Capítulo 0

EL SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES

Revisaremos brevemente en este capítulo los conceptos relativos a los números reales que se usan en el desarrollo de los diferentes temas que trataremos. Conceptos relativos a los conjuntos y funciones serán estudiados previamente.

0.1 CONJUNTOS

La idea de conjunto es el de una colección de objetos. Cada objeto se llama *elemento* del *conjunto.*

Para nombrar a un conjunto se utilizan letras mayúsculas, A, B, C, etc., y para los elementos se usan letras minúsculas, x, y, z, etc. Algunos conjuntos que se usan a menudo tienen una notación especial. Así:

$\mathbb{N}$, denota al conjunto de los números naturales,

$\mathbb{Z}$, denota al conjunto de los números enteros,

$\mathbb{Q}$, denota al conjunto de los números racionales,

$\mathbb{R}$, denota al conjunto de los números reales.

Entre los símbolos que representan a los elementos se da una relación de *igualdad*. Se dice que a y b son iguales y se escribe $a = b$ si ambos representan al mismo elemento. De otro modo se escribe $a \neq b$. La relación de igualdad satisface las siguientes propiedades:

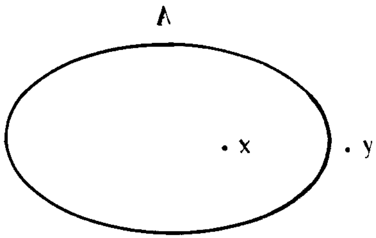
E_1 $a = a, \ \forall a$. Esta propiedad se llama *reflexiva*.

E_2 Si $a = b$, entonces $b = a, \ \forall a$ y b. (Propiedad *simétrica*)

E_3 Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c. \ \forall a, b$ y c.(Propiedad *transitiva).*

Para indicar que un objeto x es un elemento del conjunto A se escribe $x \in$ A y se lee: "*x pertenece al conjunto* A". Para indicar que "*x no pertenece* al conjunto A" se escribe $x \notin$ A.

Gráficamente se representa un conjunto de la siguiente manera:



$x \in A$
$y \notin A$

Fig. 0.1

Un conjunto se describe nombrando sus elementos o indicando una propiedad que cumplan éstos. Se acostumbra encerrar con llaves a los elementos del conjunto. Así la expresión:

$$A = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

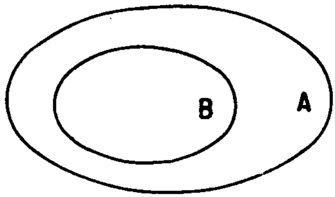
indica que el conjunto A está formado por los números naturales 0, 2, 4, 6, etc. El conjunto A también puede ser descrito así:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x \text{ es par}\} ,$$

expresión que se lee: "el conjunto A está formado por todos los números naturales x tal que x es par".

SUBCONJUNTOS

Dado un conjunto A diremos que el conjunto B es *subconjunto* de A o que B está *contenido* en A y se escribe $B \subset A$, si todo elemento de B es también elemento de A.



$B \subset A$

Fig. 0.2

IGUALDAD DE CONJUNTOS

Dados los conjuntos A y B se dice que el conjunto A es *igual* al conjunto B y se escribe A = B, si $A \subset B$ y $B \subset A$. Es decir, si A y B tienen los mismos elementos.

EL CONJUNTO VACIO

Se llama conjunto *vacío*, y se denota con Φ, al conjunto que no tiene elementos.

Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $A \subset A, \quad \forall A.$

2. $\Phi \subset A, \quad \forall A.$

3. Si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C, \quad \forall A, B$ y C.

OPERACIONES CON CONJUNTOS

Con los conjuntos se pueden realizar una serie de operaciones tales como la *intersección*, la *reunión*, la *diferencia*, el *producto cartesiano.*

INTERSECCION DE CONJUNTOS

Dados los conjuntos A y B se define la *intersección* de A y B, y se denota con $A \cap B$, como el conjunto formado por todos los elementos comunes a A y B.

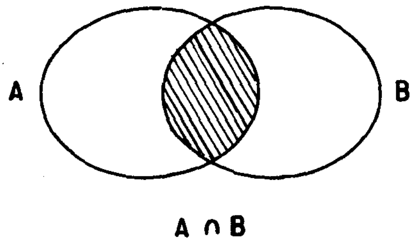


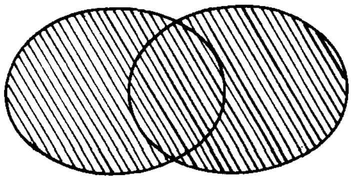
Fig. 0.3

Ejemplo 0.1. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ y $B = \{2, 3, 8, 10\}$, se tiene que:

$$A \cap B = \{2, 3\}$$

REUNION DE CONJUNTOS

Dados los conjuntos A y B se define la *reunión* o *unión* de A con B y se denota con $A \cup B$, como el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen al conjunto A, al conjunto B, o a ambos a la vez.

A  B

$A \cup B$

Fig. 0.4

Ejemplo 0.2. Dados los conjuntos $A = \{1, 2\}$ y $B = \{2, 4, 5\}$, se tiene que

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$$

DIFERENCIA DE CONJUNTOS

Dados los conjuntos A y B, se define la diferencia de A y B, como el conjunto formado por todos los elementos de A que no están en B. Se denota con $A - B$.

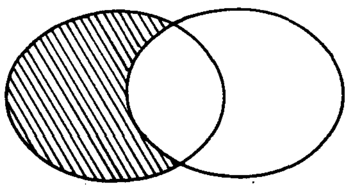
A  B

Fig. 0.5 $A - B$

Ejemplo 0.3. Dados $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3, 5\}$, se obtiene que

$$A - B = \{1\}$$

Si $B \subset A$, a la diferencia de A y B también se le llama *complemento* de B *respecto de* A y se denota con $C_A B$.

PRODUCTO CARTESIANO

Para definir esta operación será necesario desarrollar el concepto de *par ordenado.*

Dado un elemento a de A y un elemento b de B, al conjunto

$$\{\{a\}\ ,\ \{a,\ b\}\}$$

se le denomina *par ordenado* y se denota con (a, b). Esto es,

$$(a,\ b) = \{\{a\}\ ,\ \{a,\ b\}\}\ .$$

Al elemento a se le llama la *primera coordenada* o *primera componente* del par y a b, la *segunda coordenada* o *segunda componente* del par.

Establecida ya la igualdad de conjuntos, se puede demostrar que dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si i sólo si, $a = c$ y $b = d$. Esto es: si $(a, b) = (c, d)$ entonces $a = c$ y $b = d$ y recíprocamente, si $a = c$ y $b = d$ entonces $(a, b) = (c, d)$.

PRODUCTO CARTESIANO DE CONJUNTOS

Si A y B son dos conjuntos no vacíos, el *producto cartesiano* de A y B, (o simplemente *producto* de A y B), se define como el conjunto formado por todos los pares (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$. La notación que se usa para el producto de A y B es $A \times B$.

Si $A = \Phi$ o $B = \Phi$, se define $A \times B = \Phi$

Ejemplo 0.4. Dados A = {1, 2, 3} y B = {2, 3}, se tiene que

A x B = {(1, 2) , (1, 3) , (2, 2) , (2, 3), (3, 2), (3, 3)} .

Nótese que A x B $\neq$ B x A.

0.2. RELACIONES

Dados los conjuntos A y B, cualquier subconjunto del producto cartesiano A x B, se llama *relación* de A en B.

Ejemplo 0.5. Si A = {0, 1, 2, 3} y B = {5, 7, 9}, se tiene que los siguientes subconjuntos de A x B, son relaciones de A en B:

$$R_1 = \{(0, 5) , (0, 7) , (3, 9)\}$$

$$R_2 = \{(1, 5) , (2, 7) , (3, 7)\}$$

La idea de una relación de A en B es el de una *correspondencia* entre elementos de A y elementos de B. En R_1 por ejemplo, al elemento 0 le corresponde el elemento 5.

En general, si un par (x, y) está en la relación R, de A en B, se puede decir que *"y es el correspondiente de x"* según la relación R.

DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACION

Dada una relación R de un conjunto A en un conjunto B, denominaremos *dominio* de R, al conjunto de todos los elementos x de A para los que existe y de B y para los que se cumple: $(x, y) \in$ R.

Se denota con Dom (R) al dominio de R.

Simbólicamente,

$$\text{Dom (R)} = \{x \in A \ / \ \text{existe } y \in B, (x, y) \in R\}$$

Análogamente, se denomina *rango* de la relación R y se denota con Ran (R), al conjunto de todos los elementos y de B para los que existe un elemento x de A y tal que $(x, y) \in$ R.

Simbólicamente,

$$\text{Ran (R)} = \{y \in \text{B} \ / \text{ existe } x \in \text{A}, (x, y) \in \text{R}\}$$

Para la relación R_1 , del ejemplo anterior,

$$\text{Dom } (R_1) = \{0, 3\} \quad \text{y} \quad \text{Ran } (R_1) = \{5, 7, 9\}.$$

0.3 FUNCION

Hemos observado que una relación del conjunto A en el conjunto B, indica una correspondencia entre los elementos de A y los elementos de B. Tal correspondencia es muchas veces "ambigua" en el sentido de que un elemento de A puede tener más de un correspondiente en B. Muchas veces nos interesan las relaciones en donde no aparecen tales ambigüedades; esto es, las relaciones en donde no existen dos pares distintos con primeras componentes iguales. Estas relaciones se llaman funciones. La definición formal es la siguiente:

Dados los conjuntos A y B, se llama *función* de A en B, a toda relación de A en B cuyo dominio es A y tal que no existen dos pares diferentes en la relación con las primeras componentes iguales.

Equivalentemente, una función de A en B es toda correspondencia que asocia a cada elemento x de A un único elemento y de B.

Se acostumbra nombrar a las funciones con las letras f, g, h, etc.

NOTACION FUNCIONAL

Simbólicamente una función f de A en B, se representa con la siguiente notación:

$$f : \text{A} \longrightarrow \text{B} \quad \text{o con} \quad \text{A} \xrightarrow{f} \text{B}$$

Para indicar que f hace corresponder al elemento $x \in$ A, el elemento $y \in$ B, se usa una de las siguientes notaciones:

$$f\text{:} \ x \longrightarrow y$$

o $$f\text{:} \ x \longrightarrow f\,(x)$$

o $$y = f\,(x)$$

y se dice que "*y es la imagen* de x, según f" o que "x es una *preimagen* de y según f" o que "y es el *valor de la función* f en x".

Los conceptos de dominio y rango de una función aparecen en forma natural pues toda función es una relación.

Ejemplo 0.6. La relación del conjunto A = {1, 2, 3, 4} en el conjunto B = {3, 8, 9, 16} ,

$$\{(1, 3) , (2, 3) , (3, 8) , (4, 16)\} ,$$

es una función, mientras que la relación

$$\{(1, 3), (2, 3) , (2, 8) , (3, 8), (4, 16)\} ,$$

no es función, pues el elemento 2 no tiene una única imagen.

FUNCIONES BIYECTIVAS

Una función de A en B se llama *inyectiva,*

$$\text{si } f(x_1) = f(x_2) \text{ , implica } x_1 = x_2 ,$$

o equivalentemente:

$$\text{si } x_1 \neq x_2 \text{ , implica } f(x_1) \neq f(x_2)$$

Si el rango de la función f es todo el conjunto B, la función se llama *suryectiva.*

Si una función es inyectiva y suryectiva a la vez, ésta se llama función *biyectiva.*

Ejemplo 0.7. Dados los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3,\} \quad \text{y} \quad B = \{2, 5, 7\}$$

se tiene que la relación

$$R = \{(1, 2) , (2, 5) , (3, 7)\}$$

es una función biyectiva.

COMPOSICION DE FUNCIONES

Dadas las funciones

$$f: A \longrightarrow B \quad y \quad g: C \subset B \longrightarrow D$$

llamaremos composición de g con f, a la función que denotaremos con gof, que tiene como dominio al conjunto

$$\{x \in \text{Dom } (f) \ / \ f\ (x) \in \text{Dom } (g)\}$$

y cuya regla de correspondencia está dada por

$$[gof]\ (x) = g\ (f\ (x))$$

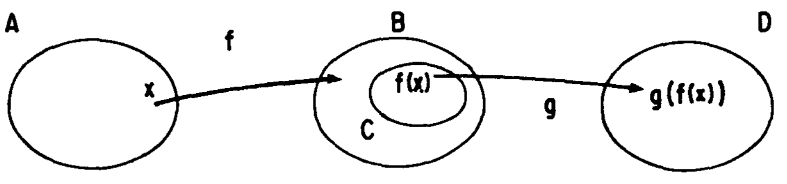


Fig. 0.6

Ejemplo 0.8. Si A = {4, 5, 6, 7} , B = {4, 6, 8, 9}, C = {6, 8, 9} , D = {10, 11, 12, 13} y se tienen las funciones f de A en B y g de C en D, definidas por

$$
\begin{array}{ll}
f\,(4) = 8 & g\,(6) = 10 \\
f\,(5) = 4 & g\,(8) = 11 \\
f\,(6) = 6 & g\,(9) = 13\ , \\
f\,(7) = 9 &
\end{array}
$$

se tendrá que el dominio de gof es $\{4, 6, 7\}$ y

$$
\begin{aligned}
[gof]\,(4) &= g\,(f\,(4)) = 11, \\
[gof]\,(6) &= g\,(f\,(6)) = 10, \\
[gof]\,(7) &= g\,(f\,(7)) = 13.
\end{aligned}
$$

El lector puede observar que la composición de funciones no es una operación conmutativa. Esto es $fog \neq gof$.

INVERSA DE UNA FUNCION

Dada una función biyectiva de A en B, es posible hallar una función g de B en A que prácticamente "deshace" lo que la función f hizo; es decir: si $y = f\,(x)$ entonces $g\,(f\,(x)) = x$. Esta función g se llama *función inversa* de f y se denota con f^{-1} .

Más exactamente, dada la función biyectiva f de A en B, la *función inversa* de f, que se denota con f^{-1} , es la función de B en A tal que:

$$[fof^{-1}]\,(y) = y \quad \text{y} \quad [f^{-1}of]\,(x) = x\ .$$

Ejemplo 0.9. Dada la función f de A = $\{1, 3, 5\}$ en B = $\{2, 6, 10\}$, definida por:

$$f\,(1) = 2,\ \ f\,(3) = 6 \ \text{ y } \ f\,(5) = 10 \quad ,$$

la función inversa f^{-1} , es una función de B en A y está definida por:

$$f^{-1}\,(2) = 1,\ \ f^{-1}\,(6) = 3,\ \ f^{-1}\,(10) = 5.$$

EJERCICIOS 0.1

1.— Indicar los elementos que forman cada uno de los siguientes conjuntos.

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \;/\; x$ es impar$\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{N} \;/\; x$ es primo y menor que $20\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \;/\; 3x = 5\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x^2 + 5x + 1 = 15\}$

2.— Indique una propiedad que describa a cada uno de los siguientes conjuntos.

a) $A = \{0, 3, 6, 9, \ldots\}$
b) $B = \{\ldots -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots\}$
c) $C = \{112, 121, 130, 103, 211, 220, 202, 310, 301, 400\}$

3.— Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$, hallar $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ y $A \times B$.

4.— Si $A = \{x \;/ x$ es triángulo$\}$, $B = \{x \;/ x$ es triángulo recto$\}$ y $C = \{x \;/ x$ es polígono$\}$, indique el valor de verdad de cada una de las siguientes expresiones:

a) $A \subset B$
b) $B \subset A$
c) $A \cap B \subset B$
d) $A \cap B \subset B$
e) $A \subset C$
f) $A \cap B \subset B$
g) $A \cap B \cap C \subset A \cap B$

5.— Ilustrar gráficamente las siguientes propiedades:

a) $A \cap B \subset A$
b) $A \subset A \cup B$
c) Si $A \subset B$ entonces $A \cap B = A$
d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

6.— Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{5, 7\}$, indique cuáles de las siguientes relaciones son funciones de A en B. En los casos en que sea función, indique el dominio y el rango.

a) $f = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)\}$
b) $g = \{(1, 5), (1, 7), (2, 5), (3, 7), (4, 5), (5, 7)\}$
c) $h = \{(1, 5), (2, 7)\}$.

7.— Dada la función f con dominio $\{1, 2, 3, 8\}$ y definida por

$$f = \{(1, 1) , (2, 4) , (3, 9) , (8, 64)\}$$

hallar $f(2)$, $f(3)$.

8.— Para la función con dominio $\{2, \sqrt{3}, 7, 9, -10\}$ y con regla de correspondencia $f(x) = x^2 - 3x + 1$, hallar:

a) El conjunto de pares que forman la función.
b) Indique el rango de la función.

9.— Hallar fog y gof (si es posible), indicando el dominio en cada caso,

a) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$
$g = \{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 4)\}$

b) $f = \{(1, -2) , (2, -5) , (3, 0), (4, -1)\}$
$g = \{(0, 1) , (1, 0) , (3, 3), (-1, 4) , (2, 1)\}$.

10.—Para cada una de las siguientes funciones biyectivas, hallar la función inversa correspondiente.

$f = \{(1, 3) , (2, 4) , (3, 5) , (4, 6) , (5, 7)\}$
$g = \{(1, 1) , (4, 2) , (9, 3)\}$.

11.—Dados los conjuntos A = $\{1, 2, 3, 4\}$ y B = $\{6, 7\}$,

a) Construir todas las funciones biyectivas de B en A.
b) Construir todas las funciones biyectivas de A en A.

12.—Si el número de elementos de A es m y el número de elementos de B es n con $m = n$, ¿cuántas funciones biyectivas se pueden definir de A en B?

13.—Si f y g son funciones inyectivas y es posible encontrar gof , pruebe que gof es inyectiva.

14.—Si f y g son funciones suryectivas y es posible encontrar gof, pruebe que gof es suryectiva.

0.4. LOS NUMEROS REALES

Uno de los conceptos más importantes en el desarrollo de la Ciencia y la Tecnología es el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$). Este conjunto, como se recordará, fue construido de manera progresiva en los cursos de la Matemática escolar.

Partiendo del conjunto de los números naturales,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$$

se construyó el conjunto de los números enteros

$$\mathbb{Z} = \{... -1, 0, 1, 2, ...\}$$

La creación de $\mathbb{Z}$ permitió, entre otras cosas, resolver ecuaciones tales como

$$x + 7 = 5$$

A partir del conjunto $\mathbb{Z}$ se construye el conjunto de los números racionales,

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \;/\; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

En $\mathbb{Q}$ es posible resolver ecuaciones tales como

$$3x + 7 = 5 \quad ;$$

sin embargo, $\mathbb{Q}$ no contiene a muchos elementos tal como $\sqrt{2}$, que aparecen como soluciones de ecuaciones importantes que se presentan en la Física, en la Geometría, etc. Esta dificultad obliga a considerar otro conjunto, el de los números irracionales $\mathbb{I}$, que sí contiene a $\sqrt{2}$ y a otros elementos, como: $\sqrt{3}$, e, π, etc. El conjunto de los racionales reunido con el conjunto de los números irracionales da lugar al conjunto de los números reales. Es decir,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Otras presentaciones de los números reales se pueden realizar. Una de ellas considera a los números racionales como expresiones decimales periódicas (4. 7, -0. 3 ... , 5.171717 ..., etc), y a los números irracionales como expresiones decimales infinitas (0. 121221222 ... , 3.1416 ..., etc); otra considera al sistema de los números reales a partir de una lista de axiomas. Esta última presentación es la que formalizamos a continuación.

0.5 SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES

Llamaremos *sistema de los números reales* y lo denotaremos con $\mathbb{R}$ a un conjunto provisto de dos operaciones: *adición* y *multiplicación.*

Se considera que la *adición* es una operación que a cada par de números reales (a, b) le asigna un número real llamada *suma* de a y b y que se denota con $a + b$. Se entiende por *multiplicación,* a la operación que a cada par (a, b) de números reales le asigna un número real llamado *producto* de a y b y que se denota con $a.b$ o simplemente con ab.

La adición y multiplicación de números reales satisfacen los siguientes axiomas:

A_1 Asociatividad de la adición.

$$\forall a, b, c, \qquad (a + b) + c = a + (b + c).$$

A_2 Conmutatividad de la adición.

$$\forall\ a, b, \qquad a + b = b + a.$$

A_3 Existencia y unicidad de la identidad aditiva

Existe en $\mathbb{R}$ un único número real llamado *cero,* denotado con 0 y que cumple con:

$$a + 0 = a\ , \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

A_4 Existencia y unicidad del opuesto

Para cada número real a existe un único número real denotado con $-a$, llamado *opuesto* de a tal que

$$a + (-a) = 0\ ,$$

M_1 Asociatividad de la multiplicación.

$$\forall a, b, c, \quad (ab)\, c = a\, (bc).$$

M_2 Conmutatividad de la multiplicación.

$$\forall a, b, \quad ab = ba.$$

M_3 Existencia y unicidad de la identidad multiplicativa

Existe en $\mathbb{R}$ un único número real llamado *uno,* denotado con 1 y que cumple la igualdad

$$a.1 = a\ , \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

M_4 Existencia y unicidad del inverso.

Para cada número real a diferente de 0, existe un único número real, denotado con $\dfrac{1}{a}$ o con a^{-1} que cumple con

$$a\,(\frac{1}{a}) = 1\ .$$

El siguiente axioma relaciona las operaciones de adición y multiplicación.

D Distributividad de la multiplicación respecto de la adición

$$\forall\, a,\, b,\, c, \in \mathbb{R}\ , \quad a\,(b + c) = ab + ac$$

Aparte de las propiedades enunciadas, existe otro axioma que se conoce con el nombre de *axioma del supremo* y que justamente permite probar que los números racionales están contenidos en los números reales. Este axioma será enunciado posteriormente.

A partir de los axiomas indicados se puede demostrar una serie de propiedades para $\mathbb{R}$, algunas de las cuales veremos a continuación.

Teorema 0.1. (Propiedad de igualdad – adición)

$$a = b \text{ si y sólo si } a + c = b + c$$

Para probar que $a = b$ implica $a + c = a + c$, usemos la propiedad reflexiva de la relación de igualdad:

$$a + c = a + c$$

Sustituyendo a por b en el segundo miembro de la última igualdad se tendrá:

$$a + c = b + c$$

Ahora demostremos que si $a + c = b + c$, entonces $a = b$.

Si $a + c = b + c$, se tiene, por la primera parte, que,

$$a + c + (-c) = b + c + (-c) \ .$$

Aplicando A_1 y luego A_4 , se cumple: $a = b$.

De manera análoga se puede probar el siguiente teorema:

Teorema 0.2. (Propiedad de igualdad - multiplicación).

Para $c \neq 0$, se cumple que:

$$a = b \text{ si y sólo si } ac = bc$$

Usando los axiomas y las propiedades ya indicadas, se pueden demostrar las siguientes propiedades:

Teorema 0.3. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, se cumple:

1. $a0 = 0$
2. $-a = (-1)a$
3. $-(-a) = a$
4. $(-a)\ (-b) = ab$
5. $a(-b) = (-a)\ b = -(ab)$
6. $(-a)\ (-b) = ab$
7. $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$.
8. $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ ó $b = 0$.

Prueba de 1.

$$a0 + 0 = a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$$

Aplicando el teorema 0.1, se tiene la propiedad.

Prueba de 2.

$$a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0$$

ó

$$a + (-1)a = 0$$

Por la unicidad del opuesto se tiene que la última igualdad implica:

$$(-1)\ a = -a$$

Prueba de 8.

Probaremos que $ab = 0$ implica $a = 0$ ó $b = 0$; el recíproco será probado por el lector.

Por el absurdo, supongamos que $ab = 0$ no implica $a = 0$ ó $b = 0$, sino: $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

Podemos escribir:

$$ab = 0 = a0\ .$$

Como $a \neq 0$ se tiene, por el teorema 0.2, que $b = 0$, en contradicción con el hecho de que $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

El siguiente teorema muestra la manera de encontrar la solución de la ecuación de la forma $ax + b = 0$, entendiéndose por *solución* de la ecuación, al valor de x que al ser reemplazado en $ax + b = 0$ la hace a ésta verdadera.

Teorema 0.4. Si a, b y x son números reales y $a \neq 0$ entonces

$$ax + b = 0 \text{ si y sólo si } x = -a^{-1}\ b\ .$$

Probemos primero que si $ax + b = 0$ entonces $x = -a^{-1}\ b$.

La segunda parte, esto es: si $x = -a^{-1}\ b$ entonces $ax + b = 0$, la probará el lector.

Si $ax + b = 0$, se tiene: $ax + b + (-b) = 0 + (-b)$, de donde:

$$ax = -b$$

Multiplicando en la igualdad por a^{-1} :

$$a^{-1}\, ax = a^{-1}\, (-b)$$

ó

$$x = a^{-1}\, (-b) = -a^{-1}b$$

SUSTRACCION Y DIVISION DE NUMEROS REALES

A partir de las operaciones de adición y multiplicación se pueden definir las operaciones de *sustracción y división* de números reales.

Se denomina *sustracción* de números reales a la operación que a cada par de números reales a y b le hace corresponder el número $a + (-b)$ el cual se denota con $a - b$.

El número $a - b$ se llama *diferencia de a* y *b.*

Se denomina *división* de números reales a la operación que a cada par de números reales a y b, $b \neq 0$ le hace corresponder el número real ab^{-1} el que se denomina *cociente* de a y b.

POTENCIA DE UN NUMERO REAL

Para todo número real a, $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$ se define

$$a^{\circ} = 1,$$

$$a^{n} = \underbrace{a \ldots a}_{\text{n veces}}, \qquad \text{si } n \geq 1, \quad \text{y}$$

$$a^{-n} = 1/(a^{n}) \qquad \text{si } n \geq 1.$$

La expresión a^n se lee *"potencia enésima de a"*. Al número a se le llama *base* y a n, *exponente.*

Las siguientes son algunas de las propiedades que se cumplen para la potencia enésima de a.

Teorema 0.5. Para el número real $a \neq 0$, m y n números enteros se cumple:

a) $(a^m)\ (a^n) = a^{m+n}$.

b) $(a^m)^n = a^{mn}$.

c) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^m a^{-n}$.

O.6 RELACION DE ORDEN EN LOS NUMEROS REALES

Estudiaremos ahora una relación entre los números reales que permitirá el establecimiento de un orden entre éstos.

Admitiremos que existe un subconjunto de $\mathbb{R}$, que denotaremos con $\mathbb{R}^+$, y que cumple con las siguientes propiedades:

0_1 Para cada número real a, se cumple una y sólo una de las siguientes posibilidades:

$$a \in \mathbb{R}^+ , \qquad -a \in \mathbb{R}^+ , \qquad a = 0 .$$

0_2 Si a y b son elementos del conjunto $\mathbb{R}^+$, entonces:

$$a + b \quad \text{y} \quad ab \text{ son elementos de } \mathbb{R}^+ .$$

Dado un elemento $a \in \mathbb{R}$, si a es un elemento de $\mathbb{R}^+$, diremos que a es un *número real positivo* y se dice que es un *número real negativo* si $-a$ es un elemento de $\mathbb{R}^+$. De este modo, según 0_2, el producto de dos números positivos es positivo y también la suma de dos números positivos es un número positivo.

Así mismo se observa de inmediato que el producto de dos números reales negativos es un número positivo, mientras que el producto de un número positivo por otro negativo es un número negativo.

Como resultado de lo anterior se tiene que a^2 es un número positivo. De este modo se tiene que $1 = 1^2 \in \mathbb{R}^+$ y también $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, ..., etc.

Usando los axiomas y las propiedades descritas, se demuestra que los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, y $\mathbb{Q}$ están contenidos en $\mathbb{R}$. El lector puede realizar esta prueba.

DEFINICION DE LA RELACION MENOR

Si a y b son dos números reales se dice que a es *menor que* b y se escribe $a < b$, si $b - a$ es un número real positivo.

Si a es menor que b se dice, de manera equivalente, que b *es mayor que* a, y se escribe $b > a$.

Se observa de inmediato que si a es un número mayor que 0, a es un número positivo y recíprocamente, si a es un número positivo, entonces a es mayor que 0. De igual manera, si a es un número menor que 0, a es un número negativo y recíprocamente.

Se cumplen las siguientes propiedades para la relación menor.

Teorema 0.6.

1. Si $a < b$ entonces $a + c < b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$.
2. Si $a < b$ entonces $ac < bc \quad \forall c > 0$ y
   si $a < b$ entonces $ac > bc \quad \forall c < 0$.
3. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
4. Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d \quad \forall a, b, c, d, \in \mathbb{R}$

A manera de ejemplo, demostraremos la propiedad 1.

Si $a < b$, entonces $b - a > 0$.

Como $b - a = b + (-a) = (b + c) + [(-a) + (-c)] =$

$$= [b + c] - [a + c] \ ,$$

se tendrá: $b + c > a + c$.

LA RECTA NUMERICA

Una representación geométrica muy útil en nuestro desarrollo, es la que se refiere a la representación de los números reales en una recta. Esta representación se basa en el axioma que establece lo siguiente:

"A cada punto de la recta corresponde un único número real, y recíprocamente.

A cada número real le corresponde un único punto de la recta".

Se obtiene de este modo una biyección entre los números reales y los puntos de la recta lo que permite una identificación de cada punto A de la recta con un número real x. Al número real x que identifica al punto A se le llama coordenada de A. La biyección también permite una representación de la relación "menor". Si un punto P de la recta lo identificamos con el número 0 podemos indicar que los números positivos están a la "derecha" de P, mientras que los que están a la "izquierda" de P, corresponderán a los números negativos. También si un punto B está a la derecha de A, podemos decir que el número, x que le corresponde al punto B, es mayor que el número y, que representa al punto A.

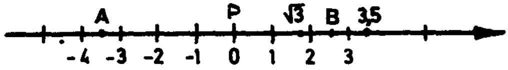


Fig. 0.7

DEFINICION DE LA RELACION MENOR O IGUAL

Diremos que a *es menor o igual que* b y se escribe $a \leq b$, si a es menor que b o a es igual que b.

Si $a \leq b$, se dice, de manera equivalente, que b *es mayor o igual que* b, y se escribe $b \geq a$.

El lector puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 0.7 $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, se cumple:

1. Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

2. Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

3. Si $a \neq b$ entonces $a < b$ o $b < a$.

4. Si $a \leq b$ entonces $ac \leq bc \quad \forall c \geq 0$ y
   Si $a \leq b$ entonces $ac \geq bc \quad \forall c \leq 0$.

Teorema 0.8. Si a y b son números reales positivos,

$$a < b \text{ si y sólo si } b^2 > a^2 .$$

Veamos primero que $0 < a < b$ implica $a^2 < b^2$.

$0 < a < b$ implica $b > a$ y $b > 0$, luego: $b^2 > ab$. (1)

También a partir de $0 < a < b$, se tiene: $ab > a^2$. (2)

Usando las relaciones (1), (2) y la propiedad 3 del Teorema 0.6, se tiene:

$$b^2 > a^2 .$$

El lector puede demostrar la segunda parte.

0.7 RADICALES

Aceptaremos que toda ecuación $x^n = a$ con $a \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, tiene una única solución real no negativa. A esta única solución no negativa de la ecuación se le llama la *raíz n-ésima de a* y se denota con $\sqrt[n]{a}$ o $a^{1/n}$. A n se le llama el *índice* de la raíz n-ésima, mientras que al número a, se le llama *expresión subradical.* A expresiones de la forma $\sqrt[n]{a}$ se les llama *expresiones radicales.*

Teorema 0.9. Para las expresiones radicales se cumplen las siguientes propiedades:

$\forall a \geq 0$, $\forall b \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$ y $\forall p \in \mathbb{N}^+$,

1. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$

2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$

3. $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$

4. $\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} \qquad \forall b > 0$

Teorema 0.10. Si $b \geq 0$, entonces

$$a^2 > b \text{ si y sólo si } a > \sqrt{b} \quad \text{o} \quad a < -\sqrt{b}\ .$$

Probaremos que $a^2 > b$ implica $a > \sqrt{b}$ ó $a < -\sqrt{b}$. El lector probará el recíproco.

Si $a \geq 0$, se tiene: $a^2 > b = (\sqrt{b}\,)^2$. Por el teorema 0.8, $a > \sqrt{b}$.

Si $a < 0$ entonces $-a > 0$ y nuevamente $(-a)^2 = a^2 > b = (\sqrt{b})^2$.

Aplicando el teorema 0.8, se tiene $a < -\sqrt{b}$.

Teorema 0.11.

Si $b > 0$, entonces,

$$a^2 < b \quad \text{si y sólo si} -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}\ .$$

0.8 INTERVALOS

Ciertos conjuntos de números reales que se describen mediante la relación menor o menor o igual son importantes para simplificar las notaciones así como para lograr una rápida identificación de otros en la recta numérica. Estos conjuntos son los intervalos y se definen a continuación.

El *intervalo abierto* con extremos a y b, que se denota con $]a, b[$ está definido por

$$]a, b[\ = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$$

En la recta numérica $]a, b[$ se representa como en la siguiente figura.

Fig. 0.8

El *intervalo cerrado* con extremos a y b , que se denota con $[a, b]$ está definido por

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\} \ .$$

En la recta numérica $[a, b]$ se representa como en la siguiente figura.

Fig. 0.9

Los círculos marcados indican que los extremos a y b están comprendidos en el intervalo.

El *intervalo semiabierto por la izquierda* con extremos a y b, que se denota con $]a, b]$ está definido por

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b\} \ .$$

El *intervalo semiabierto por la derecha* con extremos a y b, que se denota con $[a, b[$ está definido por

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b\} \ .$$

Fig. 0.10

El símbolo $]a, +\infty[$ representa al conjunto

$$]a, +\infty[\; = \{x \in \mathbb{R} \; / \; a < x\} \; .$$

De igual modo

$$]-\infty, a[\text{ representa a } \{x \in \mathbb{R} \; / \; x < a\} \; ,$$

$$[a, +\infty[\text{ representa a } \{x \in \mathbb{R} \; / \; a \leq x\} \; ,$$

$$]-\infty, a] \text{ representa a } \{x \in \mathbb{R} \; / \; x \leq a\} \; .$$

En la siguiente figura se ilustran los dos últimos intervalos.

$[a, +\infty[$ $\qquad\qquad$ $]-\infty, a]$

Fig. 0.11

Se acostumbra usar el símbolo $]-\infty, +\infty[$ para representar a todos los números reales.

Ejemplo 0.10. Hallar los números reales que satisfacen la inecuación.

$$2x + 3 < 5 \; .$$

La inecuación dada es equivalente a $2x + 3 - 3 < 5 - 3$, de donde se tiene: $2x < 2$.

Multiplicando la última desigualdad por $1/2$:

$$x < 1 \; .$$

También se comprueba que si $x < 1$, entonces $2x + 3 < 5$.

Luego, el conjunto solución, esto es, el conjunto de los x que satisfacen la inecuación es: $]-\infty, 1[$.

Ejemplo 0.11. Hallar los valores de x que satisfacen

$$2 \leq 2 - 5x < 4 \ .$$

La relación es equivalente a:

$$2 \leq 2 - 5x \quad \text{y} \quad 2 - 5x < 4$$

o a:

$$2 - 2 \leq 2 - 5x - 2 \quad \text{y} \quad 2 - 5x - 2 < 4 - 2 \ ,$$

o también a: $0 \leq -5x < 2$.

Multiplicando por $-1/5$ y aplicando la propiedad 4 del Teorema 0.7, se tiene:

$$-2/5 < x \leq 0 \ .$$

El conjunto solución es el intervalo $]-2/5, 0]$, que se representa en la siguiente figura:

Fig. 0.12

Ejemplo 0.12. Hallar los valores de x que satisfacen:

$$4x^2 + 12x + 9 > 16 \; .$$

$4x^2 + 12x + 9 > 16$ se puede escribir de manera equivalente como: $(2x + 3)^2 > 16$, lo que por el teorema 0.10 equivale a:

$$2x + 3 > 4 \quad \text{ó} \quad 2x + 3 < -4.$$

Luego x satisface: $x > 1/2$ ó $x < -7/2$.

El conjunto solución es:

$$]-\infty, -7/2[\; \cup \;]1/2, +\infty[\; .$$

Ejemplo 0.13. Hallar los números reales x que satisfacen

$$\frac{1 - x}{x} \leq 3 \; .$$

Observamos que x debe ser diferente de 0.

Caso A. Si $x > 0$, la relación puede escribirse como

$$1 - x \leq 3x \; ,$$

o como: $\quad 1 \leq 4\,x \; ;$

esto es: $\quad 1/4 \leq x \; .$

En este caso x debe satisfacer $x > 0$ y $x \geq 1/4$, es decir $x \geq 1/4$.

Caso B. Si $x < 0$, se tiene:

$$1 - x \geq 3x$$

ó $\quad 1/4 \geq x \; .$

En este caso x debe satisfacer $x < 0$ y $x \leq 1/4$; es decir: $x < 0$.

Resumiendo los casos A y B se tendrá que los números x que satisfacen la relación son aquellos que son mayores o iguales que $1/4$ (caso A), o que son menores que 0 (caso B). El conjunto solución es:

$$]-\infty, 0[\, \cup \, [1/4, +\infty[$$

y se representa como en la siguiente figura:

Fig. 0.13

0.9 VALOR ABSOLUTO

El *valor absoluto* de un número real x, se denota con $|x|$ y se define como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 0.14

$$|3| = 3$$
$$|0| = 0$$
$$|-3| = -(-3) = 3$$

Las propiedades más importantes del valor absoluto aparecen en el siguiente teorema.

Teorema 0.12

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| \leq a$, $a \geq 0$ si y sólo si $-a \leq x \leq a$.
3. $|x| \geq a$ si y sólo si $x \geq a$ ó $x \leq -a$.
4. $|x| = \sqrt{x^2}$.
5. $-|x| \leq x \leq |x|$.
6. $|x + y| \leq |x| + |y|$.
7. $|ab| = |a|\ |b|$.

Como ilustración probaremos las propiedades 3, 6 y 7 .

Prueba de 3.

Parte A. Probaremos que $|x| \geq a$ implica $x \geq a$ ó $x \leq -a$.

Caso 1: $x \geq 0$.

Si $x \geq 0$ entonces $|x| = x$, luego, $x = |x| \geq a$ implica: $x \geq a$.

Caso 2: $x < 0$.

Si $x < 0$ entonces $|x| = -x$, luego $-x = |x| \geq a$ implica: $x \leq -a$.

Parte B. Veamos ahora que

$x \geq a$ ó $x \leq -a$ implica $|x| \geq a$.

Caso 1: $x \geq a$.

Si $x \geq a$ y $x \geq 0$, se tiene de inmediato que $|x| = x \geq a$, es decir: $|x| \geq a$.

Si $x \geq a$ y $x < 0$, se tiene $|x| = -x$ y $-x \leq -a$, de donde $|x| \leq -a$, es decir $a \leq -|x|$.

Como $-|x| \leq |x|$ (propiedad 5), se tiene: $a \leq |x|$.

Caso 2: $x \leq -a$.

Se deja como ejercicio.

Prueba de 6.

Usando la propiedad 5 se tiene;

$$-|a| \leq a \leq |a|$$
$$-|b| \leq b \leq |b|$$

Luego:

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

Usando ahora la propiedad 2 se tiene la propiedad 6.

Prueba de 7 .

Usando la propiedad 4 se tiene:

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a|\,|b| \quad .$$

Los siguientes ejemplos nos indican algunas aplicaciones de las propiedades del valor absoluto.

Ejemplo 0.15. Hallar los valores de x que satisfacen

$$|3x + 4| = 2 \ .$$

Por la definición de valor absoluto se tiene que:

Si $3x + 4 \geq 0$, $|3x + 4| = 2$ implica $3x + 4 = 2$, de donde $x = -2/3$.

Si $3x + 4 < 0$, $|3x + 4| = 2$ implica $-(3x + 4) = 2$, de donde $x = -2$.

El conjunto solución es: $\{-2/3, -2\}$.

Ejemplo 0.16. Hallar los valores de x que satisfacen $|3x| \leq x - 1$.

Por la propiedad 2, la relación se puede escribir de manera equivalente como:

$$-(x - 1) \leq 3x \leq x - 1 \quad \text{con } x - 1 \geq 0 . \tag{1}$$

Bastará entonces resolver (1).

$-(x - 1) \leq 3x \leq x - 1$ con $x - 1 \geq 0$ se puede escribir en forma equivalente como:

$$1 - x \leq 3x, \quad 3x \leq x - 1 \quad \text{y} \quad x \geq 1$$

ó como:

$$1/4 \leq x , \quad x \leq -1/2 \quad \text{y} \quad x \geq 1 .$$

Luego, si existe un valor de x que resuelva la inecuación dada, éste debe satisfacer las tres últimas desigualdades a la vez; lo que es imposible. El conjunto solución es el vacío, Φ.

0.10 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS DE UNA RECTA

Dados los puntos P y Q de la recta con coordenadas x_1 y x_2 , respectivamente, la *distancia* entre P y Q, que se denota con d (P, Q), se define como

$$d(P, Q) = |x_2 - x_1| .$$

Gráficamente:

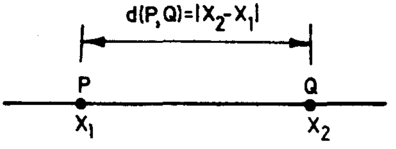


Fig. 0.14

Ejemplo 0.17. Si P y Q tienen coordenadas 5 y -3, respectivamente, entonces:

$$d(P, Q) = |-3 - 5| = 8 \ .$$

0.11. ECUACIONES E INECUACIONES CUADRATICAS

Se llama *ecuación cuadrática* a toda ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a \neq 0 \ .$$

Los valores de x que satisfacen la ecuación se llaman *raíces* o *soluciones* de la ecuación.

Inecuaciones de la forma:

$$ax^2 + bx + c \leq 0, \qquad ax^2 + bx + c \geq 0 \ ,$$

$$ax^2 + bx + c < 0, \qquad ax^2 + bx + c > 0 \ ,$$

$$\text{con } a \neq 0$$

se llaman *inecuaciones cuadráticas.*

Con el fin de estudiar las soluciones de la ecuación cuadrática, escribámosla de la siguiente manera:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{b^2}{4a^2}\right) = \frac{b^2}{4a} - c$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Como $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ y $4a^2 > 0$, la ecuación tendrá solución real si $b^2 - 4ac \geq 0$ y no tendrá solución real, si $b^2 - 4ac < 0$.

Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación se transforma en

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

y en este caso la ecuación cuadrática tiene la única solución

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación cuadrática se puede escribir como:

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

o como:

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

obteniéndose las raíces:

$$x_1 = \frac{-b^2 + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b^2 - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A la expresión $b^2 - 4ac$ se le llama *discriminante* de la ecuación o de la expresión $ax^2 + bx + c$, y se le denota con Δ .

Podemos resumir los resultados anteriores de la siguiente manera:

"La ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$,

tiene una única raíz si $\Delta = 0$;

tiene dos raíces reales diferentes si $\Delta > 0$; y

no tiene solución real si $\Delta < 0$".

Ejemplo 0.18. Resolver

a. $2x^2 + 3x - 1 = 0$

b. $3x^2 + 6x + 7 = 0$

El discriminante de la ecuación $2x^2 + 3x - 1 = 0$ es $\Delta = 17 > 0$, luego tiene dos raíces reales diferentes; ellas son:

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}.$$

El discriminante de la ecuación

$$3x^2 + 6x + 7 = 0,$$

es $\Delta = -48 < 0$; luego la ecuación no tiene soluciones reales.

PROPIEDADES DE LAS RAICES DE LA ECUACION CUADRATICA

Nótese que las raíces x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática cumplen con las siguientes propiedades:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{y} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ejemplo 0.19. Hallar los números α y β cuya suma es 7 y su producto es 12.

Se puede considerar que α y β son raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + bx + c = 0$ en donde

$$7 = \alpha + \beta = -b \quad \text{y} \quad 12 = \alpha\,\beta = c\ .$$

Reemplazando los valores de b y c en la ecuación, se tiene:

$$x^2 - 7x + 12 = 0\ .$$

Resolviendo la ecuación: $\alpha = 3$ y $\beta = 4$.

Aplicando el método explicado para resolver ecuaciones cuadráticas y las propiedades expresadas en los teoremas sobre radicales se resuelven la inecuaciones cuadráticas. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

Ejemplo 0.20. Resolver $x^2 - 4x - 5 > 0$.

La inecuación puede escribirse de manera equivalente como:

$$(x - 2)^2 > 9 \quad ,$$

Aplicando el teorema 0.10 se obtiene:

$$(x - 2) > 3 \quad ó \quad (x - 2) < -3 \; ;$$

esto es:

$$x > 5 \quad ó \quad x < -1 \; .$$

El conjunto solución es: $]-\infty, -1[\; \cup \;]5, +\infty[$.

0.12. EL AXIOMA DEL SUPREMO

Desarrollaremos previamente algunos conceptos necesarios para enunciar el axioma.

DEFINICION DE CONJUNTO ACOTADO SUPERIORMENTE.

Un conjunto $A \subset R$, $A \neq \Phi$ se llama *conjunto acotado superiormente* si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$a \leq k \quad \forall a \in A$$

El número real k se llama *cota superior* de A.

Un conjunto acotado puede tener infinitas cotas superiores.

Análogamente se definen *conjunto acotado inferiormente* y *cota inferior*.

Ejemplo 0.21. Los intervalos [3, 6] y [3, 6[son conjuntos acotados superiormente. Una cota superior para ambos intervalos, es 6; también son cotas superiores de éstos todos los números reales mayores o iguales que 6.

El conjunto [3, $+\infty$[no es un conjunto acotado superiormente.

DEFINICION DE SUPREMO DE UN CONJUNTO

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \Phi$, se dice que $s \in \mathbb{R}$ es el *supremo de* A si cumple con las siguientes propiedades:

1. s es una cota superior de A.

2. Si k es cota superior de A entonces $s \leq k$.

Se tiene entonces que el supremo s de un conjunto A, es la *menor de las cotas superiores de* A.

La propiedad 2 se expresa, en forma equivalente, de la siguiente manera:

Dado $\varepsilon > 0$, existe $a_0 \in$ A, tal que

$$s - \varepsilon < a_0 \ .$$

Ejemplo 0.22. Se tiene que

a) el supremo de [3, 6[, es 6

b) el supremo de $[3, 6]$, es 6

c) el supremo de $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x = n/(n+1), \ n \in \mathbb{N}\}$, es 1.

EL AXIOMA DEL SUPREMO (Axioma de completitud)

"Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \Phi$, se cumple que si A es acotado superiormente entonces A tiene supremo s".

El axioma del supremo permite "completar" la recta. El conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ x^2 < 2\}$$

es un conjunto no vacío ($0 \in A$) y acotado superiormente (3 es una cota superior de A). Se puede demostrar además que el supremo de A, que existe en $\mathbb{R}$ (por el axioma del supremo), es igual a $\sqrt{2}$, número que no es racional. Se tiene de este modo, que A no tiene supremo en $\mathbb{Q}$, pero sí en $\mathbb{R}$. Si sólo consideraramos a $\mathbb{Q}$, el punto que le correspondería a $\sqrt{2}$ sería una "discontinuidad" de la recta.

Ejercicios 0.2

1. Probar que en $\mathbb{R}$ se cumplen cada una de las siguientes propiedades:

   a. Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ entonces $ab \neq 0$

   b. $a = 0$ ó $b = 0$ si y sólo si $ab = 0$

   c. $-(-a) = a$

   d. $(-a)(-b) = ab$

   e. $a(-b) = (-a)(b) = -(ab)$

f. $0 - x = -x$

g. $-(x - y) = -x + y$

h. $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

i. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

j. $\dfrac{ad}{bd} = \dfrac{a}{b}$ para $b \neq 0$ y $d \neq 0$

k. $a^m a^n = a^{m+n}$

l. $(a^m)^n = a^{mn}$

m. $a = b$ si y sólo si $ac = bc$ para $c \neq 0$.

n. Si $a^2 = b^2$, entonces $a = b$ ó $a = -b$

2. Resolver

a. $3x + 2 = 7$

b. $3 + 5x = 7x$

3. Demostrar que:

a. Si $a < b$ entonces $ac < bc$ $\forall c > 0$
Si $a < b$ entonces $ac > bc$ $\forall c < 0$

b. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$

c. Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$

d. Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$

e. Si $a \leq b$ entonces $ac \leq bc$ $\forall c \geq 0$

Si $a \leq b$ entonces $ac \geq bc \quad \forall c \leq 0$

f. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces,

$b^2 > a^2$, implica $b > a$.

4. Si a y b tienen el mismo signo, $ab > 0$
Si a y b tienen signos diferentes, $ab < 0$

(Se dice que x e y *tienen el mismo signo* si x e y son ambos positivos o ambos negativos).

5. Probar que: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{a}$

6. Probar que si $b > 0$, $a^2 < b$ si y sólo si $-\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$

7. Probar que:

a. $|x| \leq a$, $a \geq 0$ si y sólo si $-a \leq x \leq a$

b. $|x| = \sqrt{x^2}$

c. $-|x| \leq x \leq |x|$

8. Resolver

a. $4x - 5 < 7$

b. $-2 \leq 3x - 1 \leq 7x + 3$

c. $x/(x - 1) \leq 3$

d. $x^2 + 3x - 18 \geq 0$

e. $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} \leq 0$

f. $x^2 - 2x + 1 < 0$

g. $(x + 2)^2 > 9$

h. $\dfrac{2x + 5}{x + 1} \leq 8 + x$

i. $|x| = 7$

j. $|2x + 7| = 4x + 2$

k. $|2x + 1| \geq 2 + x$

l. $|x^2 - 1| < 2$

ll. $|x^2 - 1| > 2$

m. $|x + 1| < |4x + 3|$

n. $|5x + 8| = |3x + 2|$

o. $|x + 2x| > |x|$

p. $|x - 1| + |x + 4| = 3$

9. Hallar un valor $\delta > 0$ tal que para todos los valores de x con la condición $0 < |x - 1| < \delta$, se tenga:

$$|2x - 2| < 0.001 .$$

10. ¿Es posible encontrar un valor $\delta > 0$ tal que para todos los valores de x con la condición $0 < |x - 1| < \delta$ se tenga:

$$|2x - 8| < 0.001?$$

11. Para cada $\varepsilon > 0$, ¿es posible hallar un valor de $\delta > 0$ tal que para todos los valores de x con la condición $|x - 2| < \delta$ se tenga $|3x - 6| < \varepsilon$?

Dé un valor de $\delta > 0$ si:

a. $\varepsilon = 0.0001$

b. $\varepsilon = 10^{-7}$

c. $\varepsilon = 10^{-10}$

12. Resolver:

a. $3x^2 - 7x + 2 = 0.$

b. $2x^2 - 4x + 4 = 0$

13. Demostrar que la expresión $ax^2 + bx + c$ y a

a. tienen el mismo signo $\forall x \in \mathbb{R}$ si el discriminante de la expresión es menor que 0.

b. tienen el mismo signo $\forall x \in \mathbb{R}$ y $x \neq (-b/2a)$ si el discriminante de la expresión es 0.

Sugerencia: Use la igualdad:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

14. Demostrar que si el discriminante de la expresión $ax^2 + bx + c$, es positivo, y si α y β son raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, con $\alpha < \beta$, entonces:

a. $ax^2 + bx + c$ y a tienen el mismo signo si x está en el intervalo $]-\infty\ ,\ \alpha[\ \cup\ ]\beta\ ,\ +\infty[$ y

b. $ax^2 + bx + c$ y a tienen signos diferentes si x está en el intervalo $]\alpha\ ,\ \beta[$.

Sugerencia: Use la igualdad:

$$ax^2 + bx + c = a\ (x - \alpha)\ (x - \beta).$$

15. Usando los resultados de los ejercicios 13 y 14, resolver las si-

guientes inecuaciones:

a. $3x^2 + 2x + 2 < 0$

b. $2x^2 + x + 5 > 0$

c. $3x^2 - 6x + 5 \geq 0$

d. $-5x^2 + 40x - 74 > 0$

16. Hallar los valores de m para los cuales la ecuación $mx^2 + (m + 1)x + 2(m - 1) = 0$, tiene raíces reales.

17. Usando las propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática, resolver los siguientes sistemas:

a. $$\begin{aligned} x + y &= 11 \\ xy &= 24 \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 5 \\ x + 2y &= 5 \end{aligned}$$

18. Hallar el supremo de los siguientes conjuntos

a. $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x = \dfrac{n + 2}{n + 1}, \ n \in \mathbb{N}\}$

b. $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x = -\dfrac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N} \ n \neq 0\}$

19. Probar que el supremo de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es único.

20. Probar que si $A \subset B \subset \mathbb{R}$, entonces

$$\sup A \leq \sup B ,$$

donde sup A significa supremo de A.