Capítulo 3

Funciones vectoriales de variables vectoriales

3.1 Función vectorial de variable vectorial

Una aplicación $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m, n, m \geq 2$, la denominamos campo vectorial. En el caso en que $m = 1$ la denominamos campo escalar.

Cuando consideramos funciones de una sola variable el concepto de límite está referido a la aproximación que hacemos a un punto ya sea por la derecha o por la izquierda. En el caso de campos vectoriales la aproximación a un punto puede hacerse por infinitos caminos. Iniciemos con unos ejemplos:

Ejemplo 3.1 *Sea*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si\ (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Si dejamos una variable, por ejemplo x, fija vemos que $f(x, y)$ se aproxima a 0 cuando y se aproxima a 0. Pero si tomamos la recta $x = y$ entonces $f(x, y) = \frac{1}{2}$ y, aunque (x, y) se aproxime a $(0, 0)$, no se tiene que $f(x, y)$ se aproxime a 0.

Tenemos la siguiente

Definición 3.1 *Sea $f : R^n \to R^m$. Decimos que*

$$\lim_{P \to A} f(P) = L$$

Si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, que depende de ε, tal que si $\|P - A\| < \delta$ entonces $\|f(P) - L\| < \varepsilon$.

Esto es **lo que no sucede** en el ejemplo anterior, podemos tener puntos $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tales que $\|(x, y) - (0, 0)\|$ sea muy pequeña y no obstante $|f(x, y) - 0| = \frac{1}{2}$.

Definición 3.2 *Sea $f : R^n \to R^m$. Decimos que f es continua en un punto $A \in R^n$ si la función f está definida en A y además*

$$\lim_{P \to A} f(P) = f(A).$$

Nota: Un campo vectorial $f : R^n \to R^m$, $n, m \geq 2$ está definido por m campos escalares $f_1, ...f_m$. Es fácil ver que

$$\lim_{P\to A} f(P) = L$$

si y sólo si

$$\lim_{P\to A} f_i(P) = l_i, \; i = 1, ...m,$$

en donde $L = (l_1, ...l_m)$. Esto nos dice que podemos restringir nuestra discusión al caso de campos escalares.

3.2 Diferenciación

El grán inconveniente de la derivada débil que introdujimos en la sección dos consiste en que ella no implica continuidad. Para subsanar esa debilidad introduciremos, ahora, la noción de derivada fuerte o derivada de Frechet.

Definición 3.3 *Sea $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ un campo escalar. Decimos que f es fuertemente diferenciable en $P \in \mathbf{R}^n$ si existe una transformación lineal $T_P : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ tal que para todo $Y \in \mathbf{R}^n$ se tiene que*

$$f(P+Y) - f(P) = T_P(Y) + o(P, \|Y\|),$$

Definición 3.4 *en donde $o(P, \|Y\|)$ es tal que* $\lim_{Y\to 0} \frac{|o(P,\|Y\|)|}{\|Y\|} = 0.$

La *transformación lineal* T_A se le llama la diferencial fuerte de f en el punto A. Es costumbre denotar $T_A = f'(A)$.

Lo primero que debemos advertir de la definición es que si la función f es fuertemente diferenciable en P entonces es débilmente diferenciable en P y las dos derivadas coinciden. Esto es

$$f'(P,Y) = f'(P)(Y),$$

para todo $Y \in \mathbf{R}^n$

También advertimos de la definición que si f es fuertemente diferenciable en A entonces la función f es continuia en P. Sólo es suficiente tener en cuenta que la *transformación lineal* T_P es siempre una función continua y $T_P(0) = 0$. Además, de la caracterización que hicimos de $o(P, \|Y\|)$ concluímos que $o(P, \|Y\|) \to 0$ cuando $Y \to 0$.

Ahora, sea $Y \in \mathbf{R}^n$. Entonces $Y = \sum_{k=1}^n y_k e_k$ donde $\{e_1, ..., e_n\}$ representa la base canónica de $\mathbf{R}^n$. Esto es, $e_k = (0, 0..., 1, 0, ...0)$ donde el 1 aparece en el lugar k-ésimo. Por la linealidad de $T_P = f'(P)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} f'(P)(Y) &= f'(P)(\textstyle\sum_{k=1}^n y_k e_k) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n y_k f'(A)(e_k) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n y_k f'(A, e_k) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n y_k D_k f(A). \end{aligned}$$

Esto es, podemos expresar la diferencial fuerte en términos de las derivadas parciales de f. En resumen tenemos

$$f'(P)(Y) = \sum_{k=1}^n y_k D_k f(P). \qquad (3.3.2)$$

Si denotamos $\nabla f(P) = (D_1 f(P), ..., D_n f(P)) \in \mathbf{R}^n$ la expresión anterior toma la siguiente forma:

$$f'(P)(Y) = \langle \nabla f(P), Y \rangle .$$

Esto quiere decir que la diferencial fuerte, o simplemente la diferencial, de ahora en adelante, de f en P, $f'(P)$, la podemos representar por medio del vector

$$\nabla f(P) = (D_1 f(P), ..., D_n f(P)) \in \mathbf{R}^n.$$

Este vector es conocido como el gradiente de f en P.

Es muy importante tener una fórmula que nos permita calcular la diferencial de un campo escalar, pero la pregunta crucial de esta sección es: Cuando un campo escalar es diferenciable ? La respuesta la tenemos en el siguiente

Teorema 3.1 *$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es diferenciable en P, ésto es, existe $f'(P)$, si las derivadas parciales $D_k f$, $k = 1, 2..., n$, existen en alguna bola $B(P, r)$ y son continuas en P.*

Demostración: Sea $Y \in B(P, r)$. Denotemos con $Y_k = \sum_{j=1}^{k} y_j e_j$, además, $Y = Y_n$ y $Y_0 = 0$. Ahora, obsevemos que

$$f(P+Y) - f(P) = \sum_{j=1}^{n} \{f(P+Y_j) - f(P+Y_{j-1})\}$$

nos dice que

$$f(P+Y_j) - f(P+Y_{j-1}) = y_j D_j f(C_j),$$

en donde C_j es un vector que se encuentra en el segmento que une a los vectores $P+Y_j$ y $P+Y_{j-1}$. Y cuando $Y \to 0$ entonces $C_j \to P$. De lo anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} f(P+Y) - f(P) &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} y_j D_j f(P) \\ &\quad + \textstyle\sum_{j=1}^{n} y_j \{D_j f(C_j) - D_j f(P)\} . \end{aligned}$$

Denotemos con

$$o(P, \|Y\|) = \sum_{j=1}^{n} y_j \{D_j f(C_j) - D_j f(P)\} .$$

Puesto que las derivadas parciales $D_j f$, $j = 1, 2, ..., n$, son continuas en $B(P, r)$ es fácil ver que $\frac{|o(P,\|Y\|)|}{\|Y\|} \to 0$ cuando $\|Y\| \to 0$. Deducimos que

$$f'(P)(Y) = \sum_{j=1}^{n} y_j D_j f(P) = \langle \nabla f(P), Y \rangle \quad .$$

Ejemplo 3.2 *Sea $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definido como $f(X) = \|X\|^2$. Calculemos $\nabla f(X)$.*

La fórmula nos dice que

$$f'(X)(Y) = \langle \nabla f(X), Y \rangle$$

También sabemos que

$$f'(X)(Y) = f'(X, Y) = 2\langle X, Y \rangle .$$

Por lo tanto obtenemos que $\nabla f(X) = 2X$.

Ejemplo 3.3 *Sea $f(x,y,z) = xy + yz + zx$. Calculemos $f'(a,b,c)(m,n,r)$. La fórmula nos dice que*

$$f'(a,b,c)(m,n,r) = \langle \nabla f(a,b,c), (m,n,r) \rangle$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \nabla f(a,b,c) &= (D_1 f(a,b,c), D_2 f(a,b,c), D_3 f(a,b,c)) \\ &= (b+c, a+c, b+a). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f'(a,b,c)(m,n,r) &= \langle (b+c, a+c, b+a), (m,n,r) \rangle \\ &= mb + mc + na + nc + rb + ra \end{aligned}$$

3.3 Regla de la cadena

Sea $\mathbf{f} : S \to \mathbf{R}^m$, donde S es un conjunto abierto de $\mathbf{R}^n$, un campo vectorial. El campo $\mathbf{f}$ tiene m funciones componentes $f_i : S \to \mathbf{R}$ tales que $\mathbf{f}(X) = (f_1(X), ..., f_m(X))$. La derivada direccional del campo vectorial $\mathbf{f}$ en un punto X y en la dirección Y se define de la misma forma como lo hicimos para campos escalares, ésto es,

$$\mathbf{f}'(X,Y) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{f}(X+tY) - \mathbf{f}(X)}{t}.$$

En términos de las funciones componentes de $\mathbf{f}$ vemos que

$$\mathbf{f}'(X,Y) = \sum_{k=1}^{m} f'_k(X,Y) e_k. \qquad (3.5.1)$$

Análogamente, la derivada fuerte o derivada de Frechet del campo vectorial $\mathbf{f}$ en el punto X se define como la transformación lineal $\mathbf{f}'(X) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ tal que para todo $Y \in \mathbf{R}^n$ se cumple que

$$\mathbf{f}(X+Y) - \mathbf{f}(X) = \mathbf{f}'(X)(Y) + o(X,Y),$$

en donde $o(X,Y) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es tal que $\frac{\|o(X,Y)\|}{\|Y\|} \to 0$ cuando $Y \to 0$.

La transformación lineal $\mathbf{f}'(X)$ la llamamos la diferencial fuerte o de Frechet. Frechet o simplemente la diferencial de $\mathbf{f}$ en el punto X.

Es fácil ver que si $\mathbf{f}$ es diferenciable en X entonces todas sus funciones componentes son diferenciables y tenemos que

$$\mathbf{f}'(X)(Y) = \mathbf{f}'(X,Y).$$

Por lo anterior obtenemos

$$\mathbf{f}'(X)(Y) = (\langle \nabla f_1(X), Y \rangle, ..., \langle \nabla f_m(X), Y \rangle).$$

La expresión anterior la podemos presentar en forma matricial, así:

$$\mathbf{f}'(X)(Y) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(X) & D_2 f_1(X) & \cdots & D_n f_1(X) \\ D_1 f_2(X) & D_2 f_2(X) & \cdots & D_n f_2(X) \\ \vdots & & & \vdots \\ D_1 f_m(X) & D_2 f_m(X) & & D_n f_m(X) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

en donde $Y = (y_1, ...y_n)$. La matriz de m filas por n columnas que definen la transformación lineal $\mathbf{f}'(X)$ es conocida como la matriz jacobiana de $\mathbf{f}$ en X. La notaremos como $M_{\mathbf{f}'(X)}$.

Regla de la cadena

Supongamos que f y g son dos campos vectoriales tales que $\mathbf{g} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es diferenciable en X y $\mathbf{f} : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ es diferenciable en $\mathbf{g}(X)$. Entonces $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ es diferenciable en X y tenemos que

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})'(X) = \mathbf{f}'(\mathbf{g}(X)) \circ \mathbf{g}'(X). \qquad (1)$$

Para ver (1) procedemos así: Sea $Z = \mathbf{g}(X+Y) - \mathbf{g}(X)$, entonces $Z = \mathbf{g}'(X)(Y) + o_1(X,Y)$. Ahora,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(X+Y) - (\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(X) &= \mathbf{f}(\mathbf{g}(X+Y)) - \mathbf{f}(\mathbf{g}(X)) \\
&= \mathbf{f}(\mathbf{g}(X) + Z) - \mathbf{f}(\mathbf{g}(X)) \\
&= \mathbf{f}'(\mathbf{g}(X))(Z) + o_2(\mathbf{g}(X), Z) \\
&= \mathbf{f}'(\mathbf{g}(X))\,(\mathbf{g}'(X)(Y) + o_1(X,Y)) + o_2(\mathbf{g}(X), Z) \\
&= \mathbf{f}'(\mathbf{g}(X))(\mathbf{g}'(X)(Y)) + \mathbf{f}'(\mathbf{g}(X))(o_1(X,Y)) + o_2(\mathbf{g}(X), Z) \\
&= \mathbf{f}'(\mathbf{g}(X))(\mathbf{g}'(X)(Y)) + o_3(X,Y) \\
&= (\mathbf{f}'(\mathbf{g}(X)) \circ \mathbf{g}'(X))\,(Y) + o_3(X,Y).
\end{aligned}$$

Dejamos al lector que verifique la siguiente igualdad:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{g}(X))(o_1(X,Y)) + o_2(\mathbf{g}(X), Z) = o_3(X,Y).$$

La regla de la cadena (1) tiene la siguiente representación matricial en términos de la matriz jacobiana:

$$M_{(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})'(X)} = M_{\mathbf{f}'(\mathbf{g}(X))} \cdot M_{\mathbf{g}'(X)}, \qquad (2)$$

en donde el producto de la derecha de (2) es un producto de matrices. Es importante advertir que $M_{\mathbf{g}'(X)}$ es una matriz de orden $m \times n$, ésto es, m filas por n columnas, y $M_{\mathbf{f}'(\mathbf{g}(X))}$ es de orden $p \times m$, entonces $M_{(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})'(X)}$ es de orden $p \times n$.

Para entender bien el uso de (2) consideremos el siguiente ejemplo: Sea $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ y $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$. Para simplificar llamemos $\mathbf{g}(X) = Y$. Entonces, en representación matricial, tenemos

$$\mathbf{g}'(X) = \begin{pmatrix} D_1g_1(X) & D_2g_1(X) \\ D_1g_2(X) & D_2g_2(X) \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{f}'(Y) = \begin{pmatrix} D_1f_1(Y) & D_2f_1(Y) \\ D_1f_2(Y) & D_2f_2(Y) \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$D_1(f_1 \circ g)(X) = D_1f_1(Y).D_1g_1(X) + D_2f_1(Y).D_1g_2(X)$$

y

$$D_2(f_1 \circ g)(X) = D_1f_1(Y).D_2g_1(X) + D_2f_1(Y).D_2g_2(X).$$

De manera análoga tendremos $D_1(f_2 \circ g)(X)$ y $D_2(f_2 \circ g)(X)$.

Consideremos otro ejemplo: Sea $f(x,y)$ un campo escalar. El punto (x,y) expresado en coortlenadas polares satisface

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= rsen\theta. \end{aligned}$$

Denotemos $w(r,\theta) = f(r\cos\theta, rsen\theta)$. Por la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{\partial w(r,\theta)}{\partial r} = \frac{\partial f(r\cos\theta, rsen\theta)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f(r\cos\theta, rsen\theta)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}.$$

Esto es

$$\frac{\partial w(r,\theta)}{\partial r} = \frac{\partial f(r\cos\theta, rsen\theta)}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f(r\cos\theta, rsen\theta)}{\partial y}sen\theta.$$

En forma similar se calcula $\frac{\partial w(r,\theta)}{\partial \theta}$.

Ejemplo 3.4 *Sea $f(x.y) = xy$.*

Supongamos que

$$x = x(s,t) = st, \quad y = y(s,t) = s+t$$

Ejemplo 3.5 *Sea $w(s,t) = f(st, s+t)$. Entonces*

$$\frac{\partial w(s,t)}{\partial s} = \frac{\partial f(x(s,t), y(s,t))}{\partial x}.\frac{\partial x(s,t)}{\partial s} + \frac{\partial f(x(s,t), y(s,t))}{\partial y}.\frac{\partial y(s,t)}{\partial s}$$

Esto es,

$$\frac{\partial w(s,t)}{\partial s} = (s+t)t + st.$$

Ejemplo 3.6 *Sean $f(x,y) = (xy, x+y)$ y $g(x,y) = (e^x, e^y)$. Entonces la representación matricial de $f'(x,y)$ y $g'(x,y)$ es:*

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \; g'(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^y \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la representación matricial de $(f \circ g)'(x,y)$ es

$$(f \circ g)'(x,y) = f'(e^x, e^y)\, g'(x,y) = \begin{pmatrix} e^y & e^x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^y \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.7 *Esto es,*

$$f \circ g'(x,y) = \begin{pmatrix} e^{y+x} & e^{y+x} \\ e^x & e^y \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.8 *Dada una función $u = f(x,y)$ de clase C^2.El cambio de variable $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ transforma la ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = A(r,\theta)\frac{\partial u}{\partial x} + B(r,\theta)\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Hallar las funciones $A(r,\theta)$ y $B(r,\theta)$.

Solución.

$$u = f(x,y) \begin{array}{l} \nearrow x \begin{array}{l} \nearrow r \\ \searrow \theta \end{array} \\ \searrow y \begin{array}{l} \nearrow r \\ \searrow \theta \end{array} \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial x}{\partial r} & = & \cos\theta \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & = & -r\sin\theta \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & = & \sin\theta \\ \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & = & r\cos\theta \end{array} \right.$$

Ahora :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial r} &= \cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial y} \quad \cdots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= -r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y} \cdots (2) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left[\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right] \\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left[\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial r}\left[\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right] \\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdots (*) \end{aligned}$$

Pero :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\,\frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\sin\theta \cdots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\,\frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin\theta \cdots (4) \end{aligned}$$

Reemplazando (3) y (4) en (*) obtenemos :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\
&= \cos\theta\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\sin\theta\right]+\sin\theta\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin\theta\right]\\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdots(5)
\end{aligned}
$$

Similarmente

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right]\\
\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left[-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right]\\
\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \left[-r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]+\left[\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\cdots(**)
\end{aligned}
$$

Pero :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial\theta}\\
\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= -r\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+r\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\cdots(6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial\theta}\\
\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= -r\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+r\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdots(7)
\end{aligned}
$$

Reemplazando (6) y (6) en (**) obtenemos :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \left[-r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]+\left[-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}+r\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\\
&= \left\{-r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}-r\sin\theta\left[-r\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+r\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right]\right\}\\
&\quad+\left\{-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}+r\cos\theta\left[-r\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+r\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]\right\}\\
&= \left\{-r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right\}\\
&\quad+\left\{-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}-r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= -r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}+r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\
\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= -\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}+\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdots(8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \left[\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]+\\
&\quad \left[-\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}+\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]\\
&= \left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}\\
&= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]-\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \left(-\frac{1}{r}\cos\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(-\frac{1}{r}\sin\theta\right)\frac{\partial u}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$A(r,\theta)=-\frac{1}{r}\cos\theta, B(r,\theta)=-\frac{1}{r}\sin\theta$$

Ejemplo 3.9 *Sean*

$$z=f(x,y)\ ,\quad x=e^v\sec u\quad ,\quad y=e^v\tan u$$

donde f es una función de clase C^2.
Hallar las funciones

$$g(u),\quad h(x,y)\quad y\quad k(x,y)$$

tales que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}=g(u)\left[h(x,y)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+k(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right]$$

Solución.

$$
z=f(x,y)\quad
\begin{array}{l}
\nearrow\ x\ \begin{array}{l}\nearrow u\\ \searrow v\end{array}\\
\searrow\ y\ \begin{array}{l}\nearrow u\\ \searrow v\end{array}
\end{array}
$$

$$
\Longleftrightarrow\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} &= e^v\sec u\tan u\\
\frac{\partial x}{\partial v} &= e^v\sec u\\
\frac{\partial y}{\partial u} &= e^v\sec^2 u\\
\frac{\partial y}{\partial v} &= e^v\tan u
\end{aligned}\right.
$$

Ahora :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\
\frac{\partial z}{\partial u} &= e^v\sec u\tan u\,\frac{\partial z}{\partial x}+e^v\sec^2 u\,\frac{\partial z}{\partial y}\cdots(1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v} \\
\frac{\partial z}{\partial v} &= e^v \sec u \frac{\partial z}{\partial x} + e^v \tan u \frac{\partial z}{\partial y} \cdots (2)
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial z}{\partial v}\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[e^v \sec u \frac{\partial z}{\partial x} + e^v \tan u \frac{\partial z}{\partial y}\right] \\
\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial}{\partial u}\left[e^v \sec u \frac{\partial z}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial u}\left[e^v \tan u \frac{\partial z}{\partial y}\right] \\
\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} &= \left[e^v \sec u \tan u\, \frac{\partial z}{\partial x} + e^v \sec u\, \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right] + \\
&\quad \left[e^v \sec^2 u\, \frac{\partial z}{\partial y} + e^v \tan u\, \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right] \cdots (*)
\end{aligned}
$$

Pero :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial u} \\
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= e^v \sec u \tan u\, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + e^v \sec^2 u\, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdots (3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial u} \\
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= e^v \sec u \tan u\, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + e^v \sec^2 u\, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdots (4)
\end{aligned}
$$

Reemplazando (3) y (4) en (*) obtenemos :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} &= \left\{e^v \sec u \tan u\, \frac{\partial z}{\partial x} + e^v \sec u\, \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\} + \left\{e^v \sec^2 u\, \frac{\partial z}{\partial y} + e^v \tan u\, \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right\} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} &= \left\{e^v \sec u \tan u\, \frac{\partial z}{\partial x} + e^v \sec u\, \left[e^v \sec u \tan u\, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + e^v \sec^2 u\, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]\right\} + \cdots \\
&\quad \cdots + \left\{e^v \sec^2 u\, \frac{\partial z}{\partial y} + e^v \tan u\, \left[e^v \sec u \tan u\, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + e^v \sec^2 u\, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]\right\} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} &= e^v \sec u \tan u\, \frac{\partial z}{\partial x} + e^{2v} \sec^2 u\, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + e^{2v} \sec^3 u\, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \cdots \\
&\quad \cdots + e^v \sec^2 u\, \frac{\partial z}{\partial y} + e^{2v} \sec u \tan^2 u\, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + e^v \sec^2 u \tan u\, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \underbrace{\left[e^v \sec u \tan u\, \frac{\partial z}{\partial x} + e^v \sec^2 u\, \frac{\partial z}{\partial y}\right]}_{\frac{\partial z}{\partial u}} + e^{2v} \sec^2 u \tan u\, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \cdots$$

$$\cdots + e^{2v} \sec u \left(\sec^2 u + \tan^2 u\,\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \cdots$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} &= \sec u \left[(e^v \sec u)\ \ (e^v \tan u)\right] \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \\
&\quad \sec u \left[(e^v \sec u)^2 + (e^v \tan u)^2\right] \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} &= \sec u\ \ [xy]\ \ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \sec u\ \ \left[x^2 + y^2\right]\ \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} &= \underbrace{\sec u}_{g(u)} \left[\underbrace{xy}_{h(x,y)} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \underbrace{(x^2 + y^2)}_{k(x,y)} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$g(u) = \sec u, \quad h(x,y) = xy \quad y \quad k(x,y) = x^2 + y^2.$$

Ejercicios Propuestos:Regla de la cadena

1. Sea $z = f\ (x,y)$, una función de clase C^2 en $\mathbf{R}^2$.Consideremos la rotación de ejes

   $$x = u \cos \alpha - v \sin \alpha \qquad y = u \sin \alpha + v \cos \alpha$$

   donde α es una constante. Hallar las constante A, B tales que

   $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = A \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + B \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

2. Sea $w = f\ (x,y)$, $u = x + y$, $v = x - y$ y una función f de clase C^2 en $\mathbf{R}^2$, demostrar que

   $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

3. Sea $z = f\ (x,y)$, $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ y f una función de clase C^2 en $\mathbf{R}^2$, tal que

   $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

   Si $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} = a \dfrac{\partial z}{\partial y} + P(x) \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$,donde a es una constante y $P(x)$ es un polinomio en x , hallar, justificando su respuesta, a y $P(x)$.

4. El cambio de variables

   $$\left\{ \begin{array}{lcl} x &=& u^2 - v^2 \\ y &=& uv^2 \end{array} \right.$$

transforma a $z = f(x,y)$ de clase C^2 en $z = g(u,v)$.

Si $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1) = 3$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,1) = 1$,calcular $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(1,1)$.

5. El cambio de variables $\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\sin\theta \end{array} \right.$ transforma a la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = A(r,\theta).$$

Hallar $A(r,\theta)$.

6. Sea $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ una función de clase C^2.Se define la función $g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ por la condición

$$g(x,y) = f\left(x^2, y^2\right).$$

Si $h(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$, hallar el gradiente de h en términos de las derivadas parciales de f.