_\nu(x, y) = 0$.

Recordemos finalmente que la explosión se puede considerar un morfismo de gérmenes

$$\pi : (M_1, E_1) \rightarrow (M, p),$$

y que las curvas transformada total o estricta definen respectivamente curvas analíticas de (M_1, E_1) .

3.3. Reducción de singularidades

Como ya hemos dicho, un germen de curva analítica plana $f(x, y) = 0$ es no singular en el origen si la ecuación puede tomarse de modo que $\nu(f) = 1$, donde $\nu(f)$ denota la multiplicidad de $f(x, y)$. Nuestra primera observación es que todo punto no singular se transforma en un punto no singular por una explosión. Precisemos el enunciado

Proposición 1. *Sea $(\mathcal{C}, p) \subset (M, p)$ un germen de curva plana y supongamos que p es no singular para (\mathcal{C}, p) . Consideremos la explosión*

$$\pi : (M_1, E_1) \rightarrow (M, p)$$

centrada en p y sea $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_1 \cap E_1)$ el transformado estricto de (\mathcal{C}, p) por π . Entonces:

1. *Existe un único punto $p_1 \in \mathcal{C}_1 \cap E_1$.*
2. *El germen (\mathcal{C}_1, p_1) es no singular.*
3. *El transformado estricto \mathcal{C}_1 y el divisor excepcional E_1 son transversales en p_1 , es decir, el cono tangente de $(\mathcal{C}_1 \cup E_1, p_1)$ consiste en dos rectas distintas.*

Hay dos maneras de probar la proposición anterior. La primera consiste en observar que salvo cambio de coordenadas se puede suponer que $f(x, y) = y$ y entonces el resultado es evidente para esta ecuación particular. Esta aproximación es totalmente correcta, aunque se basa fuertemente en la covariancia de la explosión respecto de los cambios de coordenadas (propiedad universal de la explosión). Se trata de un resultado cierto que no hemos detallado (en contextos muy generales, con funciones analíticas asociadas a series generalizadas, hay que prestar atención) y por consiguiente la prueba estaría ya

completa. Otra manera es hacer directamente los cálculos sin cambio previo de coordenadas. Veámoslo a título de ejemplo. Salvo un cambio de orden en x, y (cambiar el papel de las coordenadas) podemos suponer que $f(x, y)$ se escribe

$$f(x, y) = y - \lambda x + f_2(x, y) + f_3(x, y) + \dots .$$

Ahora los puntos de E_1 son los de una recta proyectiva, parametrizados por $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, que podemos denotar p'_μ , con $\mu \in \mathbb{C}$, junto con p'_∞ . En el punto p'_μ tenemos coordenadas locales (x'_μ, y'_μ) dadas por

$$x'_\mu = x, \quad y'_\mu = y/x - \mu,$$

mientras que en p'_∞ tenemos coordenadas locales $x'_\infty = x/y, y'_\infty = y$. Si expresamos $f(x, y)$ en p'_∞ , tenemos

$$f(x'_\infty y'_\infty, y'_\infty) = y'_\infty (1 - \lambda x'_\infty + y'_\infty(\dots)),$$

donde el divisor excepcional está localmente dado por $y'_\infty = 0$ y evidentemente el transformado estricto *no pasa por* p'_∞ . Expresando $f(x, y)$ en p'_μ , tenemos

$$f(x'_\mu, x'_\mu(y'_\mu + \mu)) = x'_\mu (y'_\mu + (\mu - \lambda) + x'_\mu(\dots)),$$

donde el divisor excepcional está dado por $x'_\mu = 0$ y el transformado estricto pasa por p'_μ exactamente cuando $\mu = \lambda$. En este caso, el transformado estricto está dado por

$$y'_\mu + x'_\mu(\dots) = 0,$$

es no singular y su recta tangente $y + \lambda'x = 0$ es distinta de $x = 0$, recta tangente del divisor excepcional.

Puntos infinitamente próximos Consideremos un germen de curva plana $(\mathcal{C}, p) \subset (M, p)$. Efectuemos la explosión con centro p

$$\pi_1 : (M_1, E_1) \rightarrow (M, p).$$

El conjunto finito de puntos $q_1, q_2, \dots, q_{k_1} \in E_1$ por los cuales pasa el transformado estricto \mathcal{C}_1 de \mathcal{C} se corresponde con las *tangentes de \mathcal{C} en p* . Ahora podemos hacer la explosión de M_1 simultáneamente en todos estos puntos así obtener

$$\pi_1 : (M_2, \pi_1^{-1}(E_1) = E_2) \rightarrow (M_1, E_1).$$

Nótese que E_2 es una unión de rectas proyectivas que se cortan dos a dos en a lo sumo un punto y de forma transversal. Más precisamente, si E_p^2 es el transformado estricto de E_1 por π_1 y escribimos $E_{q_s}^2 = \pi_1^{-1}(q_s)$, para $s = 1, 2, \dots, k_1$, entonces tenemos

$$E_2 = E_p^2 \cup E_{q_1}^2 \cup E_{q_2}^2 \cup \dots \cup E_{q_{k_1}}^2.$$

El conjunto finito $\{q_{sj}\}$ de los puntos de E_2 por las cuales pasa el transformado estricto de \mathcal{C} son los *puntos infinitamente próximos de segundo orden de \mathcal{C}* . Organizamos los subíndices para que $\pi(q_{sj}) = q_s$. Este proceso se puede iterar indefinidamente, construyendo así una sucesión de morfismos

$$(M; p) \xleftarrow{\pi_1} (M_1, E_1) \xleftarrow{\pi_2} (M_2, E_2) \xleftarrow{\pi_3} \dots$$

El morfismo $\pi^n : (M_n, E_n) \rightarrow (M, p)$ es composición de explosiones y en E_n tenemos seleccionados los puntos $\{q_{s_1 s_2 \dots s_n}\}$ por los que pasa el transformado estricto de \mathcal{C} , que llamaremos *puntos infinitamente próximos de n -ésimo nivel de \mathcal{C}* . Estos sirven de centro para π_{n+1} y tenemos $\pi^{n+1} = \pi^n \circ \pi_{n+1}$. Recordemos que

$$\pi_{n+1}(q_{s_1 s_2 \dots s_n s_{n+1}}) = q_{s_1 s_2 \dots s_n}.$$

Por otro lado, el divisor E_n se descompone

$$E_n = E_p^n \cup \bigcup_{j=1}^n \left\{ \bigcup_{s_1 s_2 \dots s_j} E_{q_{s_1 s_2 \dots s_j}}^n \right\}.$$

Desde el punto de vista combinatorio, el conjunto de puntos infinitamente próximos de (\mathcal{C}, p) forma un *árbol* de raíz p . Si fijamos uno de ellos, digamos $q_{s_1 s_2 \dots s_n}$, al germificar el morfismo π^n en dicho punto, obtenemos un sucesión de explosiones locales

$$\pi_{j, q_{s_1 s_2 \dots s_j}} : (M_j, q_{s_1 s_2 \dots s_j}) \rightarrow (M_{j-1}, q_{s_1 s_2 \dots s_{j-1}}), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

de manera que $\pi_{q_{s_1 s_2 \dots s_n}}^n : (M_n, q_{s_1 s_2 \dots s_n}) \rightarrow (M, p)$, es la composición

$$\pi_{q_{s_1 s_2 \dots s_n}}^n = \pi_{1, q_{s_1}} \circ \pi_{2, q_{s_1 s_2}} \circ \dots \circ \pi_{n, q_{s_1 s_2 \dots s_n}}.$$

Es significativo que en cada punto infinitamente próximo $q = q_{s_1 s_2 \dots s_n}$ de \mathcal{C} tenemos el germen de divisor (E_n, q) que puede ser de dos tipos:

1. Hay una única componente de E_n que pasa por q . En este caso, el germen (E_n, q) es el germen de una curva lisa en q . Este tipo de puntos se llamarán *de tipo traza*.
2. Hay dos componentes de E_n que pasan por q . Son necesariamente lisas y transversales. Llamaremos a estos puntos infinitamente próximos *puntos esquina*.

Es un ejercicio interesante ver cómo se va creando el árbol de puntos infinitamente próximos para diferentes ejemplos de gérmenes de curvas planas.

Puntos de cruzamientos normales Por cada punto infinitamente próximo $q = q_{s_1 s_2 \dots s_n}$ de \mathcal{C} pasa el transformado estricto de \mathcal{C} , que podemos llamar \mathcal{C}_q . Nótese que tenemos la igualdad de gérmenes

$$((\pi^n)^{-1}(\mathcal{C}), q) = (\mathcal{C}_q \cup E_n, q).$$

Diremos que q es un punto infinitamente próximo de *cruzamientos normales* para \mathcal{C} si q es un punto de tipo traza y además \mathcal{C}_q es no singular y transversal a E_n en q .

Observación 2. Como consecuencia de la proposición, se sigue que en el árbol de puntos infinitamente próximos, los puntos de cruzamientos normales q tienen la propiedad de que hay únicamente un punto infinitamente próximo inmediatamente sobre q y este es a su vez de cruzamientos normales. Con lo cual la situación se repite y encima de q hay una única rama del árbol que además está formada de puntos de cruzamientos normales.

Ahora podemos enunciar el teorema de reducción de singularidades

Teorema 4. *Sea $(\mathcal{C}, p) \subset (\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ un germen de curva analítica. Existe un índice $n \geq 1$ tal que todos los puntos infinitamente próximos de n -ésimo nivel de \mathcal{C} son puntos de cruzamientos normales.*

Más adelante daremos interpretaciones de este resultado de reducción de singularidades, en las siguientes secciones vamos a presentar una prueba completa del mismo. En todo caso, la observación más inmediata es que si el teorema es cierto, entonces el transformado estricto de la curva es no singular en todos aquellos puntos por los que pasa. Esto justifica naturalmente que

demos también el nombre de “desingularización” al teorema anterior, aunque el enunciado es más preciso que simplemente conseguir que el transformado estricto sea no singular.

3.4. Uniformización local

El problema de reducción de singularidades es un problema central en la geometría algebraica que no está todavía resuelto completamente, aunque los resultados de Hironaka son contundentes y dan cuenta de la reducción sobre cuerpos de característica cero, como los complejos, y de variedades analíticas. El problema que queda pendiente es sobre todo el de variedades algebraicas sobre cuerpos de característica positiva, junto con versiones en característica cero para objetos diferenciales y dinámicos, como campos de vectores, foliaciones e iteración de difeomorfismos. De todos modos en el contexto de la geometría algebraica son Zariski primero e Hironaka después quienes han marcado las pautas, sin olvidar a Abhyankar. El método clásico de Zariski es el de la *uniformización local*, que no vamos a detallar completamente aquí, pero sí ilustrar con el ejemplo de curvas. El método de Hironaka es más global, terminaremos estas notas con una introducción a la reducción de singularidades de superficies, que ilustrará el método de Hironaka, sobre todo en la parte del contacto maximal.

A continuación vamos a ilustrar en el caso de curvas el punto de vista de uniformización local, aunque sin hablar de valoraciones, que es el instrumento algebraico que hay por detrás.

Consideremos un germen de curva analítica $(\mathcal{C}, \mathbf{0}) \subset (\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$. Un *bambú* sobre $(\mathcal{C}, \mathbf{0})$ es una sucesión de explosiones de puntos

$$\mathcal{B} : (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) = (M_0, p_0) \xleftarrow{\sigma_1} (M_1, p_1) \xleftarrow{\sigma_2} (M_2, p_2) \xleftarrow{\sigma_3} \dots$$

donde p_i es el centro de cada σ_{i+1} y además siguen la curva $(\mathcal{C}, \mathbf{0})$ en el sentido de que el transformado estricto \mathcal{C}_{i+1} de \mathcal{C}_i pasa por p_{i+1} . Lógicamente aquí empezamos por $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$.

Ciertamente hay una relación directa entre los bambúes de un germen de curva $(\mathcal{C}, \mathbf{0})$ y los puntos infinitamente próximos que hemos introducido en la sección anterior. Si entrar en notaciones arduas, el bambú \mathcal{B} se corresponde con la selección de una rama infinita en el árbol de puntos infinitamente próximos

de $(\mathcal{C}, \mathbf{0})$. Más aún, el carácter de tipo traza o esquina de los puntos p_i como puntos infinitamente próximos se obtiene directamente a través del bambú. Para ello consideremos $D_1 = \sigma^{-1}(\mathbf{0})$ y los gérmenes de divisor excepcional

$$(D_{i+1}, p_{i+1}) = (\sigma_{i+1}^{-1}(D_i), p_{i+1}); \quad i = 1, 2, \dots$$

Así tenemos que p_i es de tipo traza si (D_i, p_i) es una única curva lisa y p_i será de tipo esquina si (D_i, p_i) es la unión de dos curvas lisas, que siempre serán transversales. Más aún, el punto p_i como punto infinitamente próximo es un punto de cruzamientos normales si es de tipo traza y $(D_i \cup \mathcal{C}_i, p_i)$ es la unión de dos curvas lisas transversales.

Ahora podemos enunciar el teorema de uniformización local para gérmenes de curvas planas:

Teorema 5 (Uniformización local). *Sea $(\mathcal{C}, \mathbf{0}) \subset (\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ un germen de curva analítica y consideremos un bambú*

$$\mathcal{B} : (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) = (M_0, p_0) \xrightarrow{\mathcal{I}^1} (M_1, p_1) \xrightarrow{\mathcal{I}^2} (M_2, p_2) \xrightarrow{\mathcal{I}^3} \dots$$

Entonces, existe un índice $m \geq 0$ tal que cualquier p_i con $i \geq m$ es un punto infinitamente próximo de tipo cruzamientos normales.

Veamos ahora cómo este resultado implica el teorema de reducción de singularidades. Para ello, consideraremos el *árbol esencial de puntos infinitamente próximos* de la curva $(\mathcal{C}, \mathbf{0})$. Diremos que un punto infinitamente próximo q de $(\mathcal{C}, \mathbf{0})$ es *esencial* si no es de cruzamientos normales. Recordemos que en el árbol de puntos infinitamente próximos sobre un punto de cruzamientos normales hay un único punto infinitamente próximo, que además es de cruzamientos normales, y así sucesivamente. Por consiguiente, por encima de un punto de cruzamientos normales hay una rama única del árbol, que además está formada de puntos de cruzamientos normales. En ese sentido, podemos “podar” el árbol de puntos infinitamente próximos, olvidándonos de los puntos de cruzamientos normales que siguen a otro del mismo tipo. Obtenemos así el árbol esencial de puntos infinitamente próximos, que podemos denotar $AS(\mathcal{C}, \mathbf{0})$. La observación fundamental que queremos hacer aquí es la siguiente:

Si $AS(\mathcal{C}, \mathbf{0})$ es finito, existe $n \geq 0$ tal que todos los puntos infinitamente próximos de n -ésimo nivel son de cruzamientos normales.

En efecto, si n es mayor que el número de elementos (vértices o nodos) del árbol esencial de puntos infinitamente próximos, todos los puntos infinitamente próximos de n -ésimo nivel deben ser puntos de cruzamientos normales.

Ahora podemos abordar la prueba del teorema de reducción de singularidades por reducción al absurdo. Supongamos que el teorema no se cumple para $(\mathcal{C}, \mathbf{0})$. Entonces el árbol esencial $\mathcal{AS}(\mathcal{C}, \mathbf{0})$ no puede ser finito. Ahora bien, el árbol esencial es un árbol con una sola raíz, cuyos niveles son finitos (los puntos infinitamente próximos de un nivel dado forman un conjunto finito). Podemos entonces aplicar el Lema de König

Lema 1 (König). *Si un árbol (con una única raíz) es infinito y tiene todos sus niveles finitos, entonces posee una rama infinita.*

La prueba de este lema es sencilla, pero de una lógica perversa. Es como sigue. Supongamos que r_0 es la raíz del árbol. Inmediatamente sobre r_0 existen solamente un número finito de nodos del árbol, puesto que el primer nivel es finito. Cada uno de estos nodos tiene encima un árbol, estos son disjuntos entre sí y su reunión (junto con la raíz) da el árbol de partida. Así que uno de ellos es infinito, digamos que es el soportado por r_1 . Repetimos el argumento con r_1 , obtenemos r_2 y así sucesivamente. Hemos construido la rama infinita

$$\mathcal{B} : r_0 < r_1 < r_2 < \dots .$$

Ahora podemos aplicar el lema de König a nuestra situación. Si el árbol esencial $\mathcal{AS}(\mathcal{C}, \mathbf{0})$ es infinito, debe existir una rama infinita, que se identifica con un bambú esencial

$$\mathcal{B} : (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) \xrightarrow{\sigma_1} (M_1, p_1) \xrightarrow{\sigma_2} (M_2, p_2) \xrightarrow{\sigma_3} \dots .$$

en el cual todos los puntos infinitamente próximos p_i son esenciales. Esto contradice el teorema de uniformización local.

Así pues, para probar el teorema de reducción de singularidades es suficiente probar el teorema de uniformización local. A ello dedicaremos la próximas secciones.

3.5. Estrategia para la uniformización local.

En esta sección presentamos una estrategia para la prueba del teorema de uniformización local particularizando las ideas de Zariski para casos más

complicados de uniformización local siguiendo una valoración. Razonando por reducción al absurdo, tenemos un bambú esencial (infinito) para $(\mathcal{C}, \mathbf{0})$

$$\mathcal{B} : (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) = (M_0, p_0) \xrightarrow{\mathcal{Q}^1} (M_1, p_1) \xrightarrow{\mathcal{Q}^2} (M_2, p_2) \xrightarrow{\mathcal{Q}^3} \dots$$

y queremos probar que esto no puede ocurrir. El bambú es de uno de los tres tipos siguientes:

1. A. *Tipo combinatorio, o esquina.* A partir de un índice $N \geq 0$, todos los puntos infinitamente próximos p_i con $i \geq N$ son esquinas.
2. B. *Tipo libre, o traza.* A partir de un índice $N \geq 0$, todos los puntos infinitamente próximos p_i con $i \geq N$ son de tipo traza (es decir no esquinas).
3. C. *Tipo salvaje.* Para cualquier índice N existen $i, j \geq N$ tales que p_i es de tipo traza y p_j de tipo esquina.

La nomenclatura hace alusión a términos clásicos para los puntos infinitamente próximos y para las valoraciones.

Ahora debemos probar que en cualquiera de los casos A,B o C, se obtiene la contradicción deseada.

3.6. El poliedro de Newton y el juego de Hironaka

En esta sección introduciremos el poliedro de Newton de una serie. Este objeto sirve como base para el control del proceso de reducción de singularidades en el caso combinatorio. En particular resolveremos los casos combinatorio (o esquina) y traza (o libre) de la sección anterior.

Consideremos una serie de potencias en dimensión n

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} c_I \mathbf{x}^I \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]].$$

El soporte de ϕ es por definición el conjunto

$$\text{Sop}(\phi) = \{I; c_I \neq 0\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^n.$$

Ahora, el poliedro de Newton $\mathcal{N}(\phi)$ es el cierre convexo de $\text{Sop}(\phi) + \mathbb{R}_{\geq 0}^n$, que suponemos subconjunto de $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$. Las propiedades básicas del poliedro de Newton que nos interese:

1. Los vértices del poliedro son algunos de los elementos del soporte.
2. Si $\mathcal{N}(\phi)$ tiene un único vértice \mathbf{a} , entonces ϕ es una serie de la forma $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathbf{a}}U(\mathbf{x})$, donde $U(\mathbf{x})$ es una unidad; el recíproco es también cierto. En particular, si el vértice es el origen, entonces ϕ es una unidad.

Vamos ahora a introducir el *juego débil de Hironaka* sobre el poliedro, cuya solución en dimensión dos resuelve el caso combinatorio para las curvas. Recordemos que la multiplicidad $\nu(\phi)$ de ϕ es el mínimo de los grados de los monomios que intervienen en la expresión de ϕ , es decir

$$\nu(\phi) = \min\{|I|; c_I \neq 0\} = \min\{m; \{u_1 + u_2 + \dots + u_n = m\} \cap \mathcal{N}(\phi) \neq \emptyset\}.$$

Dado un subconjunto $B \subset \{1, 2, \dots, n\}$ de al menos dos elementos (en el caso $n = 2$ solo hay una selección posible) definimos la multiplicidad $\nu_B(\phi)$ por

$$\nu_B(\phi) = \min\{\sum_{s \in B} i_s; c_I \neq 0\} = \min\{m; \{\sum_{s \in B} u_s = m\} \cap \mathcal{N}(\phi) \neq \emptyset\}$$

Evidentemente $\nu(\phi) = \nu_{\{1, 2, \dots, n\}}(\phi)$. Consideremos un índice $j \in B$, que llamaremos *carta de B*. El (B, j) -transformado de ϕ es

$$\tau_{B,j}(\phi) = x_j^{-\nu_B(\phi)} \sum_I c_I \mathbf{x}^{\sigma_{B,j}(I)},$$

donde se define $\sigma_{B,j}(I) = I'$ por $i'_s = i_s$, si $s \neq j$ e $i'_j = \sum_{s \in B} i_s$. Si denotamos por $[[\sigma_{B,j}(\mathcal{N}(\phi))]]$ el cierre convexo de $\sigma_{B,j}(\mathcal{N}(\phi)) + \mathbb{R}_{\geq 0}^n$, entonces el poliedro de Newton de $\tau_{B,j}(\phi)$ es

$$\mathcal{N}(\tau_{B,j}(\phi)) = [[\sigma_{B,j}(\mathcal{N}(\phi))]] - \nu_B(\phi)\mathbf{e}_j,$$

donde $e_{s,j} = 0$ si $s \neq j$ y $e_{j,j} = 1$.

El juego de Hironaka se desarrolla entre dos jugadores, el jugador **A** (nosotros) y el jugador **B** (nuestro oponente). Es como sigue:

1. El jugador **A** elige un “centro” $B \subset \{1, 2, \dots, n\}$.
2. El jugador **B** elige una carta $j \in B$.
3. Se substituye ϕ por $\tau_{B,j}\phi$ y el juego recomienza.

Se dice que el jugador **A** gana si $\tau_{B,j}\phi$ es una unidad, el “sufrido” jugador **B** no gana nunca. El objetivo de este juego es probar la existencia de una estrategia ganadora para el jugador **A**. Dicha estrategia existe y ha sido descrita por Mark Spivakovsky, pero el lector interesado podría intentar encontrarla por sí mismo.

En el caso de dimensión dos, no hay alternativa para el jugador **A**, ya que la única opción de selección de centro es elegir cada vez $B = \{1, 2\}$. Veamos que en este caso el juego se termina obligatoriamente y entonces el jugador **A** ganaría sin realizar ningún esfuerzo. Por otro lado es exactamente este hecho el que necesitaremos para probar que la situación de un bambú combinatorio no existe.

Supongamos que estamos en dimensión dos. La primera observación es que el número de vértices de $\mathcal{N}(\tau_{B,j}(\phi))$ es menor o igual al número de vértices de $\mathcal{N}(\phi)$. Supongamos que este número permanece constante y sean $\mathbf{v}_1 = (a_{11}, a_{12})$ y $\mathbf{v}_2 = (a_{21}, a_{22})$ dos vértices distintos de $\mathcal{N}(\phi)$, con $a_{11} < a_{21}$, que dan lugar a dos vértices $\mathbf{v}'_1 = (a'_{11}, a'_{12})$ y $\mathbf{v}'_2 = (a'_{21}, a'_{22})$ en $\mathcal{N}(\tau_{B,j}(\phi))$. Consideremos los números enteros positivos

$$p = a_{12} - a_{22}; \quad q = a_{21} - a_{11}.$$

Análogamente definimos p', q' . Se tiene que $p' + q' < p + q$ y por consiguiente al cabo de un número finito de etapas uno de los vértices de esta pareja debe desaparecer.

Supongamos ahora que el bambú \mathcal{B} es de tipo combinatorio. Esto significa que al cabo de un número finito de explosiones, todos los puntos infinitamente próximos son de tipo esquina. Supongamos que p_N es el primero de ellos. Localmente en p_N tenemos coordenadas x, y tales que $xy = 0$ describe precisamente el divisor excepcional. Además, el transformado estricto \mathcal{C}_N de \mathcal{C} en p_N está dado por una ecuación

$$f_N(x, y) = 0,$$

que no es divisible ni por x ni por y . El nuevo punto p_{N+1} está o bien en el transformado estricto de $y = 0$ o en el de $x = 0$, ya que debe ser de tipo esquina. Por consiguiente, tenemos coordenadas locales x', y' en p_{N+1} dadas por una de las ecuaciones siguientes

$$x = x', y = x'y'; \quad x = x'y', y = y'.$$

En el primer caso, primera carta, el transformado estricto \mathcal{C}_{N+1} está dado por $\tau_{\{1,2\},1}(f) = 0$ y en el segundo caso, segunda carta, por $\tau_{\{1,2\},2}(f) = 0$. Ahora, por aplicación de los resultados anteriores, podemos asegurar que al cabo de un número finito de etapas el correspondiente poliedro de Newton tiene un único vértice (el origen) y por consiguiente la ecuación local del transformado estricto debería ser una unidad. Esto diría que el transformado estricto no pasa por el punto infinitamente próximo, contradicción.

3.7. El caso libre

Vamos a suponer ahora que el bambú \mathcal{B} es tal que a partir de una etapa todos los puntos infinitamente próximos son de tipo traza, es decir, no son esquinas. Sin que esto suponga pérdida de generalidad, podemos suponer que es así desde el primer punto infinitamente próximo. Fijemos coordenadas locales x, y en p_0 para que p_1 no esté en el transformado estricto de $x = 0$, es decir que p_1 se corresponda a una tangente no vertical en p_0 . Entonces, existen coordenadas locales en p_1 dadas por

$$x_1 = x, \quad y_1 = y/x - c_1.$$

Además, el divisor excepcional está dado por $x_1 = 0$ localmente en p_1 . Como p_2 no es una esquina, entonces p_2 no está en el transformado estricto de $x_1 = 0$, por consiguiente, existen coordenadas locales en p_2 dadas por

$$x_2 = x_1, \quad y_2 = y_1/x_1 - c_2.$$

Y así sucesivamente.

Si observamos detenidamente las ecuaciones anteriores, nos damos cuenta de que todos los puntos infinitamente próximos p_i está situados en el transformado estricto de la curva (posiblemente formal):

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i.$$

Ahora podemos hacer un cambio de coordenadas formal $\hat{y} = y - \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i$.

Si incorporamos $\hat{\Gamma} = \{\hat{y} = 0\}$ como un divisor adicional, vemos que todos nuestro puntos infinitamente próximos son esquinas. El argumento de la sección precedente nos dice que el transformado total es de la forma $x^a \hat{y}^b = 0$ y

por consiguiente el transformado estricto es o bien $\hat{y} = 0$ o bien el vacío. En el primer caso tenemos un punto de tipo cruces normales, en el segundo no sería un punto infinitamente próximo. En ambos obtenemos la contradicción deseada.

3.8. El polígono de Newton-Puiseux

Vamos ahora a abordar el tercer supuesto para el bambú de puntos infinitamente próximos. Supondremos que aparecen puntos de tipo traza y puntos de tipo esquina por encima de cualquier índice prefijado. En este caso el control lo efectuaremos también con un polígono de Newton-Puiseux, cuya definición será esencialmente la misma que la del poliedro. En situaciones de dimensión ambiente mayor, se tendrá de todos modos un polígono plano de Newton-Puiseux, y no un poliedro, que servirá para abordar determinadas valoraciones, mientras que el poliedro de Newton, útil para el tratamiento del caso combinatorio, es un poliedro en dimensión n al que se aplica el juego de Hironaka u otros argumentos similares.

Una vez fijado el bambú \mathcal{B} , denotaremos por e_i el número de componentes del divisor excepcional que pasan por p_i . Así, tenemos que $e_0 = 0$, que $e_1 = 1$ y que $e_i \in \{1, 2\}$ para cualquier $i \geq 2$, donde si $e_i = 2$ tenemos un punto infinitamente próximo de tipo esquina y si $e_i = 1$ de tipo traza. Denotemos por $n_1 = 1 < n_2 < n_3 < \dots$ los índices correspondientes a los puntos infinitamente próximos de tipo traza. El j -ésimo *paquete de Puiseux* del bambú es la sucesión de puntos infinitamente próximos

$$\mathcal{P}(j) = \{p_{n_j}, p_{n_j+1}, p_{i+2}, \dots, p_{n_j+h_j}, p_{n_j+1}\}.$$

Obsérvese que es posible que $h_j = 0$, en el caso de que $n_{j+1} = n_j + 1$. diremos que el paquete es *irrelevante* si $h_j = 0$ y que es *esencial* cuando $h_j \geq 1$. Naturalmente tenemos que

$$e_{n_j+s} = 2, \quad s = 1, 2, \dots, h_j.$$

Nuestras hipótesis sobre el bambú dicen que hay un número infinito de paquetes de Puiseux esenciales.

Ahora vamos a asignar un invariante $\hbar_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ a cada paquete de Puiseux $\mathcal{P}(j)$. Probaremos que $\delta_{j+1} \leq \delta_j$ para cada $j = 1, 2, \dots$ y que además $\hbar_{j+1} < \hbar_j$

en el caso de que $\mathcal{P}(j)$ sea esencial. Esto da la contradicción deseada, puesto que un entero positivo no puede disminuir estrictamente infinitas veces.

El invariante se construirá a partir de una adecuada selección de coordenadas locales en el paquete de Puiseux $\mathcal{P}(j)$. Supongamos que tenemos fijadas coordenadas locales x, y en p_{n_j} tales que $x = 0$ es una ecuación local del divisor excepcional. Demos ahora coordenadas locales x_s, y_s en p_{n_j+s} , para los índices s tales que $0 \leq s \leq h_j$. Ponemos $x_0 = x, y_0 = y$. Supongamos que $s \geq 1$ (a veces esto ya no sucede porque $h_j = 0$ y el paquete es irrelevante). Empecemos por el caso $s = 1$, entonces p_{n_j+1} es una esquina y debe estar en el transformado estricto de $x_0 = 0$. Hacemos

$$x_1 = y_0/x_0, y_1 = y_0.$$

Sea $2 \leq s \leq h_j$ y supongamos que tenemos x_{s-1}, y_{s-1} construidas por inducción con la propiedad de que el divisor excepcional en p_{n_j+s-1} está localmente dado por $x_{s-1}y_{s-1} = 0$. El punto p_{n_j+s} es una esquina y está por tanto en el transformado estricto de $y_{s-1} = 0$ o bien de $x_{s-1} = 0$. En el primer caso escribimos $x_s = x_{s-1}, y_s = y_{s-1}/x_{s-1}$ y en el segundo caso hacemos $x_s = x_{s-1}/y_{s-1}, y_s = y_{s-1}$. Finalmente vamos a dar coordenadas locales x', y' en p_{n_j+1} a partir de x_{h_j}, y_{h_j} . Dado que el punto p_{n_j+1} ya no es esquina, existe $\lambda \neq 0$ de modo que

$$x' = x_{h_j}; y' = y_{h_j}/x_{h_j} - \lambda$$

definen coordenadas locales en p_{n_j+1} .

Consideremos ahora ecuaciones locales $f_s(x_s, y_s) = 0$ del transformado estricto de \mathcal{C} en cada punto infinitamente próximo p_{n_j+s} , para $s = 0, 1, \dots, h_j$, donde como recordaremos $(x, y) = (x_0, y_0)$. Además, hagamos

$$x^* = x_{h_j}, y^* = y_{h_j}/x_{h_j}; \quad x' = x^*, y' = y^* - \lambda.$$

Escribiremos $f'(x', y') = 0$ la ecuación del transformado estricto de \mathcal{C} en p_{n_j+1} que vamos a considerar. La primera observación es que las coordenadas (x^*, y^*) y (x, y) tienen una relación monomial del tipo siguiente

$$x = x^{*p}y^{*q}; \quad y = x^{*r}y^{*s}; \quad ps - qr = 1.$$

Además, el paquete de Puiseux es irrelevante si y solo si $q = 0$ (además necesariamente hay una única explosión y $p = r = s = 1$), en otro caso $q \geq 1$ y

$p \geq 2$. Entonces, el transformado estricto $f'(x', y')$ se expresa

$$x^{*a}y^{*b}f'(x', y') = f(x'^p(y' + \lambda)^q, x'^r(y' + \lambda)^s) = x'^a(y' + \lambda)^b f'(x', y').$$

Nótese que $y' + \lambda$ es una unidad en $p_{n_{j+1}}$.

Una vez introducidas las ecuaciones que consideraremos, definimos el invariante \tilde{h}_j como la altura (ordenada) del primer vértice del polígono de Newton $\mathcal{N}(f(x, y))$. Definiremos ahora la *altura crítica* α . Para ello precisamos introducir el *segmento crítico*, es el segmento (posiblemente reducido a un punto) del polígono de Newton que tiene pendiente $-m/n$, donde m, n se obtienen por la propiedad de que

$$y^* = \frac{x^n}{y^m}.$$

Nótese que esto es equivalente a resolver la ecuación lineal

$$pn - rm = 0, qn - sm = 1.$$

La altura crítica α es la altura del primer vértice del segmento crítico. Es evidente que $\alpha \leq \tilde{h}$.

Supongamos que el segmento crítico Δ tiene ecuación

$$(u, v) \in \Delta \Leftrightarrow mu + nv = c, \beta \leq u \leq \alpha.$$

La *parte crítica* de $f(x, y)$ que contribuye al segmento crítico se escribe

$$\sum_{\{mu+nv=c, \beta \leq u \leq \alpha\}} f_{uv} x^u y^v,$$

con la particularidad de que solo se consideran $(u, v) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Consideremos ahora el soporte $S^* \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ de $f(x^{*p}y^{*q}, x^{*r}y^{*s})$ en relación con las coordenadas x^*, y^* . Sea γ la abscisa más pequeña de este soporte. Se puede probar, por inducción sobre h_j , que la parte del soporte con esta abscisa se escribe

$$x^{*\gamma} y^{*sc} \sum_{\{mu+nv=c, \beta \leq u \leq \alpha\}} f_{uv} y^{*u/n} = x^{*\gamma} P(y^*)$$

Lo que importa de esta expresión es que una vez dividido por $x^{*\gamma}$ tenemos un polinomio $P(y^*)$ en y^* con una cantidad de términos t que no supera el valor

α . Es más en el caso de un paquete de Puiseux esencial tenemos $t < \alpha$. Si ahora hacemos

$$Q(y') = P(y' + \lambda)$$

entonces la altura \tilde{h}_{j+1} está caracterizada precisamente por

$$Q(y') = y'^{\tilde{h}_{j+1}} \tilde{Q}(y'); \quad \tilde{Q}(0) \neq 0.$$

Como $P(y^*)$ tiene t términos se sigue que $\tilde{h}_{j+1} \leq t \leq \alpha \leq \tilde{h}_j$. La desigualdad es estricta en el caso esencial, pues $t < \alpha$. Así completamos la uniformización local.

Capítulo 4

Equisingularidad

En esta sección daremos unas nociones mínimas de la teoría de equisingularidad de Zariski. Esta teoría da valor a la reducción de singularidades que hemos presentado, frente a otros métodos más radicales, como puede ser la ramificación, o la normalización. En efecto la información que se obtiene de la combinatoria asociada al proceso de reducción de singularidades abarca la descripción topológica de la pareja “espacio ambiente - germen de curva”, algo que no está dado por los procedimientos citados.

En toda la sección consideraremos un germen de curva analítica plana $(\mathcal{C}, \mathbf{0}) \subset (\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ que tenga eventualmente varias componentes irreducibles.

4.1. El grafo dual

Consideremos el morfismo de reducción de singularidades:

$$\pi : (M, D = \pi^{-1}(\mathbf{0})) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$$

para la curva $(\mathcal{C}, \mathbf{0})$, obtenido de manera mínima, es decir, por explosiones sucesivas en los puntos infinitamente próximos que no son de cruzamiento. El divisor D es conexo y unión de componentes irreducibles

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup \cdots \cup D_m,$$

donde cada D_j ha sido inicialmente originada por la explosión de un punto infinitamente próximo y después conservada como transformado estricto. Cada D_j es isomorfa a una recta proyectiva $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, aunque la inmersión $D_j \cup M$

tiene propiedades globales que dependen de la componente particular D_j . Finalmente, dos componentes D_j o bien no se cortan o si lo hacen se cortan en un único punto y de forma transversal.

A cada D_j le asociaremos un número $D_j \cdot D_j$, llamado *autointersección*, de la manera siguiente. Recordemos que π es composición de las sucesivas explosiones

$$\pi_{s+1} : (M^{s+1}, D^{s+1}) \rightarrow (M_s, D^s); \quad s = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

con centro en los puntos infinitamente próximos de nivel s que no son de cruzamientos normales. Nótese que en esta formulación tenemos

$$(M, D) = (M_N, D^N).$$

Ahora, podemos descomponer los divisores D^{s+1} en componentes irreducibles

$$D^{s+1} = \bigcup_{k=0}^s \left(\bigcup_{i_1, i_2, \dots, i_k} D_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{s+1} \right)$$

donde $D_{i_1, i_2, \dots, i_s}^{s+1}$ es la imagen inversa por π_{s+1} del punto infinitamente próximo r_{i_1, i_2, \dots, i_s} de nivel s y para $k < s$ tenemos que $D_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{s+1}$ es el transformado estricto de $D_{i_1, i_2, \dots, i_k}^s$. Como hemos hecho hasta ahora, entendemos que

$$r_{i_1, i_2, \dots, i_s} \in D_{i_1, i_2, \dots, i_{s-1}}^s.$$

Ahora ya podemos definir $D_{i_1, i_2, \dots, i_s}^{s+1} \cdot D_{i_1, i_2, \dots, i_s}^{s+1}$ por

1. $D_{i_1, i_2, \dots, i_s}^{s+1} \cdot D_{i_1, i_2, \dots, i_s}^{s+1} = -1$. Nótese que, en particular $D^1 \cdot D^1 = -1$ donde $D^1 = \pi_1^{-1}(\mathbf{0})$.
2. Si $k < s$ hacemos

$$D_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{s+1} \cdot D_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{s+1} = D_{i_1, i_2, \dots, i_k}^s \cdot D_{i_1, i_2, \dots, i_k}^s - \delta_{i_1, i_2, \dots, i_k}^s,$$

donde $\delta_{i_1, i_2, \dots, i_k}^s$ es el número de puntos infinitamente próximos r_{i_1, i_2, \dots, i_s} que están sobre la componente $D_{i_1, i_2, \dots, i_k}^s$. Dicho de otro modo $\delta_{i_1, i_2, \dots, i_k}^s$ es el número de explosiones locales que afectan la componente $D_{i_1, i_2, \dots, i_k}^s$ en π_{s+1} .

Ahora, el *grafo dual* $DG(\mathcal{C}, \mathbf{0})$ de $(\mathcal{C}, \mathbf{0})$ se define del modo siguiente. Es un grafo no orientado, pesado y flechado. Quiere decir esto que tiene un conjunto de vértices, de aristas y que a cada vértice se le asocia un peso y eventualmente se sitúa en él una o varias flechas. De manera precisa:

1. El conjunto de vértices del grafo dual se identifica con el conjunto de componentes del divisor excepcional $D = \pi^{-1}(\mathbf{0})$.
2. Dos componentes D_i y D_j están unidas por una arista si y solamente si $D_i \neq D_j$ y $D_i \cap D_j \neq \emptyset$. Recuérdese que de hecho dos componentes distintas se cortan en a lo sumo un punto, de modo que las aristas se pueden en este sentido identificar con los puntos de intersección de componentes del divisor.
3. A cada vértice se le asigna el peso (número entero negativo) correspondiente a la auto-intersección de la correspondiente componente del divisor.
4. En cada vértice se colocan tantas flechas como puntos de intersección del transformado esticto de \mathcal{C} con la correspondiente componente.

Dos grafos duales son isomorfos si existe una biyección entre los conjuntos de vértices que respeta las aristas, los pesos y las flechas.

Definición 3. *Diremos que $(\mathcal{C}, \mathbf{0})$ y $(\mathcal{C}', \mathbf{0})$ son gérmenes de curvas planas equisingulares si y solo si sus grafos duales son isomorfos.*

La teoría de equisingularidad ha sido desarrollada por Zariski. Existen muchas colecciones de invariantes completos de equisingularidad. Por ejemplo, los pares de Puiseux en el caso de curvas irreducibles, la sucesión de multiplicidades. En el caso más general la sucesión de multiplicidades y multiplicidades de intersección a lo largo del árbol de puntos infinitamente próximos, etc.. En realidad la pregunta pertinente es ¿qué significa la equisingularidad?. La respuesta es sorprendentemente topológica. El resultado principal en este sentido es

Dos gérmenes de curvas planas

$$(\mathcal{C}, \mathbf{0}), \quad (\mathcal{C}', \mathbf{0})$$

de $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ son equisingulares si y solamente si las parejas $(\mathbb{C}^2, \mathcal{C})$ y $(\mathbb{C}^2, \mathcal{C}')$ son topológicamente equivalentes como gérmenes en el origen.

En el siguiente apartado aclararemos el sentido de la afirmación anterior.

4.2. Estructura cónica de las singularidades

Sea $(\mathcal{C}, \mathbf{0}) \subset (\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ un germen de curva analítica en el origen de \mathbb{C}^2 . Elijamos una ecuación $f(x, y) = 0$ de \mathcal{C} que supondremos bien definida en un entorno U del origen. Para cada $\epsilon > 0$ denotamos

$$\mathbb{S}_\epsilon^3 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; |x|^2 + |y|^2 = \epsilon\} \subset \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4,$$

que es la frontera en $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ de la bola \mathbb{B}_ϵ de radio ϵ y centrada en el origen. Recordemos que \mathcal{C} se identifica con el subconjunto de $U \subset \mathbb{R}^4$ definido por la anulación de dos funciones analíticas reales, a saber, la parte real $\operatorname{Re}f$ y la parte imaginaria $\operatorname{Im}f$. Por otro lado, estas funciones son transversales (tomando U bastante pequeño) en cada punto de $\mathcal{C} \setminus \{\mathbf{0}\}$ y por consiguiente se tiene una superficie analítica real

$$\mathcal{C} \setminus \{\mathbf{0}\} \subset U \setminus \{\mathbf{0}\},$$

que en particular es de clase C^∞ .

Nótese que \mathbb{S}_ϵ^3 es una hipersuperficie de \mathbb{R}^4 , que además se puede indentificar con $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. Tomando ϵ suficientemente pequeño, se tiene que la intersección de subvariedades de clase C^∞ dada por

$$\mathcal{L}_\epsilon = \mathcal{C} \cap \mathbb{S}_\epsilon^3$$

es transversal y por consiguiente define una subvariedad compacta de dimensión 1 de \mathbb{S}_ϵ^3 . Es decir, un *enlace*, o unión finita de *nudos* enlazados. Sea ϵ_0 tal que para cada $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ se tiene la transversalidad indicada. Podemos formar el *cono sobre el enlace* $C\mathcal{L}_\epsilon$ definido por

$$C\mathcal{L}_\epsilon = \{t\mathbf{p}; \mathbf{p} \in \mathcal{L}_\epsilon, 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathbb{B}_\epsilon.$$

El siguiente enunciado da cuenta de la *estructura cónica* topológica de las singularidades de gérmenes de curvas analíticas planas:

Proposición 2. *Existe un homeomorfismo $h_{\epsilon_0} : \mathbb{B}_{\epsilon_0} \rightarrow \mathbb{B}_{\epsilon_0}$ con las siguientes propiedades*

1. *Para cada $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ se tiene $h(\mathbb{S}_\epsilon) = \mathbb{S}_\epsilon$.*
2. *$h_{\epsilon_0}(C\mathcal{L}_{\epsilon_0}) = \mathcal{C} \cap \mathbb{B}_{\epsilon_0}$.*

En particular, se obtiene que $h_{\epsilon_0}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ tenemos $h_{\epsilon_0}(\mathbb{B}_\epsilon) = \mathbb{B}_\epsilon$ y $h_{\epsilon_0}(C\mathcal{L}_\epsilon) = \mathcal{C} \cap \mathbb{B}_\epsilon$.

La prueba de esta proposición se hace construyendo un campo de vectores ξ de clase C^∞ definido en $\mathbb{B}_{\epsilon_0} \setminus \{\mathbf{0}\}$, cuya integración dará el homeomorfismo deseado. Los detalles, que resumiremos a continuación, se pueden ver en [46]. La idea es construir ξ mediante particiones de la unidad, con las dos propiedades siguientes:

- a) El producto escalar de ξ por el radio vector en cada punto es exactamente igual a -1 .
- b) El campo ξ es tangente a \mathcal{C} en cada punto de $\mathcal{C} \setminus \mathbf{0}$.

Para ellos basta seleccionar un campo de vectores con esa propiedad en abiertos que recubran \mathbb{B}_{ϵ_0} y aplicar particiones de la unidad. En los puntos exteriores a \mathcal{C} es evidente la elección. En los puntos de \mathcal{C} baste observar que, por transversalidad, el espacio tangente de \mathcal{C} no está contenido en el de \mathbb{S}_ϵ^3 para el ϵ correspondiente.

Finalmente, el flujo de ξ a partir de la identidad en $\mathbb{S}_{\epsilon_0}^3$ determina la construcción de h_{ϵ_0} : obsérvese que para tiempo constante el flujo envía esferas \mathbb{S}^3 sobre esferas.

4.3. Equivalencia topológica de gérmenes de curvas

Consideremos dos gérmenes de curvas planas equisingulares

$$(\mathcal{C}_1, \mathbf{0}); \quad (\mathcal{C}_2, \mathbf{0}).$$

En este apartado veremos que existe un homeomorfismo

$$g : (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$$

que envía \mathcal{C}_1 en \mathcal{C}_2 .

Sabemos que las resoluciones de singularidades de \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 tienen la misma combinatoria en el sentido de que dan pie a grafos duales pesados y flechados isomorfos. Precisemos un poco más este hecho. Denotemos por

$$M_0^{(i)} = (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) \xleftarrow{\pi_{i,1}} (M_1^{(i)}, E_1^{(i)}) \xleftarrow{\pi_{i,2}} \dots \xleftarrow{\pi_{i,N}} (M_N^{(i)}, E_N^{(i)}), \quad i = 1, 2,$$

la sucesión de explosiones que define los puntos infinitamente próximos hasta nivel N de $(\mathcal{C}_i, \mathbf{0})$ para $i = 1, 2$. Tomaremos N para que todos los puntos de nivel N sean de cruzamientos normales. Denotemos, como en las secciones anteriores

$$q_{s_1 s_2 \dots s_n}^{(i)} \in E_n^{(i)}$$

los puntos infinitamente próximos de nivel $n \leq N$. Recordemos que

$$\pi_n^{(i)}(q_{s_1 s_2 \dots s_n}^{(i)}) = q_{s_1 s_2 \dots s_{n-1}}^{(i)}$$

para cada $1 \leq n \leq N$. Veamos ahora, en este contexto, lo que significa la hipótesis de equisingularidad entre $(\mathcal{C}_1, \mathbf{0})$ y $(\mathcal{C}_2, \mathbf{0})$.

Lema 2. *Para cada $n \leq N$, los puntos infinitamente próximos de nivel n de $(\mathcal{C}_1, \mathbf{0})$ y de $(\mathcal{C}_2, \mathbf{0})$ están en biyección y además se pueden reordenar los índices para que cada $q_{s_1 s_2 \dots s_n}^{(1)}$ sea esquina o de tipo traza si y solamente si $q_{s_1 s_2 \dots s_n}^{(2)}$ lo es.*

Dejamos al lector la prueba de esta afirmación, a partir de la hipótesis de equisingularidad. Únicamente señalaremos una consecuencia de la misma:

Para cada $n \leq N$ tenemos que $q_{s_1 s_2 \dots s_n}^{(1)}$ es de tipo cruzamientos normales si y solamente si $q_{s_1 s_2 \dots s_n}^{(1)}$ lo es.

En efecto, para ver esta propiedad es suficiente observar que un punto infinitamente próximo es de cruzamientos normales si y solamente si en el árbol de puntos infinitamente próximos tiene por encima únicamente un bambú, todo él formado de puntos de tipo traza.

Nuestro objetivo ahora consiste en construir una equivalencia topológica del espacio ambiente que envíe \mathcal{C}_1 en \mathcal{C}_2 . Comenzaremos observando que existe un homeomorfismo

$$h_1 : (M_1^{(1)}, E_1^{(1)}) \rightarrow (M_1^{(2)}, E_1^{(2)})$$

con las dos propiedades siguientes

1. Se tiene $h_1(q_s^{(1)}) = q_s^{(2)}$ para cada punto infinitamente próximo $q_s^{(1)}$.
2. Para cada $q_s^{(1)}$ el homeomorfismo h_1 induce un isomorfismo analítico de un entorno de $q_s^{(1)}$ sobre un entorno de $q_s^{(2)}$.

Consideremos ahora los gérmenes de curvas analíticas $(h_1(\mathcal{C}_1), q_s^{(2)})$ y $(\mathcal{C}_2, q_s^{(2)})$ en cada punto infinitamente próximo de primer nivel. Trabajando por inducción sobre la longitud de la reducción de singularidades, existen homeomorfismos

$$g_s : (M_1^{(2)}, q_s^{(2)}) \rightarrow (M_1^{(2)}, q_s^{(2)})$$

que envían $(h_1(\mathcal{C}_1) \cup E_1^{(2)}, q_s^{(2)})$ en $(\mathcal{C}_2 \cup E_1^{(2)}, q_s^{(2)})$. Haciendo un pegado mediante particiones de la unidad, se construye un homeomorfismo

$$\tilde{g} : (M_1^{(1)}, E_1^{(1)}) \rightarrow (M_1^{(2)}, E_1^{(2)})$$

que envía $\mathcal{C}_1 \cup E_1^{(1)}$ en $\mathcal{C}_2 \cup E_1^{(2)}$ y que se proyecta vía $\pi_1^{(1)} = \pi_1^{(2)}$ en el homeomorfismo buscado

$$g : (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$$

que envía \mathcal{C}_1 en \mathcal{C}_2 .

Observación 3. Es importante señalar que la equisingularidad no significa equivalencia analítica. El primer ejemplo es considerar dos curvas que sean la unión de cuatro rectas cuyas pendientes tengan razón doble proyectiva diferente (incluso por permutación del orden de las rectas). La razón doble de las pendientes es un invariante analítico. Sin embargo son equisingulares y por tanto topológicamente equivalentes. Es interesante hacer el ejercicio de descripción de la topología de una de esas curvas: se trata de un cono en \mathbb{R}^4 cuya directriz son cuatro circunferencias no anudadas en \mathbb{S}^3 dos a dos simplemente enlazadas.

4.4. Topología y equisingularidad

Veremos ahora que la equisingularidad está determinada por el tipo topológico del espacio ambiente-germen de curva. No daremos detalles completos y en concreto para el caso de varias ramas remitimos el lector a los textos

estándar, aunque al mismo tiempo le animamos a intentar por sí mismo la prueba del resultado.

Dado que ya sabemos que dos curvas equisingulares son topológicamente equivalentes, nos queda ver el recíproco. Para ello podemos construir ejemplos específicos de cada tipo de equisingularidad y ver cuál es el tipo topológico de su inmersión en el ambiente. Lo haremos así para el caso de una única rama.

Empecemos por el caso sencillo de una cúspide del tipo $y^d - x^p = 0$ con d, q primos entre sí. Este es un grafo dual con una sola flecha y todos sus vértices de valencia uno o dos, excepto el que contiene la flecha, que es de valencia tres. La valencia es el número de aristas o flechas que salen de cada vértice.

Observación 4. El lector podrá comprobar por sí mismo que todos los grafos duales posibles con las características anteriores (un solo punto triple en la flecha) se corresponden al grafo dual de una cúspide de tipo d, q como la anterior. Recíprocamente dos de tales cúspides con distintos d, q se corresponden con grafos duales diferentes.

Hay un caso degenerado de este tipo, correspondiente al caso no singular $y = 0$, que se interpreta como $d = 1, q = \infty$. En este caso el grafo dual es un único vértice, con peso -1 y una sola flecha en él. Nótese que en el resto de casos $d \geq 2$.

Ahora queremos ver que la pareja d, q , llamada par de Puiseux de la curva, determina la topología de la misma. Dada la estructura cónica de la singularidad, es suficiente ver cómo corta la curva a \mathbb{S}^3 . Para ello, expresemos x, y en coordenadas polares (ligeramente modificadas)

$$x = (r_1^{1/p}) \exp(2\pi\sqrt{-1}(t/p)); \quad y = (r_2^{1/d}) \exp(2\pi\sqrt{-1}(s/d)).$$

La condición $y^d = x^p$ equivale a

$$r_2 \exp(2\pi\sqrt{-1}s) = r_1 \exp(2\pi\sqrt{-1}t).$$

Nótese que en particular $r_2 = r_1 = \lambda$. Si además pedimos que $|x|^2 + |y|^2 = 1$, tenemos que $\lambda^{2/p} + \lambda^{2/d} = 1$, lo que da una única solución real positiva λ_0 . Por otro lado, si tenemos $\exp(2\pi\sqrt{-1}s) = \exp(2\pi\sqrt{-1}t)$, debe ocurrir que $s - t \in \mathbb{Z}$. En otras palabras, podemos parametrizar la curva por la imagen de $\phi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$, donde

$$\phi(\exp(2\pi\sqrt{-1}\theta)) = (\lambda_0^{1/p} \exp(2\pi\sqrt{-1}d\theta), \lambda_0^{1/d} \exp(2\pi\sqrt{-1}p\theta)).$$

Ahora, consideremos la inmersión tórica $\Psi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$, definida por

$$\Psi(\exp(2\pi\sqrt{-1}t), \exp(2\pi\sqrt{-1}s)) = (\lambda_0^{1/p} \exp(2\pi\sqrt{-1}t), \lambda_0^{1/d} \exp(2\pi\sqrt{-1}s)).$$

Tenemos que $\phi = \Psi \circ \gamma$, donde $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ está dado por

$$\gamma(\exp(2\pi\sqrt{-1}\theta)) = (\exp(2\pi\sqrt{-1}d\theta), \exp(2\pi\sqrt{-1}p\theta)).$$

Se concluye que la imagen de ϕ es un nudo tórico de tipo (p, d) en \mathbb{S}^3 .

Vamos a abordar ahora el caso de dos puntos de valencia tres en el grafo dual (dos pares de Puiseux). No detallaremos los cálculos, sencillamente daremos algunas indicaciones para que el lector interesado pueda hacerlos por sí mismo. Esta idea puede extenderse al caso de ramas con cualquier número de pares de Puiseux (puntos triples en el grafo dual).

Supongamos que tenemos un grafo dual con dos pares de Puiseux. Fijemos coordenadas locales x, y . Siguiendo los puntos infinitamente próximos hasta llegar al primer punto triple, podemos determinar una primera curva

$$\mathcal{C}_0 = \{y^d - x^p = 0\}$$

cuyo transformado estricto pasa por dicho punto triple, llamémoslo p_1 y de modo que en p_1 el transformado estricto de \mathcal{C}_1 es $y' = 0$, mientras que el divisor es $x' = 0$, siendo x', y' coordenadas locales en p_1 , que están dadas por

$$y' = \frac{y^d}{x^p} - 1; \quad x = x'^d (y' + 1)^\beta, \quad y = x'^p (y' + 1)^\beta; \quad \delta d - \beta p = 1.$$

Para llegar al segundo punto triple, consideramos ahora la curva

$$\mathcal{D} = \{y'^{d'} - (1/2)^{d'} x'^{p'} = 0\},$$

que, proyectada en el origen, nos da el tipo de equisingularidad requerido. Consideremos ahora las curvas

$$\mathcal{C}_\lambda = \{y^d - (1 + \lambda)x^p = 0\}$$

donde $|2\lambda| = 1$. Estas curvas cortan $|x| = 1$ según un toro T de alma el corte de $|x| = 1$ con \mathcal{C}_0 . El toro T está pues anudado de tipo p, q . Veamos ahora cómo corta \mathcal{D} a $|x| = 1$. El corte de \mathcal{D} y $|x| = 1$ coincide con el corte, visto en

p_1 , de \mathcal{D} con $|x'| = 1, |y'| = 1/2$, que sabemos es un nudo tórico de tipo d', p' dentro del toro $|x'| = 1, |y'| = 1/2$. A su vez

$$T = \{|x'| = 1, |y'| = 1/2\}$$

y así obtenemos el nudo tórico iterado $(d, q), (d', q')$.

En el texto que sigue reproducimos un artículo de F. Cano publicado en la Revista del Seminario Iberoamericano de Matemáticas, en noviembre 1995, que contiene una introducción a la reducción de singularidades de superficies.

Estas notas están inspiradas en el procedimiento seguido por Hironaka para la reducción de singularidades de superficies-hipersuperficies expuesto, por ejemplo en las notas del Bowdoin college [29], así como en la desingularización vía la Teoría del Contacto Maximal que aparece en los volúmenes del extinto Instituto Jorge Juan [1, 26]. La única novedad de esta presentación es el hincapié en la separación horizontal-vertical del problema: por un lado el diseño de una estrategia global para efectuar las transformaciones y por el otro el control puramente vertical del hecho de que la citada estrategia es satisfactoria. Este punto de vista se justifica por la compacidad de la superficie abstracta de Riemann, o de la “voéte étoilée”, y está produciendo resultados tanto en el problema de característica positiva (Spivakovsky) como en problemas similares para foliaciones singulares de codimensión uno.

Como es habitual en los problemas de reducción de singularidades, trabajaremos por inducción sobre la dimensión, o sobre la complejidad del problema. Presentaremos aquí el caso más difícil que aparece en el contexto de superficies-hipersuperficies y supondremos que el lector es capaz de resolver los casos de curvas y los casos más sencillos de superficies. Asimismo, trabajaremos a partir de un germen de superficie en un punto, lo que, de manera más general nos obliga a considerar una superficie en un espacio ambiente, analítico-complejo, que es un germen en torno a un subespacio proyectivo cerrado. Ciertos detalles técnicos serán pasados por alto, pues pretendemos solamente presentar el espíritu de los procedimientos global (horizontal) y de uniformización local (vertical).

4.5. El estrato de Samuel y las explosiones permitidas

Un espacio ambiente es, para nosotros, un germen de variedad analítica compleja no singular Z de dimensión tres, a lo largo de un subespacio analítico cerrado y proyectivo C (el “corazón”), que denotaremos (Z, C) . Consideraremos como objeto problema superficies $(X, X \cap C)$, subespacios analíticos cerrados de dimensión pura dos de (Z, C) . Cuando no haya duda, omitiremos toda referencia al corazón y escribiremos $X \subset Z$. La superficie X está dada localmente en un punto P y en coordenadas analíticas por

$$X = (f(x, y, z) = 0)$$

donde $f(x, y, z)$ es un germen de función analítica en el punto P considerado, libre de factores múltiples, que admite un desarrollo en serie convergente

$$f(x, y, z) = \sum f_{ijk} x^i y^j z^k.$$

Llamamos multiplicidad de X en P y lo denotaremos por $\nu_P(X)$ al mínimo de los valores $i + j + k$ con $f_{ijk} \neq 0$. Si $P \in X$ tenemos que $\nu_P(X) \geq 1$; diremos que el punto P es singular en el caso de que $\nu_P(X) \geq 2$. El lugar singular $\text{Sing}(X)$ es un cerrado analítico de X de dimensión menor o igual que uno. El germen

$$(\text{Sing}(X), \text{Sing}(X) \cap C)$$

está formado por un cantidad finita de curvas proyectivas, gérmenes de curvas en un punto y puntos aislados.

La multiplicidad define una función semicontinua superiormente, es decir, los puntos de multiplicidad superior a una dada forman un cerrado analítico del espacio ambiente. Además, por compacidad del corazón, existe una multiplicidad máxima, que denotaremos $\text{ISam}(X)$ (por “invariante de Samuel”). El estrato de Samuel $\text{Sam}(X)$, formado por los puntos de multiplicidad máxima, es por tanto un cerrado analítico de X .

Diremos que un subespacio analítico $Y \subset Z$ es un “centro permitido” para X si es no singular y la multiplicidad de X es constante a lo largo de todos los puntos de Y . En particular, si Y interseca $\text{Sam}(X)$, está totalmente contenido en $\text{Sam}(X)$. Utilizaremos únicamente centros permitidos en el proceso de eliminación de las singularidades mediante explosiones.

El cono tangente $C_P(X)$ de X en P es el cono de $T_P(Z)$ dado en ecuaciones por

$$C_P(X) = \left(\sum_{i+j+k} f_{ijk} X^i Y^j Z^k = 0 \right)$$

(El polinomio homogéneo $\text{In}(f) = \sum_{i+j+k} f_{ijk} X^i Y^j Z^k$ recibe el nombre de “forma inicial” de f). La “lima”, o espacio tangente estricto de Hironaka, de X en P es el subespacio lineal más grande $T_P X$ de $T_P Z$ que deja invariante el cono tangente por traslaciones. Coincide con el cono tangente si y sólo si este es un espacio lineal. Salvo cambio lineal de coordenadas, la codimensión del espacio tangente estricto es el número mínimo de coordenadas necesario para expresar la forma inicial.

Proposición 1 (Estabilidad vertical). *Sea $\pi : Z' \rightarrow Z$ la explosión de Z con un centro permitido Y , fijemos un punto $P \in Y$ y un punto P' en el transformado estricto X' de X tal que $\pi(P') = P$. (El corazón de Z' es la imagen inversa del corazón de Z). Entonces:*

1. $T_P Y \subset T_P X$.
2. $\nu_{P'}(X') \leq \nu_P(X)$. En particular $\text{ISam}(X') \leq \text{ISam}(X)$.
3. Si $\nu_{P'}(X') = \nu_P(X)$, se tiene:

$$P' \in \mathbb{P}\text{roj}(T_P X / T_P Y) \subset \pi^{-1}(P) = \mathbb{P}\text{roj}(T_P Z / T_P Y).$$

Además, en este caso $\dim T_P X \geq \dim T_{P'} X'$.

4. Si $\nu_{P'}(X') = \nu_P(X)$ y $\dim T_P X = \dim T_{P'} X'$ entonces el nuevo espacio tangente estricto $T_{P'} X'$ es transversal a $T_{P'} \pi^{-1}(P)$.

Demostración . *Una selección adecuada de coordenadas*

$$(x_1, \dots, x_n)$$

(aquí $n = 3$, pero el argumento sirve para cualquier hipersuperficie) permite suponer que el centro Y está dado localmente por $x_t = \dots = x_n = 0$ y que las ecuaciones de la explosión en el punto P' de Z' que consideramos son

$$\begin{aligned} x'_j &= x_j & j &= 1, \dots, t. \\ x'_j x'_t &= x_j & j &= t+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Dado que el centro es equimúltiple, la forma inicial depende solamente de las variables X_t, \dots, X_n y el espacio tangente estricto está dado por formas lineales independientes $\phi_1 = \dots = \phi_s = 0$ en dichas variables. Por tanto

$$\text{In}(f) = \Psi(\phi_1(X_t, \dots, X_n), \dots, \phi_s(X_t, \dots, X_n))$$

Esto prueba la primera afirmación. Si ν es la multiplicidad de X en el punto $P = \pi(P')$, podemos escribir

$$\pi \circ f = (x'_t)^\nu f'(x'_1, \dots, x'_n)$$

siendo $f' = 0$ una ecuación local del transformado estricto. Se tiene

$$f'(x'_1, \dots, x'_n) = \Psi(\phi_1(1, x_{t+1}, \dots, x_n), \dots, \phi_s(1, x_{t+1}, \dots, x_n)) + g'$$

donde g' está en el ideal generado por x'_1, \dots, x'_t . Se sigue que $\nu_{P'}(X') \leq \nu$. Si $\nu_{P'}(X') = \nu$, necesariamente

$$\phi_1(1, 0, \dots, 0) = \dots = \phi_s(1, 0, \dots, 0) = 0$$

de donde $P' \in \mathbb{P}\text{roj}(T_P X / T_P Y)$. En particular, las formas ϕ_i dependen sólo de las coordenadas X'_{t+1}, \dots, X'_n . Además la forma inicial se escribe

$$\text{In}(f') = \Psi(\phi_1(X'_{t+1}, \dots, X'_n), \dots, \phi_s(X'_{t+1}, \dots, X'_n)) + G'$$

donde G' es homogéneo de grado ν y depende sólo de las variables X'_1, \dots, X'_t . Si $\dim T_P X = \dim T_{P'} X'$ concluimos que

$$T_{P'} X' = (\phi'_1 = \dots = \phi'_s = 0)$$

con $\phi'_i(0, \dots, 0, X'_{t+1}, \dots, X'_n) = \phi_i(X'_{t+1}, \dots, X'_n)$.

4.6. La estrategia global

El estrato de Samuel está constituido por curvas y puntos. Si pretendemos hacer bajar poco a poco el invariante de Samuel de nuestra superficie mediante explosiones con centros permitidos, debemos preocuparnos de modificar, en un momento u otro, todos los puntos del estrato de Samuel inicial. Esto

evidentemente no puede conseguirse solo con la utilización de puntos aislados como centro. Por otra parte, es posible que una componente irreducible del estrato de Samuel sea una curva singular, no utilizable directamente como centro: primero habría que desingularizarla.

El problema de describir una estrategia global, o si se quiere un criterio global para la elección del centro, es banal en el caso de la reducción de singularidades de curvas curvas (elegir siempre puntos aislados), es relativamente simple en el caso de superficies y es más complicado en el caso de foliaciones de codimensión uno sobre un espacio de dimensión tres. En el caso general de reducción de singularidades en cualquier dimensión, se convierte en un problema complicado y es una de las grandes partes de la reducción de singularidades. Hay que tener en cuenta que la estrategia global no es necesariamente única, siendo posible, aunque no entraremos en ello, definirla de modo razonablemente constructivo y natural (véase, por ejemplo [45]). Aquí nos limitaremos a describir una estrategia para el caso de superficies, sin preocuparnos del hecho de que el procedimiento sea natural o no en el sentido funtorial de la palabra.

Diremos que el estrato de Samuel $\text{Sam}(X)$ tiene *cruzamientos normales* en un punto P del corazón C siempre que se cumpla una de las condiciones siguientes:

1. El punto P es un punto aislado de $\text{Sam}(X)$.
2. El estrato de Samuel es una curva lisa localmente en P .
3. El estrato de Samuel consiste en dos curvas lisas y transversales en P .

El conjunto de puntos del corazón C en los cuales el estrato de Samuel no tiene cruzamientos normales es un conjunto de puntos aislados (finito, por consiguiente). Admitiremos sin demostración el siguiente resultado (esencialmente la reducción de singularidades de curvas):

Proposición 2 (reducción a cruzamientos normales). *Supongamos que el invariante de Samuel $I\text{Sam}(X) = \nu > 1$. Existe una sucesión finita de explosiones con centro en puntos aislados*

$$(Z, C) = (Z_0, C_0) \xleftarrow{\pi_1} (Z_1, C_1) \xleftarrow{\pi_2} \cdots \xleftarrow{\pi_N} (Z_N, C_N)$$

tal que, si $X_i \subset Z_i$ es el correspondiente transformado estricto de X , entonces o bien $ISam(X_N) < \nu$, o bien $Sam(X_N)$ tiene cruzamientos normales. (Los centros se pueden tomar exactamente en puntos donde el estrato de Samuel no tenga cruzamientos normales)

La propiedad de que el estrato de Samuel tenga cruzamientos normales es estable por explosiones permitidas, siempre que no disminuya el invariante de Samuel. Es una consecuencia del teorema de estabilidad vertical expuesto más arriba. En efecto, si la explosión es cuadrática (centro en un punto), se añade al transformado estricto del estrato de Samuel como mucho la recta proyectiva $\mathbb{P}roj(T_P X)$, que es no singular y transversal a las otras componentes del estrato de Samuel, ya que está contenida en el divisor excepcional. Si la explosión es monoidal con centro en una curva Y , se substituye el centro o bien por puntos aislados, o bien por una curva Y' en el estrato de Samuel, para la cual la aplicación

$$P \in Y \mapsto \mathbb{P}roj(T_P X/T_P Y) \in Y'$$

es uno a uno. Se sigue que Y' es no singular y transversal a las otras componentes del estrato de Samuel.

Ahora podemos describir la *estrategia global*:

Definición 1. *Supongamos que $ISam(X) = \nu > 1$ y que el estrato de Samuel $Sam(X)$ tenga cruzamientos normales. Consideremos una sucesión de explosiones*

$$(Z, C) = (Z_0, C_0) \xleftarrow{\pi_1} (Z_1, C_1) \xleftarrow{\pi_2} \dots$$

donde $X_i \subset Z_i$ es el correspondiente transformado estricto de X y donde $Y_i \subset X_i$ es el centro de π_{i+1} , permitido para X_i . Diremos que dicha sucesión respeta el criterio global de selección de centro si siempre que $ISam(X_i) = \nu$ la dimensión del centro Y_i es la máxima posible para un centro permitido (es decir, el centro es una curva si el estrato de Samuel contiene curvas).

Siempre existen sucesiones infinitas (elíjase un centro banal si el invariante de Samuel ha disminuido) que respetan el criterio global de selección de centro de explosión.

La siguiente proposición establece la relación entre la estrategia global y el control vertical (uniformización local).

Proposición 3. *Supongamos que existe una sucesión infinita*

$$(Z, C) = (Z_0, C_0) \xleftarrow{\pi_1} (Z_1, C_1) \xleftarrow{\pi_2} \dots$$

que respete el criterio global de selección de centro de explosión tal que

$$ISam(X_i) = \nu$$

para todo índice i . Entonces existe una sucesión infinita de puntos (infinitamente próximos)

$$P_i \in ISam(X_i)$$

con las siguientes propiedades:

1. $\pi_{i+1}(P_{i+1}) = P_i$.
2. *Para cada índice i existe un mínimo $s \geq i$ tal que $P_s \in Y_s$. Además Y_s es de dimensión uno si existen curvas de $ISam(X_s)$ que pasan por P_s .*

Demostración. Separamos dos casos. El primero corresponde a suponer que la sucesión infinita de explosiones es cofinalmente cuadrática (hay una explosión cuadrática para índices arbitrariamente elevados). En este caso, fijándonos en los centros puntuales de explosión y considerando para cada uno sus proyecciones a todos los niveles, se forma un árbol infinito de niveles horizontales finitos; debe tener una rama infinita, que corresponde a la sucesión de puntos infinitamente próximos buscada. Si no, podemos suponer que todas las explosiones son monoidales y, sin pérdida de generalidad, que el estrato de Samuel está formado a todos los niveles por curvas lisas que se cortan transversalmente. Al efectuar explosión con centro una de estas curvas, el teorema de estabilidad vertical dice que a lo más se crea exactamente una “encima” de ella. Así formamos de nuevo un árbol infinito de niveles horizontales finitos (los nodos son las curvas); existe por tanto una rama infinita. Un argumento de no numerabilidad de los puntos de una curva compleja nos permite seleccionar la sucesión deseada de puntos infinitamente próximos sobre esta rama infinita (este argumento se substituiría en geometría algebraica por uno de puntos genéricos). \square

Si localizamos los espacios Z_j en los puntos P_j y nos olvidamos de los índices irrelevantes (aquellos tales que $P_j \notin Y_j$), obtenemos una sucesión infinita de explosiones locales con centros permitidos de dimensión máxima, tal

que la multiplicidad en cada punto P_j es siempre la misma y de modo que el estrato de Samuel tiene siempre cruzamientos normales en cada P_j . En un diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 (Z, P) & = & (Z_0, P_0) & \xleftarrow{\pi_1} & (Z_1, P_1) & \xleftarrow{\pi_2} & \dots \\
 \cup & & \cup & & \cup & & \\
 (X, P) & = & (X_0, P_0) & \longleftarrow & (X_1, P_1) & \longleftarrow & \dots \\
 \cup & & \cup & & \cup & & \\
 (Y, P) & = & (Y_0, P_0) & & (Y_1, P_1) & & \dots
 \end{array}$$

Llamemos \mathcal{S} a esta sucesión de explosiones. La uniformización local, o si se quiere el control vertical, consiste en probar que esta sucesión no puede existir.

En términos de valoraciones, la sucesión \mathcal{S} correspondería al seguimiento de una valoración del cuerpo de funciones racionales (en el caso algebraico), cuyos centros en cada modelo birracional serían los puntos P_j y la estrategia de uniformización local indicaría la selección del centro permitido de dimensión máxima, una vez supuestos cruzamientos normales locales para el estrato de Samuel.

4.7. Contacto maximal vertical

Nuestro objetivo consiste ahora en probar que la sucesión \mathcal{S} de puntos infinitamente próximos P_j construida en el apartado precedente no puede existir. Para ello pretendemos asociar a cada etapa j invariantes discretos que desciendan estrictamente al cabo de un número finito de etapas y tales que no puedan descender indefinidamente. En todo caso, una vez descubierto un invariante verticalmente estable (no aumenta) y que no puede descender indefinidamente, siempre podremos suponer que dicho invariante permanece constante (en el valor mínimo que tome). El primero de estos invariantes, además de la multiplicidad ν , ya contenida en la construcción de \mathcal{S} , es la dimensión del espacio tangente estricto. Así, supondremos en adelante que para todo índice j se tiene que

$$\dim T_{P_j} X_j = d \in \{0, 1, 2\}$$

En este caso se dice que estamos tratando con una sucesión P_j de puntos *infinitamente muy próximos*.

El caso $d = 0$ no puede darse nunca, pues el teorema de estabilidad vertical diría que

$$P_{j+1} \in \mathbb{P}\text{roj}(T_{P_j}X_j/T_{P_j}Y_j) = \emptyset.$$

Por la misma razón, si $d = 1$ entonces todos los centros Y_j son puntos, es decir $Y_j = \{P_j\}$. En vista de que el nuevo espacio tangente estricto es transversal al divisor excepcional, se sigue que los puntos P_j están en el transformado estricto de una rama analítica no singular $\Gamma \subset X$ (como indicación para probar esto, utilícese la ubicación de los P_{j+1} en la “primera carta” de la explosión para dar etapa a etapa una parametrización de Γ). Diremos que esta curva Γ tiene contacto maximal (vertical) con la sucesión \mathcal{S} . Ahora podemos seleccionar coordenadas (x, y, z) en P tales que

$$\Gamma = (y = z = 0)$$

Esto permite generar inductivamente coordenadas (x_j, y_j, z_j) en cada punto P_j tales que

$$x_j = x_{j+1}, y_j = x_{j+1}y_{j+1}, z_j = x_{j+1}z_{j+1}$$

y de modo que el transformado estricto Γ_j de Γ en Z_j esté dado por $y_j = z_j = 0$. Si X está dada por

$$f(x, y, z) = f^{(0)} = \sum f_{ijk}^{(0)} x^i y^j z^k = 0.$$

entonces X_j está dada inductivamente por $f^{(j)} = 0$ donde

$$f^{(j)}(x_j, y_j, z_j) = \frac{1}{x_j^\nu} f^{(j-1)}(x_j, x_j y_j, x_j z_j)$$

Definamos para cada índice el invariante δ_j , llamado exponente de contacto maximal, por

$$\delta_j = \min \left(\frac{i}{\nu - j - k}; f_{ijk}^{(j)} \neq 0 \right)$$

Dado que Γ_j no es equimúltiple, sino no se habría seguido la estrategia global, se ve inmediatamente que $\delta_j < \infty$. Además

$$\delta_{j+1} = \delta_j - 1$$

Obtenemos de este modo la contradicción buscada sobre la existencia de \mathcal{S} .

Queda el caso $d = 2$. Es el más específico de superficies. Para su tratamiento detectaremos la existencia de una superficie de contacto maximal, que es no

singular, cuyo transformado estricto sigue los puntos P_j y contiene los distintos centros de explosión Y_j . La situación se simplifica mucho en el caso analítico complejo, frente al problema semejante en característica positiva, debido sobre todo a la existencia y efectividad de la transformación de Tschirnhausen.

Como la dimensión del espacio tangente estricto es dos, la forma inicial de la ecuación local f de X es una potencia de una forma lineal. Después de un cambio lineal de coordenadas, podemos suponer que la forma inicial es z^ν . Salvo multiplicación por una unidad y por aplicación del teorema de preparación de Weierstrass, podemos además suponer que f es un polinomio en la variable z , es decir

$$f(x, y, z) = z^\nu + f_{\nu-1}(x, y)z^{\nu-1} + f_{\nu-2}(x, y)z^{\nu-2} + \cdots + f_0(x, y)$$

donde el orden $\nu(f_k(x, y)) > \nu - k$. Efectuemos ahora la transformación de Tschirnhausen, dada por el cambio de coordenadas

$$z \mapsto z - \frac{1}{\nu}f_{\nu-1}(x, y)$$

Ahora la ecuación local f de X se escribe

$$f(x, y, z) = z^\nu + f_{\nu-2}(x, y)z^{\nu-2} + \cdots + f_0(x, y)$$

Esta escritura será *rígida* para nuestro problema en el sentido que se verá a continuación. Escribamos $H = (z = 0)$, superficie no singular en Z . Denotemos por H_j el transformado estricto de H en Z_j .

Proposición 4 (Contacto maximal vertical). *En las condiciones precedentes, se tiene que $P_j \in H_j$ y que $Y_j \subset H_j$ para todo índice $j \geq 0$. Se pueden elegir inductivamente coordenadas (x_j, y_j, z_j) en P_j de modo que X_j esté dado por la ecuación $f^{(j)} = 0$, donde*

$$f^{(j)}(x_j, y_j, z_j) = z_j^\nu + f_{\nu-2}^{(j)}(x_j, y_j)z_j^{\nu-2} + \cdots + f_0^{(j)}(x_j, y_j)$$

con $\nu(f_k^{(j)}(x_j, y_j)) > \nu - k$. Además se puede conseguir que las coordenadas (x_j, y_j, z_j) y $(x_{j+1}, y_{j+1}, z_{j+1})$ estén relacionadas por una de las transformaciones siguientes:

$$\begin{aligned} (T-1, \lambda): \quad & x_j = x_{j+1}, y_j = x_{j+1}(y_{j+1} + \lambda), z_j = x_{j+1}z_{j+1}. \\ T-2: \quad & x_j = x_{j+1}y_{j+1}, y_j = y_{j+1}, z_j = y_{j+1}z_{j+1}. \\ T-3: \quad & x_j = x_{j+1}, y_j = y_{j+1}, z_j = x_{j+1}z_{j+1}. \\ T-4: \quad & x_j = x_{j+1}, y_j = y_{j+1}, z_j = y_{j+1}z_{j+1}. \end{aligned}$$

Las ecuaciones locales están dadas por:

$$f^{(j+1)}(x_{j+1}, y_{j+1}, z_{j+1}) = \frac{1}{x_{j+1}^\nu} f^{(j)}(x_j, y_j, z_j) \quad \text{si } T - 1 - T - 3$$

$$f^{(j+1)}(x_{j+1}, y_{j+1}, z_{j+1}) = \frac{1}{y_{j+1}^\nu} f^{(j)}(x_j, y_j, z_j) \quad \text{si } T - 2 - T - 4$$

Demostración. La primera observación es que el espacio tangente estricto está necesariamente dado por $Z = 0$ y que toda curva o punto equimúltiple está contenido en H , de lo que se sigue la primera parte del enunciado, al menos para la primera etapa. Un cambio inicial de coordenadas en (x, y) permite además partir de coordenadas (x, y, z) tales que

$$\text{Sam}(X) \subset (xy = z = 0)$$

Ahora, si la transformación es cuadrática, el teorema de estabilidad vertical nos da (T-1, λ) - T-2. Si la transformación es monoidal (centro en una curva) la condición precedente dice que el centro es o bien $x = z = 0$ y entonces se tiene T-3 por la estabilidad vertical o bien es $y = z = 0$ y se tiene T-4. La forma de la ecuación local de X_1 se repite. Además, el nuevo estrato de Samuel es el transformado estricto del anterior, al que eventualmente se añade la curva Γ dada por $\mathbb{P}\text{roj}(T_P X)$ en el caso cuadrático o por $\mathbb{P}\text{roj}(T_Q X/T_Q Y)$, con $Q \in Y$, en el caso monoidal. La curva Γ es también una curva coordenada en las nuevas coordenadas (x_1, y_1, z_1) y la situación se repite. \square

Finalmente, observamos que las transformaciones cuadráticas (T-1, λ) y T-2 no ocurren si existe una curva lisa y equimúltiple que pase por el punto P_j considerado.

4.8. El juego fuerte de Hironaka en dos variables

Una vez fijada nuestra superficie de contacto maximal H así como las coordenadas (x_j, y_j, z_j) descritas en la proposición anterior, buscamos un invariante que descienda estrictamente, al menos al cabo de un número finito de etapas, con el fin de obtener una contradicción con la existencia de la sucesión \mathcal{S} . Dicho invariante será presentado en términos del polígono característico de Hironaka, que evolucionará de acuerdo con las reglas del juego fuerte.

Escribamos

$$f_k(x, y) = \sum_{i,j} f_{ijk} x^i y^j z^k; \quad k = \nu - 2, \dots, 0.$$

El polígono característico $\Delta = \Delta^\nu(f; x, y, z)$ se define entonces por

$$\Delta^\nu(f; x, y, z) = \text{Cierre convexo de } \left(\left\{ \left(\frac{i}{\nu - k}, \frac{j}{\nu - k} \right); f_{ijk} \neq 0 \right\} + \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \right)$$

Análogamente, en cada etapa j definiremos Δ_j por

$$\Delta_j = \Delta^\nu(f^j; x_j, y_j, z_j)$$

Las siguientes propiedades del polígono característico son evidentes

1. $\Delta \cap \{(u, v); u + v \leq 1\} = \emptyset$.
2. La curva $x = z = 0$ es equimúltiple si y solo si $\Delta \subset \{(u, v); u \geq 1\}$.
Simétricamente, la curva $y = z = 0$ es equimúltiple si y solo si $\Delta \subset \{(u, v); v \geq 1\}$.
3. Si se tiene la transformación (T-1,0), T-2, T-3 - T-4, el nuevo polígono característico Δ_{j+1} está dado por

$$\Delta_{j+1} = \sigma(\Delta_j) + \mathbb{R}_{\geq 0}^2$$

donde σ es la afinidad definida por

$$\begin{aligned} \sigma(u, v) &= (u + v - 1, v) \quad , \text{ si (T-1,0).} \\ &= (u, u + v - 1) \quad , \text{ si T-2.} \\ &= (u - 1, v) \quad , \text{ si T-3.} \\ &= (u, v - 1) \quad , \text{ si T-4.} \end{aligned}$$

4. La transformación (T-1, λ) puede interpretarse como un cambio de coordenadas $y \mapsto y - \lambda x$ seguida de una transformación de tipo (T-1,0). Si $\underline{\Delta}$ es el polígono dado por los vértices de Δ en los que terminan lados con pendiente estrictamente menor que -1 , se tiene que

$$\underline{\Delta}^\nu(f; x, y, z) = \underline{\Delta}^\nu(f; x, y - \lambda x, z)$$

Llamaremos *vértice principal* de Δ al vértice $(\alpha(\Delta), \beta(\Delta))$ de menor abscisa $\alpha(\Delta)$. A la vista de la evolución del polígono característico descrita en las propiedades anteriores y teniendo en cuenta que la estrategia de selección de centro obliga a efectuar T-3 - T-4 siempre que sea posible (la curva $x = z = 0$ o bien $y = z = 0$ equimúltiples), es inmediato comprobar que

$$\beta(\Delta_{j+1}) \leq \beta(\Delta_j)$$

Además, la desigualdad es estricta en los casos de T-2 - T-4. El invariante β solo puede descender un número finito de veces, puesto que es mayor o igual que cero y se mueve en una retícula $(1/\nu)\mathbb{Z}^2$.

Por consiguiente, se puede suponer que solamente intervienen transformaciones del tipo (T-1, λ) - T-3. En estas condiciones, un cambio formal previo de coordenadas del tipo

$$y \mapsto y - \sum_s \lambda_s x^s$$

permite suponer que todas las transformaciones son o bien (T-1,0), o bien T-3. De nuevo obtenemos la contradicción deseada de la evolución del polígono. En efecto, como no hay T-2, el polígono corta siempre la zona $\{(u, v); v < 1\}$. Sea $(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ el último vértice del polígono (que tiene por tanto $\underline{\beta} < 1$). La evolución arriba descrita prueba que

$$\underline{\alpha}_{j+1} < \underline{\alpha}_j$$

que no puede repetirse indefinidamente.

Capítulo 5

Uniformización local

A continuación reproducimos el artículo “Uniformización local en característica cero. Caso arquimediano” de F. Cano, C. Roche y M. Spivakovsky, publicado en la Revista del Seminario Iberoamericano de Matemáticas en 2006. En él se introduce la uniformización local de Zariski.

En estas notas presentamos una prueba de la uniformización local clásica (característica cero sobre un cuerpo algebraicamente cerrado) con respecto a una valoración arquimediana (es decir, de rango uno). La prueba se apoya fuertemente en una presentación del problema en términos del polígono de Newton-Puiseux y en la dicotomía básica de la reducción de singularidades entre el comportamiento combinatorio (descrito por el juego de Hironaka) y las situaciones de contacto maximal, también en el sentido de Hironaka.

No pretendemos dar ningún resultado nuevo, sino únicamente resaltar los métodos, con la esperanza de que puedan ser útiles en otros contextos. De hecho los métodos presentados aquí son una simplificación al caso que nos ocupa del método general utilizado por Spivakovsky en su tratamiento de la característica positiva y que, por otro lado, se está mostrando satisfactorio para el estudio del problema de uniformización local de campos de vectores.

5.1. Enunciados

Sea K el cuerpo de funciones racionales de una variedad algebraica proyectiva de dimensión n , sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k de característica cero y consideremos sobre él una valoración

$$\nu : K \rightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}$$

con cuerpo residual $k_\nu = k$.

Un *modelo local regular parametrizado* para K, ν es una terna

$$\mathcal{A} = (\mathcal{O}; \mathbf{z} = (\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r), \mathbf{y} = (y_{r+1}, \dots, y_n)); \nu)$$

donde r es el rango racional de ν y se tienen las siguientes propiedades:

1. Existe un modelo proyectivo M de K tal que el centro P de ν en M es no singular y $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{M,P}$. (Nótese que la hipótesis $k_\nu = k$ implica que el centro de ν es un punto racional).
2. La lista $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ da un sistema regular de parámetros de \mathcal{O} y los valores $\nu(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$ son \mathbb{Q} -independientes.

Definición 4. Dado un elemento formal $\hat{f} \in \hat{\mathcal{O}}$, con $\hat{f} \neq 0$, diremos que la valoración ν tiene contacto maximal con \hat{f} si existe una sucesión de elementos $f_i \in \mathcal{O}$ tales que $\nu(f_i)$ es una sucesión de valores estrictamente creciente y además $f_i \rightarrow \hat{f}$ en la topología de Krull.

Observación 5. La sucesión de valores estrictamente creciente $\nu(f_i)$ no puede estar acotada superiormente. La prueba de esto se basa en que la valoración es arquimediana. Supongamos que la sucesión de valores estuviera acotada superiormente por un valor δ ; como la valoración es arquimediana, existe una potencia común $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, tal que x_i^N, y_j^N tienen valor superior a δ , para $i = 1, 2, \dots, r$, $j = r + 1, r + 2, \dots, n$. Se concluye que el ideal maximal \mathcal{M} de \mathcal{O} satisface

$$\mathcal{M}^N \subset \mathcal{P}_\delta = \{g \in \mathcal{O}; \nu(g) \geq \delta\}.$$

Se tendría una cadena descendente estricta de módulos de longitud finita

$$\cdots \supset \mathcal{P}_{\nu(f_i)}/\mathcal{M}^N \supset \mathcal{P}_{\nu(f_{i+1})}/\mathcal{M}^N \supset \cdots$$

lo que es una contradicción.

El *objeto problema* es una lista finita $L = \{f_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$ de funciones racionales $f_\alpha \in K$ con valores no negativos $\nu(f_\alpha) \geq 0$. Diremos que la lista L es *simple* en el modelo \mathcal{A} si se cumplen las condiciones siguientes:

1. Todos los elementos de L son regulares, esto es $f_\alpha \in \mathcal{O}$ para todo $\alpha \in \Lambda$.
2. Cada f_α es de la forma $f_\alpha = \mathbf{x}^{\mathbf{a}_\alpha} U_\alpha$, donde U_α es una unidad del anillo local \mathcal{O} y $\mathbf{x}^{\mathbf{a}_\alpha}$ es el monomio

$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}_\alpha} = x_1^{a_{\alpha 1}} x_2^{a_{\alpha 2}} \cdots x_r^{a_{\alpha r}}.$$

3. Si $\nu(f_\alpha) \leq \nu(f_\beta)$, entonces f_α divide f_β en el anillo \mathcal{O} . Esto es, se tiene que $a_{\alpha, j} \leq a_{\beta, j}$ para cada $j = 1, 2, \dots, r$.

Nuestro objetivo es, partiendo de un modelo local regular parametrizado, probar que después de una sucesión de transformaciones adecuada se tiene que o bien aparece una serie formal \hat{f} tal que ν tiene contacto maximal con \hat{f} o bien obtenemos una lista simple.

Antes de establecer el enunciado, introduzcamos el tipo de transformaciones que vamos a considerar. Dado el modelo local regular parametrizado \mathcal{A} y un conjunto de índices

$$A \subset \{1, 2, \dots, n\},$$

vamos a definir la *explosión*

$$\mathcal{A}' = \pi_A \mathcal{A} = (\mathcal{O}'; \mathbf{z}' = (\mathbf{x}', \mathbf{y}'); \nu)$$

de \mathcal{A} con centro A . Para construir \mathcal{O}' definiremos primero las funciones racionales z'_i que conforman el sistema de parámetros $\mathbf{z}' = (\mathbf{x}', \mathbf{y}')$. El anillo \mathcal{O}' será entonces el localizado algebraico en el ideal engendrado por \mathbf{z}' del anillo de polinomios $\mathcal{O}[\mathbf{z}'] \subset K$. Separaremos dos casos

El caso combinatorio Este caso corresponde a la existencia de un único índice $i_0 \in A$ tal que $\nu(z_{i_0}) < \nu(z_i)$ para cada $i \in A \setminus \{i_0\}$. Entonces definimos

$$z'_i = z_i / z_{i_0}, \text{ si } i \in A \setminus \{i_0\}$$

y $z'_i = z_i$ para los índices $i = i_0$ ó $i \notin A$. Nótese que $\nu(z'_i) > 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ y que los valores $\nu(x'_i)$ son independientes para $i = 1, 2, \dots, r$.

El caso con traslación Este caso corresponde a la existencia de varios parámetros, con índice en A , que tengan el valor mínimo. Elijamos i_0 el menor de estos índices. Si $\nu(z_i) = \nu(z_{i_0})$, dado que $k_\nu = k$ sabemos que existe un único $\lambda_i \in k \setminus \{0\}$ tal que $\nu(z_i/z_{i_0} - \lambda_i) > 0$. Hagamos $\lambda_i = 0$ si $\nu(z_i) > \nu(z_{i_0})$. Definimos entonces

$$z'_i = z_i/z_{i_0} - \lambda_i, \text{ si } i \in A \setminus \{i_0\}$$

y $z'_i = z_i$ para los índices $i = i_0$ ó $i \notin A$. Como en el caso anterior, tenemos que $\nu(z'_i) > 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ y los valores $\nu(x'_i)$ son independientes para $i = 1, 2, \dots, r$.

Observación 6. Supongamos que M es un modelo birracional de K tal que $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{M,P}$, donde P es el centro de ν en M . Las ecuaciones $\{z_i = 0; i \in A\}$ definen una subvariedad irreducible $Y \subset M$, que es no singular en el punto P . Consideremos la explosión $\pi : M' \rightarrow M$ de M con centro Y . Sea $P' \in \pi^{-1}(P)$ el centro de ν en M' . Entonces $\mathcal{O}' = \mathcal{O}_{M',P'}$.

Asimismo, introduciremos los j -cambios de coordenadas, definidos para índices $j > r$. Se trata de cambios de la forma:

$$z'_i = z_i, i \neq j; y'_j = y_j - H(z_1, z_2, \dots, z_{j-1}),$$

donde $H \in \mathcal{O}$ no es una unidad, esto es $\nu(H) > 0$. Cuando no queramos mencionar explícitamente el índice j , hablaremos de *cambios ordenados de coordenadas*.

El resultado cuya prueba deseamos detallar en estas notas es el siguiente:

Teorema 6. Sea $\mathcal{A} = (\mathcal{O}; \mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}); \nu)$ un modelo local regular parametrizado para K, ν . Consideremos una lista finita $L = \{f_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$ de funciones racionales no nulas $f_\alpha \in K$ con valores no negativos $\nu(f_\alpha) \geq 0$. Existe un modelo local regular parametrizado $\mathcal{A}' = (\mathcal{O}'; \mathbf{z}' = (\mathbf{x}', \mathbf{y}'); \nu)$ para K, ν obtenido por una cadena finita de explosiones a partir de \mathcal{A} y de j -cambios de coordenadas, tal que una de las dos propiedades se cumple:

- a) La valoración ν tiene contacto maximal con una serie formal $\hat{f}' \in \hat{\mathcal{O}}'$.
- b) La lista L es simple en \mathcal{A}' .

5.2. Paquetes de Puiseux de explosiones

Sea $\mathcal{A} = (\mathcal{O}; \mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}); \nu)$ un modelo local regular parametrizado para K, ν . Consideremos una variable dependiente y_j . Entonces el valor de y_j se expresa como una combinación racional de los valores de x_1, x_2, \dots, x_r . Es decir, existe un número entero $d > 0$ y números enteros p_1, p_2, \dots, p_r únicos tales que

$$d\nu(y_j) = p_1\nu(x_1) + p_2\nu(x_2) + \dots + p_r\nu(x_r),$$

y además d, p_1, p_2, \dots, p_r son primos entre sí. En particular la función racional

$$\Phi_j = y^d / \mathbf{x}^{\mathbf{p}}$$

tiene valor cero. Diremos que Φ_j es la j -ésima *función racional de contacto* para \mathcal{A} y que d es el *índice de contacto* de \mathcal{A} . Dado que el cuerpo residual de la valoración es k , existe un único $c \in k$ tal que $\nu(\Phi_j - c) > 0$. Sea $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ definido por $q_s = -p_s$ si $p_s < 0$ y $q_s = 0$ si $p_s \geq 0$; se tiene que $\mathbf{t} = \mathbf{p} + \mathbf{q} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$. Consideremos la función regular

$$\phi_j = \mathbf{x}^{\mathbf{q}} y^d - c \mathbf{x}^{\mathbf{t}} \in \mathcal{O}.$$

Diremos que $\phi_j = 0$ es la j -ésima *hipersuperficie de contacto* para \mathcal{A} . Los *paquetes de Puiseux de explosiones*, que introduciremos a continuación, se corresponden con un desingularización ordenada de la hipersuperficie de contacto.

Diremos que un subconjunto $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$ es j -*admisibile* para \mathcal{A} si se cumple que $A \setminus \{j\} \subset \{s; p_s \neq 0\}$. Una explosión j -admisibile es la que se corresponde con un subconjunto j -admisibile para \mathcal{A} . Supongamos que \mathcal{A}' ha sido obtenida a partir de \mathcal{A} por explosión j -admisibile. Existen dos posibilidades:

- A) La explosión es combinatoria. En este caso se cumple que Φ_j es también la función racional de contacto para \mathcal{A}' y la hipersuperficie de contacto para \mathcal{A}' es el transformado estricto de la hipersuperficie de contacto para \mathcal{A} .
- B) La explosión no es combinatoria. La única posibilidad es que $\nu(y_j) = \nu(x_s)$, para un índice $1 \leq s \leq r$. En particular $\Phi_j = y_j/x_s$, $A = \{s, j\}$ y se tiene que $y'_j = \Phi_j - c$.

Definición 5. Supongamos que \mathcal{A}' ha sido obtenida a partir de \mathcal{A} por una cadena finita de explosiones. Diremos que esta cadena es un j -paquete de Puiseux para \mathcal{A} si las explosiones son j -admisibles, todas combinatorias excepto la última que no lo es (en particular $y'_j = \Phi_j - c$). En este caso diremos que \mathcal{A}' ha sido obtenida a partir de \mathcal{A} por un j -paquete de Puiseux. También diremos que \mathcal{A}' ha sido obtenida a partir de \mathcal{A} por una j -transformación de Puiseux.

Proposición 3. Dado \mathcal{A} y un índice j , $r + 1 \leq j \leq n$, existe al menos un j -paquete de Puiseux.

Demostración . Es suficiente hacer una desingularización estándar de la hipersuperficie de contacto.

En la siguiente observación, cuya prueba es inmediata, se resumen las propiedades principales que deseamos retener de los paquetes de Puiseux.

Observación 7. Supongamos que \mathcal{A}' ha sido obtenida a partir de \mathcal{A} por un j -paquete de Puiseux. Entonces tenemos las siguientes propiedades

1. $y'_j = \Phi_j - c$.
2. Para todo índice $m \neq j$, $r + 1 \leq m \leq n$, se tiene $y'_m = y_m$.
3. Existe una relación monomial del tipo siguiente

$$x_s = \mathbf{x}'^{\mathbf{a}^s} (y'_j + c)^{b_s}; \quad y_j = \mathbf{x}'^{\mathbf{a}^0} (y'_j + c)^{b_0},$$

donde $\mathbf{a}^s, \mathbf{a}^0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ y $b_s, b_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

En el caso de que $r = n$ y por consiguiente no podemos destacar una variable dependiente, diremos, por definición, que cualquier sucesión finita de explosiones, que deben ser necesariamente combinatorias, es un paquete de Puiseux.

5.3. Primeras reducciones e inducción

Vamos a probar un resultado más fuerte que el teorema 6, en el que precisamos que la sucesión de explosiones que utilizaremos es de hecho una cadena de paquetes de Puiseux. Concretamente, el resto de estas notas está dedicado a probar el siguiente enunciado:

Teorema 7. *Sea $\mathcal{A} = (\mathcal{O}; \mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}); \nu)$ un modelo local regular parametrizado para K, ν . Consideremos una lista finita $L = \{f_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$ de funciones racionales no nulas $f_\alpha \in K$ con valores no negativos $\nu(f_\alpha) \geq 0$. Existe un modelo local regular parametrizado $\mathcal{A}' = (\mathcal{O}'; \mathbf{z}' = (\mathbf{x}', \mathbf{y}'); \nu)$ para K, ν obtenido por una cadena finita de paquetes de Puiseux y de cambios ordenados de coordenadas a partir de \mathcal{A} tal que una de las dos propiedades se cumple:*

- a) *La valoración ν tiene contacto maximal con una serie formal $\hat{f}' \in \hat{\mathcal{O}}'$.*
- b) *La lista L es simple en \mathcal{A}' .*

A continuación, mostremos que el teorema 7 es una consecuencia de la siguiente proposición, en la que únicamente se consideran funciones regulares:

Proposición 4. *Sea $\mathcal{A} = (\mathcal{O}; \mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}); \nu)$ un modelo local regular parametrizado para K, ν . Consideremos una lista finita $L = \{f_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$ de funciones regulares no nulas $f_\alpha \in \mathcal{O}$. Existe un modelo local regular parametrizado \mathcal{A}' para K, ν obtenido por una cadena finita de paquetes de Puiseux y de cambios ordenados de coordenadas a partir de \mathcal{A} tal que una de las dos propiedades se cumple:*

- a) *La valoración ν tiene contacto maximal con una serie formal $\hat{f}' \in \hat{\mathcal{O}}'$.*
- b) *La lista L es simple en \mathcal{A}' .*

Nótese que la proposición 4 es una evidente consecuencia del teorema 6. Recíprocamente, supongamos que la proposición 4 es cierta y probemos que el teorema 6 también lo debe ser. Escribamos la lista problema

$$L = \{f_\alpha = g_\alpha/h_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$$

donde $g_\alpha, h_\alpha \in \mathcal{O}$ y además $0 \leq \nu(f_\alpha) = \nu(g_\alpha) - \nu(h_\alpha)$. Ahora apliquemos la proposición 4 a la nueva lista

$$\tilde{L} = \{g_\alpha\} \cup \{h_\alpha\}.$$

Se obtiene un modelo local regular parametrizado $\tilde{\mathcal{A}}$ en el cual \tilde{L} es simple (suponemos implícitamente que nunca obtenemos el contacto maximal). En particular cada h_α divide g_α y, por consiguiente $f_\alpha \in \tilde{\mathcal{O}}$. Es suficiente ahora

aplicar de nuevo la proposición 4 a la lista original L a partir del modelo local regular parametrizado $\tilde{\mathcal{A}}$.

De hecho podemos restringirnos a listas con dos elementos. Más precisamente, la proposición 4 es equivalente a la siguiente

Proposición 5. *Sea $\mathcal{A} = (\mathcal{O}; \mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}); \nu)$ un modelo local regular parametrizado para K, ν . Consideremos una pareja $\{f, g\}$ de funciones regulares no nulas $f, g \in \mathcal{O}$. Existe un modelo local regular parametrizado \mathcal{A}' para K, ν obtenido por una cadena finita de paquetes de Puiseux y de cambios ordenados de coordenadas a partir de \mathcal{A} tal que una de las dos propiedades se cumple:*

- a) *La valoración ν tiene contacto maximal con una serie formal $\hat{f}' \in \hat{\mathcal{O}}'$.*
- b) *La lista $\{f, g\}$ es simple en \mathcal{A}' .*

Necesitaremos el siguiente lema

Lema 3 (Estabilidad de listas simples). *Supongamos que $\mathcal{A}' = \pi_{\mathcal{A}}\mathcal{A}$ o que se ha obtenido por un cambio ordenado de coordenadas a partir de \mathcal{A} y que la lista L es simple en \mathcal{A} . Entonces L también es simple en \mathcal{A}' .*

Demostración . *Es una comprobación elemental.*

Ahora una aplicación repetida de la proposición 5 a todas las parejas de la lista problema en la proposición 4 nos permite concluir, a la vista del lema.

Siendo más precisos, no necesitamos demostrar la proposición 5 en su integridad, sino únicamente el siguiente resultado:

Proposición 6. *Sea $\mathcal{A} = (\mathcal{O}; \mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}); \nu)$ un modelo local regular parametrizado para K, ν . Consideremos una pareja $\{f, g\}$ de funciones regulares no nulas $f, g \in \mathcal{O}$ tales que $\nu(f) \leq \nu(g)$. Existe un modelo local regular parametrizado \mathcal{A}' para K, ν obtenido por una cadena finita de paquetes de Puiseux y de cambios ordenados de coordenadas a partir de \mathcal{A} tal que una de las dos propiedades se cumple:*

- a) *La valoración ν tiene contacto maximal con una serie formal $\hat{f}' \in \hat{\mathcal{O}}'$.*
- b) *La lista $\{f\}$ es simple en \mathcal{A}' y f divide g en \mathcal{O}' .*

En efecto, una vez aplicada la proposición 6 se aplicará de nuevo a la lista $\{g, g\}$ para concluir que la lista $\{f, g\}$ se convierte en una lista simple.

Efectuaremos inducción sobre $n - r$. Si denotamos $T(n, r)$ el enunciado del teorema 7 con los parámetros n, r y denotamos $P_1(n, r), P_2(n, r), P_3(n, r)$ los enunciados correspondientes a las proposiciones 4, 5 y 6, de la discusión anterior se deduce que:

$$P_3(n, r) \Leftrightarrow T(n, r) \Leftrightarrow P_1(n, r) \Leftrightarrow P_2(n, r).$$

Trabajando por inducción, es suficiente probar que $P_3(n, n)$ es cierto y que $T(n - 1, r) \Rightarrow P_3(n, r)$.

5.4. El juego de Hironaka

Introduzcamos en esta sección el enunciado del juego débil de Hironaka. Una solución al mismo se encuentra en el trabajo de Spivakovsky [41]. Supongamos que $\Delta \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ es un poliedro positivamente convexo de vértices con coordenadas enteras. Dado un subconjunto $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$ y un índice $i \in A$, definimos el poliedro transformado $\pi_{A,i}\Delta$ como el cierre positivamente convexo de $\sigma_{A,i}(\Delta)$, siendo $\sigma_{A,i}$ la aplicación lineal definida por

$$\sigma_{A,i}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$$

donde $b_j = a_j$ si $i \neq j$ y $b_i = \sum_{j \in A} a_j$. Es obvio que si Δ tiene un único vértice, entonces $\sigma_{A,i}(\Delta)$ también. El juego se plantea entre dos jugadores, el jugador A y el jugador B y se procede en cada lance de la manera siguiente:

Si el poliedro Δ tiene un solo vértice, se para el juego. Si hay más de un vértice, el jugador A elige un subconjunto $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$ y el jugador B un índice $i \in A$. Se substituye Δ por $\pi_{A,i}\Delta$ y el juego recomienza.

El problema es encontrar una estrategia para guiar la elección que hace el jugador A que garantice que el juego es finito (se obtiene un poliedro con un solo vértice) independientemente de la estrategia seguida por el jugador B. Esta estrategia existe y ha sido definida por Spivakovsky en [41].

5.5. Rango racional máximo

Supondremos en esta sección que $r = n$ y procederemos a demostrar el enunciado $P_3(n, n)$.

Definamos el *poliedro de Newton* $\mathcal{N}(f; \mathbf{x})$ de un elemento regular $f \in \mathcal{O}$. Dado que $\mathcal{O} \subset \widehat{\mathcal{O}}$ y que hay una identificación $\widehat{\mathcal{O}} = k[[\mathbf{x}]]$, podemos escribir

$$f = \sum f_{\mathbf{a}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}}; \quad \mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, f_{\mathbf{a}} \in k.$$

El poliedro de Newton $\mathcal{N}(f; \mathbf{x})$ es entonces el cierre positivamente convexo del soporte $\text{Sop}(f; \mathbf{x}) = \{\mathbf{a}; f_{\mathbf{a}} \neq 0\}$. Si tenemos una lista $L = \{f_{\alpha}\}$ el soporte $\text{Sop}(L; \mathbf{x}) = \bigcup_{\alpha} \text{Sop}(f_{\alpha}; \mathbf{x})$ y el poliedro de Newton $\mathcal{N}(L; \mathbf{x})$ es el cierre positivamente convexo de dicho soporte.

Consideremos la pareja f, g del enunciado de la proposición 6. Es inmediato que las afirmaciones siguientes son equivalentes

1. La lista $\{f\}$ es simple en \mathcal{A} y f divide g en \mathcal{O} .
2. El poliedro de Newton $\mathcal{N}(\{f, g\}; \mathbf{x})$ tiene un solo vértice.

Por consiguiente, nuestro objetivo es probar que, salvo contacto maximal, se puede llegar a que el poliedro de Newton tiene un solo vértice. Esto será consecuencia directa de la existencia de estrategia ganadora para el juego de Hironaka, una vez comprobemos el efecto de una explosión.

Recordemos que $r = n$ y entonces $\mathbf{z} = \mathbf{x}$. Fijemos un conjunto $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Como los valores $\nu(x_s)$ son racionalmente independientes, existe un único índice $i \in A$ tal que $\nu(x_i) < \nu(x_j)$ para $j \in A - \{i\}$. En este caso sabemos que

$$x'_j = x_j/x_i, \text{ si } j \in A - \{i\}; \quad x'_j = x_j, \text{ si } j = i \text{ ó bien } j \notin A.$$

Se concluye por un cálculo sencillo que el poliedro de Newton $\mathcal{N}(\{f, g\}; \mathbf{x}')$ es el cierre positivamente convexo de $\sigma_{A,i}(\mathcal{N}(\{f, g\}; \mathbf{x}))$. Ahora es de aplicación el juego de Hironaka, la valoración desempeña el papel del jugador B al seleccionar el índice i (la carta). Esto termina la prueba de $P_3(n, n)$.

5.6. El polígono de Newton-Puiseux

Hemos indicado que haremos inducción sobre $n - r$. Supongamos pues que $n > r$. Dado $f \in \mathcal{O}$, consideraremos su descomposición

$$f = \sum_s f_s(\mathbf{x}, \mathbf{w})y^s$$

donde $\mathbf{w} = (y_{r+1}, y_{r+2}, \dots, y_{n-1})$, $y = y_n$ y $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \in k[[\mathbf{x}, \mathbf{w}]]$. Para aplicar propiamente la inducción, precisamos del siguiente resultado, que admitiremos

Lema 4. *El anillo $\mathcal{O}_{n-1} = \mathcal{O} \cap k[[\mathbf{x}, \mathbf{w}]]$ es el anillo local de una variedad algebraica en un punto regular y $\{\mathbf{x}, \mathbf{w}\}$ define un sistema regular de parámetros. En la descomposición anterior, se tiene que $f_s \in \mathcal{O}_{n-1}$ para todo $s = 0, 1, \dots$. Más aún, si K_{n-1} es el cuerpo de fracciones de \mathcal{O}_{n-1} , la restricción ν_{n-1} de ν a K_{n-1} tiene rango racional r , cuerpo residual k y está centrada en \mathcal{O}_{n-1} .*

Ahora definimos el polígono de Newton-Puiseux $\Delta(f; \mathcal{A})$ como el cierre positivamente convexo del soporte valuativo

$$\text{Sopval}(f; \mathcal{A}) = \{(\nu(f_s), s); s = 1, 2, \dots\}.$$

Del mismo modo que en el caso del poliedro de Newton, definimos el polígono $\Delta(f, g; \mathcal{A})$ como el cierre positivamente convexo de la unión de los correspondientes polígonos.

Nuestro objetivo es probar que se puede conseguir, bajo la hipótesis de inducción, un polígono de Newton con un único vértice, y que éste sea de la forma $(\delta, 0)$. Esto es suficiente de acuerdo con la siguiente proposición

Proposición 7. *Supongamos que $T(n - 1, r)$ es cierto y que el polígono de Newton $\Delta(f, g; \mathcal{A})$ tiene un único vértice, que es de la forma $(\delta, 0)$. Entonces, después de una cadena finita de paquetes de Puiseux y de cambios ordenados de coordenadas se obtiene la tesis de $P_3(n, r)$.*

Demostración . *Escribamos $f = \sum_s f_s(\mathbf{x}, \mathbf{w})y^s$ y $g = \sum_s g_s(\mathbf{x}, \mathbf{w})y^s$. Consideremos el ideal I_{n-1} de \mathcal{O}_{n-1} generado por los elementos f_s y g_s . Este ideal tiene un conjunto finito de generadores, por noetherianidad; así que, aplicando $T(n - 1, r)$ a la lista de estos generadores, existe una cadena finita de paquetes de Puiseux que transforma \mathcal{A} en \mathcal{A}' , con las siguientes propiedades:*

1. Los centros de las explosiones están dados por conjuntos de índices en los que no aparece el último índice n . Esto no altera el polígono de Newton y se tiene $\Delta(f, g; \mathcal{A}) = \Delta(f, g; \mathcal{A}')$.

2. El ideal $I_{n-1}\mathcal{O}'_{n-1}$ está generado por un monomio de la forma $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$.

Así, podemos suponer por inducción que el ideal $I_{n-1}\mathcal{O}_{n-1}$ está generado por un monomio de la forma $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$. Escribamos entonces

$$f_s = \mathbf{x}^{\mathbf{a}}h_s; g_s = \mathbf{x}_s^{\mathbf{a}}t_s$$

donde la lista h_s, t_s contiene una unidad. La hipótesis sobre la forma del polígono implica que

$$\delta = \min\{\nu(f_0), \nu(g_0)\} \leq \nu(f_s), \nu(g_s).$$

y por tanto, o bien h_0 o bien t_0 es una unidad. Escribamos $f = \mathbf{x}^{\mathbf{a}}h$, $g_s = \mathbf{x}_s^{\mathbf{a}}t$. Si t_0 es una unidad, tenemos $\nu(g) = \nu(\mathbf{x}^{\mathbf{a}}) \leq \nu(f)$ y por consiguiente $\nu(f) = \nu(\mathbf{x}^{\mathbf{a}})$, de lo que concluimos que también h_0 es una unidad. En todo caso h_0 es una unidad. Se sigue que h también lo es y $g = fh^{-1}t$. Obtenemos así la tesis de $P_3(n, r)$.

Nótese que en este caso es irrelevante la aparición o no de una serie formal con contacto maximal con la valoración. En adelante trabajaremos con la siguiente hipótesis

“No existe una serie formal con contacto maximal”.

De lo contrario ya tendríamos, como queremos, la tesis de $P_3(n, r)$.

5.7. El invariante de control

Continuamos trabajando por inducción, suponiendo que $T(n-1, r)$ es cierto. Deseamos probar que $P(n, r)$ es cierto. Como hemos visto en la sección anterior, es suficiente llegar mediante una cadena finita de paquetes de Puiseux y de cambios ordenados de coordenadas a una situación en la cual el polígono de Newton-Puiseux tenga un único vértice y que este sea de la forma $(\delta, 0)$. Mediremos la distancia que nos separa de la situación deseada con un invariante, ya utilizado por Spivakovsky en otro contexto.

Consideremos el polígono de Newton-Puiseux $\Delta(f, g; \mathcal{A})$. En la construcción del polígono se destaca la última variable y_n , a la que dotamos de peso unidad en el sentido vertical. Las rectas *isovalorativas*

$$L_t = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u + \nu(y_n)v = t\}$$

están definidas a partir de la propiedad siguiente: si $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{w})y_n^s \in \mathcal{O}$ entonces $\nu(f_s y^s) = t$, donde t es tal que $(\nu(f_s), s) \in L_t$. Definamos el valor

$$\delta = \delta(f, g; \mathcal{A}) = \sup\{t; L_t \cap \Delta(f, g; \mathcal{A}) = \emptyset\}$$

El *invariante principal* que consideraremos es $h(f, g; \mathcal{A})$ definido por

$$h(f, g; \mathcal{A}) = \sup\{\beta; \text{existe } (\alpha, \beta) \in \Delta(f, g; \mathcal{A}) \cap L_\delta\}.$$

Es obvio que $0 \leq h(f, g; \mathcal{A}) < \infty$. Además, si el polígono de Newton-Puiseux tiene un único vértice y este es de la forma $(a, 0)$, se tiene que $h(f, g; \mathcal{A}) = 0$.

Proposición 8. *Supongamos que $h(f, g; \mathcal{A}) = 0$. Entonces, después de transformar \mathcal{A} por una cadena finita de j -paquetes de Puiseux y de j -cambios de coordenadas, $j \leq n - 1$, seguida de un n -paquete de Puiseux, el polígono de Newton $\Delta(f, g; \mathcal{A})$ tiene un único vértice, que es de la forma $(\delta, 0)$.*

Demostración . *Escribamos $y = y_n$ (también $y' = y'_n$, después de las correspondientes transformaciones) y consideremos la descomposición*

$$f = \sum_s f_s(\mathbf{x}, \mathbf{w})y^s; \quad g = \sum_s g_s(\mathbf{x}, \mathbf{w})y^s.$$

La hipótesis sobre el polígono de Newton-Puiseux se traduce en que existe el vértice $(\delta, 0)$ y que

$$\begin{aligned} \delta &= \nu(f_0) \leq \nu(g_0), \\ \delta &< \nu(y^s f_s), \nu(y^s g_s), \text{ para todo } s \geq 1. \end{aligned}$$

Apliquemos ahora la hipótesis de inducción a la lista finita

$$L = \{f_s, g_s; \nu(y^s) \leq \delta\}.$$

Después de una cadena finita de j -paquetes de Puiseux y de j -cambios de coordenadas, con $r + 1 \leq j \leq n - 1$, podemos suponer que la lista L es simple,

sin que se altere para nada el polígono ni la expresión de f, g . En particular podemos escribir

$$f_s = \mathbf{x}^{\mathbf{b}^s} U_s(\mathbf{x}, \mathbf{w}); \quad g_s = \mathbf{x}^{\mathbf{c}^s} V_s(\mathbf{x}, \mathbf{w})$$

para $0 \leq s \leq a/\nu(y)$, donde U, V son unidades. Ahora estamos en condiciones de aplicar un n -paquete de Puiseux. Considerando las expresiones descritas en la observación 7, tenemos para $0 \leq s \leq \delta/\nu(y)$ que

$$\begin{aligned} y^s f_s &= \mathbf{x}^{\mathbf{b}'^s} U'_s(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \\ y^s g_s &= \mathbf{x}^{\mathbf{c}'^s} U'_s(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \end{aligned}$$

donde U', V' son unidades; en particular, los monomios tienen los valores adecuados

$$\begin{aligned} \nu(\mathbf{x}^{\mathbf{b}'^s}) &= \nu(f_s) + s\nu(y), \\ \nu(\mathbf{x}^{\mathbf{c}'^s}) &= \nu(g_s) + s\nu(y). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\delta = \min\{\nu(f_0), \nu(g_0)\}$ y que $\delta < \nu(y^s f_s), \nu(y^s g_s)$ para $s \geq 1$, podemos escribir (salvo producto por un escalar)

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^t y^s f_s &= \mathbf{x}^{\mathbf{b}'^0} + \sum_{s \geq 1} \tilde{f}_s(\mathbf{x}', \mathbf{w}') y'^s, \\ \sum_{s=0}^t y^s g_s &= \tilde{g}_0(\mathbf{x}', \mathbf{w}') + \sum_{s \geq 1} \tilde{g}_s(\mathbf{x}', \mathbf{w}') y'^s, \end{aligned}$$

donde t es el máximo entero tal que $t \leq \delta/\nu(y)$ y donde los valores satisfacen que $\delta = \nu(\mathbf{x}^{\mathbf{b}'^0}) \leq \nu(\tilde{g}_0)$ y además

$$\delta < \nu(\tilde{f}_s), \nu(\tilde{g}_s); \quad 1 \leq s \leq \delta/\nu(y).$$

Finalmente, teniendo en cuenta que

$$f = \sum_{s=0}^t y^s f_s + y^{t+1}(\dots); \quad g = \sum_{s=0}^t y^s g_s + y^{t+1}(\dots),$$

se concluye que tenemos una descomposición:

$$f = \mathbf{x}^{\mathbf{b}'^0} + \sum_{s \geq 1} f'_s(\mathbf{x}', \mathbf{w}') y'^s; \quad g = \sum_{s \geq 0} g'_s(\mathbf{x}', \mathbf{w}') y'^s$$

en la que $\delta = \nu(\mathbf{x}^{\mathbf{b}'^0}) \leq \nu(g'_0), \nu(f'_s), \nu(g'_s)$, para $s \geq 1$. Así, el nuevo polígono de Newton-Puiseux tiene el único vértice $(\delta, 0)$.

Observación 8. Hemos preparado las ecuaciones, después de inducción, para que el nuevo polígono se comporte como el resultado de efectuar sobre el anterior una transformación afín del tipo $(u, v) \mapsto (u + v\nu(y), v)$. En el caso general, seguiremos esta idea, pero la transformación estará perturbada por el último desplazamiento.

5.8. Estabilidad del invariante de control

A la vista de la prueba de la proposición 8, tiene utilidad la siguiente definición. Sean $\delta = \delta(f, g; \mathcal{A})$, $h = h(f, g; \mathcal{A})$ y t el máximo entero menor o igual que $\delta/\nu(y)$. Diremos que la lista $\{f, g\}$ está \mathcal{A} -preparada si la lista $L = \{f_s, g_s; 0 \leq s \leq t\}$ es simple.

Lema 5 (\mathcal{A} -preparación). *Después de un número finito de j -transformaciones de Puiseux y de j -cambios de coordenadas, con $j \leq n - 1$ (que no alteran el polígono de Newton-Puiseux), la lista $\{f, g\}$ está \mathcal{A} -preparada.*

Demostración . *Basta aplicar la hipótesis de inducción.*

Examinemos algunas consecuencias del hecho de que la lista $\{f, g\}$ esté \mathcal{A} -preparada. La parte \mathcal{A} -inicial de $\{f, g\}$ es la lista $\{F, G\}$ definida por

$$F = \sum_{s \leq h} F_s(\mathbf{x}, \mathbf{w})y^s; \quad G = \sum_{s \leq h} G_s(\mathbf{x}, \mathbf{w})y^s,$$

donde $F_s = f_s$, respectivamente $G_s = g_s$, si $\nu(f_s) + s\nu(y) = \delta$, respectivamente $\nu(g_s) + s\nu(y) = \delta$ y donde $F_s = 0$, resp. $G_s = 0$, cuando $\nu(f_s) + s\nu(y) > \delta$, resp. $\nu(g_s) + s\nu(y) > \delta$.

Sabemos que $(F_h, G_h) \neq (0, 0)$. De modo que existe un monomio $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ de valor igual a $\delta - h\nu(y)$ que “principaliza” (F_h, G_h) y, más precisamente

$$(F_h, G_h) = \mathbf{x}^{\mathbf{a}}(U_h, V_h)$$

con $(U_h, V_h) \neq (0, 0)$ y U_h , respectivamente V_h , es una unidad o idénticamente nulo. Nótese que el valor del monomio determina el vector de exponentes, por tratarse de variables independientes. Más aún, como $\{f, g\}$ está \mathcal{A} -preparada, para cada $0 \leq s \leq h$ tal que $(F_s, G_s) \neq (0, 0)$, tenemos

$$(F_s, G_s) = \mathbf{x}^{\mathbf{a}}\mathbf{x}^{\mathbf{b}^{(s)}}(U_s, V_s)$$

donde U_s , respectivamente V_s , es una unidad o idénticamente nulo y donde el valor del monomio $\mathbf{x}^{\mathbf{b}^{(s)}}$ debe ser igual a $(h-s)\nu(y)$. Recordemos ahora que, si d es el índice de contacto, tenemos $d\nu(y) = \nu(\mathbf{x}^{\mathbf{P}})$. Se concluye que

$$\mathbf{b}^{(s)} = \frac{h-s}{d} \mathbf{p}.$$

En particular $(h-s)/d$ debe ser entero cada vez que $(F_s, G_s) \neq (0, 0)$. Dicho de otro modo, podemos escribir

$$(F, G) = \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \sum_{m=0,1,\dots; dm \leq h} (\mathbf{x}^{\mathbf{P}})^m (U_{h-dm}, V_{h-dm}) y^{h-dm}.$$

Nótese que esta expresión polinómica tiene como máximo $(h/d) + 1$ términos.

Proposición 9. *Supongamos que $h = h(f, g; \mathcal{A}) > 0$, que $\{f, g\}$ está \mathcal{A} -preparada y que el n -índice de contacto es $d \geq 1$. Después de una n -transformación de Puiseux de \mathcal{A} , obtenemos \mathcal{A}' tal que*

$$h' = h(f, g; \mathcal{A}') \leq h(f, g; \mathcal{A}) = h.$$

Además, si $d \geq 2$ se tiene que $h' < h$.

Demostración . *Consideremos la parte \mathcal{A} -inicial $\{F, G\}$ definida más arriba y escribamos $\tilde{f} = f - F$, $\tilde{g} = g - G$, que descomponemos así*

$$\tilde{f} = \sum_{s=0}^t \tilde{f}_s(\mathbf{x}, \mathbf{w}) y^s + y^{t+1} \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}); \quad \tilde{g} = \sum_{s=0}^t \tilde{g}_s(\mathbf{x}, \mathbf{w}) y^s + y^{t+1} \bar{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Como $\{f, g\}$ está \mathcal{A} -preparada, para cada $0 \leq s \leq t$ tenemos que

$$\tilde{f}_s(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mathbf{x}^{\tilde{\mathbf{a}}^{(s)}} \tilde{U}_s; \quad \tilde{g}_s(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mathbf{x}^{\tilde{\mathbf{b}}^{(s)}} \tilde{V}_s,$$

donde \tilde{U}_s y \tilde{V}_s son unidades y los monomios $\mathbf{x}^{\tilde{\mathbf{a}}^{(s)}}$ y $\mathbf{x}^{\tilde{\mathbf{b}}^{(s)}}$ tienen valor estrictamente superior a $\delta - s\nu(y)$. Aplicando ahora la n -transformación de Puiseux y teniendo en cuenta las expresiones de la observación 7, se concluye que hay una descomposición

$$\tilde{f} = \sum_{s \geq 0} \tilde{f}'_s(\mathbf{x}', \mathbf{w}') y'^s; \quad \tilde{g} = \sum_{s \geq 0} \tilde{g}'_s(\mathbf{x}', \mathbf{w}') y'^s,$$

con la propiedad de que $\nu(\tilde{f}'_s, \tilde{g}'_s) > \delta$ para todo índice $s \geq 0$.

Veamos ahora cómo se comporta $\{F, G\}$ después de la n -transformación de Puiseux. Escribamos

$$(F, G) = \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \sum_{m=0,1,\dots; dm \leq h} (\mathbf{x}^{\mathbf{P}})^m (\alpha_{h-dm} + U_{h-dm}^*, \beta_{h-dm} + V_{h-dm}^*) y^{h-dm},$$

donde $\nu(U_{h-dm}^*, V_{h-dm}^*) > 0$ y $\alpha_{h-dm}, \beta_{h-dm}$ son escalares. Consideremos el vector de polinomios

$$(P_F, P_G) = \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \sum_{m=0,1,\dots; dm \leq h} (\mathbf{x}^{\mathbf{P}})^m (\alpha_{h-dm}, \beta_{h-dm}) y^{h-dm}.$$

Haciendo un razonamiento similar al de la primera parte de esta demostración con $(F - P_F, G - P_G)$ concluimos que

$$(F - P_F, G - P_G) = \sum_{s \geq 0} ((f_s^{*'}(\mathbf{x}', \mathbf{w}'), g_s^{*'}(\mathbf{x}', \mathbf{w}')) y^s,$$

donde $\nu(f_s^{*'}, g_s^{*'}) > \delta$. Recordando que $\Phi_n = y^d / \mathbf{x}^{\mathbf{P}}$, tenemos

$$(P_F, P_G) = \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \left(\frac{y}{\Phi_n} \right)^h \sum_{m=0,1,\dots; dm \leq h} (\alpha_{h-dm}, \beta_{h-dm}) (\Phi_n)^{h-m},$$

invocamos de nuevo las expresiones de la observación 7 para escribir

$$(P_F, P_G) = \mathbf{x}'^{\mathbf{a}'} (y' + c)^{b'} \sum_{m=0,1,\dots; dm \leq h} (\alpha_{h-dm}, \beta_{h-dm}) (y' + c)^{h-m},$$

donde $\nu(\mathbf{x}'^{\mathbf{a}'}) = \delta$, $b' \in \mathbb{Z}$.

Sea ahora q el mayor entero menor o igual que h/d . Nótese que si $d \geq 2$ entonces $q < h$ y que si $d = 1$ entonces $q = h$. Todavía podemos escribir

$$(P_F, P_G) = \mathbf{x}'^{\mathbf{a}'} (y' + c)^{b'+h-q} \sum_{m=0,1,\dots,q} (\alpha_{h-dm}, \beta_{h-dm}) (y' + c)^{q-m}.$$

Dado que $(\alpha_h, \beta_h) \neq (0, 0)$, podemos deducir una expresión

$$(P_F, P_G) = \mathbf{x}'^{\mathbf{a}'} y'^{t'} \left((\alpha', \beta') + \sum_{s \geq 1} (\alpha'_s, \beta'_s) y'^s \right)$$

donde $t' \leq q$ y $(\alpha', \beta') \neq (0, 0)$. Escribiendo ahora

$$(f, g) = (P_F, P_G) + (F - P_F, G - P_G) + (\tilde{f}, \tilde{g}),$$

concluimos que

$$(f, g) = \sum_s (f'_s(\mathbf{x}', \mathbf{w}'), g'_s(\mathbf{x}', \mathbf{w}')) y'^s$$

donde el primer vértice del polígono característico es precisamente (δ, t') , esto es $\nu(f'_s) > \delta$ si $s < t'$, $\nu(f'_{t'}) = \delta$ y $\nu(f'_s) \geq \delta$ si $s' \geq t'$. De aquí se concluye que

$$h(f, g; \mathcal{A}') \leq t' \leq h.$$

Además, hemos visto que si $d \geq 2$ entonces $t' < h$ pues $t' \leq q < h$.

5.9. Contacto maximal

Supongamos ahora que $h \geq 1$ y no existen sucesiones finitas de transformaciones de Puiseux y de cambios ordenados de coordenadas que hagan descender h .

A la vista de la proposición 9, tras una preparación y una n -transformación de Puiseux, podemos suponer que el vértice principal (el primer vértice de la izquierda del polígono) es precisamente (δ, h) y que además en la descomposición

$$(f, g) = \sum_s (f_s, g_s) y^s$$

se tiene que $\nu(f_s, g_s) > \delta = \nu(f_h, g_h)$ para todo $s \neq h$. Nótese que el resultado es cierto para ambos casos $s > h$ y $s < h$; el caso $s > h$ es trivial, pues proviene de una expresión $y^{h+1}(\dots)$ después de la n -transformación de Puiseux, el caso $s < h$ es como consecuencia de que el invariante h no ha descendido. Estamos pues en esta situación de partida. Ahora podemos hacer inducción considerando el ideal de las funciones f_s, g_s . Este ideal se puede principalizar, aplicando inducción a una lista finita de generadores del mismo. Se obtiene la propiedad adicional siguiente: existe un monomio $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ que genera dicho ideal y tiene valor igual a δ . Dividiendo por este monomio la lista $\{f, g\}$ obtenemos una nueva lista $\{\bar{f}, \bar{g}\}$, que cumple exactamente con las mismas hipótesis que hemos enunciado en esta sección. Así pues, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\nu(f_h, g_h) = 0$ y que $\nu(f_s, g_s) > 0$ para $s \neq h$. Supondremos también, sin pérdida de generalidad que f_h es una unidad; si no fuera así intercambiaríamos los papeles de f, g . Más aún, dividiendo por f_h , se puede suponer que $f_h = 1$. Esto resume las hipótesis con las que trabajamos en esta sección.

En la situación precedente $\nu(f_{h-1}) = \nu(y)$. En efecto, sabemos que si hacemos una preparación (que no altera el polígono) y después una n -transformación de Puiseux, entonces el nuevo $h' = h$. Observando la estructura de la demostración de la proposición 9, concluimos que la primera pendiente de polígono debe ser exactamente igual a $-1/\nu(y)$ y que además debe existir una contribución de f_{h-1} al punto $(\nu(y), h-1)$, con lo cual $\nu(f_{h-1}) = \nu(y)$. Más aún, siguiendo con detalle dicha prueba se puede concluir que

$$\nu\left(y + \frac{1}{h}f_{h-1}\right) > \nu(y).$$

Efectuemos ahora el n -cambio de coordenadas

$$y^{(1)} = y + \frac{1}{h}f_{h-1}$$

El punto $(0, h)$ continúa siendo un vértice del polígono y las restantes hipótesis se cumplen (dividiendo por el nuevo coeficiente de y^h , que es una unidad). Podemos repetir el argumento y efectuar el cambio

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \frac{1}{h}f_{h-1}^{(1)}.$$

De este modo generamos una sucesión $y^{(s)} \in \mathcal{O}$, $s = 0, 1, 2, \dots$, con valores estrictamente crecientes. Para encontrar nuestra serie formal con contacto maximal es ahora suficiente probar que la sucesión $f_{h-1}^{(s)}$ converge a cero en la topología de Krull.

Así pues falta probar que $\text{ord}(f_{h-1}^{(s+1)}) > \text{ord}(f_{h-1}^{(s)})$, para todo $s \geq 0$, donde $\text{ord}(\dots)$ denota el orden ádico respecto del ideal maximal de \mathcal{O} . Es suficiente tratar el caso $s = 0$. Recordemos que

$$f = \dots + f_{h+2}y^{h+2} + f_{h+1}y^{h+1} + y^h + f_{h-1}y^{h-1} + \dots + f_0.$$

Ahora tenemos que examinar el coeficiente $f_{h-1}^{(1)}$ de $(y^{(1)})^{h-1}$ después de hacer la transformación $y^{(1)} = y + f_{h-1}/h$. Se tiene que

$$f_{h-1}^{(1)} = f_{h+1} \binom{h+1}{h-1} (-f_{h-1})^2 + f_{h+2} \binom{h+2}{h-1} (-f_{h-1})^3 + \dots$$

y, por consiguiente $\text{ord}(f_{h-1}^{(1)}) \geq 2\text{ord}(f_{h-1}) > \text{ord}(f_{h-1})$. Esto concluye la demostración.

Bibliografía

- [1] Aroca, J.M; Hironaka, H.; Vicente, J.L. : *Infinitely near points of a Singularity. The theory of Maximal Contact. Desingularization Theorems*. Memorias de Matemática del Instituto Jorge Juan, 28,29,30. CSIC. Madrid 1977.
- [2] Brunella, M. : *Instability of equilibria in dimension three*. Ann. Inst. Fourier, 48, 5, (1998), 1345-1357.
- [3] Brunella, M. : *Birational geometry of foliations*. Mon. de Matemática. IMPA. Rio de Janeiro, 2004, iv+138pp.
- [4] Camacho, C.; Cano, F.; Sad, P. : *Desingularization of absolutely isolated singularities of vector fields*. Inventiones Mathematicae, **98**, pp. 351-369, (1989).
- [5] Camacho, C.; Neto, L. : *Geometric theory of foliations*. Birkhauser, boston, 1985, 205 pp.
- [6] Camacho, C.; Sad, P. : *Invariant varieties through singularities of vector fields*. Ann. of Math., 115 (1982), 579-595.
- [7] Cano, F.; Cerveau, D. : *Introduction aux feuilletages singuliers*. Notes Rennes-Valladolid (ask to the authors).
- [8] F. Cano; R. Moussu; J.-P. Rolin : *Non-oscillating integral curves and valuations*. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 582:107–141, 2005.
- [9] Cano, F.; Moussu, R.; Sanz, F. : *Pinceaux de courbes intégrales d'un champ de vecteurs. Analyse complexe, systèmes dynamiques, somma-*

- bilité des séries divergentes et théories galoisiennes (II)*, volume en l'honneur de J.P. Ramis). Astérisque **297**, (2004), 1-35.
- [10] Cano, F.; Roche, C.; Spivakovsky, M. : *Local Uniformization in Characteristic Zero. The Arquimedean Case*. Rev. Sem. Iberoam. Mat. **3**, V-VI, (2008), 49-64.
- [11] Cano, F.; Roche, C.; Spivakovsky, M. : *Birational reduction of singularities of three-dimensional vector fields*. Preprint. Univ. Valladolid. 2008. Arkiv.1009.1348v1 sep 2010.
- [12] Cano, F.; Moussu, R.; Sanz, F. : *Oscillation, spiralement, tourbillonnement*. Comm. Math. Helv. **75**, (2000), 284-318.
- [13] Cano, F. : *Desingularization of plane vector fields*. Transactions of the American Mathematical Society, volume **296**, **1**, pp. 83-93, (1986).
- [14] Cano, F. : *Desingularization Strategies for Three Dimensional Vector Fields*. Lecture Notes in Mathematics, **1259**, Springer Verlag, 1987.
- [15] Cano, F. : *Final forms for a three-dimensional vector field under blowing-up*. Annales de l'Institut Fourier, número 37, vol. **2**, pp. 151-193, (1987).
- [16] Cano, J. : *On the series defined by differential equations, with an extension of the Puiseux's Polygon construction to these equations*. Analysis, **13**, (1993), 103-119.
- [17] J. Cano : *On the series defined by differential equations, with an extension of the Puiseux's Polygon construction to these equations*. Analysis, 13(1-2):103-119, 1993.
- [18] Cerveau, D.; Moussu, R. : *Groupes d'automorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$ et équations différentielles $ydy + \dots = 0$* . Bull. Soc. Math. de France, 116, **4**, (1988), 459-488.
- [19] Cerveau, D.; Mattei, J.F : *Formes intégrables holomorphes singulières*. Astérisque 97, 1982.
- [20] Cossart, V.; Giraud, J.; Orbanz, O. (Appendix by Hironaka, H.) : *Desingularization of Excellent Surfaces*. Lect. Notes in Math., **1101**, Springer-Verlag, 1984.

- [21] Dumortier, F. : *Singularities of Vector Fields*. Monogr. Matemática IMPA, **32**, 1978, Rio de Janeiro.
- [22] Essen, Van den : *Reduction of the singularities of the differential equation $Ady = Bdx$* . Springer Lecture Notes 712, p 44-59, (1979).
- [23] Giraud, J. : *Forme normale d'une fonction sur une surface de caractéristique positive*. Bull. Soc. Math. France, 111, 1983, pp 109-124.
- [24] Giraud, J. : *Condition de Jung pour les revêtements radiciels de hauteur un*. Proc. Algebraic Geometry, Tokyo/Kyoto 1982. Lecture Notes in Mathematics, 1016. Springer Verlag.1983. pp 131-333.
- [25] Gómez-Mont, X.; Luengo, I. : *Germes of holomorphic vector fields in \mathbb{C}^3 without a separatrix*. Invent. Math. 109, (1992), 2, 211-219.
- [26] Hironaka, H. : *Introduction to the Theory of Infinitely Near Singular Points*. Mem. Mat. Inst. Jorge Juan, 28, Madrid, 1975.
- [27] Hironaka, H. : *Desingularization of excellent surfaces*. Adv. Sci. Seminar in Alg. Geom. Bowdoin College (1967). Aparecido en LNM 1101, Springer-Verlag (1984).
- [28] Hironaka, H. : *La voûte étoilée. singularités à Cargèse, 1973*, Asterisque 7 et 8, 415-440.
- [29] Hironaka, H. : *Characteristic polyhedra of singularities*. J. Math. Kyoto Univ. , 7, (1967), 251-293.
- [30] H. Hironaka : *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*. Annals of Mathematics (2), 79(1):109–203 y 79(2):205–326, 1964.
- [31] Martinet, J.; Ramis, J.P. : *Problèmes de modules pour des équations différentielles nonlinéaires du premier ordre*. IHES 55 (1982) 63-164.
- [32] Martinet, J.; Ramis, J.P. : *Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre*. Ann. Sci. École Norm. Sup. 16 (1983), 571-621.

- [33] Mattei, J.F.; Moussu, R. : *Holonomie et intégrales premières*. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 13, (1980), 469-523.
- [34] Panazzolo, D. : *Desingularisation of nilpotent families of planar vector fields* Panazzolo, D.. Mem. of AMS 753, (2002), 108 pp.
- [35] Panazzolo, D. : *Resolution of singularities of real-analytic vector fields in dimension three*. Acta Math. **197**, (2006) 167-289.
- [36] Piltant, O. : *An Axiomatic Version of Zariski's Patching Theorem*. Preprint, Universidad de Valladolid, 2008.
- [37] Panazzolo, D.; McQuillan, M. : *Almost étale reduction of singularities of vector fields*. Preprint IHES.
- [38] Raynaud, M. : *Aneaux Locaux Henséliens*. Springer Lecture Notes in Mathématiques, 169.
- [39] Sancho de Salas, F. : *Milnor number of a vector field along a subscheme: applications in desingularization*. Adv. Math. **153**, no. 2, 299-324.
- [40] Seidenberg, A. : *Reduction of the singularities of the differential equation $Ady = Bdx$* . Am. J. of Math., **90**, (1968), 248-269.
- [41] Spivakovsky, M. : *A solution to Hironaka's polyhedra game*. Arithmetic and Geometry II, Birkhauser, (1983), 419-432.
- [42] Spivakovsky, M. : *A counterexample to Hironaka's hard polyhedra game*. Publ. R. I. M. S., Kyoto Univ. , 18, (1982), 1009- 1012.
- [43] Teissier, B. : *Valuations, deformations and toric geometry*. Valuation Theory and its applications, vol. II, (Saskatoon, SK, 1999), 361-459, Fields Inst. Commun. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [44] Vaquié, M. : *Valuations and local uniformization*. Singularity theory and its applications, 477-527, Adv. Stud. Pure Math., **43**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006.
- [45] Villamayor, O. : *Constructiveness of Hironaka Resolution*. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 4, t. 2, (1989), 1-32.

- [46] Wall, C.T.C. : *Singular Points of Plane Curves*. London Mathematical Society. Student Texts 63. Cambridge University Press. 2004..
- [47] Zariski, O.; Samuel, P. : *Commutative Algebra II*. GTM 29, Springer-Verlag. 1960.
- [48] Zariski, O. : *Local uniformization on algebraic varieties*. Ann. of Math. **41**, (1940). 852–896.
- [49] Zariski, O. : *Reduction of the singularities of algebraic three dimensional varieties*. Ann. of Math. **45**, (1944). 472–542.

Felipe Cano Torres
Universidad de Valladolid
Spain

Francisco Ugarte Guerra
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú

Se terminó de imprimir en los talleres gráficos de
R & F PUBLICACIONES Y SERVICIOS S.A.C.
Manuel Cándamo 350-356, Lince. Lima 14 - Perú
Teléfonos: 472-9676 - 266-0045
Telefax: 471-6084
Correo: ventas@ryf.com.pe
Julio, 2011.



El Dr. José Tola Pasquel fue matemático, ingeniero civil y el primer rector laico de la Pontificia Universidad Católica del Perú (1977-1989).

El Dr. Tola también fue presidente de la Sociedad Matemática Peruana, decano del Colegio de Ingenieros del Perú, miembro del Comité Interamericano de Enseñanza de las Matemáticas, además fue presidente de la Academia Nacional de Ciencias del Perú y presidente honorario del Centro Interuniversitario de Desarrollo Andino, así como miembro de la Academia Peruana de la Lengua.

Recibió del gobierno peruano las Palmas Magisteriales en el grado de Amauta y el gobierno francés le otorgó las Palmas Académicas.

La Cátedra José Tola Pasquel fue creada por la Pontificia Universidad Católica del Perú en reconocimiento a su legado y con el propósito de estimular la investigación, la internacionalización y la producción intelectual de alto nivel en Ciencias, que tanto impulsó a lo largo de su vida.

Este texto sirvió de base para el curso Introducción a la Geometría Analítica Local, impartido en la Pontificia Universidad Católica del Perú, en el marco de las actividades de la Cátedra José Tola Pasquel 2010.

El libro pretende ir descubriendo de manera natural los objetos básicos de la geometría analítica local compleja, estimulando la curiosidad del lector con la finalidad de motivarlo para una aventura de conocimiento en estos temas. Para ello, se parte de preguntas geométricas elementales y conforme se profundiza el estudio, se resuelven las dificultades que se plantean.

ISBN: 978-612-45391-4-5



9 786124 539145