Capítulo 4

Ecuaciones en Diferencias y Ecuaciones Diferenciales

4.1 INTRODUCCION

En la teoría económica es fundamental el **análisis dinámico**; es decir el análisis en el cual se considera como variable explícita el tiempo, se establecen las relaciones que tienen entre sí las variables del modelo al variar el tiempo y se deduce el comportamiento de cada una de las variables a través del tiempo. En este análisis, cabe preguntarse si existen o no valores de equilibrio de las variables y qué ocurre si las variables toman valores diferentes a los del **equilibrio**: Las trayectorias que siguen a través del tiempo, ¿las acercan o alejan del equilibrio? (análisis de **estabilidad**). Responder preguntas como éstas dan luces para los análisis de largo plazo y aportan resultados referidos a modelos estáticos.

Al considerar la variable tiempo, hay dos mameras de hacerlo: una, con variación **continua** del tiempo, y otra con variación **discreta** del tiempo. En ambos casos las variables del modelo son funciones del tiempo; pero mientras en el primero se asume que las variables toman ciertos valores para cada instante (o sea para cada t, cuando t varía en el conjunto de números reales), en el segundo se asume que las variables toman ciertos valores para cada período considerado (o sea para cada t, cuando t varía en el conjunto de números enteros).

En este capítulo, sin detenernos en un tratamiento muy formal, nos ocuparemos más específicamente de la consideración del tiempo discreto, caso en el que se utilizan los métodos de las **ecuaciones en diferencias**; sin embargo, creemos ilustrativo mostrar un modelo de equilibrio parcial de mercado, considerando primero su versión estática y luego versiones dinámicas de él, con variación continua y con variación discreta del tiempo.

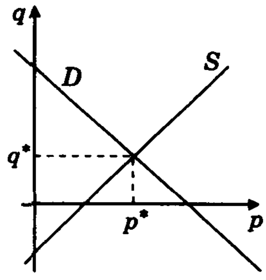


Figura 4.1

Modelo Lineal Estático

Función de demanda: $D(p) = a + bp \ , \ b < 0$

Función de oferta: $S(p) = c + dp \ , \ d > 0$

Condición de equilibrio: $D(p) = S(p)$

Consecuencias:

– el precio de equilibrio es $p^* = \dfrac{a-c}{d-b}$

– la cantidad de equilibrio es $q^* = \dfrac{ad-bc}{d-b}$.

Como puede verse, de este modelo sólo se obtienen los valores de equilibrio (obviamente deben considerarse las restricciones del caso en los coeficientes). No se sabe nada del comportamiento de las variables en el tiempo. (Figura 4.1)

Modelo Lineal Continuo

Función de demanda: $D(p(t)) = a + b\,p(t) \ , \ b < 0$

Función de oferta: $S(p(t)) = c + d\,p(t) \ , \ d > 0$

Ecuación de ajuste del precio: $\dfrac{dp}{dt} = \gamma\left(D(p(t)) - S(p(t))\right) \ , \ \gamma > 0$

Consecuencias:

- Obtenemos de manera inmediata una ecuación diferencial cuya incógnita es la función $p = p(t)$:

$$\frac{dp}{dt} + \gamma(d-b)p(t) = \gamma(a-c) \tag{4.1.1}$$

Esta ecuación nos dice la relación que hay en cada instante t entre el precio y su derivada. Al considerar un precio de equilibrio constante, al que seguimos llamando p^*, tal deberá satisfacer también la ecuación diferencial y entonces

$$0 + \gamma(d-b)p^* = \gamma(a-c),$$

de donde

$$p^* = \frac{a-c}{d-b} \tag{4.1.2}$$

y

$$D^* := a + b\,p^*, \quad S^* := c + d\,p^* \tag{4.1.3}$$

Al resolver (4.1.1) –después veremos cómo– obtenemos

$$p(t) = \left[p(0) - p^*\right] e^{-\gamma(d-b)t} + p^*, \tag{4.1.4}$$

y así

$$D(t) = a + b\left[\left(p(0) - p^*\right) e^{-\gamma(d-b)t} + p^*\right] \tag{4.1.5}$$

$$S(t) = c + d\left[\left(p(0) - p^*\right) e^{-\gamma(d-b)t} + p^*\right] \tag{4.1.6}$$

o, teniendo en cuenta (4.1.3):

$$D(t) - D^* = b\left(p(0) - p^*\right) e^{-\gamma(d-b)t} \tag{4.1.7}$$

$$S(t) - S^* = d\left(p(0) - p^*\right) e^{-\gamma(d-b)t} \tag{4.1.8}$$

Es claro, según (4.1.4), (4.1.7) y (4.1.8) y siendo $\gamma(d-b) > 0$, que al tomar t valores arbitrariamente grandes, tanto $p(t)$ como $D(t)$ y $S(t)$ se aproximan a sus valores de equilibrio; es decir:

$$t \to \infty \Rightarrow p(t) \to p^*\ ,\ D(t) \to D^*\ ,\ S(t) \to S^*\ ,$$

siendo $D^* = S^* = \dfrac{ad-bc}{d-b}$ (como en el modelo estático).

En la Fig. 4.2 se ilustra gráficamente el comportamiento del precio a través del tiempo –según (4.1.4)– considerando $p(0) > p^*$.

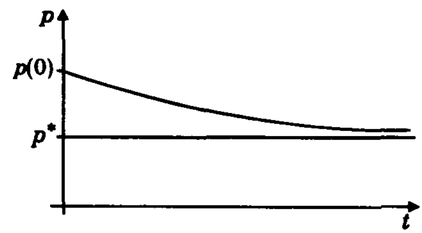


Figura 4.2

Otra manera de tener una visión gráfica del comportamiento de $p(t)$, según las relaciones que se resumen en la ecuación diferencial (4.1.1), es mediante el **diagrama de fase**, aprovechando que podemos expresar $\dfrac{dp}{dt}$ como una función de $p(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -\gamma\,(d-b)\,p(t)+\gamma\,(a-c)\\ &=: f\big(p(t)\big)\end{aligned}$$

Es claro que f es una función lineal afín de $p(t)$, con pendiente negativa. Considerando un sistema de coordenadas con $p(t)$ en el eje horizontal y $\dfrac{dp}{dt}$ en el vertical, podemos representar la *curva de fase* correspondiente a f, como en la Figura 4.3

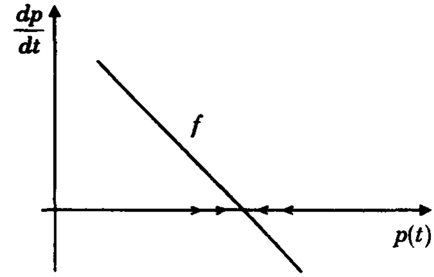


Figura 4.3

Las flechas indican cómo los valores de $p(t)$ tienden hacia el valor que corresponde a $\dfrac{dp}{dt} = 0$; es decir a p^*, dado por (4.1.2). El sentido de las flechas se explica al observar que $p(t)$ irá tomando valores crecientes –hacia la derecha– mientras $\frac{dp}{dt}$ sea positivo (*la curva de fase* se encuentre sobre el eje horizontal) e irá tomando valores decrecientes –hacia la izquierda– mientras $\frac{dp}{dt}$ sea negativo. En este caso específico es fácil advertir que tendremos $\frac{dp}{dt} > 0$ cuando $p(0) > p^*$ y vemos la coherencia de la Fig. 4.2 con las flechas hacia la derecha de la Fig. 4.3. Todo lo dicho nos hace concluir que en el modelo propuesto, el precio de equilibrio es estable; así, si el precio inicial no es el de equilibrio ($p(0) \neq p^*$) se dará un mecanismo de ajuste que llevará al precio hacia p^*.

Modelo Lineal Discreto (Modelo de la Telaraña)

Asumimos, ahora, que el precio no varía de manera continua con el tiempo y que los ajustes ocurren en un conjunto discreto de intervalos de tiempo.

En la *recta temporal* consideraremos los puntos igualmente espaciados 0, h, $2h$, ... y al precio en cada uno de estos puntos llamaremos p_0, p_1, p_2, ... ; ó, en general $p_t = p(th)$ para $t = 0, 1, 2, \ldots$.

Análogamente,

$$\begin{aligned} Q_t &= Q(th) \\ S_t &= S(th) \end{aligned} \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Asumimos también que, al no tener predicción exacta del precio en el período en que se ofrece el producto en el mercado, el productor espera que en el período de oferta el precio será el mismo que en el periodo anterior. Así tenemos el modelo:

Función de demanda: $D_t = a + bp_t\,,\ b < 0$

Función de oferta: $S_t = c + dp_{t-1}\,,\ d > 0$

Condición de equilibrio: $D_t = S_t$

Consecuencias:

Obtenemos, de manera inmediata, una ecuación en diferencias cuya incógnita es la función $p = p_t$:

$$bp_t - dp_{t-1} = c - a \tag{4.1.9}$$

Esta ecuación nos dice la relación que hay entre el precio en cualquier período t y el precio en el período anterior $t-1$. Al considerar un precio de equilibrio, constante, al que seguimos llamando p^*, tal deberá satisfacer (4.1.9) y entonces

$$bp^* - dp^* = c - a\ ,$$

de donde

$$p^* = \frac{a-c}{d-b}$$

y en consecuencia,

$$D^* = a + bp^* \text{ y } S^* = c + dp^*\ , \tag{4.1.10}$$

como en los dos modelos anteriores.

Al resolver (4.1.9) –después veremos cómo– obtenemos

$$p_t = \left(p_0 - p^*\right)\left(\frac{d}{b}\right)^t + p^* \tag{4.1.11}$$

y así

$$D_t = a + b\left[\left(p_0 - p^*\right)\left(\frac{d}{b}\right)^t + p^*\right] \tag{4.1.12}$$

$$S_t = c + d\left[\left(p_0 - p^*\right)\left(\frac{d}{b}\right)^{t-1} + p^*\right] \tag{4.1.13}$$

o, teniendo en cuenta (4.1.10)

$$D_t - D^* = b\left(p_0 - p^*\right)\left(\frac{d}{b}\right)^t \tag{4.1.14}$$

$$S_t - S^* = d\left(p_0 - p^*\right)\left(\frac{d}{b}\right)^{t-1} \tag{4.1.15}$$

Ahora, de (4.1.11), (4.1.14) y (4.1.15) **no** podemos concluir que el precio, la demanda y la oferta necesariamente convergerán a sus valores de equilibrio, pues eso depende del valor de d/b. Por los supuestos del modelo este cociente es negativo, lo cual nos dice que al variar t en el conjunto $\{0,1,2,3,...\}$, $(d/b)^t$ irá tomando valores alternados positivos y negativos; pero la convergencia a los valores de equilibrio depende de la convergencia de $\{(d/b)^t\}$ hacia cero, lo cual ocurre si y sólo si $\left|\frac{d}{b}\right| < 1$.

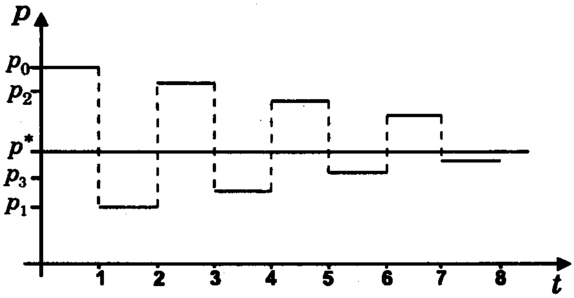


Figura 4.4

En la Fig. 4.4, se ilustra gráficamente el comportamiento del precio a través de diversos períodos –según (4.1.11)– partiendo de un valor inicial p_0, mayor que el precio de equilibrio p^*, en el caso $\left|\frac{d}{b}\right| < 1$.

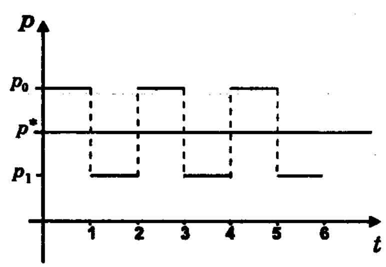


Figura 4.5

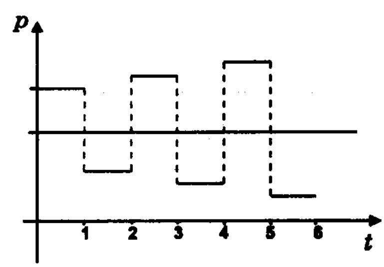


Figura 4.6

Los casos $\left|\frac{d}{b}\right| = 1$ y $\left|\frac{d}{b}\right| > 1$ se ilustran gráficamente en la figuras 4.5 y 4.6 respectivamente, considerando siempre –y sin pérdida de generalidad– que $p_0 > p^*$.

Otra manera de tener una visión gráfica del comportamiento del precio, según las relaciones que se resumen en la ecuación en diferencias (4.1.9), es mediante el **diagrama de fase**, aprovechando que podemos expresar p_t como una función de p_{t-1}:

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{d}{b} p_{t-1} + \frac{c-a}{b} \\ &=: g(p_{t-1}) \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

Consideremos el caso $\left|\frac{d}{b}\right| < 1$: la función g es una lineal afín de pendiente d/b, tal que

$$-1 < \frac{d}{b} < 0\,.$$

Considerando un sistema de coordenadas con p_{t-1} en el eje horizontal y p_t en el vertical, podemos representar la *curva de fase* correspondiente a g, como en la Figura 4.7, en la cual se ha trazado, además, la "recta a 45°" (bisectriz del cuadrante que se muestra) que nos servirá para mostrar, por iteración, los valores posibles de p.

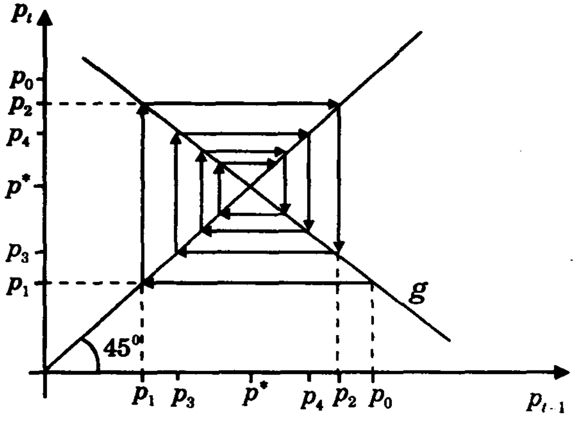


Figura 4.7

Las líneas punteadas y las flechas en la Fig.4.7 ya nos hacen intuir cómo hemos hecho interactuar el gráfico de g y la "recta a 45°" para obtener diversos valores de p, partiendo de un valor inicial p_0, que –coherentes con la Figura 4.4– lo hemos tomado mayor que el punto de equilibrio p^* (es claro que p^* se determina con el punto de intersección de ambas rectas, pues satisfacer (4.1.9) equivale a ser un punto fijo de g). Veamos:

Dado p_0, obtenemos $g(p_0) = p_1$ y para obtener p_2, "llevamos" p_1 al eje horizontal a través de la recta a 45°; así $p_2 = g(p_1)$ y el procedimiento lo repetimos sucesivamente.

En el caso que acabamos de ilustrar ($\left|\frac{d}{b}\right| < 1$) vemos claramente una *trayectoria de convergencia al equilibrio*, coherente con la Fig. 4.4. El lector queda invitado a hacer diagramas de fase correspondientes a los casos $\left|\frac{d}{b}\right| = 1$ y $\left|\frac{d}{b}\right| > 1$.

4.2 EL OPERADOR DIFERENCIA (Δ)

Definición 4.1 Dada una función $y = y(t)$ de dominio $A \subset \mathbf{R}$ y valores reales, llamamos **primera diferencia de** y (o diferencia de primer orden de y) a la función Δy definida por

$$\Delta y(t) := y(t+1) - y(t) , \tag{4.2.1}$$

cuyo dominio es $\{t \in A \ / \ t+1 \in A\}$.

El símbolo Δ se conoce con el nombre de **operador diferencia** en el sentido que "al actuar" sobre una función y, determina la función Δy según (4.2.1).

Notas 4.2

1. Hemos adoptado t como variable independiente porque el uso más frecuente de estos conceptos es con la variable tiempo.

2. Puede definirse, de manera más general,

$$\Delta_h y(t) := y(t+h) - y(t) , \tag{4.2.2}$$

donde h es una constante cualquiera, denominada *intervalo de diferencia*. Así, la Definición 4.1 dada es un caso particular, con $h = 1$; sin embargo, el uso del operador Δ_h es poco frecuente.

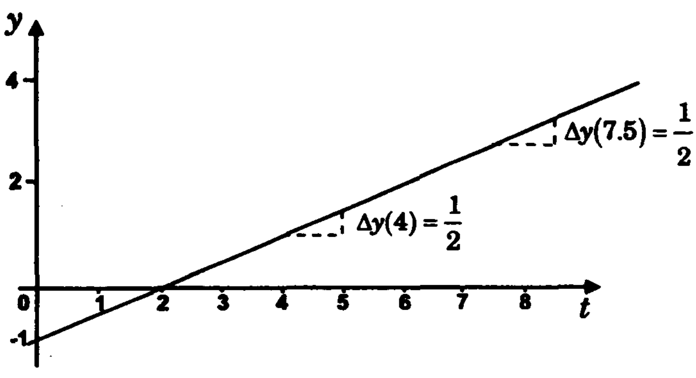
Ejemplos 4.3

1. Sea $y = y(t) = \frac{1}{2}t - 1$

entonces

$$\begin{aligned}\Delta y(t) &= \left[\frac{1}{2}(t+1) - 1\right] - \left[\frac{1}{2}t - 1\right]\\ &= \frac{1}{2};\end{aligned}$$

lo cual nos dice que para la función dada, su diferencia de primer orden es constante e igual a 1/2. En la figura 4.8 se muestra esta diferencia de primer orden, para $t = 4$ y $t = 7.5$



Figuras 4.8

El lector puede advertir que siendo una recta la gráfica de la función dada, su diferencia de primer orden coincide con el valor de su pendiente.

2. Sea $z = z(t) = \sqrt{t}$

entonces $\Delta z(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t}$.

En este caso, la diferencia de primer orden *no* es constante. En la Figura 4.9 se muestra para $t = 1$ y $t = 3$.

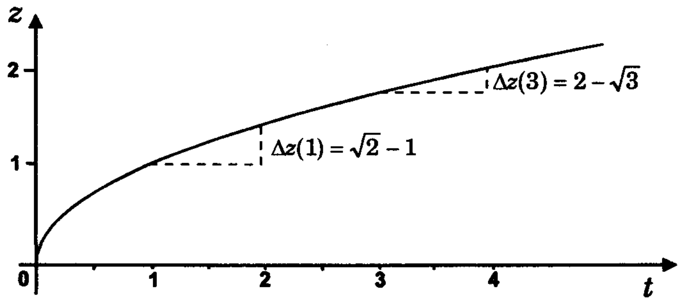


Figura 4.9

El lector puede advertir, que por ser creciente la función dada, las diferencias de primer orden siempre serán positivas. En este caso, además, las diferencias de primer orden son decrecientes (¿con qué propiedad de la función z está vinculado este hecho?)

3. Sea $w = w(t) = 1 + \left(\dfrac{7}{8}\right)^t$

entonces $\Delta w(t) = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{t+1} - \left(\dfrac{7}{8}\right)^t = \left(\dfrac{7}{8}\right)^t\left(\dfrac{7}{8} - 1\right) = -\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{7}{8}\right)^t$

En este caso, todas las diferencias de primer orden serán negativas y crecientes hacia cero, o –como se ve en la Figura 4.10– decrecientes en valor absoluto.

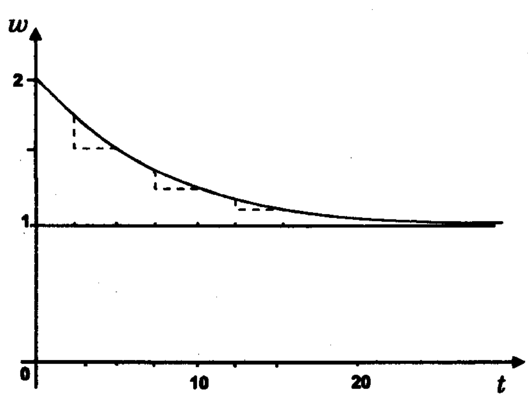


Figura 4.10

Definición 4.4 Dada una función $y = y(t)$ y su primera diferencia $\Delta y(t)$, llamamos **segunda diferencia de** y a la diferencia de $\Delta y(t)$. A esta función la denotamos $\Delta^2 y$ y queda definida por

$$\Delta^2 y(t) := \Delta(\Delta y(t)).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\Delta^2 y(t) &= \Delta[y(t+1) - y(t)] \\ &= [y(t+2) - y(t+1)] - [y(t+1) - y(t)] \\ &= y(t+2) - 2y(t+1) + y(t).\end{aligned}$$

Es fácil intuir que de manera similar se puede definir la tercera diferencia, y –en general– la n-ésima diferencia de y.

Definición 4.5 Dada una función $y = y(t)$ y su $(n-1)$-ésima diferencia, llamamos **n-ésima diferencia de y** a la primera diferencia de su $(n-1)$-ésima diferencia; esto es:

$$\Delta^n y(t) := \Delta\left(\Delta^{n-1} y(t)\right), \quad n = 1,2,\ldots \tag{4.2.3}$$

siendo

$$\begin{aligned}\Delta^0 y(t) &:= y(t) \\ \Delta^1 y(t) &:= \Delta y(t)\end{aligned}$$

El lector puede verificar que

$$\Delta^3 y(t) = y(t+3) - 3y(t+2) + 3y(t+1) - y(t).$$

Es fácil advertir la analogía que hay entre estos coeficientes y los del desarrollo de $(a-b)^3$:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3.$$

Así, se puede demostrar, por inducción, que

$$\Delta^n y(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k y(t+n-k)$$

Propiedades del operador Δ

1. Distributividad respecto a la adición de funciones:

$$\Delta(y_1(t)+y_2(t)) = \Delta y_1(t) + \Delta y_2(t) \tag{4.2.5}$$

2. Conmutatividad con una constante arbitraria c

$$\Delta(cy(t)) = c\,\Delta y(t) \tag{4.2.6}$$

3. Linealidad.

   Dadas m constantes $c_1, c_2, \dots, c_m$ y m funciones $y_1 = y_1(t), \dots, y_m = y_m(t)$, entonces

$$\Delta\left(\sum_{i=1}^{m} c_i\, y_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i\, \Delta y_i(t).$$

   Las dos primeras son muy fáciles de demostrar y la tercera es una consecuencia de éstas. Su demostración rigurosa debe hacerse por inducción matemática.

4.3 EL OPERADOR DIFERENCIAL $\left(D = \frac{d}{dt}\right)$

El símbolo $\frac{d}{dt}$, o simplemente D, lo denominamos **operador diferencial** en el sentido que "al actuar" sobre una función y = y(t), que es diferenciable, determina la función $\frac{dy}{dt}$, o equivalentemente $D_y(t)$; así

$$\frac{dy(t)}{dt} := \lim_{h\to 0} \frac{y(t+h)-y(t)}{h}$$

(cuando tal límite existe).

Observaciones 4.6

1. Teniendo en cuenta (4.2.2), podemos escribir

$$\frac{dy(t)}{dt} := \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h y(t)}{t}$$

y ver más claramente la vinculación entre los operadores diferencia y diferencial. Notar, entonces que al operador $D = \frac{d}{dt}$ le corresponde el operador $\frac{\Delta_h}{h}$ y –en general– no el operador Δ.

2. Es frecuente la notación

$$\frac{dy(t)}{dt} = Dy(t) = y'(t);$$

más aún, cuando t está representando el tiempo, suele escribirse $\dot{y}(t)$ en lugar de $y'(t)$.

3. De manera similar

$$D^n\, y(t) = D\left(D^{n-1}\, y(t)\right) \qquad n = 1,2,\ldots$$

siendo
$$D^0\, y(t) = y(t)$$
$$D^1\, y(t) = y(t)$$

4. Por nuestros conocimientos de cálculo diferencial, reconocemos inmediatamente que el operador D tiene también las propiedades de distributividad, conmutatividad con constantes y linealidad, análogas a las del operador Δ.

4.4 ECUACIONES EN DIFERENCIAS Y ECUACIONES DIFERENCIALES: DEFINICIONES Y CLASIFICACION

Definición 4.7 Llamamos **ecuación en diferencias ordinaria** a una relación entre una variable independiente t, una función $y = y(t)$ y una o más de sus diferencias $\Delta y(t)$, $\Delta^2 y(t)$, ... Tal relación podemos expresarla en forma implícita como

$$F\left(t, y(t), \Delta y(t), \Delta^2 y(t), \ldots, \Delta^n y(t)\right) = 0\,, \qquad (4.4.1)$$

donde F es una función de $n+2$ variables y $n \in \mathbb{Z}^+$.

Ejemplos 4.8

1. $3t + \Delta y(t) - 4y(t) = 0$
2. $4t^3 \Delta y(t) + \Delta^2 y(t) = 0$
3. $3\left(\Delta y(t)\right)^4 - 5\left(\Delta^2 y(t)\right)^3 + y(t) + 4 = 0$

Definición 4.9 LLamamos **ecuación diferencial ordinaria** a una relación entre t, una función $y = y(t)$ y una o más de sus derivadas $y'(t)$, $y''(t)$, ... Tal relación podemos expresarla en forma implícita como

$$F\left(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n)}(t)\right) = 0, \tag{4.4.2}$$

donde F es una función de $n + 2$ variables y $n \in \mathbf{Z}^+$.

Ejemplos 4.10

1. $5e^t + t^2 y'(t) - 3y(t) = 0$
2. $5y'(t) - e^t y'''(t) = 0$
3. $2\left(y'(t)\right)^3 + \left(y''(t)\right)^2 - 4y(t) + 2 = 0$

Observaciones 4.11

1. Tanto las ecuaciones en diferencias como las ecuaciones diferenciales son *ecuaciones funcionales*, cuyas incógnitas son funciones (y no números, como ocurre en las ecuaciones algebraicas).
2. El calificativo de *ordinario* dado en ambas definiciones es debido a que la función desconocida $y = y(t)$ tiene sólo una variable independiente (t). Cuando se consideran diferencias o derivadas de funciones de más de una variable, el calificativo que se usa para las ecuaciones es de *parciales*[1].

[1] En este libro sólo trataremos ecuaciones ordinarias, tanto en diferencias como diferenciales; por ello, así deben entenderse cuando no esté explícitamente mencionado.

Definición 4.12 Una ecuación en diferencias es de **orden** n, cuando $\Delta^n y$ es la diferencia más alta que figura realmente en ella (en (4.4.1) de la Definición 4.7).

Definición 4.13 Una ecuación diferencial es de **orden** n, cuando $y^{(n)}$ (la n-ésima derivada de y) es la derivada de mayor orden que figura realmente en ella (en (4.4.2) de la Definición 4.9).

Definición 4.14 El **grado** de una ecuación en diferencias o de una ecuación diferencial de orden n es el exponente de $\Delta^n y$, o de $y^{(n)}$ según sea el caso.

Ejemplos

1. De las ecuaciones en diferencias dadas en Ejemplos 4.8:
   - la primera es de primer orden y primer grado
   - la segunda es de segundo orden y primer grado
   - la tercera es de segundo orden y tercer grado.
2. De las ecuaciones diferenciales dadas en Ejemplos 4.10:
   - la primera es de primer orden y primer grado
   - la segunda es de tercer orden y primer grado
   - la tercera es de segundo orden y segundo grado.

Observación 4.15

Teniendo en cuenta la definición de $\Delta y(t)$ y la expresión dada en (4.2.4) para $\Delta^n y(t)$, toda ecuación en diferencias de orden n puede expresarse como una relación entre t, $y(t)$, $y(t+1)$, $y(t+2)$, ... , $y(t+n)$. Así las ecuaciones en diferencias como las que hemos dado en los ejemplos, que son de la forma (4.4.1), quedarán expresadas como

$$G(t, y(t), y(t+1), y(t+2), \dots, y(t+n)) = 0\ , \qquad (4.4.3)$$

siendo G una función de $n+2$ variables.

Más aún, es usual adoptar la siguiente notación en las ecuaciones en diferencias:

$$y_t := y(t)\ ; \qquad (4.4.4)$$

es decir, la variable –que generalmente se pone entre paréntesis– se ubica como subíndice. Con esta notación la expresión (4.4.3) se escribe como

$$G(t, y_t, y_{t+1}, y_{t+2}, \ldots, y_{t+n}) = 0 \qquad (4.4.3)'$$

Ejemplos 4.16

1. La primera y segunda ecuaciones dadas en Ejemplos 4.8 quedan expresadas de manera equivalente por:

   $1a$: $\quad y_{t+1} - (7t+1)y_t + 3t = 0$

   y

   $1b$: $\quad y_{t+2} + \left(4t^3 - 2\right)y_{t+1} + \left(1 - 4t^3\right)y_t = 0$

   respectivamente.

   (Evidentemente para la tercera ecuación también existe una expresión equivalente de esta forma. El lector puede obtenerla como entretenimiento).

2. $5y_{t+3} - 2y_{t+1} + 3y_t - 8 = 0$
3. $y_{t+2}^2 + t^2 y_t^3 + 5^t = 0$.

Nota 4.17

El orden de una ecuación en diferencias expresada como (4.4.3)', está dado por la mayor diferencia entre los subíndices. Así, obviamente, las ecuaciones (1a) y (1b) son de orden 1 y 2 respectivamente, como lo son sus equivalentes dadas en la forma (4.4.1). Es fácil advertir que las ecuaciones de los ejemplos 2 y 3 son de órdenes 3 y 2 respectivamente (y de grados 1 y 2).

Definición 4.18 Una ecuación en diferencias es **lineal**, si es de la forma

$$q_n(t)y_{t+n} + q_{n-1}(t)y_{t+n-1} + \ldots + q_1(t)y_{t+1} + q_0(t)y_t = g(t)\,, \qquad (4.4.5)$$

donde q_n, q_{n-1}, ... , q_0 y g son funciones conocidas.

Definición 4.19 Una ecuación diferencial es **lineal**, si es de la forma

$$q_n(t)y_{(t)}^{(n)} + q_{n-1}(t)y_{(t)}^{(n-1)} + \ldots + q_1(t)y'_{(t)} + q_0(t)y(t) = g(t)\,, \qquad (4.4.6)$$

donde q_n, q_{n-1}, ... , q_0 y g son funciones conocidas.

Notas 4.20

1. Si la función g –en (4.4.5) o en (4.4.6)– es idénticamente nula (o sea $g(t) \equiv 0$), entonces las ecuaciones correspondientes se llaman lineales homogéneas.

   La ecuación (1b) de Ejemplos 4.16 es una ecuación en diferencias lineal homogénea.

   La ecuación 2 de Ejemplos 4.10 es una ecuación diferencial lineal homogénea.

   Evidentemente las ecuaciones de la forma (4.1.27) o (4.1.28) en donde $g(t)$ **no** es idénticamente nula, son ecuaciones *lineales no homogéneas*. Tal es el caso de las ecuaciones en diferencias 1a y 2 de Ejemplos 4.16, con $g(t) = 3t$ y $g(t) = 8$ respectivamente, y de la ecuación diferencial 1 de Ejemplos 4.10, con $g(t) = -5e^t$.

2. Si las funciones q_n, q_{n-1}, ... , q_0 son constantes, entonces las ecuaciones correspondientes se llaman *lineales con coeficientes constantes*. Tal es el caso de la ecuación en diferencias número 2 dada en Ejemplos 4.16, con $q_3(t) = 5$, $q_1(t) = -2$ y $q_0(t) = 3$. Otros ejemplos son:

$$5y_{t+4} - 3y_{t+2} - y_t = 2^t$$

$$3y_{t+2} + y_t = 0$$

   Ejemplos de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes son:

$$4y'''(t) - 7y'(t) + y(t) = \cos t$$

$$2y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0 .$$

3. En este libro trataremos las ecuaciones en diferencias y las ecuaciones diferenciales lineales de orden n, con coeficientes constantes. Estos tipos de ecuaciones son los que con mayor frecuencia se usan en los modelos económicos dinámicos.

Definición 4.21 Una función $y = u(t)$ es una **solución** de la ecuación en diferencias dada en (4.4.3), sobre un conjunto M, si al reemplazar tal función y sus correspondientes diferencias en la ecuación, se obtiene una identidad para todo $t \in M$; es decir,

$$G(t, u(t), u(t+1), \ldots, u(t+n)) = 0 , \quad \forall t \in M .$$

Definición 4.22 Una función $y = u(t)$ es una **solución** de la ecuación diferencial dada en (4.4.2), sobre un conjunto N, si al reemplazar tal función y sus correspondientes derivadas en la ecuación, se obtiene una identidad para todo $t \in N$; es decir,

$$G\left(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(n)}(t)\right) = 0 \ , \quad \forall t \in N.$$

Cuando una función $y = u(t)$ es solución de una ecuación en diferencias o de una ecuación diferencial, se dice que tal función *satisface* a la ecuación.

Ejemplos 4.23

1. La función $y = u(t) = \dfrac{3}{1+3t}$ es solución de la ecuación

$$(1 + y_t)y_{t+1} - y_t = 0 \ , \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

En efecto, al sustituir la función en la ecuación obtenemos

$$\left(1 + \frac{3}{1+3t}\right)\frac{3}{1+3(t+1)} - \frac{3}{1+3t} = 0$$

y haciendo las simplificaciones del caso:

$$0 = 0 \ ,$$

con lo cual queda verificado que $u(t) = \dfrac{3}{1+3t}$ satisface la ecuación dada.

El lector puede verificar que también $y = v(t) = \dfrac{5}{1+5t}$; y, en general, toda función $y = y(t) = \dfrac{C}{1+Ct}$, donde C es una constante arbitraria, es solución de la ecuación en diferencias de primer orden dada.

2. La función $y = u(t) = 4e^{-t} + 3t\,e^{-t} + t - 2$ es solución de la ecuación

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t \ .$$

En efecto, al hacer la sustitución de y y sus derivadas en la ecuación y luego de las simplificaciones del caso, obtenemos la identidad

$$t = t \ ,$$

con lo cual queda verificado que

$$u(t) = 4e^{-t} + 3te^{-t} + t - 2$$

satisface la ecuación dada.

El lector puede verificar que toda función

$$y = y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + t - 2 ,$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, es solución de la ecuación diferencial de segundo orden dada.

Observaciones 4.24

1. De los ejemplos que acabamos de ver, deducimos inmediatamente que si una ecuación –en diferencias o diferencial– tiene solución, ella no necesariamente es única. En ambos ejemplos existen infinitas soluciones para las ecuaciones dadas, pues cada constante C o pareja de constantes C_1, C_2, nos determina una solución diferente. La solución de una ecuación –en diferencias o diferencial– es única cuando, además, se dan condiciones que permiten determinar de manera única las constantes. Tales condiciones se denominan *condiciones iniciales*. Así, si en el Ejemplo 1 anterior, se tuviera la condición inicial

$$y_0 = 6 ,$$

podemos determinar de manera única la constante C de la solución general, pues

$$y(t) = \frac{C}{1+Ct} \;\Rightarrow\; 6 = y(0) = \frac{C}{1 + C \times 0} = C$$

y en consecuencia la única solución de la ecuación en diferencias de primer orden dada, con la condición inicial $y_0 = 6$, es la función $y(t) = \dfrac{6}{1+6t}$.

Análogamente, si en el ejemplo 2 se tuviera las condiciones iniciales

$$y(0) = 5 \;,\; y'(0) = 8 ,$$

podemos determinar de manera única las constante C_1 y C_2 de la solución general, pues

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + t - 2 \;\Rightarrow\; 5 = y(0) = C_1 - 2 \;\Rightarrow\; C_1 = 7$$

$$y'(t) = -C_1 e^{-t} - C_2 t e^{-t} + C_2 e^{-t} + 1 \Rightarrow 8 = y'(0) = -C_1 + C_2 + 1 \Rightarrow C_2 = 14$$

y en consecuencia la única solución de la ecuación diferencial de segundo orden dada, con las condiciones iniciales $y(0) = 5$, $y'(0) = 8$ es la función

$$y(t) = 7e^{-t} + 14te^{-t} + t - 2$$

2. En la teoría de ecuaciones en diferencias y de ecuaciones diferenciales, son fundamentales los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones. Ciertamente deben cumplirse determinadas condiciones en las funciones G y F de las definiciones generales dadas en (4.4.3) y (4.4.2) para garantizar la existencia y unicidad de las respectivas soluciones. En este libro, como ya lo dijimos antes, consideraremos solamente ecuaciones en diferencias y ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y para tales casos las condiciones se simplifican enormemente. Así, todas las ecuaciones en diferencias y diferenciales con las que trabajaremos tendrán solución y será única al establecerse las condiciones iniciales adecuadas.

3. Como ya habrá intuído el lector,

> *si una ecuación –en diferencias o diferencial– es de orden n, su solución general tendrá n constantes arbitrarias (y sólo n); y para determinarlas de manera única son necesarias n condiciones iniciales.*

Ejercicios 4.25

1. Hacer gráficos similares al de la Figura 4.7 para los casos $\left|\frac{d}{b}\right| = 1$ y $\left|\frac{d}{b}\right| > 1$

2. Verificar en cada caso que la función dada es solución de la ecuación en diferencias correspondientes (C_1, C_2 y C representan constantes arbitrarias). Determinar las constantes asumiendo $y_0 = 2$ para las de primer orden y $y_0 = 0$, $y_1 = 3$ para las de segundo orden.

   a) $y_{t+1} - y_t = 0$ $\qquad$ $y_t = C$

   b) $y_{t+1} - y_t = 2$ $\qquad$ $y_t = 2t + C$

c) $y_{t+2} - y_t = 0$ $\qquad$ $y_t = C_1 + C_2(-1)^t$

d) $y_{t+1} = \dfrac{y_t}{1+y_t}$ $\qquad$ $y_t = \dfrac{C}{1+Ct}$

e) $y_{t+1} - y_t = \dfrac{2}{3}t$ $\qquad$ $y_t = \dfrac{t(t-1)}{3} + C$

f) $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 1$ $\qquad$ $y_t = C_1 + C_2 2^t - t$

3. **Verificar en cada caso que la función dada es solución de la ecuación diferencial correspondiente.**

a) $y''(t) = 0$ $\qquad$ $y(t) = C_1 t + C_2$

b) $y't = t^2 + y$ $\qquad$ $y(t) = t^2 + Ct$

c) $y' + 2ty = e^{-t^2}$ $\qquad$ $y(t) = te^{-t^2} + Ce^{-t^2}$

d) $t^3 y'' + t^2 y' + ty = 1$ $\qquad$ $y(t) = \dfrac{1}{2t}$

4. Dada la funciín $f(y) = \dfrac{7y-21}{3}$, determinar el equilibrio y hacer el diagrama de fase en cada caso:

a) $\dfrac{dy}{dt} = f(y)$ $\qquad$ b) $y_{t+1} = f(y_t)$

5. Determinar los equilibrios y esbozar el diagrama de fase correspondiente:

a) $y_{t+1} = \dfrac{1}{y_t}$

b) $y_{t+1} = \dfrac{1}{y_t^2}$

c) $y_{t+1} = 2\sqrt{y_t} + 3$

4.5 TEOREMAS BASICOS PARA LA SOLUCION DE ECUCACIONES EN DIFERENCIAS Y DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN *n*, CON COEFICIENTES CONSTANTES

Una ecuación en diferencias, lineal, de orden n y con coeficientes constantes es de la forma

$$C_n\, y_{t+n} + C_{n-1}\, y_{t+n-1} + \ldots + C_1\, y_{t+1} + C_0\, y_t = g(t)\,, \qquad (4.5.1)$$

donde C_n, C_{n-1}, ... , C_0 son constantes, $g = g(t)$ es una función conocida y tanto C_n como C_0 son diferentes de cero, para garantizar el orden n. Precisamente por esto, podemos dividir la ecuación (4.5.1) por C_n y reescribirla como

$$y_{t+n} + a_1\, y_{t+n-1} + \ldots + a_{n-1}\, y_{t+1} + a_n\, y_t = b(t)\,, \qquad (4.5.2)$$

donde

$$a_i = \frac{C_{n-i}}{C_n}\ , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$b(t) = \frac{1}{C_n}\, g(t)\,.$$

Análogamente, una ecuación diferencial, lineal, de orden n y con coeficientes constantes podemos escribirla de la forma

$$y^{(n)}(t) + a_1\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}\, y'(t) + a_n\, y(t) = b(t)\,, \qquad (4.5.3)$$

Si llamamos $E(y)$ al primer miembro de (4.5.2) y $L(y)$ al primer miembro de (4.5.3), podemos escribir abreviadamente estas ecuaciones:

$$E(y) = b(t) \qquad (4.5.2)'$$

$$L(y) = b(t) \qquad (4.5.3)'$$

que, ciertamente, serán homogéneas si y sólo si $b(t) \equiv 0$.

A continuación enunciamos los teoremas que nos ayudarán a resolver las ecuaciones en estudio:

i) Para ecuaciones en diferencias:

Teorema 4.26 Si $y = u(t)$ es solución de la ecuación homogénea $E(y) = 0$, entonces $y = K\,u(t)$, donde K es una constante arbitraria, también es solución.

Teorema 4.27 Si $y = u_1(t)$, $y = u_2(t)$ son soluciones linealmente independientes[1] de la ecuación homogénea $E(y) = 0$, entonces $y = K_1 u_1(t) + K_2 u_2(t)$, donde K_1 y K_2 son constantes arbitrarias, también es solución.

Nota 4.28

Si $y = u_1(t)$, $y = u_2(t)$, ... , $y = u_n(t)$ son n soluciones linealmente independientes de $E(y) = 0$, entonces

$$u(t) = K_1 u_1(t) + K_2 u_2(t) + \ldots + K_n u_n(t),$$

donde K_1, K_2, ... , K_n son constantes arbitrarias, es la **solución general** de $E(y) = 0$.

Teorema 4.29 Si $y = \overline{u}(t)$ es una solución particular cualquiera de la ecuación no homogénea $E(y) = b(t)$, la solución general de esta ecuación se obtiene añadiendo a $y = \overline{u}(t)$ la solución general de $E(y) = 0$. Así, la solución general de $E(y) = b(t)$ es de la forma

$$y = \overline{u}(t) + K_1 u_1(t) + K_2 u_2(t) + \ldots + +K_n u_n(t),$$

donde u_1, u_2, ... , u_n son n soluciones, linealmente independientes, de $E(y) = 0$ y K_1, K_2, ... , K_n son n constantes arbitrarias.

---

[1] m funciones $y = u_1(t)$, $y = u_2(t)$, ... , $y = u_m(t)$ son linealmente independientes si y sólo si $K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t) + \ldots + K_m y_m(t) = 0$, *para todo* t *admisible*, únicamente si $K_1 = K_2 = \ldots = K_m = 0$. Por ejemplo, $u_1(t) = t$ y $u_2(t) = t^2$ son *l.i.*, pero $v_1(t) = t$ y $v_2(t) = 3t$, aunque son funciones diferentes, *no* son *l.i.* (son linealmente dependientes), pues $-3v_1 + v_2 = 0$ para todo $t \in \mathbf{R}$.

Las demostraciones de estos teoremas son inmediatas al hacer las sustituciones correspondientes; así

1. $y = u(t)$ solución de $E(y) = 0 \Rightarrow E(u) = 0 \Rightarrow K\,E(u) = 0 \quad \forall K \in \mathbf{R}$

$$\Rightarrow K\,u_{t+n} + K\,a_1 u_{t+n-1} + \ldots + K\,a_n u_t = 0 \quad \forall K \in \mathbf{R}$$
$$\Rightarrow K\,u_{t+n} + a_1 K\,u_{t+n-1} + \ldots + a_n K\,u_t = 0 \quad \forall K \in \mathbf{R}$$
$$\Rightarrow E(Ku) = 0 \quad \forall K \in \mathbf{R}$$

$\Rightarrow y = K\,u(t)$, siendo K constante arbitraria, es solución de $E(y) = 0$.

Así queda demostrado el Teorema 4.26.

2. **También es fácil verificar que**

$$E(u_1) = 0 \ \text{ y } \ E(u_2) = 0 \ \Rightarrow \ E(u_1 + u_2) = 0\,,$$

lo cual demuestra el Teorema 4.27

3. **Para el Teorema 4.29:**

Si $E(\overline{u}) = b(t)$ y $E(u) = 0$, es fácil verificar que

$$E(\overline{u} + u) = E(\overline{u}) + E(u) = b(t) + 0 = b(t)\,,$$

lo cual nos dice que $\overline{u} + u$ es solución de $E(y) = b(t)$, teniendo $\overline{u} + u$ n constantes arbitrarias.

ii) Para ecuaciones diferenciales:

Los teoremas y sus demostraciones son completamente análogos a los que acabamos de ver para ecuaciones en diferencias. También la Nota 4.28 tendrá su análoga correspondiente. (Podríamos obviar los enunciados pidiendo al lector que en los Teoremas 4.26, 4.27 y 4.29 y en la Nota 4.28 cambie $E(y)$ por $L(y)$).

Teorema 4.30 Si $y = u(t)$ es solución de la ecuación homogénea $L(y) = 0$, entonces $y = K\,u(t)$, donde K es una constante arbitraria, también es solución.

Teorema 4.31 Si $y = u_1(t)$, $y = u_2(t)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $L(y) = 0$, entonces $y = K_1 u_1(t) + K_2 u_2(t)$, donde K_1 y K_2 son constantes arbitrarias, también es solución.

Nota 4.32

Si $y=u_1(t)$, $y=u_2(t)$, ... , $y=u_n(t)$ son n soluciones linealmente independientes de $L(y)=0$, entonces

$$u(t)=K_1u_1(t)+K_2u_2(t)+...+K_nu_n(t)\ ,$$

donde K_1, K_2, ... , K_n son constantes arbitrarias, es la solución general de $L(y)=0$.

Teorema 4.33 Si $y=\overline{u}(t)$ es una solución particular cualquiera de la ecuación no homogénea $L(y)=b(t)$, la solución general de esta ecuación se obtiene añadiendo a $y=\overline{u}(t)$ la solución general de $E(y)=0$. Así, la solución general de $L(y)=b(t)$ es de la forma

$$y=\overline{u}(t)+K_1u_1(t)+K_2u_2(t)+...+K_nu_n(t)\ ,$$

donde u_1, u_2, ... , u_n son n soluciones, linealmente independientes, de $L(y)=0$ y K_1, K_2, ..., K_n son n constantes arbitrarias.

Observaciones 4.34

1. Los teoremas que hemos dado en esta sección nos permiten indicar un camino a seguir para resolver ecuaciones en diferencias, no homogéneas –como (4.5.2)– y ecuaciones diferenciales, no homogéneas, como (4.5.3):

   Paso 1: Empleando los teoremas 4.26 y 4.27 –o 4.30 y 4.31 según sea el caso– obtener la solución general de la ecuación homogénea correspondiente (usualmente llamada ecuación reducida)

   Paso 2: Encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea dada.

   Paso 3: Empleando el teorema 4.29 –o el 4.33 según sea el caso– obtener la solución general de la ecuación no homogénea dada, sumando las soluciones obtenidas en los pasos anteriores.

2. Si la ecuación dada tiene además n condiciones iniciales, se obtiene finalmente la solución específica (única):

   Paso 4: Hacer las sustituciones y cálculos correspondientes usando las n condiciones iniciales y determinar los valores específicos de las n constantes arbitrarias de la solución general obtenida en el Paso 3.

4.6 ECUACIONES EN DIFERENCIAS LINEALES, DE ORDEN 1, CON COEFICIENTES CONSTANTES

Nos ocuparemos ahora de las ecuaciones de la forma

$$y_{t+1} + a_1 y_t = b(t) \, , \tag{4.6.1}$$

donde $a_1 \in \mathbf{R}$, $a_1 \neq 0$ y $b = b(t)$ es una función dada.

Como resulta fundamental conocer la solución general de la homogénea (Paso 1), veremos primero este caso.

Caso 1: $b(t) \equiv 0$

Tenemos entonces la ecuación

$$y_{t+1} + a_1 y_t = 0 \quad , \quad a_1 \neq 0 \tag{4.6.2}$$

Paso 1: Asumamos que la función que buscamos toma un valor arbitrario K cuando $t = 0$; entonces

$$\begin{aligned}
y_0 &= K \\
y_1 &= -a_1 y_0 = -a_1 K \\
y_2 &= -a_1 y_1 = (-a_1)(-a_1 K) = (-a_1)^2 K \\
&\vdots \\
y_t &= -a_1 y_{t-1} = (-a_1)^t K.
\end{aligned}$$

La función obtenida:

$$y_t = (-a_1)^t K \tag{4.6.3}$$

es solución de la ecuación homogénea dada, pues al reemplazarla en (4.6.2) obtenemos una identidad:

$$\begin{aligned}
(-a_1)^{t+1} K + a_1 (-a_1)^t K &= 0 \\
(-a_1)(-a_1)^t K + a_1(-a_1)^t K &= 0 \\
0 &\equiv 0.
\end{aligned}$$

Además, la función obtenida (4.6.3) tiene una constante arbitraria; en consecuencia, es la solución general de (4.6.2).

Los pasos 2 y 3 son innecesarios por tratarse de una ecuación homogénea y el Paso 4 no es aplicable al no tener una condición inicial dada.

Es importante conocer el comportamiento de la solución obtenida. Ciertamente, depende tanto del signo como del valor absoluto de a_1.

- El signo de a_1 determina si los valores de $(-a_1)^t$ son todos positivos (cuando $-a_1 > 0$) o si van alternándose, según sea par o impar el valor de t (cuando $-a_1 < 0$). Notar que $a_1 > 0 \Leftrightarrow -a_1 < 0$.
- El valor absoluto de a_1 determina si los valores de $(-a_1)^t$ son crecientes (cuando $|a_1| > 1$) o si son decrecientes (cuando $|a_1| < 1$). Notar que $|a_1| = |-a_1|$.

Las seis posibles situaciones están ilustradas gráficamente en la Figura 4.11, considerando $K > 0$ (en caso $K < 0$, las gráficas se obtendrían por simetría de las que se dan, respecto al eje t).

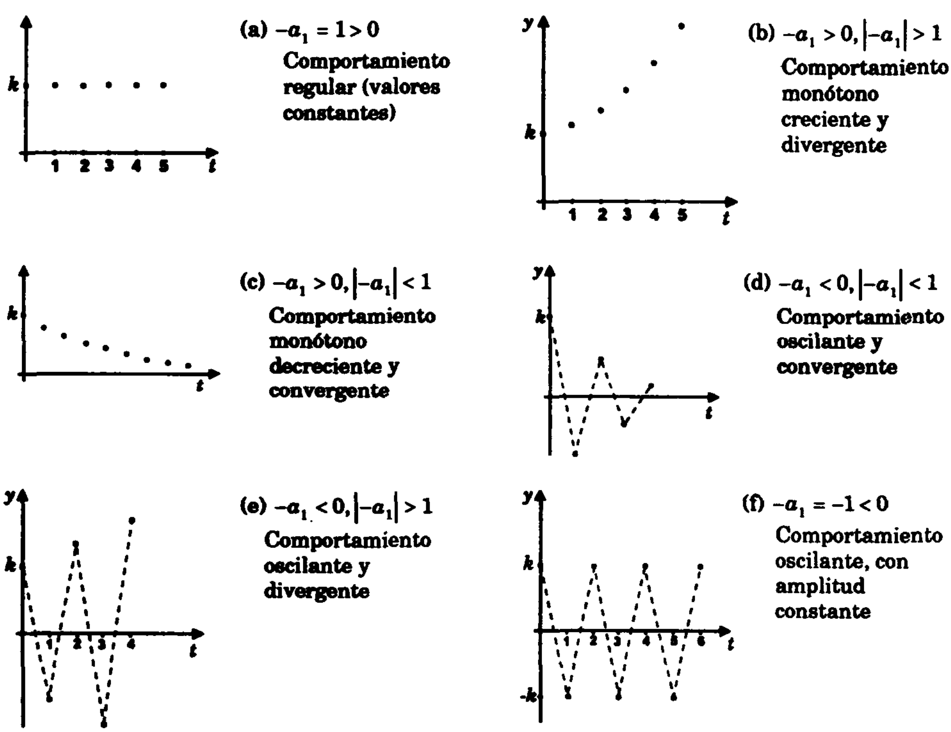


Figura 4.11

Nota 4.35

Al representar las soluciones de ecuaciones en diferencias en el contexto de modelos económicos, suelen unirse los puntos para visualizar mejor la *trayectoria temporal.* Por ejemplo el caso (d) de la Figura 4.11 podría graficarse como en la Figura 4.12, teniendo presente que es sólo una ayuda visual, ya que la función está definida sólo en los números enteros y que obviamente a cada número entero le corresponde un solo valor. Las líneas punteadas representan los "saltos" al pasar de un período a otro.

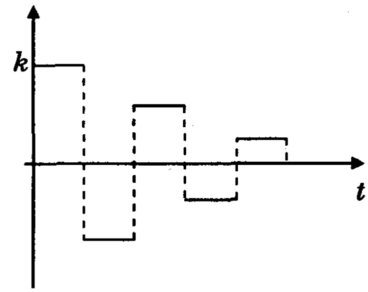


Figura 4.13

Caso 2: $b(t) = c$ (constante)

Así, tenemos la ecuación

$$y_{t+1} + a_1 y_t = c \tag{4.6.4}$$

donde c es una constante arbitraria y $a_1 \neq 0$, como ya se estableció.

Paso 1: El estudio que hemos hecho para el Caso 1 ya nos permite escribir sin nuevos cálculos la solución general de la ecuación reducida

$$y_t = K(-a_1)^t, \tag{4.6.5}$$

siendo K una constante arbitraria.

Paso 2: Como necesitamos cualquier solución particular de la ecuación no homogénea (4.6.4), busquémosla entre las más sencillas; así, veamos si la solución particular es

$$y = \overline{u}(t) = A \text{ (constante).}$$

Esto es verdad, si y sólo si esta función satisface la ecuación dada; esto es, si y sólo si

$$A + a_1 A = c$$

$$\Leftrightarrow \; A = \frac{c}{1 + a_1},$$

lo cual es posible, excepto si $a_1 = -1$. En tal caso, la ecuación (4.6.4) es

$$y_{t+1} - y_t = c \tag{4.6.6}$$

y debemos ensayar otra solución particular.

Analicemos con $y = \overline{w}(t) = At$:

Sustituyendo en (4.6.6) obtenemos

$$A(t+1) - At = c\,,$$

de donde $A = c$

y así, la solución particular de (4.6.4), en caso que $a_1 = -1$, es

$$y = \overline{w}(t) = ct\,. \tag{4.6.7}$$

Paso 3: La solución general de (4.6.4), considerando el paso 1 y las dos posibles situaciones analizadas en el paso 2, es entonces

$$y(t) = \begin{cases} K(-a_1)^t + \dfrac{c}{1+a_1} & \text{si } a_1 \neq -1 \\ K + ct & \text{si } a_1 = -1 \end{cases} \tag{4.6.8}$$

Notas 4.36

1. Si se tiene la condición inicial, por ejemplo, $y(0) = y_0$, entonces,

Paso 4: Haciendo los reemplazos correspondientes:

$$y_0 = K + \frac{c}{1+a_1} \quad \text{si } a_1 \neq -1$$
$$y_0 = K \quad \text{si } a_1 = -1$$

y así

$$K = \begin{cases} y_0 - \dfrac{c}{1+a_1} & \text{si } a_1 \neq -1 \\ y_0 & \text{si } a_1 = -1 \end{cases}$$

y en consecuencia:

– la única solución a la ecuación

$$y_{t+1} + a_1 y_t = c\,, \quad \text{con } a_1 \neq -1$$

y la condición inicial $y(0) = y_0$, es

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{c}{1 + a_1} \right) (-a_1)^t + \frac{c}{1 + a_1} \qquad (4.6.9)$$

– la única solución a la ecuación

$$y_{t+1} - y_t = c \; ,$$

con la condición inicial $y(0) = y_0$, es

$$y(t) = y_0 + ct \qquad (4.6.10)$$

2. El procedimiento seguido en el Paso 2, de ensayar con la función $\overline{w}(t) = At$ al verificar que $\overline{u}(t)$ no tendría sentido, es aplicación de una recomendación de carácter general:

si se conjetura una función como solución particular de la ecuación no homogénea dada y al hacer los reemplazos se obtiene un absurdo, entonces debe hacerse un nuevo ensayo con la función multiplicada por t.

Ejemplo 4.37

Determinar la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sabiendo que

i) $f(k+1) = \frac{1}{2} f(k) + 3$

ii) $f(0) = 1$

Este es un simpático problema que puede ser resuelto aplicando matemáticas básicas pero que ahora resolveremos siguiendo los pasos para obtener la solución de una ecuación en diferencias lineal de primer orden, con coeficientes constantes y condición inicial dada.

Para mantener la notación adoptada, reescribamos la ecuación dada, con $y_k := f(k)$; así

$$y_{k+1} = \frac{1}{2} y_k + 3 \; , \; \text{con } y_0 = 1 \, ,$$

ó

$$y_{k+1} - \frac{1}{2} y_k = 3 \; , \; \text{con } y_0 = 1 \, .$$

Entonces,

Paso 1: Solución general de la ecuación reducida

$$y_{k+1}-\frac{1}{2}y_k=0\,.$$

Según lo visto, es de la forma dada en (4.6.5). En este caso, con $a_1=-\dfrac{1}{2}$, tenemos $y_k=K\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$

siendo K una constante arbitraria.

Paso 2: Buscamos una solución particular de

$$y_{k+1}-\frac{1}{2}y_k=3\,.$$

Sea $\bar{y}(k)=A$ (constante).

Así $A-\dfrac{1}{2}A=3$ y entonces $A=6$, con lo cual $\bar{y}(k)=6$.

Paso 3: La solución general de la ecuación dada es

$$y(k)=K\left(\frac{1}{2}\right)^k+6\,.$$

Paso 4: Determinamos el valor de la constante K:

Usando la condición inicial dada en la solución obtenida en el *Paso 3*, tenemos

$$1=K\left(\frac{1}{2}\right)^0+6\,,$$

de donde $K=-5$ y en consecuencia la única solución de la ecuación dada, con la condición inicial indicada es

$$y_k=-5\left(\frac{1}{2}\right)^k+6\,.$$

Tenemos así la función buscada:

$$f(k)=6-5\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

El lector queda invitado a resolver el problema empleando sólo matemáticas básicas y constatar que la solución obtenida es la misma.

Graficando esta función verificamos que su comportamiento es monótono creciente y convergente (Fig. 4.13)

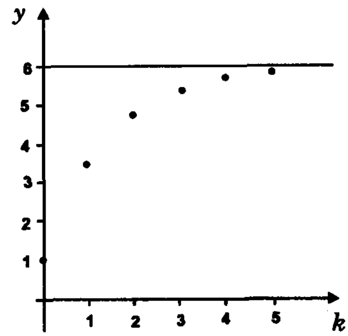


Figura 4.13

Es interesante notar, que siendo $-a_1 = \frac{1}{2} > 0$ y $|-a_1| < 1$, el caso corresponde a uno como el descrito en (c) de la Figura 4.11, pero con dos modificaciones:

- la función no es decreciente sino creciente, por el valor negativo de K (en la Figura 4.11 se considera $K > 0$)
- la convergencia no es hacia 0, por tratarse de la solución de una ecuación *no* homogénea.

También es importante advertir que los valores de $y(k)$ constituyen una sucesión de números reales que converge a 6; es decir

$$\lim_{k \to \infty} \left[6 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^k \right] = 6 .$$

Aplicación 4.38

Ahora podemos resolver la ecuación (4.1.9) que obtuvimos en el modelo discreto (modelo de la telaraña) dado en la sección 4.1:

$$bp_t - dp_{t-1} = c - a , \tag{4.1.9}$$

con $b < 0$ y $d > 0$.

Expresémosla en la forma de (4.6.4):

$$p_{t+1} - \frac{d}{b} p_t = \frac{c-a}{b} . \tag{4.6.11}$$

Hemos dividido entre b y cambiado los subíndices, manteniendo la estructura de los retrasos temporales (en esto último, formalmente sería un *cambio de variable*).

Paso 1: Solución general de

$$p_{t+1} - \frac{d}{b} p_t = 0 .$$

Como ya vimos, es

$$p_t = K \left(\frac{d}{b} \right)^t .$$

Paso 2: Una solución particular de (4.6.11):

Sea $\bar{p}(t) = A$. Esta función constante es solución si y sólo si

$$A - \frac{d}{b} A = \frac{c-a}{b}$$

$$\Leftrightarrow \; A = \frac{\frac{c-a}{b}}{1 - \frac{d}{b}}$$

$$\Leftrightarrow \; A = \frac{c-a}{b-d} \qquad (b-d<0)$$

$$\Leftrightarrow \; A = \frac{a-c}{d-b} \qquad (d-b>0)$$

Paso 3: La solución general de (4.6.11) es

$$p(t) = K \left(\frac{d}{b} \right)^t + \frac{a-c}{d-b} .$$

Paso 4: Asumiendo, como en el modelo, $p(0) = p_0$, tenemos

$$p_0 = K + \frac{a-c}{d-b} ,$$

de donde

$$K = p_0 - \frac{a-c}{d-b} .$$

Así, la solución que cumple la condición inicial es

$$p(t)=\left(p_0-\frac{a-c}{d-b}\right)\left(\frac{d}{b}\right)^t+\frac{a-c}{d-b},$$

que coincide con la que figura en (4.1.11), teniendo en cuenta que $p^*=\dfrac{a-c}{d-b}$.

Observación

La coincidencia del valor de equilibrio de p con la solución particular obtenida en el Paso 2, no es casual ni exclusiva de este ejemplo. Siempre, desde el punto de vista económico, interpretaremos la solución particular $y=\overline{u}(t)$, presente en la solución general de la ecuación no homogénea $E(y)=b(t)$, como el *valor de equilibrio* de $y=y(t)$. Tal equilibrio puede ser estacionario o en movimiento, según $y=\overline{u}(t)$ sea constante, o varíe al variar t. También, en coherencia con lo anterior, a la solución general $y=u(t)$, correspondiente a la ecuación reducida, podemos interpretarla como la que nos expresa las *desviaciones del equilibrio*, puesto que

$$u(t)=y(t)-\overline{u}(t).$$

Cuando estas desviaciones se hacen cada vez más pequeñas, la solución general se va aproximando al valor de equilibrio y entonces se dice que se tiene un *equilibrio estable*. Las condiciones para que se dé esta situación se llaman *condiciones de estabilidad*.

> *En el caso de las ecuaciones en diferencias que estamos estudiando:* $y_{t+1}+a_1y_t=b(t)$, *siendo la solución general de la ecuación reducida* $u(t)=K(-a_1)^t$, *es claro que la condición de estabilidad es* $|-a_1|<1$, *pues así* $\lim\limits_{t\to\infty}u(t)=0$.

En el modelo de la telaraña, como ya lo vimos en la Sección 4.1 –y coherente con lo discutido en el caso 1, al iniciar esta sección– la condición de estabilidad es $\left|\dfrac{d}{b}\right|<1$. En la Figura 4.14 (a) mostramos un caso en el que se

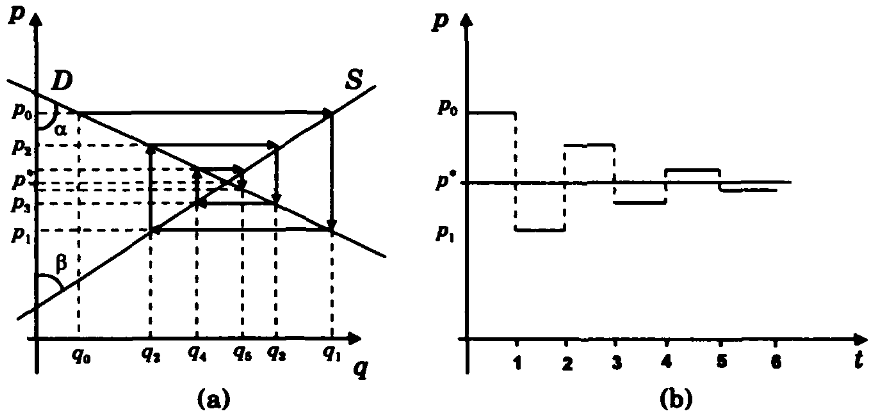


Figura 4.14

cumple esta condición, pues $\alpha > \beta$, y hacemos una ilustración gráfica [1] de lo que ocurre en el mercado según el modelo que dio lugar a la ecuación que hemos resuelto:

$$D_t = a + bp_t\ ,\quad b < 0$$
$$S_t = c + d_{p_{t-1}}\ ,\quad d > 0$$
$$D_t = S_t$$

Asumamos que inicialmente el sistema no está en equilibrio (por ejemplo por una perturbación exógena como una sequía): que la cantidad inicial del producto es q_0 (menor que la cantidad de equilibrio) y que el precio correspondiente es p_0. El precio inicial es mayor que el precio de equilibrio, habiéndose ajustado de modo que la demanda es exactamente q_0. Ante la expectativa de que el precio se mantenga en el siguiente período, se produce una cantidad q_1, que es demandada al precio p_1. Este precio induce a producir la cantidad q_2, que a su vez lleva a un precio p_2, etc.

En la Figura 4.14(b) mostramos el correspondiente comportamiento de los precios a través del tiempo. Notar que las desviaciones del equilibrio se hacen cada vez más pequeñas. El lector queda invitado a hacer ilustraciones gráficas similares, para los casos en que $\left|\frac{d}{b}\right| = 1$ (gráficamente $\alpha = \beta$) y $\left|\frac{d}{b}\right| > 1$ (gráficamente $\alpha < \beta$).

---

[1] Notar que el precio, que figura como variable en las funciones de demanda y oferta, está representado en el eje vertical. En el eje horizontal representamos la cantidad, ya sea ofrecida o demandada.

Aplicación 4.39 (El mercado de bienes en una economía cerrada)

Consideremos el siguiente modelo (es interesante ubicarlo como una parte –y con funciones lineales– del modelo visto en la Aplicación 1.28).

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$
$$C_t = \overline{C} + c(Y_d)_{t-1} \quad 0 < c < 1$$
$$(Y_d)_t = Y_t - T_t$$
$$T_t = \tau Y_t \quad 0 < \tau < 1$$
$$I_t = \overline{I} \text{ (constante)}$$
$$G_t = \overline{G} \text{ (constante)}$$

c es la propensión marginal a consumir, τ es la tasa de impuesto y las variables son el ingreso nacional, el consumo, la inversión, el gasto del gobierno, el ingreso disponible y los impuestos, como en la Aplicación 1.28. Ahora se ha indicado con una barra superior sobre las variables la parte exógena correspondiente.

Haciendo los reemplazos del caso en la primera ecuación, obtenemos

$$Y_t = c(1-\tau)Y_{t-1} + \overline{C} + \overline{I} + \overline{G} \,. \tag{4.6.12}$$

No es necesario resolver esta ecuación para afirmar que según este modelo existe un nivel Y^* de equilibrio estable del ingreso y que los valores que el ingreso tome en períodos sucesivos se irán aproximando –sin oscilaciones– a tal nivel de equilibrio. Esto, porque (4.6.12) es una ecuación en diferencias de primer orden, no lineal, con coeficientes constantes y con $0 < c(1-\tau) < 1$, por lo cual su solución será de la forma

$$Y_t = K\left(c(1-\tau)\right)^t + B \,.$$

Cuanto más pequeño sea $c(1-\tau)$, la convergencia al nivel de equilibrio será más rápida; en consecuencia, si no se considera la actividad del gobierno se tendría $\tau = 0$ y la convergencia sería más lenta, pues $c > c(1-\tau)$.

Caso 3: $b(t) = cd^t$ (c y d constantes, $d \neq 0$)

Así, tenemos la ecuación

$$y_{t+1} + a_1 y_t = cd^t, \tag{4.6.13}$$

donde c y d son constantes dadas, $d \neq 0$ y $a_1 \neq 0$.

Ya sabemos que la solución general de la ecuación reducida es:

$$y_t = K(-a_1)^t \tag{4.6.14}$$

Lo nuevo está en la obtención de la solución particular:

Paso 2: Emplearemos el método de coeficientes indeterminados. Así, asumimos que $\bar{y}(t)$ es de la misma forma que $g(t)$ y ensayamos con

$$\bar{y}(t) = A\,d^t$$

siendo d dado en la ecuación, debemos determinar el valor de A. Esta función es solución de (4.6.13) si y sólo si

$$A\,d^{t+1} + a_1 A\,d^t = c\,d^t$$

$$\Leftrightarrow\; d^t(A\,d + a_1 A - c) = 0$$

$$\Leftrightarrow\; A = \frac{c}{d + a_1}\text{, si } d + a_1 \neq 0$$

y entonces

$$\bar{y}(t) = \frac{c}{d + a_1} d^t\text{, si } d + a_1 \neq 0. \tag{4.6.15}$$

Ocurrirá que $d + a_1 = 0$ si y sólo si $d = -a_1$, lo cual significa que la solución general de la ecuación reducida, dada en (4.6.14) será

$$y_t = K\,d^t$$

y es natural que una solución particular de la ecuación no homogénea no sea del mismo tipo. Así, de acuerdo al punto 2 de Notas 4.36, ensayamos con la función

$$\bar{y}(t) = A\,t\,d^t.$$

Reemplazando en (4.6.13) y asociando adecuadamente obtenemos

$$A\,t\,d^t(d + a_1) + A\,d^{t+1} = c\,d^t$$

de donde, siendo $d + a_1 = 0$,

$$A\,d\,d^t = c\,d^t$$

y así

$$d^t (Ad - c) = 0 .$$

Siendo $d \neq 0$, es claro que $Ad - c = 0$ y entonces

$$A = \frac{c}{d} .$$

En consecuencia, en caso que $d + a_1 = 0$,

$$\bar{y}(t) = \frac{c}{d} t d^t ;$$

o sea

$$\bar{y}(t) = c t d^{t-1} \tag{4.6.16}$$

Paso 3: Resumiendo las dos posibles situaciones analizadas en el Paso 2 y según (4.6.14) – (4.6.16), la solución general de (4.6.13) es

$$y(t) = \begin{cases} K(-a_1)^t + \dfrac{c}{d + a_1} d^t, & \text{si } d + a_1 \neq 0 \\ K d^t + c t d^{t-1} & , \text{ si } d + a_1 = 0 \end{cases} \tag{4.6.17}$$

Ejemplo 4.40

Modifiquemos ligeramente el problema dado en el Ejemplo 4.37:

Determinar la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sabiendo que

i) $f(k+1) = \frac{1}{2} f(k) + \frac{1}{4} 3^k$

ii) $f(0) = 1$

Debemos resolver la ecuación

$$y_{k+1} - \frac{1}{2} y_k = \frac{1}{4} 3^k , \text{ con } y_0 = 1$$

(Es útil comparar los resultados, paso a paso, con los del Ejemplo 4.37)

Paso 1: La solución general de la ecuación reducida es $y_k = K\left(\frac{1}{2}\right)^k$, con K constante arbitraria.

Paso 2: Buscamos una solución particular de $y_{k+1} - \frac{1}{2} y_k = \frac{1}{4} 3^k$.

Sea $\qquad \bar{y}(k) = A3^k.$

Reemplazando y operando convenientemente obtenemos

$$3^t\left(3A - \frac{1}{2}A - \frac{1}{4}\right) = 0$$

de donde $\qquad A = \dfrac{1}{10}$

y así $\qquad \bar{y}(k) = \dfrac{1}{10}3^k.$

Paso 3: La solución general de la ecuación dada es

$$y(k) = K\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{10}3^k.$$

Paso 4: Determinamos el valor de la constante K:

$y_0 = 1$ y la solución general obtenida implican

$$1 = K\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \frac{1}{10}3^0,$$

de donde $K = \dfrac{9}{10}$ y en consecuencia la única solución a la ecuación, con condición inicial, dada es

$$y_k = \frac{9}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{10}3^k.$$

Así, la solución del problema planteado es la función

$$f(k) = \frac{9}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{10}3^k$$

Notar que aunque existe equilibrio estable, pues $-a_1 = -\dfrac{1}{2}$ y así $|-a_1| < 1$, no tenemos un valor de equilibrio constante sino "en movimiento", pues la solución particular ya vimos que es $\bar{y}(k) = \dfrac{1}{10}3^k$. Sin embargo, es fácil observar que el comportamiento de la solución general, conforme k vaya tomando valores cada vez mayores, es similar al comportamiento de $\bar{y}(k)$, pues siendo $\frac{9}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ cada vez más pequeño, influirá cada vez menos en el valor de $f(k)$. (Por analogía con los casos de funciones continuas, podríamos decir que existe una *aproximación asintótica* de f a $\overline{y}$).

Caso 4: $b(t)$ es un polinomio de grado r.

Tenemos entonces la ecuación

$$y_{t+1} + a_1 y_t = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \ldots + d_r t^r, \qquad (4.6.18)$$

donde $d_0, d_1, \ldots, d_r$ son constantes.

Siguiendo un procedimiento similar a los ya vistos, el lector puede encontrar la solución particular correspondiente a cada polinomio concreto. Como ejemplo damos la solución general para el *polinomio de primer grado*:

$$y(t) = \begin{cases} K(-a_1)^t + \dfrac{d_1}{1+a_1}t + \dfrac{d_0(1+a_1)-d_1}{(1+a_1)^2} & , \text{ si } 1+a_1 \neq 0 \\ K + \dfrac{d_1}{2}t^2 + \left(d_0 - \dfrac{d_1}{2}\right)t & , \text{ si } 1+a_1 = 0 \end{cases} \qquad (4.6.19)$$

Notas 4.41

1. Con lo visto hasta ahora, el lector tiene ya idea de cómo proceder para resolver ecuaciones del tipo (4.6.1) con diversas funciones $b = b(t)$. (Los casos que hemos visto son los más frecuentes en economía). En general, usando el método de coeficientes indeterminados, la función con la que –en principio– se debe ensayar, es una del mismo tipo que $b(t)$. Si se llega a un absurdo, o se ve con anticipación que tal función ya es solución de la ecuación reducida, debe ensayarse con la función multiplicada por t. (Cuando se estudie ecuaciones de órdenes superiores, se verá que puede ser necesario multiplicar la función más de una vez por t).

   El siguiente cuadro es una buena ayuda

$b(t)$	$\bar{y}(t)$ (tentativa)
c (constante)	A (constante)
d^t	Ad^t
t^r	$A_r t^r + A_{r-1} t^{r-1} + \ldots + A_1 t + A_0$
$\operatorname{sen} mt$ ó $\cos mt$	$A \operatorname{sen} mt + B \cos mt$
$t^r d^t$	$d^t \left(A_r t^r + A_{r-1} t^{r-1} + \ldots + A_1 t + A_0\right)$
$d^t \operatorname{sen} mt$ ó $d^t \cos mt$	$d^t (A \operatorname{sen} mt + B \cos mt)$

(4.6.20)

2. Para el caso en que $b(t)$ sea suma de algunas funciones, tener en cuenta la siguiente proposición, fácil de demostrar:

   Si $\bar{y}(t)$ es solución de $E(y) = b_1(t)$ y $\bar{\bar{y}}(t)$ es solución de $E(y) = b_2(t)$, entonces $\bar{y}(t) + \bar{\bar{y}}(t)$ es solución de $E(y) = b_1(t) + b_2(t)$

   En consecuencia, para obtener la solución particular de la ecuación $E(y) = b_1(t) + b_2(t)$, bien puede procederse –con ayuda del cuadro anterior– a obtener las soluciones particulares de

   $$E(y) = b_1(t) \text{ y de } E(y) = b_2(t)$$

   y luego sumarlas.

3. Es importante que el estudiante se habitúe a resolver las ecuaciones en diferencias concretas que se le presenten, teniendo como pauta las discusiones hechas en los casos vistos y *no* se limite a memorizar o a aplicar mecánicamente las fórmulas obtenidas al final de las discusiones.

Ejemplo 4.42

Resolver $y_{t+1} - 2y_t = 4^t + t + 5$

Una solución particular de $y_{t+1} - 2y_t = 4^t$

es
$$\overline{y}(t)=\frac{1}{2}4^t .$$

Una solución particular de
$$y_{t+1}-2y_t=t+5$$
es
$$\overline{\overline{y}}(t)=-t-6 .$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación dada es
$$y(t)=K2^t+\frac{1}{2}4^t-t-6 .$$

Ejercicios 4.43

1. Resolver las siguientes ecuaciones en diferencias, suponiendo que $y_0=2$. Esbozar el comportamiento de la función en un gráfico en el plano ty

   a) $y_{t+1}-3y_t+1=0$ d) $y_{t+1}+3y_t=3(4^t)$

   b) $y_{t+1}-y_t-2=0$ e) $y_{t+1}-2y_t=5(3^t)+4$

   c) $3y_{t+1}-2y_t=3$ f) $y_{t+1}-2y_t=5(2^t)$

2. Dada la función de demanda $Q_t=30-2p_t$ y la función de oferta $Q_t=-6+4p_{t-1}$, determinar las funciones p_t y Q_t considerando $p_0=4$. Ilustrar gráficamente el comportamiento de p_t y mostrar la coherencia con el diagrama de fase correspondiente.

3. ¿Cómo se modifica el análisis del ejercicio anterior al cambiar la función de oferta por $Q_t=-6+2p_{t-1}$?

4. Resolver en detalle el modelo de la Aplicación 4.39 considerando Y_0 como valor inicial del ingreso.

   ¿Cómo son las trayectorias temporales del consumo, de los impuestos y del ingreso disponible?

5. ¿Cómo se modifican los resultados y la rapidez de convergencia al equilibrio al considerar en el modelo de la Aplicación 4.39 el gasto del gobierno $G_t=gY_{t-1}$, siendo $0<g<1$?

4.7 ECUACIONES EN DIFERENCIAS DE ORDEN SUPERIOR, LINEALES Y CON COEFICIENTES CONSTANTES

Nos ocuparemos ahora de las ecuaciones de la forma dada en (4.5.2):

$$y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + \ldots + a_{n-1} y_{t+1} + a_n y_t = b(t)\,, \qquad (4.7.1)$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, n es entero mayor que 1 y $b = b(t)$ es una función dada.

En virtud del Teorema 4.29, es fundamental conocer la solución general de la ecuación homogénea (*Paso 1*), por ello, veamos primero tal caso

Caso 1: $b(t) \equiv 0$ (*ecuación homogénea*)

Tenemos entonces la ecuación

$$y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + \ldots + a_{n-1} y_{t+1} + a_n y_t = 0 \qquad (4.7.2)$$

Paso 1: En base a lo visto en el Caso 1 de la sección anterior, conjeturamos que una solución de esta ecuación es de la forma

$$y(t) = \lambda^t$$

con $\lambda \neq 0$ (descartamos $\lambda = 0$, pues tendríamos $y(t) \equiv 0$, que es una solución trivial). Al reemplazarla en (4.7.2) obtendremos los valores de λ para los cuales $y(t) = \lambda^t$ es realmente una solución de la ecuación homogénea dada:

$$\begin{aligned} & \lambda^{t+n} + a_1 \lambda^{t+n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda^{t+1} + a_n \lambda^t = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda^t\left(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (4.7.3) \end{aligned}$$

Hemos llegado así a una ecuación algebraica (polinómica de grado n, con los mismos coeficientes que (4.7.2)) que se denomina *ecuación característica* de (4.7.2), cuyas n raíces nos dan n valores de λ para los cuales $y(t) = \lambda^t$ es solución de (4.7.2). Recordemos que para tener la solución general de (4.7.2), necesitamos n soluciones de esta ecuación, que sean linealmente independientes (Nota 4.28), y que al resolver la ecuación característica obtenemos n valores de λ, pero considerando tanto las raíces repetidas, como las raíces que no son números reales; en consecuencia, hace falta complementar la información que nos da la ecuación característica.

Un conjunto de n soluciones linealmente independientes de (4.7.2) se denomina un **conjunto fundamental de soluciones** de tal ecuación y el siguiente teorema nos da una caracterización muy útil de tales conjuntos. Con base en este teorema se establecen reglas para obtener las n soluciones que necesitamos de la ecuación homogénea en diferencias (4.7.2), a partir de las soluciones de la ecuación algebraica (4.7.3).

Teorema 4.44 Las soluciones $y = u_1(t)$, $y = u_2(t)$, ... , $y = u_n(t)$ de la ecuación (4.7.2) forman un conjunto fundamental de soluciones de (4.7.2) si y sólo si

$$\begin{vmatrix} u_1(0) & u_2(0) & \cdots & u_n(0) \\ u_1(1) & u_2(1) & \cdots & u_n(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1(n-1) & u_2(n-1) & \cdots & u_n(n-1) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (4.7.4)$$ [1]

Anotemos ahora las reglas que nos permitirán encontrar un conjunto fundamental de soluciones, y en consecuencia la solución general de (4.7.2), teniendo las soluciones de (4.7.3) [2]

R1. Consideramos la solución $y(t) = c\lambda^t$, con c constante arbitraria, por cada raíz real λ no repetida, de (4.7.3).

R2. Consideramos las soluciones

$$y(t) = c_1\lambda^t,\ y(t) = c_2 t\lambda^t,\ \dots,\ y(t) = c_p t^{p-1}\lambda^t,$$

con c_1, c_2, ... , c_p constantes arbitrarias, cuando la raíz real λ de (4.7.3) se repite p veces.

---

1 Este determinante, algunos autores lo llaman el *Casorati* y es análogo al *Wronskiano* para las ecuaciones diferenciales.

2 El lector puede tener la impresión de estar entrando a terreno complicado; sin embargo no es así. La apariencia complicada la da el carácter general que estamos adoptando, pero en cada caso concreto la situación es sencilla. No haber estudiado números complejos dificulta un tanto cuando éstos se presentan, pero el siguiente pié de página será una ayuda.

R3. Consideramos la solución

$$y(t) = r^t(A\cos t\theta + B\,\mathrm{sen}\,t\theta),$$

con A y B constantes arbitrarias, por cada par de raíces complejas conjugadas (no reales) de (4.7.3) cuyo módulo es r y cuyo ángulo (en la forma polar) es θ [1].

R4. Consideramos las soluciones

$$\begin{aligned} y(t) &= r^t\left(A_1\cos t\theta + B_1\,\mathrm{sen}\,t\theta\right) \\ y(t) &= t\,r^t\left(A_2\cos t\theta + B_2\,\mathrm{sen}\,t\theta\right) \\ &\vdots \\ y(t) &= t^{q-1}r^t\left(A_q\cos t\theta + B_q\,\mathrm{sen}\,t\theta\right), \end{aligned}$$

con A_i, B_i $(i = 1,2,\ldots,q)$ constantes arbitrarias, cuando un par de raíces conjugadas complejas de (4.7.3) se repite q veces.

Como en el Caso 1 de la Sección 4.6, los pasos *P2* y *P3* son innecesarios y *P4* no es aplicable por no tener condiciones iniciales dadas.

Ejemplos 4.45

1. Encontraremos la solución general de la ecuación de tercer orden:

$$y_{t+3} + 4y_{t+2} - 3y_{t+1} - 18y_t = 0\ .$$

Su ecuación característica es la ecuación polinómica de tercer grado:

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 18 = 0\ .$$

Es sencillo resolver esta ecuación, ya que el polinomio es factorizable; así

$$(\lambda - 2)(\lambda + 3)^2 = 0\ ;$$

---

[1] Los números complejos $\alpha + i\beta$ y $\alpha - i\beta$ se llaman conjugados. Todo complejo $\alpha \pm i\beta$ puede escribirse en forma polar como $r(\cos\theta \pm i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, donde $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $r\cos\theta = \alpha$ y $r\,\mathrm{sen}\,\theta = \beta$.

Según el Teorema de Moivre:

$$(\cos\theta \pm i\,\mathrm{sen}\,\theta)^t = \cos t\theta \pm i\,\mathrm{sen}\,t\theta, \text{ para } t \in \mathbb{N}.$$

y en consecuencia las raíces son

$$\lambda_1 = 2\ ,\ \lambda_2 = -3\ ,\ \lambda_3 = -3\ .$$

Vemos que todas las raíces son reales y que una de ellas se repite dos veces; luego, en virtud de R1 y R2, las funciones $y(t) = 2^t$, $y(t) = (-3)^t$, $y(t) = t(-3)^t$ constituyen un conjunto fundamental de soluciones y la solución general de la ecuación dada es

$$y(t) = c_1 2^t + c_2 (-3)^t + c_3 t(-3)^t,$$

con c_1, c_2 y c_3 constantes arbitrarias.

Se puede verificar fácilmente que se cumple el Teorema 4.44, pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 4 & 9 & 27 \end{vmatrix} \neq 0$$

2. Resolvamos la ecuación de segundo orden

$$y_{t+2} - 2y_{t+1} + 5y_t = 0\ .$$

Su ecuación característica es

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

y sus raíces son

$$\lambda_1 = \frac{2 + \sqrt{-20}}{2}\ ,\ \lambda_2 = \frac{2 - \sqrt{-20}}{2}\ ;$$

o sea los complejos conjugados

$$\lambda_1 = 1 + 2i\ ,\ \lambda_2 = 1 - 2i\ .$$

El conjunto fundamental de soluciones está formado por $y(t) = (1+2i)^t$, $y(t) = (1-2i)^t$, como es fácil verificar. Según R2 la solución general de la ecuación dada es

$$y(t) = \left(\sqrt{5}\right)^t (A \cos t\theta + B \operatorname{sen} t\theta)\ ,$$

donde θ es tal que $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ y A y B son constantes arbitrarias.

La forma de esta solución general es consecuencia de la forma polar de los números complejos y del Teorema de Moivre (ver último pié de página); así

$$
\begin{aligned}
y(t) &= K_1(2+i)^t + K_2(2-i)^t \\
&= K_1\left[\sqrt{5}(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)\right]^t + K_2\left[\sqrt{5}(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta)\right]^t \\
&= K_1\left[\left(\sqrt{5}\right)^t(\cos t\theta + i\,\mathrm{sen}\,t\theta)\right] + K_2\left[\left(\sqrt{5}\right)^t(\cos t\theta - i\,\mathrm{sen}\,t\theta)\right] \\
&= \left(\sqrt{5}\right)^t\left[(K_1+K_2)\cos t\theta + i(K_1-K_2)\,\mathrm{sen}\,t\theta\right],
\end{aligned}
$$

lo cual, considerando K_1 y K_2 constantes complejas conjugadas arbitrarias, es una función de la forma dada directamente según R3. ($K_1 + K_2$ e $i(K_1 - K_2)$ resultan constantes reales, como A y B).

Notar que las funciones

$$y(t) = (2+i)^t,\ y(t) = (2-i)^t$$

constituyen un conjunto fundamental de soluciones, pues se cumple el Teorema 4.44:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2+i & 2-i \end{vmatrix} = -2i \neq 0 .$$

3. Como tercer ejemplo e ilustración del Teorema 4.44 y las reglas dadas, veamos la *ecuación homogénea lineal de segundo orden* en términos generales:

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = 0 . \tag{4.7.5}$$

Su ecuación característica es

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \tag{4.7.6}$$

y las raíces de ésta están dadas por

$$\lambda = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} . \tag{4.7.7}$$

Tenemos entonces los tres casos conocidos en las ecuaciones algebraicas de segundo grado, que nos ilustrarán las reglas R1, R2 y R3. (En este caso no se puede presentar una situación en la que tenga que aplicarse R4).

i) $a_1^2 - 4a_2 > 0$

- Las raíces de (4.7.6) son números reales diferentes, digamos λ_1 y λ_2.
- Las funciones $y(t) = \lambda_1^t$, $y(t) = \lambda_2^t$ constituyen un conjunto fundamental de soluciones, pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$$

  por ser $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
- Según R1, coherente con la Nota 4.28, la solución general de (4.7.5) en este caso es

$$y(t) = c_1 \lambda_1^t + c_2 \lambda_2^t \tag{4.7.8}$$

ii) $a_1^2 - 4a_2 = 0$

- Las raíces de (4.7.6) son números reales iguales. Dicho de otra manera, (4.7.6) tiene sólo una raíz real que se repite dos veces. Tal raíz, observando (4.7.7), podemos darnos cuenta fácilmente que es

$$\lambda = -\frac{a_1}{2}.$$

- La función $y(t) = t\lambda^t$ satisface (4.7.5), pues sustituyéndola en el primer miembro, tenemos

$$(t+2)\lambda^{t+2} + a_1(t+1)\lambda^{t+1} + a_2 t\lambda^t \;=\; t\lambda^t\left(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2\right) + \lambda^{t+1}(2\lambda + a_1) \;=\; 0,$$

  ya que ambos paréntesis son nulos: el primero por ser λ una raíz de la ecuación característica y el segundo porque $\lambda = -a_1/2$.
- Las funciones $y(t) = \lambda^t$, $y(t) = t\lambda^t$ forman un conjunto fundamental de soluciones, pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \neq 0$$

  Recordemos que descartamos desde el inicio el valor cero de λ, pero también podemos ver en este caso que $\lambda = 0$ implicaría que $a_1 = 0$ y, como $a_1^2 = 4a_2$, también que $a_2 = 0$, con lo cual (4.7.5) ya no sería una ecuación de segundo orden).
- Según R2, coherente con la Nota 4.28, la solución general de (4.7.5) en este caso es

$$y(t) = c_1\lambda^t + c_2 t\lambda^t \tag{4.7.9}$$

iii) $a_1^2 - 4a_2 < 0$

- Las raíces de (4.7.6) no son números reales. Son los números complejos

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 + i\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{-a_1 - i\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}$$

  que podemos escribir resumidamente

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta\,,$$

  siendo

$$\alpha = -\frac{a_1}{2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}\,.$$

  (Notar que $a_1^2 - 4a_2 < 0 \Rightarrow 4a_2 - a_1^2 > 0$)

- Las funciones $y(t) = (\alpha + i\beta)^t$, $y(t) = (\alpha - i\beta)^t$ constituyen un conjunto fundamental de soluciones, pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha + i\beta & \alpha - i\beta \end{vmatrix} = -2i\beta \neq 0$$

- Según la Nota 4.28, la solución general de (4.7.5) es

$$y(t) = K_1(\alpha + i\beta)^t + K_2(\alpha - i\beta)^t$$

  y procediendo como en el ejemplo anterior, escribimos la solución en la forma indicada en R3

$$y(t) = r^t(A\cos t\theta + B\,\mathrm{sen}\,t\theta)\,, \tag{4.7.10}$$

  donde

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{a_2} \quad (\neq 0)$$

  y θ es tal que

$$\cos\theta = \frac{\alpha}{r} = -\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\,, \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{\beta}{r} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - \frac{a_1^2}{a_2}}\,.$$

Caso 2: $b(t) \neq 0$

Ya no nos detendremos a examinar casos como los de una función constante, exponencial, polinómica, trigonométrica o combinaciones de éstas, pues lo expuesto en la Nota 4.41 sigue siendo completamente válido.

Ejemplos 4.46

Determinar la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, sabiendo que

i) $f(k+3) = 18f(k) + 3f(k+1) - 4f(k+2) + 10(-3)^k$

ii) $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 6$.

Evidentemente es posible obtener los valores de $f(3)$, $f(4)$, etc., haciendo los reemplazos del caso; sin embargo, para hallar la expresión general de f, parece inevitable el empleo de las ecuaciones en diferencias que acabamos de ver. Así, se trata de resolver la ecuación no homogénea de tercer orden

$$y_{k+3} + 4y_{k+2} - 3y_{k+1} - 18y_k = 10(-3)^k \tag{4.7.11}$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = 1, \ y(1) = 3, \ y(2) = 6.$$

Paso 1: Solución general de la ecuación reducida

$$y_{k+3} + 4y_{k+2} - 3y_{k+1} - 18y_k = 0.$$

Esta es la misma que vimos en el primero de los Ejemplos 4.45 y ya sabemos que su solución general es

$$y_k = c_1 2^k + c_2(-3)^k + c_3 k(-3)^k,$$

con c_1, c_2 y c_3 constantes arbitrarias.

Paso 2: Buscamos una solución particular de la ecuación no homogénea dada.

Como $b(k) = 10(-3)^k$, ensayaremos con $\bar{y}(k) = A(-3)^k$; sin embargo, observamos que una función de este tipo ya es solución de la ecuación reducida. Más aún, también la función $y(k) = k(-3)^k$ es solución de la ecuación reducida; por ello, en lugar de multiplicar por k la función inicial tentativa, la multiplicaremos por k^2; esto es, ensayamos con

$$\bar{y}(k) = A k^2 (-3)^k.$$

Reemplazando en la ecuación (4.7.11) obtenemos

$$-90A(-3)^k = 10(-3)^k,$$

de donde $A = -\frac{1}{9}$ y así

$$\bar{y}(k) = -\frac{1}{9}k^2(-3)^k.$$

Paso 3: La solución general de (4.7.11) es

$$y(k) = c_1 2^k + c_2(-3)^k + c_3 k(-3)^k - \frac{1}{9}k^2(-3)^k$$

Paso 4: Haciendo uso de las condiciones iniciales obtenemos:

$$1 = y(0) = c_1 + c_2$$

$$3 = y(1) = 2c_1 - 3c_2 - 3c_3 + \frac{1}{3}$$

$$6 = y(2) = 4c_1 + 9c_2 + 18c_3 - 4$$

de donde $c_1 = \frac{7}{5}$, $c_2 = -\frac{2}{5}$, $c_3 = \frac{4}{9}$ y tenemos finalmente la función buscada:

$$f(k) = \frac{7}{5}2^k - \frac{2}{5}(-3)^k + \frac{4}{9}k(-3)^k - \frac{1}{9}k^2(-3)^k.$$

Es fácil advertir que el comportamiento de esta función es oscilante y divergente.

Observaciones 4.47 (Análisis cualitativo de las soluciones)

1. Es fundamental conocer el comportamiento de la solución general de una ecuación en diferencias. Sobre todo en teoría económica interesará saber si las soluciones de un modelo dinámico discreto se acercan o no a ciertos valores de equilibrio o a ciertas trayectorias de equilibrio, independientemente de las condiciones iniciales; es decir, si las soluciones son estables o no. Ciertamente tal información está en la solución general $y = u(t)$ de la ecuación homogénea correspondiente. Así, *la solución es estable si* $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ *y esto se cumple –por la forma que tiene esta función– si y sólo si todas las raíces de la ecuación característica tienen módulo menor que 1.*[1] (Para el *sólo si* no se están considerando los casos particulares en los que el comportamiento divergente de una de las funciones queda anulado por resultar cero el valor de su coeficiente al considerar las condiciones iniciales)

[1] Empleamos el concepto más general de módulo, en lugar de valor absoluto, para incluir a las raíces complejas no reales.

2. En el caso de las ecuaciones de primer orden ya vimos que la condición de estabilidad de las soluciones de una ecuación de la forma (4.6.1) es $|-a_1| < 1$ (ver la observación luego de la Aplicación 4.38) y esto es coherente con lo dicho en la observación anterior, pues $-a_1$ es la única raíz de $\lambda + a_1 = 0$, que es la ecuación característica de $y_{t+1} + a_1 y_t = b(t)$. En general, las raíces de la ecuación característica dependen de los coeficientes de tal ecuación, y será muy útil tener información acerca del módulo de las raíces en base a estos coeficientes y sin necesidad de resolver la ecuación característica, sobre todo cuando éstas sean de grado mayor que 2.

3. Aunque se tiene una fórmula para resolver las ecuaciones algebraicas de segundo grado, será más cómodo y útil en el análisis de modelos económicos tener información acerca de la estabilidad de una solución sin necesidad de calcular las raíces de la ecuación característica correspondiente a una ecuación en diferencias de segundo orden. Antes de dar los criterios, veamos brevemente cómo pueden ser las soluciones de $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = 0$

   i) $u(t) = c_1 \lambda_1^t + c_2 \lambda_2^t$

   ii) $u(t) = c_1 \lambda^t + c_2 t \lambda^t$

   iii) $u(t) = r^t (A \cos t\theta + B \operatorname{sen} t\theta)$

   - Es claro que en el caso (i), $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0 \Leftrightarrow |\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| < 1$. (Si por lo menos una de las raíces es negativa, la trayectoria será oscilante).
   - En (ii): $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0 \Leftrightarrow |\lambda| < 1$, porque también $\lim_{t\to\infty} t\lambda^t = 0$, cuando $|\lambda| < 1$. Esto último es un ejercicio de análisis matemático cuya validez puede intuirse al observar que el acercamiento de λ^t a cero es *tan rápido*, que atenúa completamente la tendencia explosiva del factor t.

     (Si λ es negativo se tendrá una trayectoria oscilante).
   - En (iii): $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0 \Leftrightarrow r < 1$, pues ya sabemos que $r > 0$ y la parte que está entre paréntesis tiene un valor acotado debido a que las funciones seno y coseno oscilan entre -1 y 1. Una manera de ver más claro es reescribiendo la solución en la forma

$$u(t) = C_1 r^t \cos(t\theta - C_2) ,$$

que resulta al escribir las constantes arbitrarias A y B de (iii) en función de otras constantes arbitrarias C_1 y C_2, de modo que pueda aplicarse la fórmula del coseno de una diferencia. Así

$$A = C_1 \cos C_2 \text{ y } B = C_1 \operatorname{sen} C_2$$

conducen inmediatamente a la nueva expresión de la solución. Es más claro ahora que $u(t)$ es una función oscilante, de período $2\pi/\theta$ y cuya amplitud será creciente en caso $r > 1$, constante si $r = 1$ o decreciente si $r < 1$.

4. Se puede demostrar[1] que las raíces de la ecuación característica correspondiente a la ecuación

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = b(t)$$

son ambas de módulo menor que 1, si y sólo si

$$\begin{aligned} &1 + a_1 + a_2 > 0 \\ &1 - a_2 > 0 \\ &1 - a_1 + a_2 > 0 \end{aligned} \tag{4.7.2}$$

y por lo expuesto en la observación anterior, éstas son las *condiciones necesarias y suficientes de estabilidad* para las soluciones generales de las ecuaciones en diferencias de segundo orden.

Ejemplos:

a) Veamos la segunda ecuación que resolvimos en Ejemplos 4.45:

$$y_{t+2} - 2y_{t+1} + 5y_t = 0$$

$a_1 = -2$ y $a_2 = 5$; por consiguiente

$$\begin{aligned} &1 + a_1 + a_2 = 4 > 0 \\ &1 - a_2 = -4 < 0 \\ &1 - a_1 + a_2 = 8 > 0 \end{aligned}$$

y vemos que *no* se cumplen las condiciones de estabilidad, lo cual es coherente con los resultados que obtuvimos al resolverla, pues $r = \sqrt{5} > 1$ y así la trayectoria es oscilante explosiva. (Notar que sabiendo que $a_1^2 - 4a_2 < 0$, es suficiente verificar si se cumple que $a_2 < 1$,

---

[1] Se recomienda leer la demostración dada en *Gandolfo G.*: [8]

pues $r = \sqrt{a_2}$, como lo vimos al estudiar la ecuación (4.7.2) en el caso (iii)).

b) Analicemos la estabilidad de las soluciones de la ecuación

$$15y_{t+2} - 7y_{t+1} - 2y_t = 60 .$$

Su ecuación característica es

$$15\lambda^2 - 7\lambda - 2 = 0 ;$$

o, equivalentemente:

$$\lambda^2 - \frac{7}{15}\lambda - \frac{2}{15} = 0 .$$

Así:

$$a_1 = -\frac{7}{15} , \quad a_2 = -\frac{2}{15}$$

y en consecuencia

$$1 + a_1 + a_2 = \frac{6}{15} > 0$$
$$1 - a_2 = \frac{17}{15} > 0$$
$$1 - a_1 + a_2 = \frac{4}{3} > 0$$

y vemos que se cumplen las condiciones de estabilidad.

Siendo $\overline{y}(t) = 10$ la solución particular que se considere en la solución general de la ecuación dada, ocurrirá entonces que para cualquier par de condiciones iniciales que se den, la solución de la ecuación convergerá a 10, que es el valor de equilibrio. El lector queda invitado a resolver en detalle la ecuación y verificar lo que estamos afirmando.

5. Las condiciones de estabilidad, en términos de los coeficientes de la ecuación se van complicando al subir el orden de la ecuación; así, para las de tercer orden

$$y_{t+3} + a_1 y_{t+2} + a_2 y_{t+1} + a_3 y_t = b(t)$$

las condiciones necesarias y suficientes de estabilidad de las soluciones son

$$\begin{aligned} 1 + a_1 + a_2 + a_3 &> 0 \\ 3 - a_1 - a_2 + 3a_3 &> 0 \\ 1 - a_1 + a_2 - a_3 &> 0 \\ 3 + a_1 - a_2 - 3a_3 &> 0 \\ -a_3^2 + a_1 a_3 - a_2 + 1 &> 0 , \end{aligned} \tag{4.7.3}$$

donde la segunda y cuarta desigualdades son alternativas, ya que con una de ellas y las tres restantes puede obtenerse la otra.

6. Para las soluciones de ecuaciones de orden n, en general, las condiciones necesarias y suficientes de estabilidad conocidas son las de Schur y de Samuelson; sin embargo, también son útiles otras más sencillas aunque sólo son necesarias o sólo son suficientes como las de Smithies (1942); o sólo son suficientes, como las de Sato (1970). A continuación las enunciamos, todas referidas a la ecuación característica

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \tag{4.7.4}$$

con $a_i \in \mathrm{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ y $a_0 = 1$.

6.1 Condiciones necesarias y suficientes de estabilidad según Schur:

Los siguientes n determinantes deben ser, todos positivos: (Notar las simetrías entre las submatrices opuestas que se indican con las líneas discontínuas)

$$\left|\begin{array}{c:c} a_0 & a_n \\ \hdashline a_n & a_0 \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{cc:cc} a_0 & 0 & a_n & a_{n-1} \\ a_1 & a_0 & 0 & a_n \\ \hdashline a_n & 0 & a_0 & a_1 \\ a_{n-1} & a_n & 0 & a_0 \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{ccc:ccc} a_0 & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & a_n \\ \hdashline a_n & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & a_0 \end{array}\right|,$$

$$, \ldots, \left|\begin{array}{cccc:cccc} a_0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 & a_n & \cdots & a_2 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \\ \hdashline a_n & 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{array}\right| \tag{4.7.5}$$

6.2 Condiciones suficientes de estabilidad:

a) Según Sato:

Si los coeficientes a_i de (4.7.4) son todos positivos y se cumple que

$$1 > a_1 > a_2 > \ldots > a_n , \tag{4.7.6}$$

entonces todas las raíces de (4.7.4) tienen módulo menor que 1.

b) Según Smithies:

Dada la ecuación (4.7.4), si se cumple que

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| < 1 , \tag{4.7.7}$$

entonces todas las raíces de (4.7.4) tienen módulo menor que 1.

6.3 Condiciones necesarias de estabilidad, según Smithies:
Si la ecuación (4.7.4) tiene todas sus raíces con módulo menor que 1, entonces se cumple que

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i < 1 , \tag{4.7.8}$$

Aplicación 4.48 (Una extensión del modelo de la telaraña)

En el modelo de la telaraña dado en la Sección 4.1 y retomado en la Aplicación 4.38, tenemos:

$$\begin{aligned} D_t &= a + b\,p_t , \qquad b < 0 \\ S_t &= c + d\,p_{t-1} , \qquad d > 0 \\ D_t &= S_t . \end{aligned}$$

Así, se está considerando que la oferta depende de un precio esperado $\hat{p}_t$, que se está asumiendo igual al precio "que limpia" el mercado en el período anterior; es decir, se tiene

$$S_t = c + d\,\hat{p}_t ,$$

con

$$\hat{p}_t = p_{t-1} .$$

Parece más natural asumir, por ejemplo, que el precio esperado $\hat{p}_t$ esté vinculado con p_{t-1}, pero también con el último cambio respecto al período tras anterior; así una manera de formalizar esta asunción es

$$\hat{p}_t = p_{t-1} + \nu(p_{t-1} - p_{t-2}) , \tag{4.7.9}$$

donde ν es una constante llamada *coeficiente de expectativas*[1] y tenemos ahora el siguiente modelo

[1] Ver *R. M. Goodwin*: Dynamic coupling with special reference to markets having production lags. Econometrica, 15 (1947).

$$D_t = a + b\,p_t\,, \qquad b < 0$$
$$S_t = c + d\left[p_{t-1} + \nu\left(p_{t-1} - p_{t-2}\right)\right], \qquad d > 0$$
$$D_t = S_t\,.$$

De estas ecuaciones es fácil obtener la siguiente ecuación en diferencias de 2do. orden:

$$b\,p_t - d(1+\nu)p_{t-1} + d\,\nu\,p_{t-2} = c - a \tag{4.7.10}$$

Como ν puede tomar valores positivos, negativos o cero, y el discriminante de la ecuación característica de (4.7.10) es

$$\Delta = \frac{d^2(1+\nu)^2}{b^2} - \frac{4d\nu}{b}\,,$$

es claro que si $\nu < 0$, no se puede predecir el signo de Δ y en consecuencia tampoco se puede hacer un análisis de estabilidad de las soluciones de (4.7.10) en base al análisis de las raíces de la ecuación característica. Es pues un ejemplo en el que se ven las ventajas de tener criterios de estabilidad sin conocer las raíces de la ecuación.

Según las condiciones necesarias y suficientes de estabilidad dadas en (4.7.2), el modelo es estable si y sólo si

$$1 - \frac{d(1+\nu)}{b} - \frac{d\nu}{b} > 0 \tag{4.7.11}$$

$$1 - \frac{d\nu}{b} > 0 \tag{4.7.12}$$

$$1 + \frac{d(1+\nu)}{b} - \frac{d\nu}{b} > 0 \tag{4.7.13}$$

que, haciendo las simplificaciones del caso, podemos escribir

$$1 - \frac{d}{b} > 0 \tag*{(4.7.11)'}$$

$$1 - \frac{d\nu}{b} > 0 \tag{4.7.12}$$

$$1 + \frac{d(1+2\nu)}{b} > 0 \tag*{(4.7.13)'}$$

y observando que (4.7.11)' se cumple siempre por ser $d>0$ y $b<0$, las condiciones necesarias y suficientes de estabilidad se reducen al cumplimiento de las desigualdades (4.7.12) y (4.7.13)'. Visualizaremos el cumplimiento de estas desigualdades considerándolas en función de $\dfrac{d}{-b}$ (que ya fue considerado en el modelo de la telaraña) y de ν. Así; en el espacio $\dfrac{d}{-b}$, ν, las fronteras de las regiones determinadas por (4.7.12) y (4.7.13)' son

$$1+\left(\frac{d}{-b}\right)\nu = 0\ ,\ \ 1-\left(\frac{d}{-b}\right)(1+2\nu) = 0 \ \text{ y el eje } \nu .$$

Las dos primeras se intersecan en el punto $\left(-\dfrac{1}{3}, 3\right)$ y tienen como asíntota horizontal al eje ν. Es claro que $\dfrac{d}{-b}$ sólo toma valores positivos.

En la Figura 4.15 se muestra sombreado el conjunto de pares ordenados $\left(\nu, \dfrac{d}{-b}\right)$ que satisfacen las desigualdades (4.7.12) y (4.7.13)'; es decir la región de valores de estabilidad del modelo.

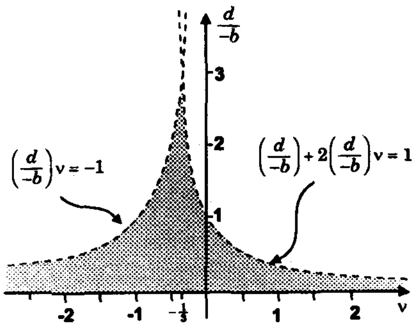


Figura 4.15

Notemos que para que exista estabilidad,

- Si $\nu<-\dfrac{1}{3}$, lo realmente restrictivo es $\left(\dfrac{d}{-b}\right)\nu>-1$
- Si $\nu>-\dfrac{1}{3}$, lo realmente restrictivo es $\left(\dfrac{d}{-b}\right)+2\left(\dfrac{d}{-b}\right)\nu<1$

En consecuencia, el modelo es estable si y sólo si

$$\frac{d}{-b}<\begin{cases} -\dfrac{1}{\nu} \ , & \text{si } \nu<-\dfrac{1}{3} \\[2ex] \dfrac{1}{1+2\nu} \ , & \text{si } \nu\geq-\dfrac{1}{3} \end{cases} \tag{4.7.14}$$

Ahora podemos comparar la estabilidad de este modelo con la del modelo de la telaraña: así como aquel es caso particular de éste, con $\nu = 0$ (comparar las ecuaciones de los modelos), su condición de estabilidad es también un caso particular de las condiciones dadas para éste, pues con $\nu = 0$, según (4.7.14) el modelo es estable si y sólo si $\frac{d}{-b} < 1$. Podría decirse que este modelo con expectativas es más estable que el de la telaraña en el sentido que ocurre para valores de d y b tales que $\frac{d}{-b} < 1$ (ver Figura 4.15), pero también para valores de d y b tales que $\frac{d}{-b} \geq 1$, siempre que $1 \leq \frac{d}{-b} < 3$ y se consideren valores adecuados de ν tales que $-1 < \nu < 0$. Por ejemplo, el modelo es estable si $d = 2$, $b = -1$ y $\nu = -\frac{1}{3}$. (Verificar resolviendo (4.7.10) con estos valores).

Como $\hat{p}_t = p_{t-1} + \nu(p_{t-1} - p_{t-2})$, es natural que cuando $\nu > 0$ este modelo sea "más inestable" que el de la telaraña, pues en tal caso los productores esperan que persista el movimiento de precios y en consecuencia asumen que el precio de transacción en el período corriente sea el precio de transacción anterior, más un ajuste en la dirección del cambio. Esto, ciertamente es desestabilizante. (Cuando $\nu < 0$, los productores esperan que los precios reviertan su movimiento).

Aplicación 4.49 (El modelo del acelerador - multiplicador, con sector monetario y política de estabilización).

Las ecuaciones del modelo de Samuelson del acelerador - multiplicador son

$$\begin{aligned} C_t &= c_0 Y_{t-1} + c_1 , \quad 0 < c_0 < 1 \\ I_t &= a(C_t - C_{t-1}) , \quad a > 0 \\ Y_t &= C_t + I_t + G_t \end{aligned} \tag{4.7.15}$$

donde C, Y, I y G representan consumo, ingreso, inversión y gasto del gobierno, respectivamente, y éstas conducen a la ecuación en diferencias

$$Y_t - c_0 (1+a) Y_{t-1} + a c_0 Y_{t-2} = c_1 + G_t , \tag{4.7.16}$$

la cual, en el caso $G_t = \overline{G}$ (constante) determina como nivel de equilibrio del ingreso

$$Y^* = \frac{1}{1-c_0}\left(c_1 + \overline{G}\right), \tag{4.7.17}$$

que es el producto del multiplicador $\dfrac{1}{1-c_0}$ con el gasto exógeno. Con las condiciones de estabilidad conocidas, es fácil concluir que los valores que tome el ingreso se irán aproximando a este nivel de equilibrio si y sólo si $a c_0 < 1$.

Una de las críticas a este modelo para la explicación de los ciclos económicos es su consideración muy simple de los determinantes de la demanda agregada, pues no se incluye el sector monetario. Incluyamos ahora este sector en el modelo, considerando que

$$M_t = f\left(r_t, Y_{t-1}\right) \tag{4.7.18}$$

donde

M_t: demanda monetaria en el período t

r_t: tasa de interés en el período t

y particularizando la dependencia funcional dada en (4.7.18) al caso lineal; así, asumimos que

$$M_t = m_0 + m_1 Y_{t-1} + m_2 r_t, \tag{4.7.19}$$

donde m_0, m_1 y m_2 son constantes tales que $m_0 > 0$, $m_1 > 0$, $m_2 < 0$ y también que en cada período se iguala la demanda con la oferta monetaria exógena $\overline{M}$.

Ciertamente, la inversión I_t dependerá también de la tasa de interés r_t y en consecuencia, considerando

$$I_t = a\left(C_t - C_{t-1}\right) + i_0 r_t, \quad i_0 < 0 \tag{4.7.20}$$

tenemos ya un modelo del acelerador - multiplicador con sector monetario que nos conduce a la ecuación en diferencias

$$Y_t - \left[c_0\left(1+a\right) - \frac{i_0 m_1}{m_2}\right] Y_{t-1} + a c_0 Y_{t-2} = c_1 + G_t + \frac{i_0\left(\overline{M} - m_0\right)}{m_2} \tag{4.7.20}$$

Las soluciones de esta ecuación son estables si y sólo si

$$1-c_0+\frac{i_0 m_1}{m_2}>0$$

$$1-ac_0>0$$

$$1+\left[c_0(1+a)-\frac{i_0 m_1}{m_2}\right]+ac_0>0$$

Según los signos de los parámetros del modelo, la tercera desigualdad se cumple siempre y la primera se cumplirá si $i_0 m_1/m_2$ es suficientemente pequeño; en consecuencia, la condición fuerte de estabilidad sigue siendo $ac_0<1$. Evidentemente la inclusión del sector monetario influye en la determinación de la solución específica de la ecuación (4.7.20). Así, puede verificarse gráficamente, por ejemplo, que el conjunto de valores de a y c_0 para los cuales este modelo tiene solución convergente, sin oscilación, es una parte del conjunto de valores de a y c_0 para los cuales el modelo sin sector monetario tiene solución del mismo tipo.

Resulta interesante considerar en el modelo el gasto del gobierno, G_t, de modo que se refleje una *política fiscal de estabilización*; así, sea

$$G_t=G_0+\mu\left(Y^*-\overline{Y}_t\right),\quad 0<\mu<1 \tag{4.7.21}$$

que suele llamarse *función de reacción del gobierno*, siendo G_0 una constante exógena, μ el coeficiente de reacción fiscal, Y^* el nivel de equilibrio del ingreso buscado por el gobierno y $\overline{Y}_t$ la trayectoria del ingreso determinada sin política fiscal y con $G_t=\overline{G}$ (constante); es decir, solución de (4.7.20) con $G_t=\overline{G}$, por lo cual

$$\overline{Y}_t=\left[c_0(1+a)-\frac{i_0 m_1}{m_2}\right]Y_{t-1}-ac_0Y_{t-2}+c_1+\overline{G}+\frac{i_0\left(\overline{M}-m_0\right)}{m_2}. \tag{4.7.22}$$

Reemplazando (4.7.21) en (4.7.20) obtenemos

$$\begin{aligned}Y_t-\left[c_0(1+a)-\frac{i_0 m_1}{m_2}\right]Y_{t-1}-ac_0Y_{t-2}&=\\&=c_1+G_0+\mu\left(Y^*-\overline{Y}_t\right)+\frac{i_0\left(\overline{M}-m_0\right)}{m_2}\end{aligned} \tag{4.7.23}$$

y finalmente, reemplazando la expresión de $\overline{Y}_t$ dada en (4.7.22) y asociando convenientemente, llegamos a la ecuación

$$Y_t-(1-\mu)\left[c_0(1+a)-\frac{i_0 m_1}{m_2}\right]Y_{t-1}+(1-\mu)ac_0 Y_{t-2}=$$

$$=(1-\mu)(c_1+G_0)+\mu Y^*+(1-\mu)\frac{i_0\left(\overline{M}-m_0\right)}{m_2}. \qquad (4.7.24)$$

Aplicando las condiciones de estabilidad y asumiendo que $i_0 m_1/m_2$ es suficientemente pequeño, obtenemos que la condición fundamental es

$$ac_0<\frac{1}{1-\mu}. \qquad (4.7.25)$$

Siendo $0<\mu<1$, es claro que esta condición es menos restrictiva que la condición $ac_0<1$, dada sin considerar la política fiscal; así, para algunos valores de a y c_0 que sin política fiscal resultaba una trayectoria divergente del ingreso, puede tenerse ahora una trayectoria convergente. En particular, combinaciones de a y c_0 que sin la política fiscal daban ciclos regulares (raíces complejas de la ecuación característica, con módulo $ac_0=1$), con la política fiscal darán trayectorias oscilantes amortiguadas. Análogamente las trayectorias oscilantes y convergentes sin la política fiscal, serán amortiguadas con la política fiscal, ya que el módulo de los números complejos correspondientes a (4.7.24) es $\sqrt{(1-\mu)ac_0}$, que es menor que el módulo de los correspondientes a (4.7.20), que es $\sqrt{ac}$.

Puede hacerse análisis similar introduciendo política monetaria de estabilización.

Aplicación 4.50 (El modelo del acelerador - multiplicador de Hicks, con inversión inducida distribuida).

Supuestos:

1) El consumo en un período cualquiera t es una función lineal del ingreso en los m períodos anteriores; así:

$$C_t=b_1Y_{t-1}+b_2Y_{t-2}+\ldots+b_mY_{t-m}\,; \quad m\in\mathbb{N}$$

$$(b:=b_1+b_2+\ldots+b_m\,; \quad s:=1-b)$$

2) La inversión total inducida por variación del ingreso que realmente tiene lugar en cada período t, está formada por partes que dependen de Δy_{t-1}, de Δy_{t-2}, etc, hasta Δy_{t-m}. Así, considerando una dependencia lineal:

$$I_t = c_1(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + c_2(Y_{t-2} - Y_{t-3}) + \dots + c_m(Y_{t-m} - Y_{t-m-1})$$

$$(c := c_1 + c_2 + \dots + c_m)$$

3) Se dan niveles autónomos de consumo y de inversión en cada período t, que los consideramos en la variable A_t, y la inversión y el consumo planeado se realizan de tal modo que

$$Y_t = C_t + I_t + A_t$$

(Así, ex-post se cumple la igualdad de ahorro con inversión en cada período: $Y_t - C_t = I_t + A_t$).

Con estos supuestos se obtiene fácilmente la ecuación en diferencias de orden $m+1$:

$$Y_t - (b_1 + c_1)Y_{t-1} - (b_2 - c_1 + c_2)Y_{t-2} - \dots - (b_m - c_{m-1} + c_m)Y_{t-m} - c_m Y_{t-m-1}$$
$$= A_t\,.$$

Considerando que tanto el consumo como la inversión se distribuyen sólo en 2 períodos sucesivos ($m = 2$) tenemos la ecuación de tercer orden

$$Y_t - (b_1 + c_1)Y_{t-1} - (b_2 - c_1 + c_2)Y_{t-2} - c_2 Y_{t-3} = A_t$$

cuya estabilidad puede analizarse con las condiciones dadas en (4.7.3), pero ya podemos obtener información observando que el producto de las raíces de la ecuación característica correspondiente es $-c_2$ y en consecuencia, es suficiente que $c_2 > 1$ para que la trayectoria sea inestable, pues $c_2 > 1$ implica que por lo menos una de las raíces tiene módulo mayor que 1. Cabe mencionar que asumiendo que la mayor parte de la inversión inducida *no* está concentrada en el período inmediatamente siguiente a la variación del ingreso, sino en los períodos más alejados, tendremos $c_2 > c_1$. Si además, $c_1 + c_2 \geq 2$, como se deduce de información empírica, se concluye que $c_2 > 1$ y en consecuencia la inestabilidad del modelo.

Ejercicios 4.51

1. Dadas las siguientes ecuaciones, analizar el comportamiento de sus respectivas soluciones y verificarlo resolviéndolas.

   a) $y_{t+2} - 9y_{t+1} + 8y_t = t$

   b) $2y_{t+2} - 4y_{t+1} + 2y_t = 1;\ y_0 = 0,\ y_1 = 1$

   c) $y_{t+2} - y_{t+1} - 6y_t = 3(5^t)$

   d) $y_{t+2} - y_{t+1} - 6y_t = 3(2^t)$

   e) $y_{t+2} - y_{t+1} - 6y_t = 3(2^t) + 4(-3)^t$

   f) $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 5y_t = 10;\ y_0 = 0,\ y_1 = 5$

   g) $y_{t+3} + 2y_{t+2} - 15y_{t+1} - 36y_t = 4$

   h) $2y_{t+2} + 5y_{t+1} - 7y_t = 2t^3;\ y_0 = 2,\ y_1 = 3$

2. Dada la ecuación $2y_{t+2} - 3y_{t+1} - 2y_t = 6t + 1$ con $y_0 = -2$, $y_1 = -\frac{5}{2}$, verificar que existe convergencia a la senda de equilibrio, pese a que las raíces características no son ambas de módulo menor que 1.

3. Dada la ecuación $y_{t+2} + y_{t+1} + \frac{1}{2}y_t = 5t + 6$, con $y_0 = 1$, $y_1 = \frac{7}{2}$, analizar el comportamiento de su solución. ¿Es verdad que para valores muy grandes de t la función hallada se comporta aproximadamente como $y = 2t$?. Ilustrar gráficamente.

4. Sea el siguiente modelo en una economía cerrada, sin actividad del gobierno
$$C_t = 200 + 0.8Y_{t-1}\ ,\ I_t = 0.4(Y_{t-1} - Y_{t-2}),\ Y_0 = Y_1 = 1200.$$
   Analizar la estabilidad del modelo y determinar los niveles de equilibrio.

5. Para la ecuación de ajuste de precios $p_{t+2} = \beta\gamma_0 + \beta\alpha(p_{t+1} - p_t)$, donde p es el precio y β, α y γ_0 son constantes positivas, determinar el comportamiento de la solución en los siguientes casos:

   a) $\beta\alpha = 1$, b) $\beta\alpha = \frac{1}{2}$, c) $\beta\alpha = 2$

6. Según un modelo de inventario de Metzler, el volumen de producción en un período está influenciado por los inventarios y la producción en períodos anteriores. Se plantea la ecuación:
$$y_{t+2} - 2by_{t+1} + by_t = I_0 \quad \text{con} \quad 0 < b < 1$$
   Resolverla y discutir sus condiciones de estabilidad.

4.8 SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS (Lineales, de primer orden y coeficientes constantes)

Hasta ahora hemos trabajado con ecuaciones en diferencias cuya ingógnita es una función real de variable entera. Ahora, examinaremos ecuaciones muy similares, pero en las que la función de variable entera a determinar es una función con valores en $\mathbf{R}^n$; vale decir que buscamos una función de variable entera y, de n componentes: $Y = Y(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$, en base a las relaciones que se den entre sus valores para t y $t+1$ (en dos períodos consecutivos). Ciertamente, esto equivale a buscar n funciones de variable entera y valores reales –que son las funciones componentes y_1, y_2, ... , y_n– en base a un *sistema de ecuaciones en diferencias*, que nos dé las relaciones entre los valores de las componentes de Y para t y $t+1$. Cuando tales ecuaciones sean, todas, de primer grado y con coeficientes constantes, diremos que tenemos un *sistema lineal de ecuaciones en diferencias de primer orden con coeficientes constantes*. La *forma normal* de éstas es

$$
\begin{aligned}
y_1(t+1) &= a_{11}\, y_1(t) + a_{12}\, y_2(t) + \ldots + a_{1n}\, y_n(t) + b_1(t) \\
y_2(t+1) &= a_{21}\, y_1(t) + a_{22}\, y_2(t) + \ldots + a_{2n}\, y_n(t) + b_2(t) \\
&\vdots \\
y_n(t+1) &= a_{n1}\, y_1(t) + a_{n2}\, y_2(t) + \ldots + a_{nn}\, y_n(t) + b_n(t),
\end{aligned}
\tag{4.8.1}
$$

donde las a_{ij} son constantes, las $b_i = b_i(t)$ son funciones conocidas y la variable t toma los valores 0, 1, 2, ... Si todas las funciones $b_i(t)$ son idénticamente nulas, entonces (4.8.1) es además un *sistema homogéneo*. En caso contrario –que por lo menos una función b_i no sea idénticamente nula– tendremos un *sistema no homogéneo*.

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
y_1(t+1) &= y_1(t) - 2y_2(t) + 5^t \\
y_2(t+1) &= y_1(t) + 4y_2(t) + 4t + 3
\end{aligned}
\tag{4.8.2}
$$

es un sistema lineal *no homogéneo* de dos ecuaciones en diferencias, de primer orden y con coeficientes constantes. Las funciones a determinar son $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$; o en la notación vectorial, buscamos la función $Y(t)$ cuyas funciones componentes son $y_1(t)$, $y_2(t)$. Usando esta notación, el sistema

(4.8.2) podemos escribirlo empleando matrices de manera análoga a los sistemas algebraicos lineales:

$$\begin{bmatrix} y_1(t+1) \\ y_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5^t \\ 4t+3 \end{bmatrix} \tag{4.8.3}$$

Evidentemente la forma matricial dada en el ejemplo puede usarse en todos los casos similares; así el sistema (4.8.1), escrito matricialmente es

$$\begin{bmatrix} y_1(t+1) \\ y_2(t+1) \\ \vdots \\ y_n(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} \tag{4.8.4}$$

o, más resumidamente

$$Y(t+1) = A\,Y(t) + B(t) \tag{4.8.5}$$

o

$$Y_{t+1} = A\,Y_t + B(t)\,, \tag{4.8.5'}$$

donde

$$Y_t := Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

¿Cómo resolvemos estos sistemas de ecuaciones?

Resolvamos el sistema dado en el ejemplo:

1. Una manera de hacerlo es –como en los sistemas algebraicos– despejando una función de una de las ecuaciones y sustituyéndola en la otra ecuación. Ciertamente debe tenerse cuidado para que al sustituir se tenga ya una ecuación en diferencias con una sola función desconocida y entonces apliquemos lo visto en secciones anteriores.

   De la segunda ecuación de (4.8.2) despejemos $y_1(t)$:

   $$y_1(t) = y_2(t+1) - 4y_2(t) - 4t - 3 \tag{4.8.6}$$

   Reemplacemos ahora en la primera ecuación, teniendo en cuenta que

   $$y_1(t+1) = y_2(t+2) - 4y_2(t+1) - 4(t+1) - 3$$

   Haciendo los cálculos del caso, obtenemos

   $$y_2(t+2) - 5y_2(t+1) + 6y_2(t) = 4 + 5^t \tag{4.8.7}$$

que es una ecuación de segundo orden, como las que ya hemos visto[1]. Su ecuación característica es

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \tag{4.8.8}$$

y su solución general

$$y_2(t) = C_1 3^t + C_2 2^t + 2 + \frac{1}{6} 5^t, \tag{4.8.9}$$

que al reemplazar en (4.8.6) nos da

$$y_1(t) = -C_1 3^t - 2C_2 2^t + \frac{1}{6} 5^t - 4t - 9 \tag{4.8.10}$$

con lo cual tenemos resuelto el sistema.

Si el sistema tuviera condiciones iniciales; por ejemplo $y_1(0) = \frac{19}{6}$, $y_2(0) = \frac{13}{6}$, haríamos ahora los reemplazos correspondientes en (4.8.10) y (4.8.9) respectivamente y obtendríamos un sistema algebraico con las incógnitas C_1 y C_2:

$$\frac{19}{6} = -C_1 - 2C_2 + \frac{1}{6} - 9 \Rightarrow -C_1 - 2C_2 = 12$$

$$\frac{13}{6} = C_1 + C_2 + 2 + \frac{1}{6} \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$$

De aquí $C_1 = 12$, $C_2 = -12$ y así tendríamos la solución única

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -12(3^t) + 24(2^t) + \frac{1}{6} 5^t - 4t - 9 \\ y_2(t) &= 12(3^t) - 12(2^t) + 2 + \frac{1}{6} 5^t \end{aligned} \tag{4.8.11}$$

del sistema de ecuaciones en diferencias (4.8.2) con las condiciones iniciales indicadas; o, en otra notación, la solución única de la ecuación vectorial (4.8.3), con la condición inicial

$$Y(0) = \begin{bmatrix} 19/6 \\ 13/6 \end{bmatrix}.$$

---

[1] Es bueno notar que si se "despeja" $y_1(t)$ de la primera ecuación, *no* se llega a una ecuación con una sola función desconocida, como (4.8.7).

2. Otra manera de resolver el sistema (4.8.2) es empleando la notación matricial y siguiendo tres pasos similares a los establecidos luego de los teoremas 4.26, 4.27 y 4.29 . Esta vez, tendremos como referencia el siguiente teorema cuya demostración dejamos como ejercicio al lector.

Teorema 4.52 Si $Y = \overline{U}(t)$ es cualquier solución particular del sistema no homogéneo (4.8.5) y $Y = U(t)$ es la solución general del sistema homogéneo correspondiente $(Y(t+1) = AY(t))$, entonces la solución general del sistema (4.8.5) es

$$Y(t) = U(t) + \overline{U}(t).$$

Veamos, entonces el sistema concreto de nuestro ejemplo (4.8.2) o (4.8.3):[1]

Paso 1: Solución general de

$$\begin{bmatrix} y_1(t+1) \\ y_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}. \tag{4.8.12}$$

Como

$$\begin{bmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1(2) \\ y_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix}$$

....

tendremos, en general,

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix};$$

o, mejor –considerando cualquier vector inicial K y dando una forma similar a lo adoptado para las ecuaciones de la Sección 4.6– escribimos como solución general de (4.8.12)

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \tag{4.8.13}$$

---

[1] La solución resulta un tanto extensa, pero el lector no debe desanimarse. La ventaja de esta forma de resolver será grande en el análisis cualitativo de las soluciones.

Paso 2: Una solución particular de (4.8.2):

Emplearemos también el método de los coeficientes indeterminados, y siendo

$$B(t) = \begin{bmatrix} 5^t \\ 4t+3 \end{bmatrix},$$

adoptamos como función a ensayar

$$\overline{U}(t) = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 t + C_1\, 5^t \\ A_2 + B_2 t + C_2\, 5^t \end{bmatrix}$$

Reemplazando en (4.8.2)

$$A_1 + B_1(t+1) + C_1\, 5^{t+1} =$$
$$= A_1 + B_1 t + C_1\, 5^t - 2A_2 - 2B_2 t - 2C_2\, 5^t + 5^t$$

$$A_2 + B_2(t+1) + C_2\, 5^{t+1} =$$
$$= A_1 + B_1 t + C_1\, 5^t + 4A_2 + 4B_2 t + 4C_2\, 5^t + 4t + 3$$

y comparando los coeficientes de 5^t, de t y de t^0 respectivamente, tenemos

$$\left.\begin{aligned} 5C_1 &= C_1 - 2C_2 + 1 \\ 5C_2 &= C_1 + 4C_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{6}$$

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= B_1 - 2B_2 \\ B_2 &= B_1 + 4B_2 + 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow B_1 = -4,\; B_2 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 + B_1 &= A_1 - 2A_2 \\ A_2 + B_2 &= A_1 + 4A_2 + 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_1 = -9,\; A_2 = 2$$

Tendremos así la solución particular

$$\begin{bmatrix} \overline{u}_1(t) \\ \overline{u}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 - 4t + \dfrac{1}{6}\, 5^t \\ 2 + \dfrac{1}{6}\, 5^t \end{bmatrix}$$

Paso 3: La solución general de (4.8.3) es

$$Y(t)=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}^t\begin{bmatrix}K_1\\ K_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-9-4t+\frac{1}{6}5^t\\ 2+\frac{1}{6}5^t\end{bmatrix} \tag{4.8.14}$$

El lector habrá advertido que aunque hemos llegado a una solución general según los pasos seguidos, no podemos separar expresiones para $y_1(t)$ ni para $y_2(t)$. La razón para ésto es que no tenemos una expresión adecuada de $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}^t$.

A continuación veremos cómo obtener tal expresión:

En general, consideremos una matriz cuadrada M. Es claro que si tal matriz fuera diagonal, entonces M^t es fácilmente obtenible, pues si

$$M=\begin{bmatrix}d_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & d_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & d_n\end{bmatrix},$$

por multiplicación matricial y por inducción obtenemos

$$M^t=\begin{bmatrix}d_1^t & 0 & \cdots & 0\\ 0 & d_2^t & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & d_n^t\end{bmatrix}.$$

Obviamente nos interesa hallar M^t cuando M **no** es diagonal y para ello usaremos lo que acabamos de observar y la semejanza de matrices.

Definición 4.53 Las matrices A y B, de orden $n \times n$ son *semejantes* si existe una matriz invertible P de modo que $B=P^{-1}AP$.

Observaciones 4.54

1. $B=P^{-1}AP \Rightarrow B^2=\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)=P^{-1}A^2P$

   Análogamente $\quad B=P^{-1}AP \Rightarrow B^3=P^{-1}A^3P$

y por inducción matemática se demuestra que $\forall t \in \mathbf{Z}^{+}$:

$$B = P^{-1}AP \Rightarrow B^t = P^{-1}A^t P .$$

2. Si deseamos obtener A^t, siendo A no diagonal, y obtenemos una matriz diagonal B que sea semejante a A, por la observación anterior ya tendremos una expresión general para A^t, pues así

$$A^t = PB^tP^{-1},$$

siendo B^t diagonal.

3. Un resultado del álgebra lineal nos dice que si A es tal que todos sus valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son diferentes entre sí, entonces sus respectivos vectores propios $v^1, v^2, \ldots, v^n$ conforman una matriz invertible $P = \left[v^1, v^2, \ldots, v^n\right]$ de modo que

$$\operatorname{diag}(\lambda_i) = P^{-1}AP ;$$

es decir

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = P^{-1}AP .$$

Con este resultado ya podemos explicitar A^t cuando A tenga valores propios diferentes; sin embargo es bueno notar que ésta es sólo una condición suficiente, pues existen matrices que tienen valores propios repetidos y son diagonalizables. (Lo fundamental es que existan n vectores propios correspondientes que sean linealmente independientes, pues así conformarán una matriz P invertible).

La matriz de nuestro ejemplo es $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ y obtenemos sus valores propios resolviendo la ecuación polinómica

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 ; \tag{4.8.15}$$

es decir

$$(1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = 0$$

o

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \qquad (4.8.15)'$$

lo cual nos da $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ y en consecuencia, de acuerdo a lo anotado en nuestras observaciones, podemos diagonalizar y obtener una expresión adecuada para la potencia t-ésima de la matriz presente en la solución general obtenida en (4.8.14). Hallemos vectores propios correspondientes a los valores obtenidos:

Para $\lambda_1 = 3$:

Reemplazando en $Av^1 = \lambda v^1$; o equivalentemente en $(A - \lambda I)v^1 = 0$, tenemos

$$\begin{bmatrix} 1-3 & -2 \\ 1 & 4-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

o sea

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

lo cual nos dice que el espacio propio correspondiente a $\lambda_1 = 3$ tiene por ecuación $v_1^1 + v_2^1 = 0$ y en consecuencia podemos escoger cualquier vector que genera este espacio como un vector propio de $\lambda_1 = 3$. Por simplicidad escogemos $v_2^1 = -1$, $v_2^1 = 1$ y así tenemos

$$v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = 2$:

Reemplazando como antes, tenemos ahora

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y nuevamente el espacio propio está dado sólo por una ecuación lineal con dos variables, que en este caso es $v_1^2 + 2v_2^2 = 0$. Escogemos como vector propio

$$v^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ahora, de acuerdo a lo anotado en el punto 3 de las observaciones anteriores, tenemos

$$P = \begin{bmatrix} v^1 & v^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix};$$

en consecuencia

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

y así

$$\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}P$$

o, mejor, para aplicar lo observado en el punto 2:

$$\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}P^{-1},$$

de donde

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}^t &= P\begin{bmatrix}3^t & 0\\ 0 & 2^t\end{bmatrix}P^{-1}\\ &=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3^t & 0\\ 0 & 2^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}-3^t+2(2^t) & -2(3^t)+2(2^t)\\ 3^t-2^t & 2(3^t)-2^t\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{4.8.16}$$

Reemplazando en (4.8.14) tenemos

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}-3^t+2(2^t) & -2(3^t)+2(2^t)\\ 3^t-2^t & 2(3^t)-2^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K_1\\ K_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-9-4t+\frac{1}{6}5^t\\ 2+\frac{1}{6}5^t\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}-(K_1+2K_2)3^t+2(K_1+K_2)2^t\\ (K_1+2K_2)3^t-(K_1+K_2)2^t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-9-4t+\frac{1}{6}5^t\\ 2+\frac{1}{6}5^t\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{4.8.17}$$

Con lo cual queda resuelto el sistema (4.8.2)

Observaciones 4.55

1. La solución general obtenida en (4.8.17) coincide con la solución general obtenida por el método de sustitución y conformada por las expresiones para $y_1(t)$, $y_2(t)$ en (4.8.10) y (4.8.9) respectivamente. Notemos que en

ambas soluciones el coeficiente de 3^t en $y_1(t)$ es el opuesto del coeficiente de 3^t en $y_2(t)$ y que el coeficiente de 2^t en $y_1(t)$ es el doble del opuesto del coeficiente de 2^t en $y_2(t)$; así, considerando $C_1 = K_1 + 2K_2$ y $C_2 = -(K_1 + K_2)$, tenemos las mismas expresiones para $y_1(t)$ y $y_2(t)$.

2. Si el problema tiene condiciones iniciales para $y_1(t)$ y para $y_2(t)$, haciendo los reemplazos en (4.8.17) se obtiene la solución única. Dejamos como ejercicio para el lector obtener los valores de K_1 y K_2 correspondientes a la condición inicial.

$$Y(0) = \begin{bmatrix} 19/6 \\ 13/6 \end{bmatrix}.$$

Evidentemente, luego de sustituir los valores obtenidos, se debe llegar a la solución ya obtenida en (4.8.11).

3. Seguramente el lector ya ha advertido que la ecuación característica (4.8.8) obtenida por el método de sustitución es la misma que la ecuación (4.8.15)' obtenida empleando los valores propios de la matriz de coeficientes. Esta coincidencia **no** es casual sólo para este ejemplo y es importante que así sea, pues las raíces de la ecuación característica, en ambos métodos, nos sirven para determinar las funciones que conforman la solución general de la ecuación homogénea. En verdad, la vinculación entre las ecuaciones lineales de orden n con coeficientes constantes y los sitemas lineales de n ecuaciones en diferencias es bastante estrecha (toda ecuación del tipo mencionado puede expresarse como un sistema lineal).

4. La forma de obtener A^t que hemos desarrollado es posible sólo en los casos en que A, siendo de orden $n \times n$, tenga n vectores propios linealmente independientes. Además de esta restricción, al trabajar con matrices de orden mayor o igual que 3, ciertamente existe la dificultad operativa de invertir la matriz P de orden n que se obtenga.

A continuación describimos un método de obtención de A^t que simplifica los cálculos y no requiere obtener vectores propios:

El siguiente es un teorema conocido del Algebra Lineal que es fundamental en el procedimiento:

Teorema 4.56 (*Cayley-Hamilton*)

Toda matriz cuadrada A satisface su ecuación característica.

Así, según este teorema, si el polinomio característico de una matriz A, de orden $n \times n$ es

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = C_0 + C_1\lambda + C_2\lambda^2 + \ldots + C_n\lambda^n,$$

entonces al sustituir λ por A –o sea al calcular formalmente $P(A)$– se obtiene la matriz nula (pues $P(\lambda) = 0$ es la ecuación característica de A). Para el cálculo formal debe tenerse en cuenta que $C_0 = C_0\lambda^0$ debe sustituirse por $C_0 A^0 = C_0 I$.

Ilustremos con un ejemplo: Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, ya vimos que su ecuación característica es

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 .$$

Podemos verificar que

$$P(A) = A^2 - 5A + 6I = 0 .$$

En efecto

$$\begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 5 & 14 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Veamos ahora cómo usar este teorema para obtener A^t. (Para facilitar la comprensión del procedimiento, lo explicaremos para $n = 2$; luego generalizaremos).

i) Si la matriz es de orden 2×2, su polinomio característico es de segundo grado:

$$P(\lambda) = C_0 + C_1\lambda + C_2\lambda^2.$$

Al dividir λ^t, $t \geq 2$, por $P(\lambda)$, obtenemos como cociente un polinomio $Q(\lambda)$ de grado $t - 2$ y como resto otro polinomio $R(\lambda)$ de grado menor que 2; así

$$\frac{\lambda^t}{P(\lambda)} = Q(\lambda) + \frac{R(\lambda)}{P(\lambda)} \tag{4.8.18}$$

o

$$\lambda^t = P(\lambda)\,Q(\lambda) + R(\lambda) \tag{4.8.19}$$

ii) Como $R(\lambda)$ es un polinomio de grado 1 ó 0, escribimos

$$R(\lambda) = a + b\lambda \tag{4.8.20}$$

siendo a y b constantes.

iii) Al reemplazar λ por A en la ecuación (4.8.19),[1] tenemos

$$A^t = P(A)\,Q(A) + R(A) \qquad (4.8.21)$$

y como según el teorema de Cayley - Hamilton $P(A) = 0$, obtenemos

$$A^t = R(A) \qquad (4.8.22)$$

y según (4.8.20)

$$A^t = aI + bA \qquad (4.8.23)$$

Este resultado nos permite obtener una expresión para A^t con sólo determinar las "constantes" a y b. Esto es sencillo, pues si λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación característica $P(\lambda) = 0$, al reemplazar λ_1 y λ_2 en (4.8.19) teniendo en cuenta (4.8.20), obtenemos el siguiente sistema lineal de incógnitas a y b:

$$\begin{aligned} \lambda_1^t &= a + b\lambda_1 \\ \lambda_2^t &= a + b\lambda_2 \end{aligned} \qquad (4.8.24)$$

Ahora debemos distinguir dos casos: cuando las raíces características λ_1 y λ_2 son diferentes y cuando son iguales.

- Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, el sistema (4.8.24) tiene solución única para a y b, pues su matriz de coeficientes tiene determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$$

- Si $\lambda_1 = \lambda_2$, obviamente en (4.8.24) tenemos sólo una ecuación y nos falta otra para determinar a y b.

  Observemos que si $P(\lambda) = 0$ tiene la raíz λ_1 repetida, entonces una expresión factorizada de $P(\lambda)$ es de la forma

$$P(\lambda) = d(\lambda - \lambda_1)^2$$

  con d constante; en consecuencia λ_1 también es raíz de la ecuación $P'(\lambda) = 0$, pues

$$P'(\lambda) = 2d(\lambda - \lambda_1)\,.$$

[1] Es posible hacerlo. Ver *R. Stoll* (Linear Algebra and Matrix Theory, N. York, 1952).

Así, teniendo en cuenta que $P(\lambda_1)=0$, $P'(\lambda_1)=0$ y $R'(\lambda)=b$, derivemos respecto a λ la ecuación (4.8.19) y hagamos el cálculo en λ_1:

$$\begin{aligned} t\,\lambda^{t-1} &= P(\lambda)\,Q'(\lambda)+P'(\lambda)\,Q(\lambda)+R'(\lambda) \\ t\,\lambda_1^{t-1} &= P(\lambda_1)\,Q'(\lambda_1)+P'(\lambda_1)\,Q(\lambda_1)+R'(\lambda_1) \\ t\,\lambda_1^{t-1} &= R'(\lambda_1) \\ t\,\lambda_1^{t-1} &= b \end{aligned} \tag{4.8.25}$$

Ya tenemos ahora la ecuación que nos faltaba. Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} \lambda_1^t = a + b\lambda_1 \\ t\,\lambda_1^{t-1} = b \end{cases} \tag{4.8.26}$$

obtenemos los valores de a y b.

Cabe mencionar que siendo $n=2$, el caso de las raíces no reales está considerado en el de raíces diferentes.

Ilustremos lo expuesto con la matriz cuadrada del Ejemplo 4.8.3

Siendo $P(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+6=0$ la ecuación característica de $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$, las raíces características son $\lambda_1=3$ y $\lambda_2=2$. Para obtener a y b debemos resolver entonces el correspondiente sistema (4.8.24):

$$\begin{cases} 3^t = a+3b \\ 2^t = a+2b \end{cases}$$

Tenemos así:

$$\begin{aligned} a &= 3\left(2^t\right)-2\left(3^t\right) \\ b &= 3^t-2^t \end{aligned}$$

y reemplazando en (4.8.23):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}^t &= \left[3\left(2^t\right)-2\left(3^t\right)\right]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(3^t-2^t\right)\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}-3^t+2\left(2^t\right) & -2\left(3^t\right)+2\left(2^t\right)\\ 3^t-2^t & 2\left(3^t\right)-2^t\end{bmatrix}, \end{aligned}$$

que es la misma expresión que la obtenida en (4.8.16).

En los ejercicios se dan matrices cuyos valores propios son complejos o de multiplicidad mayor que 1.

Lo discutido para matrices de orden 2×2 puede generalizarse para matrices cuadradas de orden superior a 2 y como consecuencia obtener *la potencia t-ésima de una matriz A, cuadrada de orden n*, siguiendo las tres siguientes reglas:

I) Determinar los n valores propios de A resolviendo la ecuación polinómica

$$\det(A - \lambda I) = 0 .$$

II) Determinar las n "constantes" $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ como solución única de un sistema algebraico lineal, no homogéneo, de n ecuaciones:

II.1) Por cada valor propio λ_j no repetido, se tiene una ecuación como la siguiente

$$\lambda_j^t = a_0 + a_1 \lambda_j + a_2 \lambda_j^2 + \dots + a_{n-1} \lambda_j^{n-1}$$

II.2) Por cada valor propio λ_s que se repite r veces, $1 < r \leq n$, se tienen las r ecuaciones

$$\begin{aligned}
\lambda_s^t &= a_0 + a_1 \lambda_s + a_2 \lambda_s^2 + \dots + a_{n-1} \lambda_s^{n-1} \\
t\,\lambda_s^{t-1} &= a_1 + 2a_2 \lambda_s + \dots + (n-1) a_{n-1} \lambda_s^{n-2} \\
&\vdots \\
t(t-1)\dots(t-r+2)\lambda_s^{t-r+1} &= \\
&= (r-1)\dots 2 \times 1 a_{s-1} + \dots + (n-1)\dots(n-r+1) a_{n-1} \lambda_s^{n-r}
\end{aligned}$$

III) $M^t = a_0 I + a_1 M + a_2 M^2 + \dots + a_{n-1} M^{n-1}$.

Otra manera de resolver sistemas homogéneos de ecuaciones en diferencias como los que estamos trabajando, es –por analogía con las ecuaciones lineales con una sola función desconocida– sustituyendo en el sistema las funciones que se conjeturan como soluciones:

$$y_1(t) = \alpha_1 \lambda^t, \dots, y_n(t) = \alpha_n \lambda^t,$$

donde las α_i son constantes no nulas. Para determinar estas constantes se requiere que la matriz de coeficientes del sistema homogéneo al que se llega tenga determinante nulo y esta condición nos da la ecuación característica de la matriz del sistema lineal de ecuaciones en diferencias. El lector queda invitado a seguir este camino y hacer la discusión de los diversos casos[1].

Aplicación 4.57

Supongamos que cierto país establece para sus empleados públicos un sistema de rotación trimestral entre los sectores de producción, de servicios y el estrictamente administrativo, de modo que cada tres meses un porcentaje del sector i pasa al sector j. Formalicemos esto como un sistema de ecuaciones en diferencias. Para ello, sea m_{ij} el porcentaje (fijo) de empleados del sector i que cada trimestre pasa al sector j, donde los índices i, j varían en el conjunto $\{A, P, S\}$, en el que están representados los sectores administrativos, de producción y de servicios respectivamente. También, representemos por A_t, P_t y S_t al número de empleados que hay en cada sector correspondiente en el trimestre t. Así, el sistema de ecuaciones en diferencias que expresa la dinámica establecida es:

$$\begin{cases} A_{t+1} = m_{AA} A_t + m_{PA} P_t + m_{SA} S_t \\ P_{t+1} = m_{AP} A_t + m_{PP} P_t + m_{SP} S_t \\ S_{t+1} = m_{AS} A_t + m_{PS} P_t + m_{SS} S_t \end{cases} \tag{4.8.27}$$

o

$$\begin{bmatrix} A_{t+1} \\ P_{t+1} \\ S_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{AA} & m_{PA} & m_{SA} \\ m_{AP} & m_{PP} & m_{SP} \\ m_{AS} & m_{PS} & m_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_t \\ P_t \\ S_t \end{bmatrix} \tag{4.8.27'}$$

Si asumimos, por ejemplo, que al momento de establecerse este sistema de rotación habían 2000 empleados en el sector administrativo, 2500 en el de producción y 1800 en el de servicios, tenemos $A_0 = 2000$, $P_0 = 2500$ y $S_0 = 1800$, que podemos expresar

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ P_0 \\ S_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 \\ 2500 \\ 1800 \end{bmatrix} \tag{4.8.28}$$

y así (4.8.27)' con (4.8.28) constituyen un sistema de ecuaciones en diferencias con valores iniciales, y su solución es única.

---

[1] Ver *G. Gandolfo*: [8].

Resolver este sistema significa encontrar una expresión general que nos permita determinar el número de empleados en cada sector en un trimestre cualquiera, luego de iniciado el proceso. Por lo ya visto, tal expresión es

$$\begin{bmatrix} A_t \\ P_t \\ S_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{AA} & m_{PA} & m_{SA} \\ m_{AP} & m_{PP} & m_{SP} \\ m_{AS} & m_{PS} & m_{SS} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} A_0 \\ P_0 \\ S_0 \end{bmatrix}.$$

Procesos similares a éste se conocen con el nombre de Cadenas de Markov. Notar que los elementos de la matriz son constantes entre 0 y 1 inclusive y que la suma de los elementos de cada columna es 1.

Observación 4.58 (Análisis cualitativo de las soluciones)

Según el Teorema 4.52 y lo desarrollado en los ejemplos y puntos anteriores, sabemos que dado el sistema

$$Y(t+1) = AY(t) + B(t), \tag{4.8.5}$$

su solución general es

$$Y(t) = U(t) + \overline{U}(t),$$

donde $U(t) = A^t K$ (K representa cualquier vector inicial), y $\overline{U}(t)$ es cualquier solución particular de (4.8.5).

Como la expresión general de A^t depende de los valores propios de A, es claro que el comportamiento de las soluciones de (4.8.5) depende fundamentalmente de éstos, de manera similar a cómo depende el comportamiento de las soluciones de una ecuación de orden n, de las raíces de su ecuación característica (lo vimos en Observaciones 4.47).

Si todos los valores propios de A tienen módulo menor que 1, entonces se cumple que

$$\lim_{t\to\infty} U(t) = \lim_{t\to\infty} A^t K = 0$$

y en consecuencia la solución general de (4.8.5):

$$Y(t) = A^t K + \overline{U}(t)$$

tendrá un comportamiento similar al de la **senda de equilibrio** $\overline{U}(t)$, para valores suficientemente grandes de t. Por ello *cuando todos los valores propios de A tienen módulo menor que 1, diremos que se cumplen* **condiciones de estabilidad** *en el sistema (4.8.5)*

Como no siempre es fácil obtener los valores propios de A (pensemos en matrices de orden mayor que 2), resulta de gran importancia tener condiciones necesarias y/o suficientes para el cumplimiento de las condiciones de estabilidad. A continuación enunciaremos algunas:

I) *Si* $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, *con* $a_{ij}\geq 0\ \forall i,\ \forall j$, *son condiciones* **necesarias y suficientes** *de estabilidad que los menores principales de la esquina superior izquierda de* $I-A$ *sean todos positivos.*

II) *Sea un sistema como (4.8.5), con* $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, *sin restricciones de signo.*

a) *Si se cumplen las condiciones de estabilidad,* ***necesariamente*** *debe ocurrir que*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right| < n \tag{4.8.29}$$

Notar que siendo condición necesaria, su incumplimiento garantiza la inestabilidad.

b) *Para que se cumplan las condiciones de estabilidad es* ***suficiente*** *que se cumpla*

$$\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right| < 1 \qquad \forall i=1,2,\ldots,n \tag{4.8.30}$$

Notar que por tener A y su transpuesta los mismos valores propios, la condición dada –por filas– también puede darse por columnas:

$$\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right| < 1 \qquad \forall j=1,2,\ldots,n$$

Además, siendo condición suficiente, su incumplimiento no significa que no se cumplan las condiciones de estabilidad.

c) *Una condición* ***necesaria*** *de estabilidad es que el determinante de A sea menor que* 1.

Aplicación 4.59 (Un modelo dinámico insumo-producto)

Supuestos de J. Schumann:

1. La economía está dividida en n sectores industriales y un sector de familias. Cada sector industrial produce solamente un bien (agregado).

   La producción $X_i(t)$ de una industria i $(i = 1,2,\ldots,n)$ en el período t se distribuye en:

   - $X_{ij}(t)$ unidades que requiere la industria j $(j = 1,2,\ldots,n)$ para producir $X_j(t)$ unidades del bien j.
   - $I_{ij}(t)$ unidades que requiere la industria j $(j = 1,2,\ldots,n)$ para la ampliación de su existencia de capital.
   - $C_i(t)$ unidades para el consumo de las familias.

   Así:

$$X_i(t) = \sum_{j=1}^{n} X_{ij}(t) + \sum_{j=1}^{n} I_{ij}(t) + C_i(t), \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (4.8.31)$$

2. $X_{ij}(t) = a_{ij} X_j(t)\,; \quad i,j = 1,2,\ldots,n$ (4.8.32)

   Las constantes a_{ij} se denominan *coeficientes insumo - producto* y constituyen la matriz $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ de *coeficientes técnicos*.

3. Las cantidades $C_i(t)$ son exógenas y van creciendo según la tasa de crecimiento $m > 0$, que considera, por ejemplo, el crecimiento poblacional; así

$$C_i(t) = (1+m)C_i(t-1),$$

   de donde

$$C_i(t) = (1+m)^t C_i(0) \qquad i = 1,2,\ldots,n \qquad (4.8.33)$$

4. Existe proporcionalidad, independiente de t, entre la existencia de capital $K_{ij}(t)$ al inicio del período t y la producción $X_j(t)$ en el mismo período; así

$$\frac{K_{ij}(t)}{X_j(t)} = \frac{K_{ij}(t+1)}{X_j(t+1)} =: b_{ij}\,; \quad i,j = 1,2,\ldots,n \quad t = 0,1,\ldots \qquad (4.8.34)$$

En consecuencia, para la inversión

$$I_{ij}(t) := K_{ij}(t+1) - K_{ij}(t),$$

se tiene

$$I_{ij}(t) = b_{ij}\left(X_j(t+1) - X_j(t)\right); \quad i,j = 1,2,\ldots,n \tag{4.8.35}$$

Con estas consideraciones y empleando la notación matricial y vectorial correspondiente, luego de reemplazar (4.8.32), (4.8.33) y (4.8.35) en (4.8.31) y transponer términos convenientemente, obtenemos la ecuación

$$B.X(t+1) = (I - A + B)\,X(t) - (1+m)^t\,C(0).$$

Si la matriz $B = \left[b_{ij}\right]$ es invertible, tenemos

$$X(t+1) = \left(B^{-1}(I-A) + I\right)X(t) - (1+m)^t\,B^{-1}C(0), \quad t = 0,1,2,\ldots \tag{4.8.36}$$

que es un sistema de ecuaciones en diferencias como el dado en (4.8.5). (Evidentemente la matriz A no es la misma).

Según lo visto en Observaciones 4.58, una condición necesaria para que se cumplan las condiciones de estabilidad en el sistema, es la desigualdad (4.8.29); en este caso tal desigualdad implica que la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz $B^{-1}(I-A)$ (su traza) sea negativa.

Ejercicios 4.60

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones en diferencias y analizar el comportamoento de las soluciones:

   a) $x_{t+1} = x_t + 2y_t + 6t + 5, \quad x_0 = 1$
      $y_{t+1} = 3x_t + 2y_t + 3t - 2, \quad y_0 = 2$

   b) $y_t = 100 + 0.8y_{t-1} + 0.3x_{t-1}$
      $x_t = 200 + 0.1y_{t-1} + 0.6x_{t-1}$

   c) $Y_{t+1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} Y_t, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

   d) $Y_{t+1} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} Y_t$

   e) $Y_{t+1} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} Y_t$

(Sugerencia: expresar los valores propios en forma polar y emplear la fórmula de Moivre para resolver el sistema 4.8.24 correspondiente)

f) $Y_{t+1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} Y_t \;,\; Y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

g) $Y_{t+1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} Y_t \;,\; Y_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

h) $\begin{cases} x_{t+1} = y_t + z_t \\ y_{t+1} = x_t + z_t + 1 \\ z_{t+1} = x_t + y_t + t \\ x_0 = y_0 = z_0 = 1 \end{cases}$

i) $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

2. En el siguiente modelo, determinar el equilibrio y analizar si la función (U_t, π_t) converge hacia él. Precisar el tipo de convergencia o divergencia.

$$p_t = 0.5 - 3U_t + \tfrac{1}{2}\pi_t$$
$$\pi_{t+1} - \pi_t = 0.25(p_t - \pi_t)$$
$$U_{t+1} - U_t = -(m - p_{t+1})$$

3. La oferta de maíz, en el período t está dada por

$$S_t^M = 2p_{t-1} - 1$$

donde p_{t-1} es el precio del maíz en el período $t-1$. El maíz es usado exclusivamente en la alimentación de cerdos, por lo cual (con unidades de medida adecuadas) la demanda de maíz en el período t, $\left(D_t^M\right)$, es igual a la oferta de cerdos en el período $t+1$, $\left(S_{t+1}^C\right)$, lo cual está dada por

$$S_{t+1}^C = 3(q_t - p_t) - 1 \;,$$

donde q_t es el precio de cada cerdo en el periodo t.

La demanda de cerdos es $\quad D_{t+1}^C = 1 - q_{t+1}$

a) Establecer el sistema de ecuaciones en diferencias en las variables p y q

b) Determinar los precios de equilibrio p^* y q^*

c) Analizar si los precios convergen a los precios de equilibrio.

4. Sea el sistema

$$x_{t+2} + x_{t+1} + y_{t+1} - y_t = 2$$

$$-y_{t+2} + x_{t+1} - y_{t+1} - 2\,x_t = 5$$

Transformarlo en un sistema lineal, con una matriz de orden 4×4, empleando los siguientes cambios de variable:

$$u_t = x_t \; ; \qquad v_t = x_{t+1} \; ; \qquad w_t = y_t \; ; \qquad z_t = y_{t+1}$$

4.9 ECUACIONES DIFERENCIALES

Ya no nos ocuparemos de las ecuaciones diferenciales con el detalle que lo hemos hecho para las ecuaciones en diferencias. La analogía en los procedimientos y análisis es muy grande y el lector puede completar los detalles con la información global que damos en esta sección o remitirse a la bibliografía específica.

Con lo visto en las secciones 4.3, 4.4 y 4.5 se pueden resolver ecuaciones diferenciales lineales de orden n y con coeficientes constantes, de manera muy similar a como lo hemos hecho para ecuaciones en diferencias, en las secciones 4.6 y 4.7.

Debe tenerse en cuenta que la solución general de la ecuación

$$\frac{dy}{dt} + a_1 y = 0\,, \quad a_1 \neq 0\,, \tag{4.9.1}$$

similar a (4.6.2), puede obtenerse por integración inmediata:

$$\frac{dy}{y} = -a_1\,dt \qquad (y(t) > 0)$$

$$\ln y = -a_1 t + c$$

$$y = e^{-a_1 t}\, e^c$$

$$y = K\, e^{-a_1 t}, \tag{4.9.2}$$

donde $K = e^c$; y en caso se tenga la condición inicial $y(0) = y_0$, vemos inmediatamente que $K = y_0$ y así

$$y = y_0\, e^{-a_1 t}.$$

El comportamiento de esta solución depende entonces del signo de $(-a_1)$:

- Si $-a_1 > 0$, es claro que $e^{-a_1 t}$ es creciente y $\lim\limits_{t \to +\infty} y_0 e^{-a_1 t} \neq 0$ (salvo que $y_0 = 0$).
- Si $-a_1 < 0$, es claro que $e^{-a_1 t}$ es decreciente y $\lim\limits_{t \to +\infty} y_0 e^{-a_1 t} = 0$ (salvo que $y_0 = 0$).

Notemos que la solución de (4.9.1) en ningún caso es oscilante.

Si la ecuación es no homogénea, se determinará una solución particular, procediendo de manera análoga al caso de las ecuaciones en diferencias. (Notas 4.41 y sus adecuaciones correspondientes).

Al resolver ecuaciones diferenciales, de orden n como la (4.5.3), que hemos resumido en $L(y)(t) = b(t)$, en (4.5.3)', el conjunto de n funciones linealmente independientes que resuelven $L(y)(t) = 0$ (*Paso 1*), se obtiene resolviendo la correspondiente ecuación característica

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

y definiendo las funciones $y_i = e^{r_i t}$, si todas las raíces r_i son diferentes, y multiplicando estas funciones por potencias de t según sea el grado de multiplicidad de las raíces. En caso haya raíces no reales, debe tenerse en cuenta que

$$e^{(\alpha \pm i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t \pm i \operatorname{sen} \beta t)$$

y que $y(t) = c_1 e^{(\alpha + i\beta)t} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)t}$ puede expresarse entonces como

$$y(t) = e^{\alpha t}\left(K_1 \cos \beta t + K_2 \operatorname{sen} \beta t\right) \tag{4.9.3}$$

El comportamiento de la solución general de $L(y)(t) = 0$ también depende de los signos de las raíces de su ecuación característica:

- Si todas las raíces r son negativas, es claro que las funciones de la forma $y(t) = t^p e^{r_i t}$ tienden a cero cuando $t \to +\infty$ y cualquier combinación de ellas también. (La presencia de t^p es considerando las posibles repeticiones de las raíces).
- Si existen raíces no reales (pares de raíces complejas conjugadas) lo determinante para que la solución $y(t)$ se aproxime a cero, cuando $t \to +\infty$,

es que la parte real de las raíces sea negativa; pues según (4.9.3) en tal caso se tiene

$$\lim_{t\to+\infty} y(t)=0 .$$

$$(\alpha<0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} e^{\alpha t}\left(K_1 \cos\beta t + K_2 \operatorname{sen}\beta t\right)=0).$$

Notar que cuando existen raíces no reales, se tienen soluciones oscilantes por la presencia de las funciones seno y coseno:

si $\alpha<0$ las oscilaciones son *amortiguadas*;

si $\alpha>0$ las oscilaciones son *explosivas*; y

si $\alpha=0$ las oscilaciones son *regulares*.

La solución de una ecuación $L(y)(t)=b(t)$ es estable si y sólo si la solución general $y=u(t)$ de $L(y)(t)=0$ es tal que $\lim_{t\to+\infty} u(t)=0$, independientemente de las condiciones iniciales; en consecuencia,

$L(y)(t)=b(t)$ tiene soluciones estables si y sólo si todas las raíces de la ecuación característica correspondiente tienen parte real negativa.

(Notar que se están considerando tanto las raíces reales como las no reales).

Ejemplos

1. Resolvamos la ecuación

$$4y'''-8y''-11y'-3y=5e^{3t}.$$

Paso 1: De $4y'''-8y''-11y'-3y=0$

obtenemos la ecuación característica

$$4r^3-8r^2-11r-3=0 .$$

Sus raíces son

$$r_1=3 , \ r_2=r_3=-\frac{1}{2}.$$

La solución general de la ecuación homogénea es

$$u(t)=K_1e^{3t}+K_2e^{-\frac{1}{2}t}+K_3te^{-\frac{1}{2}t}.$$

Paso 2: Conjeturamos como solución particular

$$\overline{u}(t) = A\,t\,e^{3t}.$$

No ensayamos $A e^{3t}$, porque ya vimos que esta función es solución de la homogénea.

Haciendo las derivaciones y reemplazos correspondientes, obtenemos $A = 5/49$ y en consecuencia

$$\overline{u}(t) = \frac{5}{49}\,t\,e^{3t}.$$

Paso 3: La solución general de la ecuación dada es

$$y(t) = K_1 e^{3t} + K_2 e^{-\frac{1}{2}t} + K_3 t e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{5}{49}\,t\,e^{3t}.$$

Podemos observar que siendo 3 una de las raíces, la solución general no tiende a la trayectoria de equilibrio cuando $t \to +\infty$.

2. La solución general de la ecuación

$$y'' + 4y' + 5y = 10t$$

es
$$y(t) = e^{-2t}\left(K_1 \cos t + K_2 \operatorname{sen} t\right) + 2t - \frac{8}{5},$$

pues las raíces de la ecuación característica son

$$r_1 = -2 + i\,,\ \ r_2 = -2 - i\,.$$

La solución particular se obtiene partiendo de

$$\overline{u}(t) = A\,t + B\,.$$

Como todas las raíces tienen parte real negativa, la solución general es estable. Vemos que cuanto más grande es el valor de t, los valores de la solución general son más próximos a $2t - \frac{8}{5}$, pues

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-2t}\left(K_1 \cos t + K_2 \operatorname{sen} t\right) = 0\,.$$

Los sistemas de ecuaciones diferenciales, lineales, de primer orden y con coeficientes constantes –que podemos escribir como

$$Y'(t) = A\,Y(t) + B(t)\,, \tag{4.9.4}$$

de manera similar a los sistemas (4.8.5) de ecuaciones en diferencias– se resuelven también siguiendo lineamientos generales análogos; sin embargo debe notarse que en este caso se tienen que interpretar expresiones como

e^{At}, siendo A una matriz de orden $n \times n$. Ciertamente este es un campo muy amplio de la matemática y hay libros que tratan cuidadosamente los diversos casos y el análisis cualitativo[1]. No queremos dejar de mencionar que *el criterio de estabilidad correspondiente es que la matriz A tenga todos sus valores propios con parte real negativa.*

También existen algunas condiciones que nos permiten analizar este criterio sin tener que determinar explícitamente los valores propios.

I. Si la matriz $A = [a_{ij}]$, de orden $n \times n$, es simétrica, ya sabemos que tiene todos sus valores propios reales; en consecuencia, tienen parte real negativa si y sólo si son negativos; *si y sólo si los menores principales de la esquina superior izquierda de A tienen, todos, signos alternados, siendo el primero negativo.*

II. a) *Si todos los valores propios de* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *tienen parte real negativa,* ***necesariamente*** *debe ocurrir que*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} < 0 .$$

b) *Si todos los valores propios de* $A_{n\times n}$ *tienen parte real negativa,* **necesariamente** *el signo de* $|A|$ *debe ser el de* $(-1)^n$.

III. *Si* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, *todos sus valores propios tienen parte real negativa si y sólo si*

i) $a_{11} + a_{22} < 0$ (*Traza de A negativa*)

ii) $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} > 0$ (*Determinante de A positivo*)

Aplicación 4.61

Consideremos nuevamente el modelo insumo - producto con los supuestos de J. Schumann, visto en la Aplicación 4.59, pero ahora con variación continua del tiempo. La ecuación de equilibrio (4.8.32) sigue siendo válida:

$$X_i(t) = \sum_{j=1}^{n} X_{ij}(t) + \sum_{j=1}^{n} I_{ij}(t) + C_i(t) ,$$

ahora para $t \geq 0$, $t \in \mathbf{R}$; $i, j = 1,2,\ldots,n$.

---

[1] Ver por ejemplo, Hirsh - Smale [11] para un tratamiento matemático y G. Gandolfo [8] para aplicaciones y soluciones prácticas.

Tenemos también

$$X_{ij}(t) = a_{ij} X_j(t) \; ; \quad t \geq 0.$$

Considerando $\frac{dC_i}{dt} = m C_i(t)$, obtenemos

$$C_i(t) = C_i(0) e^{mt}.$$

Respecto a las existencias de capital:

$$K_{ij}(t) = b_{ij} X_j(t) \; ; \quad t \geq 0$$

y considerando

$$I_{ij}(t) = \frac{dK_{ij}(t)}{dt} = b_{ij} \frac{dX_j(t)}{dt} = b_{ij} X'(t) ,$$

obtenemos, al hacer los reemplazos y transposiciones correspondientes,

$$B X'(t) = (I - A) X(t) - e^{mt} C(0) \; ; \quad t \in \mathbf{R}, \quad t \geq 0$$

que es un sistema no homogéneo de n ecuaciones diferenciales, de primer orden y con coeficientes constantes y puede ser analizado con los criterios expuestos.

Aplicación 4.62 (Una dinamización del modelo *IS - LM*)

Retomamos ahora el modelo *IS-LM* visto ya en el Capítulo 1 (Aplicaciones 1.11, 1.16 y 1.29). Ya adelantamos en la Aplicación 1.16 que el sistema no lineal de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= k_1 \left(C_0 + C(Y,r) + I_0 + I(Y,r) + G_0 - Y \right); \quad k_1 > 0 \\ \frac{dr}{dt} &= k_2 \left(L_0 + L(Y,r) - M_0 \right); \qquad\qquad\qquad k_2 > 0 \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

tiene soluciones cuyo comportamiento local –cerca del equilibrio– es similar al comportamiento de las soluciones del sistema lineal cuya matriz de coeficientes es la matriz jacobiana de la función vectorial (no lineal) evaluada en el punto de equilibrio $\left(Y^*, r^*\right)$. Recordando la notación vectorial adoptada en la Aplicación 1.16, tenemos

$$X = \begin{bmatrix} Y \\ r \end{bmatrix}; \quad G(X) = \begin{bmatrix} k_1 \left(C_0 + C(Y,r) + I_0 + I(Y,r) + G_0 - Y \right) \\ k_2 \left(L_0 + L(Y,r) - M_0 \right) \end{bmatrix}$$

Así (1.3.3) se escribe como

$$\frac{dX}{dt} = G(X)$$

y el sistema lineal que consideraremos para analizar la estabilidad del modelo en el punto de equilibrio es, como ya lo establecimos en (1.3.9)

$$\frac{dX}{dt} = DG(X^*)(X - X^*) .$$

Es claro que la matriz de coeficientes de este sistema es

$$DG(X^*) = \begin{bmatrix} k_1\left(C_Y(Y^*,r^*) + I_Y(Y^*,r^*) - 1\right) & k_1\left(C_r(Y^*,r^*) + I_r(Y^*,r^*)\right) \\ k_2\left(L_Y(Y^*,r^*)\right) & k_2\left(L_r(Y^*,r^*)\right) \end{bmatrix}.$$

Siendo una matriz de orden 2×2, empleamos el criterio de estabilidad dado en (4.9.5). Así, el sistema es estable si y sólo, en el punto de equilibrio se cumple

i) $k_1(C_Y + I_Y - 1) + k_2 L_r < 0$

ii) $k_1 k_2 (C_Y + I_Y - 1)L_r - k_1 k_2 (C_r + I_r) L_Y > 0$.

Estas condiciones se cumplen siendo k_1 y k_2 positivos y teniendo en cuenta los supuestos de comportamiento del modelo, establecidos en la Aplicación 1.29. En consecuencia, el punto de equilibrio –cuya existencia hemos sumido– es un punto de equilibrio estable.

Es de gran importancia esta vinculación entre el análisis dinámico y el análisis de estática comparativa en un modelo económico[1], ya que no sería relevante un punto de equilibrio al que ya no pueda "retornarse" o aproximarse al producirse una pequeña perturbación (equilibrio inestable).

Ejercicios 4.63

1. Resolver completamente las siguientes ecuaciones diferenciales y estudiar el comportamiento de sus soluciones

   a) $y' - 2y = 0$, $y(0) = 4$

   b) $2y' + 3y = 4$, $y(0) = 2$

   c) $y' - 5y = t^2$

---

[1] Fue expuesto inicialmente por Samuelson, en el *principio de correspondencia*.

d) $y' - 5y = e^t$

e) $y' - 5y = e^{5t}$

f) $y'' + 3y' - 10y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$

g) $y'' + 3y' - 10y = 2t + 3$

h) $y'' + 3y' - 10y = 4e^{2t}$

i) $y'' + 3y' - 10y = 6e^{2t} + 2e^{-5t}$

j) $y'' - 2y' + 2y = 4\cos t$

k) $y''' + y'' - 8y' - 12y = 6te^{-2t}$

2. La demanda y la oferta de un bien están en función de las variaciones del precio en el tiempo, según las siguientes ecuaciones:

$$x_D = 100 - p - \tfrac{1}{2}p'$$

$$x_S = 3p + \tfrac{3}{2}p' + p''$$

¿Es verdad que el precio converge oscilando hacia el precio de equilibrio?

3. Sean: $p(t)$: inflación en el instante t

$\pi(t)$: inflación esperada en el instante t.

Se asume que los consumidores generan sus expectativas de manera adaptativa según la ecuación:

$$\pi'(t) = j\big(p(t) - \pi(t)\big) \;\; ; \;\; j \in]0, 1].$$

a) Determinar $\pi(t)$, asumiendo $p(t)$ constante. ¿Existe convergencia de $\pi(t)$ al nivel de inflación?

b) Determinar $\pi(t)$, asumiendo $p(t) = \alpha t$, $\alpha > 0$.

c) Con la solución de (b) obtener $\lim\limits_{t \to \infty} \big(\pi(t) - p(t)\big)$ e interpretar económicamente.

4. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales y analizar el comportamiento de sus soluciones:

a) $x_1' = 3x_1 + 6x_2 + t^2$

$x_2' = 4x_1 + 5x_2$

b) $x_1' = 3x_1 - 4x_2$

$x_2' = x_1 - x_2$

c) $x_1' = x_2$

$x_2' = -x_1 - x_2$

d) $X' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} t \\ 3e^t \end{bmatrix}$

e) $X' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} X$

f) $X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{bmatrix} X$

5. Dado el sistema

$$x' = x^2 y + y$$

$$y' = x - y + 1$$

estudiar el comportamiento de sus soluciones cerca del punto de equilibrio $(x' = y' = 0)$, planteando un sistema lineal adecuado.