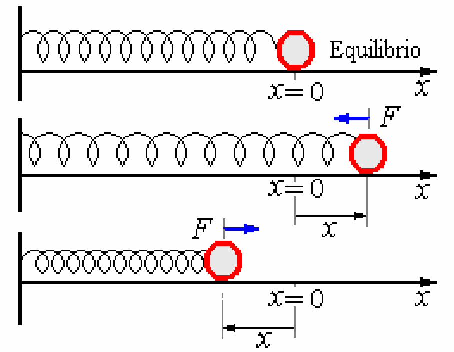
CAPÍTULO 5. TRABAJO Y ENERGÍA

INTRODUCCIÓN

Con lo que hemos visto hasta el momento estamos en condiciones de analizar un movimiento en situaciones en que la fuerza es constante. Una vez aplicada La segunda ley de Newton, determinamos la aceleración $a = F/m$. De aquí podemos determinar la velocidad y la posición. Pero en el caso en que la fuerza no es constante, por ejemplo cuando se jala una masa situada en un extremo de un resorte, el problema se complica.



La figura muestra un cuerpo de masa *m* sobre una superficie horizontal lisa, conectado a un resorte helicoidal. Si el resorte se estira o se comprime una longitud pequeña desde su posición no deformada o de equilibrio, el resorte ejercerá una fuerza sobre el cuerpo $F = -kx$, donde x es el desplazamiento del cuerpo desde la posición de equilibrio $(x = 0)$, k es la constante del resorte, el signo negativo (-) significa que la fuerza es en sentido opuesto al sentido del desplazamiento. Esta ley de fuerza se conoce como la ley de Hooke, de la cual nos ocuparemos en el Capítulo de Elasticidad

Apliquemos la segunda ley de Newton:

$$\sum F = ma$$

Con $F = -kx$ y $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$,

Obtenemos:

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

A pesar de ser una ecuación simple esta última, todavía no tenernos el conocimiento matemático para resolverla. Es decir, estamos en condiciones de plantear las ecuaciones del movimiento, pero no sabemos resolverlas.

Veremos aquí que se puede tomar un atajo y resolver de otra forma el problema. En este capitulo se verán los conceptos de Trabajo y Energía que se pueden aplicar a la dinámica de un sistema mecánico sin recurrir a las leyes de Newton.

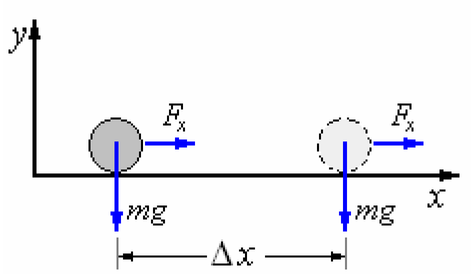
Sin embargo, es importante notar que los conceptos de Trabajo y Energía se fundamentan en las leyes de Newton y por lo tanto no requieren ningún principio nuevo.

TRABAJO

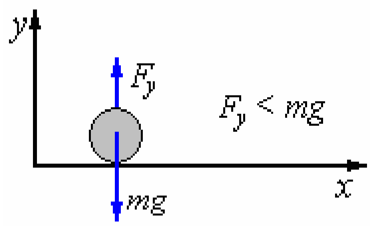
El término "trabajo" que se usa en la vida cotidiana es para definir una actividad de algún tipo que incluye un esfuerzo físico o mental y cuya finalidad sea el alcance de algún objetivo definido y bien establecido. En el estudio de la mecánica tiene un significado más restringido, por ejemplo si subimos cierta altura *h* con una masa *m* decimos que hemos realizado un trabajo *W*, si subimos la misma altura *h* pero con una masa 2*m*, se habrá realizado un trabajo 2*W*, igual a que si se hubiese transportado una masa *m* una altura 2*h*, o si se hubiese transportado dos veces la masa *m*, la altura *h*. Estas observaciones sugieren que el trabajo es una magnitud física proporcional a la fuerza y a la distancia, pero que puede sumarse como un escalar.

Cuando una fuerza constante F_x mueve un cuerpo realizando un desplazamiento Δx que tiene la misma dirección que la fuerza, se define la cantidad de trabajo realizado por esta fuerza como:

$$W = F_x \Delta x$$



Ahora consideremos que sobre la misma masa m actúa una fuerza vertical F_y, menor que el peso mg del bloque, como tal no dará origen a ningún movimiento vertical y por lo tanto no estará realizando trabajo.

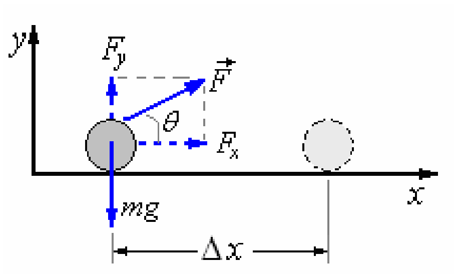


Si ahora aplicamos al mismo tiempo las dos fuerzas, la fuerza aplicada es:

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$$

Si el desplazamiento del bloque es únicamente en la dirección *x*,

$\Delta \vec{r} = x\hat{i}$



El trabajo realizado es el producto escalar de la tuerza por el desplazamiento es:

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = \left(F_x\hat{i} + F_y\hat{j}\right)\cdot \Delta x\hat{i} = F_x \Delta x$$

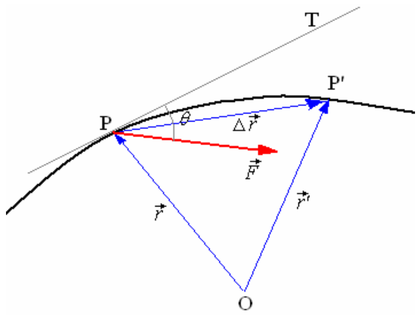
O $\Delta W = F\Delta x \cos\theta$

Donde

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ y

θ es el ángulo formado entre la fuerza aplicada y el desplazamiento.

Consideremos el caso general de una fuerza $\vec{F}$ cualquiera que mueve a una partícula sobre una trayectoria curva como se muestra en la siguiente figura.



Sea P la posición de la partícula en un instante t, la posición con respecto al origen de coordenadas O está dada por

$\vec{OP} = \vec{r}$

La partícula en el tiempo Δt describe la trayectoria $\overset{\frown}{PP'}$, si esta es suficientemente pequeña se puede asimilar como la cuerda $\vec{PP'}$, el desplazamiento de la partícula en el tiempo Δt es $\vec{PP'} = \Delta\vec{r}$

Cuando P' tiende a P $(\Delta t \rightarrow 0)$.

La dirección de la cuerda $\vec{PP'}$ es el de la tangente PT en P, $\Delta\vec{r}$ es $d\vec{r}$, la fuerza es constante en dirección y sentido.

El trabajo de la fuerza $\vec{F}$ para el desplazamiento $d\vec{r}$ es un trabajo diferencial.

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$dW = \left|\vec{F}\right|\left|d\vec{r}\right|\cos\theta$$

$$dW = F\ ds\cos\theta$$

$$dW = F_t\ ds$$

Es el trabajo realizado por la componente tangencial de la fuerza F_t.

El trabajo de la componente normal F_n es nulo.

Para evaluar el trabajo realizado para ir desde el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a un punto $P_2(x_2, y_2, z_2)$ tenemos que integrar el trabajo diferencial.

$$W_{P_1P_2} = \int_{P_1}^{P_2} dW = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Para esto tenemos que conocer como varía $\vec{F}$

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

Siendo $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$

Tenemos: $\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

Luego: $W_{P_1P_2} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz$

La unidad de trabajo es una unidad derivada de las unidades de fuerza y de longitud.

$$[W] = FL = ML^2T^{-2}$$

En el sistema Internacional la unidad de trabajo es el Joule (J).

1 Joule = (1 Newton)(1 metro)

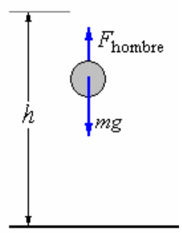
Ejemplo 1. Un hombre levanta una masa *m* con una fuerza tal que la coloca a una altura *h* sobre el piso a velocidad constante.

a) ¿Cuánto trabajo realiza la gravedad?

b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que ejerce el hombre?

Solución.

a)



$$W_{gravedad} = \int_{y=0}^{y=h} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^h \left(-mg\hat{k}\right)\cdot dy\hat{k}$$

$$= -mg\int_0^h dy = -mgh$$

b) Podríamos hacerlo directamente por la ley de Newton, pero lo haremos con los conceptos de trabajo. Como la masa se mueve con velocidad constante, el trabajo realizado es cero.

$$W_{\text{hombre}} + W_{gravedad} = 0$$

$$\Rightarrow W_{\text{hombre}} = -W_{gravedad} = mgh$$

También tenemos:

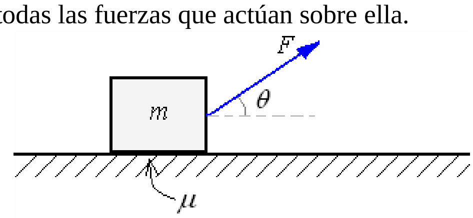
$$W_{\text{hombre}} = \int_{y=0}^{y=h} \vec{F}_{\text{hombre}} \cdot d\vec{r} = \int_0^h F\hat{k} \cdot dy\hat{k}$$

$$= F\int_0^h dy = Fh$$

Luego: $Fh = mgh \Rightarrow F = mg$

Y $\vec{F} = mg\hat{k}$

Ejemplo 2. Se arrastra una caja de masa m sobre un piso horizontal, el coeficiente de fricción cinético entre la caja el piso es μ, mediante una fuerza que forma un ángulo θ con la horizontal, la caja se desplaza un distancia s hacía la derecha,
a) Calcule el trabajo realizado por la fuerza
b) Calcule el trabajo efectuado por La fuerza de fricción.
e) Determine el trabajo neto efectuado sobre la caja por todas las fuerzas que actúan sobre ella.



Solución.

a) El trabajo efectuado por $\vec{F}$ es:

$$W_F = \int_{x=0}^{x=s} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Como $\vec{F} = F\cos\theta\,\hat{i} + F\text{sen}\theta\,\hat{j}$ y $d\vec{r} = dx\hat{i}$

$$W_F = \int_{x=0}^{x=s} \left(F\cos\theta\,\hat{i} + F\text{sen}\theta\,\hat{j}\right) \cdot dx\hat{i}$$

$$= Fs\cos\theta = F_x\, s$$

La componente vertical de $\vec{F}$ no realiza trabajo.

b) Como $\vec{F}_f = -\mu N\hat{i}$

Y $N = mg - F\text{sen}\theta$

Obtenemos $\vec{F}_f = -\mu\left(mg - F\text{sen}\theta\right)\hat{i}$

El trabajo efectuado por $\vec{F}_f$ es

$$W_f = \int_0^s \vec{F}_f \cdot d\vec{r} = \int_0^s -\mu\left(mg - F\text{sen}\theta\right)\hat{i} \cdot dx\hat{i}$$

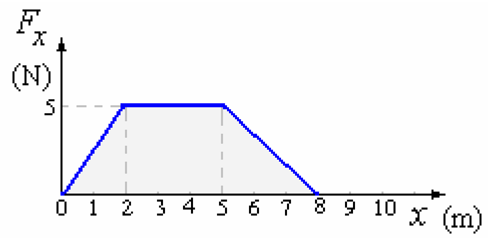
$$= -\mu\left(mg - F\text{sen}\theta\right)s$$

c) El trabajo neto sobre la caja es la suma de los resultados obtenidos en a) y b).

$$W_{neto} = W_F + W_f = F\cos\theta s - \mu\left(mg - F\text{sen}\theta\right)s$$

$$= \left[F\cos\theta - \mu\left(mg - F\text{sen}\theta\right)\right]s$$

Ejemplo 3. Una fuerza que actúa sobre un cuerpo varía con respecto a x como se muestra en la figura. Calcule el trabajo cuando el cuerpo se mueve desde x = 0 hasta x = 8 m.



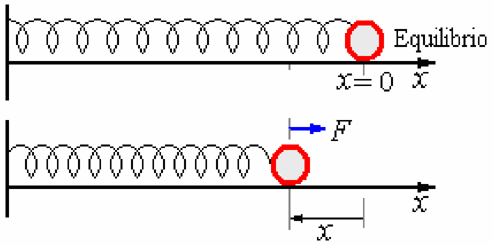
Solución.

El trabajo realizado por la fuerza es exactamente igual al área bajo la curva desde x = 0 hasta x = 8.

$$W = \frac{1}{2}(5\text{N})(2-0)\text{m} + (5\text{N})(5-2)\text{m} + \frac{1}{2}(5\text{N})(8-5)\text{m}$$

= (5 + 15 + 7,5) Nm
= 27,5 J

Ejemplo 4. Trabajo realizado por un resorte.



El resorte de la figura, cuando se deforma o estira hasta una cierta posición x, ejercerá una fuerza restauradora $F = -kx$.

Solución.

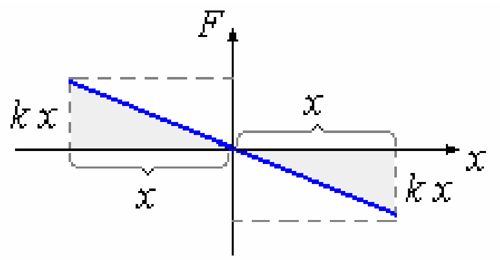
Supongamos que el objeto se empuja hacia la izquierda una distancia x respecto a la posición de equilibrio y se deja libre.

El trabajo realizado desde $x_1 = -x$ hasta $x_2 = 0$ por la fuerza del resorte a medida que el objeto se mueve es

$$W = \int_{x_1=-x}^{x_2=0} F_x dx = \int_{-x}^{0} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx^2$$

Y si consideramos el trabajo realizado por el resorte a medida que se estira de $x_1 = 0$ a $x_2 = x$ el trabajo es $W = -\frac{1}{2}kx^2$

Este resultado podemos obtenerlo también de La gráfica F versus x, como se muestra en la figura siguiente.



Ejemplo 5. La posición de una partícula en el plano está dada por $\vec{r} = 3t\hat{i} - 2t^2\hat{j}$ (t en segundos, r en

metros), la fuerza ejercida sobre la misma es

$\vec{F} = 4\hat{i} - 5\hat{j}$ (en Newton).

¿Qué trabajo se realiza sobre la partícula en el intervalo de t = l s a t = 3 s?

Solución.

$\vec{r} = 3t\hat{i} - 2t^2\hat{j} \Rightarrow d\vec{r} = 3dt\hat{i} - 4tdt\hat{j}$

Luego

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \left(4\hat{i} - 5\hat{j}\right)\cdot\left(3dt\hat{i} - 4tdt\hat{j}\right)$$
$$= 12dt + 20tdt$$

El trabajo W realizado sobre la partícula entre t = 1 y t = 3.

$$W = \int_{xt=1}^{t=3} dW = \int_1^3 (12 + 20t)dt$$
$$= \left[12t + \frac{1}{2}20t^2\right]_1^3 = 126 - 22 = 104 \text{ J}$$

El trabajo realizado sobre la partícula es 104 Joules.

ENERGIA CINETICA

Consideremos una partícula de masa m bajo la acción de la fuerza $\vec{F}$.

La segunda ley de Newton afirma que:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

También sabemos que $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$.

Multiplicando escalarmente:

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt = m\vec{v}\cdot d\vec{v}$$

Como $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ es el trabajo diferencial dW y

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot d\vec{v}\right)$$
$$= \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{2}m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}$$
$$= m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

De aquí:

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = m\vec{v}\cdot d\vec{v}$$

Reemplazando obtenemos:

$$dW = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

El trabajo para ir de P_1 donde la velocidad es v_1 al punto P_2 donde la velocidad es v_2 será:

$$W_{1\to 2} = \int_{P_1}^{P_2} dW = \int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Aquí tenemos una medida para el trabajo realizado sobre la partícula expresada en función de la variación de la magnitud $\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$.

Esta magnitud se define como la ENERGIA CINETICA K de la partícula.

Entonces: $K = \frac{1}{2}mv^2$

La energía cinética es una propiedad general del movimiento de la partícula es la ENERGIA DEL MOVIMIENTO. Sus dimensiones son las de trabajo.

$[K] = \text{ML}^2\text{T}^{-2}$

Su unidad es la misma que la del trabajo.

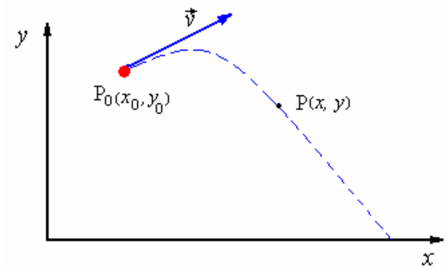
Resulta conveniente escribir:

$$W_{1\to 2} = K_2 - K_1 = \Delta K$$

El trabajo realizado por la fuerza al desplazar una partícula es igual al cambio de energía cinética de la partícula.

Ejemplo 6. Encontrar la variación de la energía cinética de un proyectil en función de su altura. Se lanza un proyectil de masa m desde el punto P_0 (x_0, y_0) con una velocidad inicial $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$.

Solución.



Para un proyectil la posición en función del tiempo es;

$$x = x_0 + v_{0x}t,\ y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Y la velocidad

$$v_x = v_{0x},\ v_y = v_{0y} - gt$$

La energía cinética en P_0 es

$$K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\left(v_{0x}^2 + v_{0y}^2\right)$$

La energía cinética en P es

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}m\left(v_{0x}^2 + v_{0y}^2 - 2v_{0y}gt + g^2t^2\right)$$

La variación de energía entre P y P_0 es:

$$\Delta K = K - K_0 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

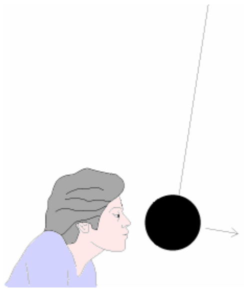
$$= \frac{1}{2}m\left(-2v_{0y}gt + g^2t^2\right)$$

$$= -mg\left(v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2\right)$$

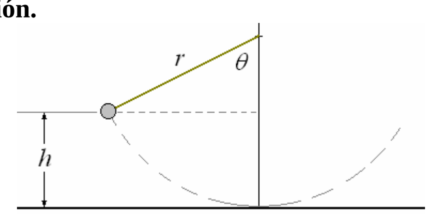
Como $y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$

Resulta $\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mg(y - y_0)$

Ejemplo 7. En una demostración experimental para ilustrar la conservación de la energía por medio del dispositivo siguiente. Se ata una bola del bowling a un extremo de una cuerda, y se sujeta el otro extremo al techo de la sala de conferencias. Se sostiene la bola parado en una escala tijeras alta, Para la demostración se suelta del reposo en el extremo de la nariz, la bola volverá de la oscilación más arriba y golpeará violentamente la cara, (intente esto alguna vez si usted desea experimentar un juego para asustar)
La demostración impresiona a la clase, pero no por la razón esperada. Aunque la cuerda es bastante fuerte para sostener la bola cuando está inmóvil, cuando la dejé ir, la cuerda se rompió en el fondo del arco y la bola fue despedida alrededor del salón "Boing boing, boing" y dispersó a los presentes en todas las direcciones.
Una bola de bowling realmente rebota en el concreto. Suponga que la bola pesa 80 N y la cuerda tenía 4,0 m de largo y tenía una resistencia a ruptura de 120 N. ¿Cuál es el máximo ángulo con la vertical con el que se habría podido lanzar la bola sin tener la rotura de la cuerda?



Solución.



La cuerda debe proporcionar suficiente fuerza ascendente para balancear el peso más la fuerza radial necesaria para que la bola haga la curva hacia arriba. La tensión en la cuerda será así la mayor en el punto más bajo del arco, donde la fuerza de la gravedad está dirigida hacia abajo y la bola se mueve lo más rápidamente.

$$\text{fuerza radial} = \frac{mv^2}{r}$$

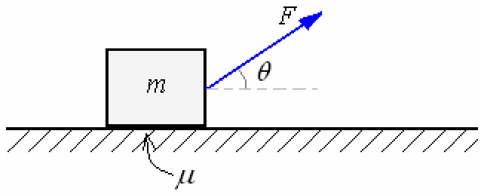
$$T - mg = \frac{mv^2}{r} \text{ y } mhg = \frac{1}{2}mv^2$$

$$h = r - r\cos\theta \quad T - mg = 2mg(1 - \cos\theta)$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{T - mg}{2mg} = 1 - \frac{120 - 80}{2(80)} = 0{,}75$$

$$\Rightarrow \theta = 41{,}4^\circ$$

Ejemplo 8. Se arrastra una caja de masa m sobre un piso horizontal, el coeficiente de fricción cinético entre la caja el piso es μ, mediante una fuerza que forma un ángulo θ con la horizontal. Si se empieza a jalar desde el reposo y considerando que ya se inició el movimiento ¿Cuál es la velocidad del bloque después que recorre una distancia s?



Solución.
En este caso como la fuerza F es constante, por la ley de Newton podríamos encontrar la aceleración, que es constante, pero vamos a hacerlo por conceptos de Energía Cinética y Trabajo.
Encontramos que

$$W_{Neto} = \left[F\cos\theta - \mu(mg - Fsen\theta)\right]s$$

Sabemos que

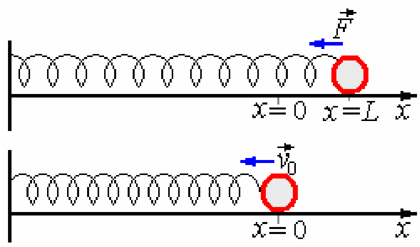
$$W_{Neto} = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Como: $v_1 = 0$ y $v_2 = v$

Finalmente:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left[F\cos\theta - \mu(mg - Fsen\theta)\right]s}$$

Ejemplo 9. Para el caso de la masa m atada a un resorte con constante de rigidez k. ¿Cuál es la velocidad cuando pasa por la posición de equilibrio después de estirarlo una longitud L y soltarlo?
Solución.



El trabajo realizado desde $x = L$ a $x = 0$ por la fuerza restauradora del resorte $F = -kx$ Es:

$$W_R = \frac{1}{2}kL^2$$

También $W_R = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$

Siendo $v_2 = v_0$ y $v_1 = 0$

Tenemos $\frac{1}{2}kL^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - 0$

$$\Rightarrow\ v_0 = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}L$$

Para el caso que mostramos la respuesta correcta es la negativa.

Ejemplo 10. Un objeto de masa *m* se mueve en el eje *x* sujeto a la fuerza $\vec{F} = m\frac{A}{x^2}\hat{i}$ donde *A* es una constante y *x* es la distancia desde el origen.
a) ¿Cuánto trabajo realiza esta fuerza si el objeto se mueve de *x* = *a* a *x* = *b*?
b) ¿Si la masa tenía una velocidad *v* en la dirección positiva de *x*, Cuál es su velocidad en *b*?

Solución.
a) El trabajo que realiza la fuerza para mover la masa desde *x* = *a* a *x* = *b* es:

$$W_{ab} = \int_{x=a}^{x=b}\vec{F}\cdot d\vec{r}\ ,\ \vec{F} = m\frac{A}{x^2}\hat{i}\ ,\ d\vec{r} = dx\hat{i}$$

Luego $W_{ab} = \int_a^b m\frac{A}{x^2}\hat{i}\cdot dx\hat{i} = mA\int_a^b\frac{dx}{x^2} =$

$$mA\left[-\frac{1}{x}\right]_a^b = mA\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

b) Como $W_{ab} = K_b - K_a = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$

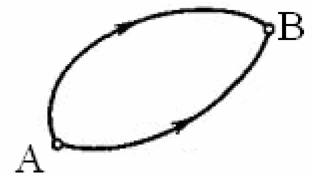
Siendo $v_a = v_0$

Tenemos $mA\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

$$v_b = \sqrt{2A\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + v_0^2}$$

SISTEMAS CONSERVATIVOS Y NO CONSERVATIVOS

Un sistema conservativo es aquel en el que el trabajo realizado por las fuerzas del sistema es independiente de la trayectoria seguida por el móvil desde una posición a otra, no existen fuerzas de rozamiento, ni dispositivos que puedan producir pérdida de la energía cinética.



Si en un sistema conservativo el trabajo efectuado por la fuerza para desplazar la partícula de A a B es independiente del camino entre A y B, se puede escribir:

$$W_{AB} = -W_{BA}$$

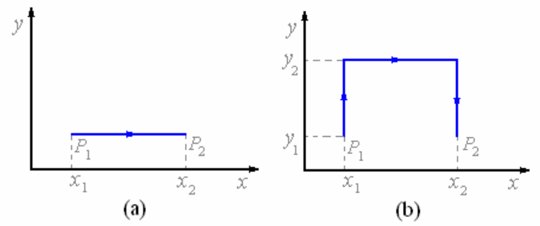
En un circuito cerrado

$$W_{AA} = W_{AB} + W_{BA}$$

Como $W_{AB} = -W_{BA}\ \Rightarrow\ W_{AA} = W_{AB} - W_{AB} = 0$

El trabajo total efectuado por una fuerza conservativa sobre una partícula es cero cuando la partícula se mueve alrededor de cualquier trayectoria cerrada y regresa a su posición inicial.
Naturalmente la definición de un sistema no conservativo es aquel que no satisface las condiciones anteriores.

Ejemplo 11. Sistema no Conservativo. - La fuerza de fricción. Supongamos que un bloque se mueve del punto P$_1$ (x_1, y_1) al punto P$_2$ (x_2, y_1), siguiendo Las trayectorias mostradas en las figuras siguientes, el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie es μ. Calcular el trabajo realizado por la fricción en ambos casos.



Solución.
Por la trayectoria (a)

$$W_{P_1P_2} = \int_{x_1}^{x_2}\vec{F}_f\cdot d\vec{r}$$

Aquí $\vec{F}_f = -\mu N\hat{i}\ ,\ d\vec{r} = dx\hat{i}$

Luego

$$W_{P_1P_2} = \int_{x_1}^{x_2}(-\mu N)dx = \mu N(x_2 - x_1)$$

Por la trayectoria (b)

$$W_{P_1P_2} = \int_{y_1}^{y_2}\vec{F}_{f1}\cdot d\vec{r}_1 + \int_{x_1}^{x_2}\vec{F}_{f2}\cdot d\vec{r}_2 + \int_{y_2}^{y_1}\vec{F}_{f3}\cdot d\vec{r}_3$$

Aquí

$$\vec{F}_{f1} = -\mu N\hat{j}\ ,\ d\vec{r}_1 = dy\hat{j}$$

$$\vec{F}_{f2} = -\mu N\hat{i}\ ,\ d\vec{r}_2 = dx\hat{i}$$

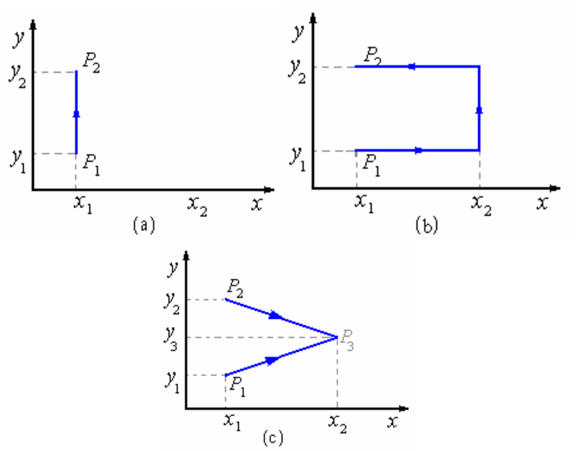
$$\vec{F}_{f3} = \mu N\hat{j}\ ,\ d\vec{r}_3 = dy\hat{j}$$

Luego

$$W_{P_1P_2} = \int_{y_1}^{y_2}(-\mu N)dy + \int_{x_1}^{x_2}(-\mu N)dx + \int_{y_2}^{y_1}(\mu N)dy$$
$$= -\mu N(y_2 - y_1) - \mu N(x_2 - x_1) + \mu N(y_1 - y_2)$$
$$= -\mu N(x_2 - x_1) - 2\mu N(y_2 - y_1)$$

Obviamente el trabajo realizado por la fuerza de fricción por las dos trayectorias a) y b) no son iguales, por consiguiente cuando hay fuerza de fricción el sistema no es conservativo. (La fricción no es conservativa).

Ejemplo 12. Sistema Conservativo. La fuerza de la gravedad Supongamos que un bloque de masa *m* se mueve del punto $P_1(x_1, y_2)$ al punto $P_2(x_2, y_2)$ donde *y* es la dirección vertical. Calcular el trabajo realizado por la fuerza gravitacional con los tres casos mostrados en la figura.



Solución.
Por la trayectoria a)

$$W_{P_1P_2} = \int_{y_1}^{y_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{r}$$

Aquí

$$\vec{F}_g = -mg\hat{j}\ ,\ d\vec{r} = dy\hat{j}$$

Luego

$$W_{P_1P_2} = \int_{y_1}^{y_2} -mgdy = -mg(y_2 - y_1)$$

Por la trayectoria b)

$$W_{P_1P_2} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{r}_1 + \int_{y_1}^{y_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{r}_2 + \int_{x_2}^{x_1} \vec{F}_g \cdot d\vec{r}_3$$

Aquí

$$\vec{F}_g = -mg\hat{j}\ ,\ d\vec{r}_1 = dx\hat{i}\ ,\ d\vec{r}_2 = dy\hat{j}\ ,\ d\vec{r}_3 = dx\hat{i}$$

Luego

$$W_{P_1P_2} = 0 + \int_{y_1}^{y_2}(-mg)dy + 0 = -mg(y_2 - y_1)$$

Igual que en a)

Por la trayectoria c).

$$W_{P_1P_2} = W_{P_1P_3} + W_{P_3P_2}$$

$$W_{P_1P_2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{r} + \int_{r_3}^{r_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{r}$$

Aquí

$$\vec{F}_g = -mg\hat{j}\ ,\ d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$$

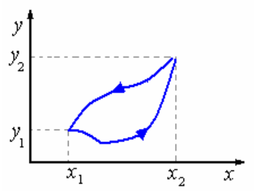
$$\vec{F}_g \cdot d\vec{r} = (-mg\hat{j})\cdot(dx\hat{i} + dy\hat{j}) = (-mg)dy$$

Luego

$$W_{P_1P_2} = \int_{y_1}^{y_3}(-mg)dy + \int_{y_3}^{y_2}(-mg)dy$$
$$= -mg(y_3 - y_1) - mg(y_2 - y_3)$$
$$= -mg(y_2 - y_1)$$

Resultado igual que en a) y b)
Luego la fuerza de la gravedad es una fuerza conservativa.

Trabajo en una trayectoria cerrada.
Si completamos la trayectoria volviendo al punto inicial, tenemos una trayectoria cerrada y el trabajo es cero.



El trabajo para ir de 1 a 2 es

$$W_{r_1r_2} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 = \int_{x_1}^{x_2}(F_x\hat{i} + F_y\hat{j})\cdot(dx\hat{i} + dy\hat{j})$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy$$

Como

$$\vec{F} = -mg\hat{j}:\ F_y = -mg\ .\ F_x = 0$$

$$W_{r_1r_2} = 0 - mg(y_2 - y_1)$$
$$= -mg(y_2 - y_1)$$

El trabajo para ir 2 a 1 es

$$W_{r_2r_1} = \int_{x_2}^{x_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_2}^{x_1} F_x dx + \int_{y_2}^{y_1} F_y dy$$
$$= 0 - mg(y_1 - y_2)$$
$$= -mg(y_1 - y_2)$$

El trabajo total es

$$W_{r_1r_1} = W_{r_1r_2} + W_{r_2r_1}$$
$$= -mg(y_2 - y_1) - mg(y_1 - y_2)$$
$$= 0$$

Esto no sucedería en el caso de una fuerza no conservativa, como la fuerza de fricción.

LA FUNCION ENERGÍA POTENCIAL

El trabajo realizado por la fuerza

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

Para mover una partícula de

$P_1(x_1.\ y_1,\ z_1)$ a $P_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ es igual a:

$$W_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2}\left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right)$$

Para un sistema conservativo el trabajo es independiente de la trayectoria seguida.

Su integral debe ser un diferencial exacto, digamos - dU, tal que integrándolo, solamente los límites determinan el valor de la integral.

Esto es:

$$W_{12} = \int_{P_1}^{P_2}(-dU) = (-U)_{P_1}^{P_2} = -(U_2 - U_1) = -\Delta U$$

Aquí llamamos a U, energía potencial, cuyas unidades son las mismas que las de trabajo.

Hemos determinado la función energía potencial a partir de una fuerza dada.

Consideremos ahora el problema inverso, a partir de una función energía potencial determinar la fuerza

$$dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

Como U es función de x, y y z, podemos escribir esta derivada en función de sus derivadas parciales:

$$dU_{(x,y,z)} = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

Relacionando con los componentes de la fuerza obtenemos

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x},\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y},\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)$$

Ejemplo 13. La fuerza de la gravedad es un ejemplo de fuerza conservativa.

Solución.

Tomemos la vertical a la tierra como el eje y, tal que:

$$\vec{F}_g = F_g\hat{j} = -mg\hat{j}$$

El trabajo realizado por la gravedad cuando la partícula se desplaza desde el punto y_1 al punto y_2 es:

$$W_{12} = \int_{y_1}^{y_2} -mg\hat{j}\cdot dy\hat{j} = -mg\int_{y_1}^{y_2} dy$$

$$= -mg(y_2 - y_1)$$

Como $W_{12} - \Delta U$:

$$-mg(y_2 - y_1) = -\Delta U = U_{(y_1)} - U_{(y_2)}$$

O $\Delta U = U_{(y_2)} - U_{(y_1)} = mgy_2 - mgy_1$

Si consideramos la energía potencial igual a cero en el nivel de referencia $y = 0$, la energía potencial a cualquier altura con respecto a $y = 0$ es:

$$U_{(y)} = mgy$$

También podíamos haber determinado esta función a partir de:

$$dU = -F_g dy \Rightarrow dU = -(-mg)dy = mgdy$$

Integrando

$$\int dU = \int mgdy + C$$

$$U_{(y)} = mgy + C$$

Donde C es una constante relacionada con las condiciones de cada caso, por ejemplo aquí consideramos para $y = 0$

$\Rightarrow U_{(0)} = 0$.

La constante es $C = 0$

$\Rightarrow U_{(y)} = mgy$

Como comprobación, a partir de esta energía potencial podemos encontrar la fuerza.

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial mgy}{\partial x} = 0$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial mgy}{\partial y} = -mg$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial mgy}{\partial z} = 0$$

Luego: $\vec{F} = -mg\hat{j}$

Ejemplo 14. Determinar la función energía potencial asociada a un resorte de constante de rigidez k.

Solución.

Consideremos que el resorte está en el eje x, y se estira en esa dirección.

$$\vec{F} = -kx\hat{i}$$

Tenemos que:

$$dU = -F_x dx = -(-kx)dx = kxdx$$

Integrando

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

Si para la posición de equilibrio $x = 0$, la energía potencial es cero, C es igual a cero y

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Ahora realicemos el problema inverso:

Dado $U = \frac{1}{2}kx^2$ encontrar la fuerza correspondiente:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

Luego $\vec{F} = -kx\hat{i}$

Ejemplo 15. Energía potencial gravitatoria cerca de la tierra. Por la ley de Newton de la gravitación universal, la fuerza de atracción de dos masas es directamente proporcional al producto de estas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}$$

Donde *m* es la masa e un cuerpo, *M* la masa de la tierra, *r* la distancia entre las masas, *G* es la constante gravitatoria universal.
Si *r* = *R* (radio de la tierra), la masa *m* está sobre la superficie de la tierra y

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{R^2}\hat{r} = -mg\hat{r}$$

La energía potencial es

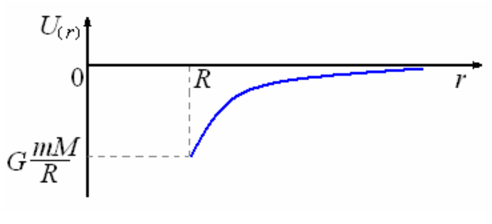
$$dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r} = G\frac{mM}{r^2}dr$$

$$U = \int G\frac{mM}{r^2}dr + C$$

$$U = -G\frac{mM}{r} + C$$

Para evaluar la constante *C* consideremos que el potencial *U* es cero para *r* infinito, de aquí C es igual a cero,
Luego

$$U_{(r)} = -G\frac{mM}{r}$$



CONSERVACION DE LA ENERGÍA
Hasta esta parte tenemos dos formas de encontrar el trabajo realizado sobre un objeto por una fuerza, la primera válida para todo caso ya sea fuerza conservativa o no conservativa

$$W_{12} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = K_2 - K_1 = \Delta K .$$

Y la segunda para el caso de fuerzas conservativas

$$W_{12} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

Luego podemos escribir

$$W_{12} = K_2 - K_1 = U_1 - U_2$$

Colocando las energías iniciales a un lado y las finales al otro tenemos:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

Esta ecuación es la forma matemática de "El principio de conservación de la energía mecánica".
Si definimos la energía mecánica total del sistema *E* como la suma de la energía cinética y potencial se puede expresar la conservación de la energía mecánica como:

$$E = K + U = \text{Constante}$$

Ejemplo 16. Fuerza de la gravedad: Se suelta una partícula de masa *m* desde la altura *h* sobre el suelo. Cuando la partícula está a una altura y del suelo, su velocidad es *v*.
Su energía potencial es $U = mgy$

Su energía cinética es $K = \frac{1}{2}mv^2$

La energía mecánica total es:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

Para $y = h$, $v = 0$

$$E = 0 + mgh = mgh$$

Para $y = 0$, $v = v_0$

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

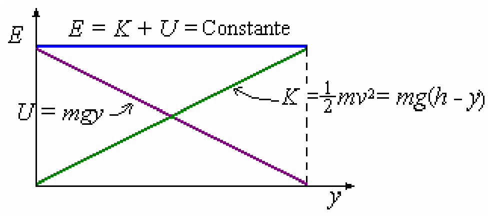
Para cualquier instante

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgh$$

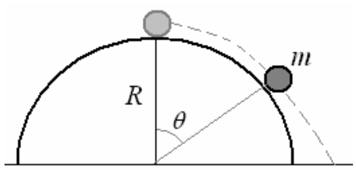
De aquí $v^2 = 2g(h - y) \Rightarrow$

$$v = \sqrt{2g(h - y)}$$

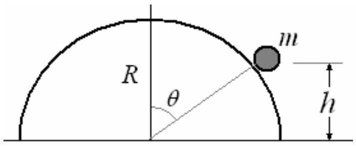
El gráfico de la variación de energía potencial y cinética es:



Ejemplo 17. Una masa pequeña *m* se suelta desde el reposo de la parte más alta de una superficie esférica de radio *R*, sin fricción. ¿A qué ángulo con vertical dejará el contacto con la esfera?



Solución.
Cuando la masa está a una altura *h* su energía es igual a cuando está en el punto más alto.



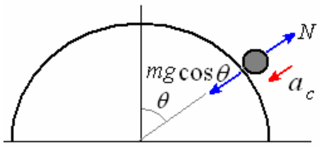
$$mgR + 0 = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

Con $h = R\cos\theta$

$$mgR = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow v^2 = gR(2 - 2\cos\theta)$$

La segunda ecuación de Newton cuando la masa esta en la posición del ángulo θ:



Con $a_c = \frac{v^2}{R}$:

$$N - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R}$$

La masa deja la superficie esférica cuando:

$N = 0$

$$mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R} = \frac{mgR(2 - 2\cos\theta)}{R}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{v^2}{Rg} = 2 - 2\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \theta = 48{,}2^{\text{o}}$$

Ejemplo 18. Fuerza de un resorte: Se jala una masa a sujeta a un resorte de constante *k* sobre una superficie sin fricción, desde la posición de equilibrio *x* = 0 hasta una distancia *L* y se suelta.
A una distancia *x* de la posición de equilibrio la velocidad de la masa es *v*.

Su energía potencial es $U = \frac{1}{2}kx^2$

Su energía cinética es $K = \frac{1}{2}mv^2$

Su energía mecánica total es:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Para $x = L$, $v = 0$

$$E = 0 + \frac{1}{2}kL^2 = \frac{1}{2}kL^2$$

Para $x = 0$, $v = v_0$

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

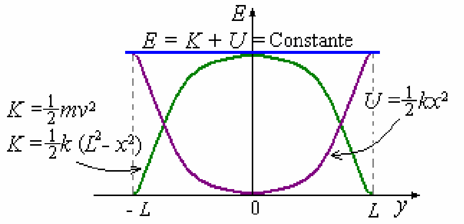
Para cualquier instante

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kL^2$$

De aquí: $v^2 = \frac{k}{m}\left(L^2 - x^2\right)$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{k}{m}\left(L^2 - x^2\right)}$$

El gráfico de la variación de la energía potencial y cinética es:



Ejemplo 19. Calcular la velocidad necesaria para que una partícula pueda escapar de la atracción de la tierra. La energía total *E* de una partícula de masa *m* que está a una distancia *r* del centro de la tierra y que tiene una velocidad *v* es:

$E = K + U$, donde $K = \frac{1}{2}mv^2$ y

$$U = -G\frac{mM}{r}$$

Luego: $E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = \text{Constante}$

Si la partícula escapa de la atracción de la tierra y se sitúa a una distancia infinita de ésta su potencial es cero.

$$r \rightarrow \infty\,,\ U_\infty = -G\frac{mM}{r} \rightarrow 0$$

En esta región con la velocidad menor posible

$v_\infty = 0$ Tenemos $K_\infty = 0$

Luego: $E = K + U = 0$

Como *E* es constante $\Rightarrow E = 0$

La energía *E* de la partícula en la superficie de la tierra con la velocidad v_e para que pueda escapar:

$$E = \frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{mM}{R} = 0$$

$$\Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Como en la superficie de la tierra

$$F = -G\frac{mM}{R^2} = -mg \ \Rightarrow\ g = \frac{GM}{R^2}$$

Tenemos: $v_e = \sqrt{2gR}$

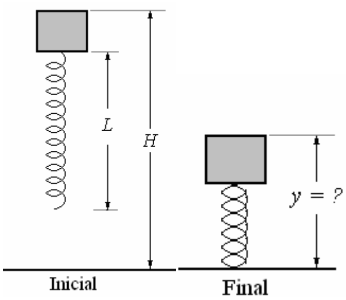
Siendo

$$g = 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ y } R = 6{,}4\times 10^6\,\text{m}$$

Obtenemos; $v_e = 1{,}12\times 10^4\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

Ejemplo 20. Se tiene un resorte de longitud *L* y constante *k* conectado a la base de un bloque de masa *m*, Se suelta el bloque desde la altura *H*. ¿Cuál será la distancia mas cercana al piso que alcanzará el bloque antes de rebotar?

Solución.



En el instante inicial la energía es solamente la potencia1 gravitatoria es $U = mgH$, la energía cinética es cero, tal que la energía total es $E = mgH$.

En el instante final: La energía potencial es la correspondiente a la masa a una altura *y*, más la del resorte comprimido una longitud $(L - y)$, es decir:

$$U = U_g + U_r = mgy + \frac{1}{2}k(L-y)^2$$

Como en ese instante ha cesado el movimiento, la energía cinética es cero,

La energía total es:

$$E = mgy + \frac{1}{2}k(L-y)^2$$

Por la conservación de la energía

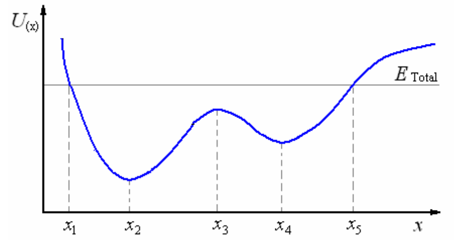
$$mgH = mgy + \frac{1}{2}k(L-y)^2$$

La solución de esta ecuación es:

$$y = -\left(\frac{mg}{R} - L\right) \pm \frac{mg}{k}\left[1 + \frac{2k}{mg}(H-L)\right]$$

Siendo el valor positivo de *y* la solución significativa.

Ejemplo 21. El gráfico de la figura muestra la función potencial y la energía total de un movimiento. ¿Qué podemos decir acerca del movimiento?



Solución.

Velocidad de la partícula:

Tenemos que

$$E_{Total} = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + U_{(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = E - U_{(x)} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{(x)}\right)}$$

La energía cinética:

- Es igual a cero en x_1 y x_5.
- Tiene su valor máximo donde $U_{(x)}$ es mínimo, el punto x_2

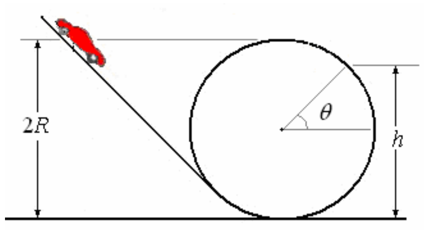
La partícula se mueve entre x_1 y x_5, fuera de estos valores la velocidad sería imaginaria.

Como $F_x = -\dfrac{dU_{(x)}}{dt}$, la pendiente del gráfico de $U_{(x)}$ en determinado punto corresponde a La fuerza actuante, tal que la fuerza se hace cero donde la pendiente es cero, como en x_2, x_3 y x_4.

La fuerza es positiva entre x_1 y x_2.entre x_3 y x_4. La fuerza es negativa entre x_2 y x_3, entre x_4 y x_5.

Los puntos en que *U* es mínimo, son posiciones de equilibrio estable, como son x_2 y x_4.

Ejemplo 22. En la figura, un auto de juguete de masa *m* se libera del reposo en la pista circular. ¿Si se suelta a una altura 2*R* sobre el piso, ¿cuán arriba sobre el piso estará cuando sale de la pista, desprecie la fricción?



Solución.

En la figura de arriba:

$$h = R(1 + \text{sen}\,\theta)$$

Despreciando las pérdidas por fricción la energía total es constante, de tal manera que:

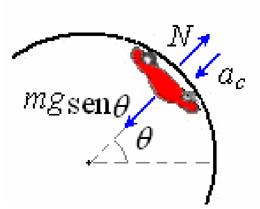
Siendo *v* la velocidad del auto a la altura *h*.

$$mg(2R) = mg(h) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$mg(2R) = mgR(1 + \operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$gR = gR\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}v^2 \quad (1)$$

Aplicando la segunda ley de Newton en la altura h:



$$mg\operatorname{sen}\theta - N = ma_c$$

N = 0, condición de caída.

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

Luego:

$$mg\operatorname{sen}\theta = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow$$

$$v^2 = gR\operatorname{sen}\theta \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$gR = gR\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}gR\operatorname{sen}\theta \Rightarrow$$

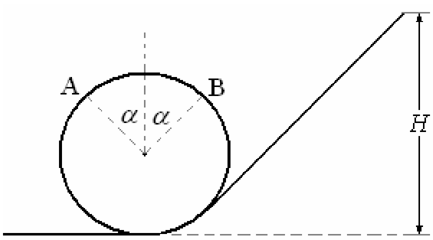
$$gR = \frac{3}{2}gR\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3}$$

Finalmente:

$$h = R(1 + \operatorname{sen}\theta) = R\left(1 + \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{5}{3}R = 1{,}67\ R$$

Ejemplo 23. Una masa pequeña resbala sobre una superficie inclinada pasando por un rizo de radio R.
a) ¿Cuál es la altura mínima H de la que debe soltarse a fin de que el cuerpo no deje la superficie interior del rizo al dar la vuelta?
b) ¿Con que velocidad llega la masa al punto A?
c) ¿Cuál es el valor del ángulo α, con el que se puede retirar el segmento $\overset{\frown}{AB}$ de la circunferencia de tal modo que la masa que sale de A alcance el punto B después de viajar una cierta distancia en el aire.

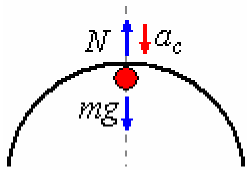


Solución.
a) Siendo v la velocidad de la masa en la parte superior del rizo.
Por conservación de la energía:

$$mg(H) = mg(2R) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$gH = 2gR + \frac{1}{2}v^2 \quad (1)$$

Aplicando la segunda ley de Newton en ese punto:



$$mg - N = ma_c$$

N = 0, condición de caída.

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

Luego:

$$mg = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow$$

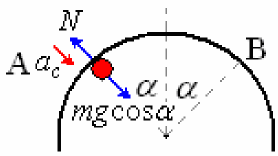
$$v^2 = gR \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$gH = 2gR + \frac{1}{2}gR \Rightarrow$$

$$H = \frac{5}{2}R \Rightarrow H = 2{,}5R$$

b) Sea v la velocidad en el punto A su altura es $h = R(1 + \cos\alpha)$



Por conservación de la energía:

$$mg(H) = mgR(h) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

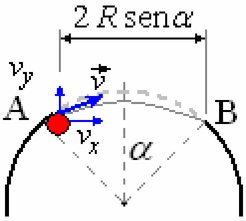
$$mg(2{,}5R) = mgR(1 + \cos\alpha) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$v^2 = 2g(2{,}5R) - 2gR(1 + \cos\alpha) \Rightarrow$$

$$v^2 = 3gR - 2gR\cos\alpha \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{gR(3 - 2\cos\alpha)}$$

c) La masa sale del punto A, como un proyectil con velocidad inicial $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$



En el tiempo *t* de su recorrido vertical debe alcanzar al punto B.
Recorrido vertical:

$$y = v\,\text{sen}\,\alpha t - \frac{1}{2}gt^2$$

Cuando llega a B, $y = 0$:

$$0 = v\,\text{sen}\,\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \frac{2v}{g}\text{sen}\,\alpha$$

Su recorrido horizontal es

$$x = v_x t = v\cos\alpha t$$

Para $t = \frac{2v}{g}\text{sen}\,\alpha$ debe de estar en B, luego:

$$2R\,\text{sen}\,\alpha = v\cos\alpha\left(\frac{2v}{g}\text{sen}\,\alpha\right) \Rightarrow$$

$$v^2 = \frac{gR}{\cos\alpha}$$

Igualando esta expresión de la velocidad con la encontrada anteriormente:

$$gR(3 - 2\cos\alpha) = \frac{gR}{\cos\alpha} \Rightarrow$$

$$\cos^2\alpha - \frac{3}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2} = 0$$

Resolviendo:

$$\cos\alpha = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$$

En nuestro caso tomamos la solución ½, con la que obtenemos $\alpha = 60^\circ$

Ejemplo 24. Un arco del tiro al arco ejerce la fuerza *kx* de la ley de Hooke en una flecha cuando la cuerda se jala una distancia *x*. Se supone que un arquero ejerce una fuerza de 220 N jalando a la flecha una distancia de 64 cm.
a) ¿Cuál es la constante del resorte del arco?
b) ¿Cuál es la velocidad de una flecha de masa 24 g cuando deja el arco?

Solución.

a) $k = \frac{F}{x} = \frac{220}{0{,}64}$ = 344 N/m

b) $U_1 + K_1 = U_2 + K_2$

$$\frac{1}{2}kx^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}}x$$

$$v = \sqrt{\frac{344}{0{,}024}}(0{,}64) = 76{,}6 \text{ m/s}$$

Ejemplo 24. Puenting. Un saltador que pesa 800 N se ata con una cuerda elástica al tobillo y se salta de una torre alta. La cuerda tiene una longitud si estirar de 30 m, y un extremo se une al punto donde el salto comienza. ¿La constante del resorte de la cuerda elástica es 200 N/m. ¿Cuánto recorrerá el saltador antes de que la cuerda detenga su descenso?

Solución.
Sea el punto más bajo del salto $h = 0$. La energía cinética inicial y la energía cinética en el punto más bajo son ambas igual a cero.
Tal que por la conservación de la energía:

$$mgh = 0 + \frac{1}{2}kx^2, \text{ donde } x = h - 30.$$

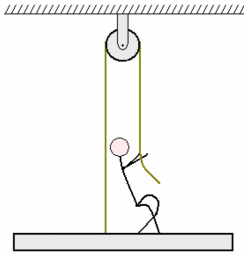
Sustituyendo
mg = 800 N y k = 200 N/m, y resolviendo:

$$h^2 - 68h + 900 = 0 \Rightarrow$$

$$h = 68 \pm \sqrt{(68)^2 - 4(900)} = 50 \text{ m, o } 18 \text{ m.}$$

La solución correcta es h = 50 m. La solución h = 18 m corresponde al rebote que comprime la cuerda “amortiguador auxiliar”, pero una cuerda no se comprime como un resorte.

Ejemplo 25. En la figura mostrada, el hombre y la plataforma tienen una masa *m*, el hombre se eleva una distancia *h* tirando la cuerda del lado derecho.
a) ¿En cuánto aumenta su energía potencial gravitatoria?
b) ¿Qué fuerza debe ejercer para elevarse?
c) ¿Qué longitud de cuerda debe tirar para llegar a la posición superior?
d) ¿Despreciando el rozamiento ¿Qué trabajo habrá realizado?



Solución.
a) La energía potencial gravitatoria es

$$U_{(y)} = mgy + C$$

Para la posición inicial

$$U_1 = mgy_1 + C$$

Para la posición final

$$U_2 = mgy_2 + C$$

El aumento de la energía potencial gravitatoria es:

$$U = U_2 - U_1 = mg(y_2 - y_1) = mgh$$

b) La fuerza para elevar el sistema, siendo esta conservativa,

$$F = -\frac{\partial U}{\partial y} = -mg$$

Como la polea divide en dos, la fuerza F_h que debe ejercer el hombre es: $F_h = \frac{mg}{2}$.

c) Para llegar a la posición superior la cuerda debe ser tirada en una longitud dos veces *h*
d = 2*h*.

d) EL trabajo realizado por el hombre es:

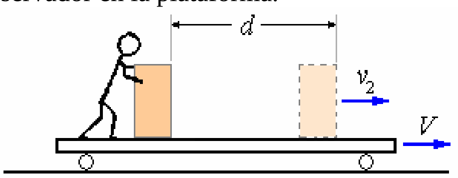
$$W_h = F_h d = \left(\frac{mg}{2}\right)(2h) = mgh$$

Justamente igual al cambio de energía.

Ejemplo 26. Observadores en movimiento relativo. Sobre una plataforma en movimiento horizontal con una velocidad constante *V*. un hombre empuja una caja de masa *m* con una fuerza *F* una distancia *d* partiendo del reposo. Demostrar la validez de la conservación de la energía desde los puntos de vista de observadores en marcos inerciales diferentes.

Solución.
Las leyes de Newton se cumplen sólo en marcos de referencia inerciales. Si se cumplen en uno en particular entonces se cumplen en todos los marcos de referencia que se muevan a velocidad constante en relación a este mareo.

a) Observador en la plataforma.



El observador en la plataforma ve que la caja, de masa *m*, se mueve bajo la acción de la fuerza *F*. El trabajo realizado para mover la distancia *d* es:

$$W = Fd$$

La aceleración de la caja es $a = \frac{F}{m}$

Como la caja parte del reposo su velocidad en la posición final es:

$$v_2 = \sqrt{2ad} = \sqrt{\frac{2Fd}{m}}$$

El observador determina que el cambio de energía:

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Como $v_1 = 0$ y $v_2 = \sqrt{\frac{2Fd}{m}}$

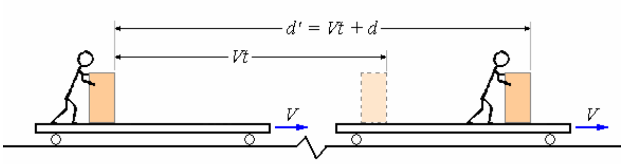
$$\Delta K = \frac{1}{2}m\left(\frac{2Fd}{m}\right) = Fd$$

El observador sobre la plataforma concluye que:

$$\Delta K = \frac{1}{2}m\left(\frac{2Fd}{m}\right) = Fd$$

$$W = \Delta K$$

b) Observador situado en tierra:



El observador en tierra ve que la caja se mueve bajo la acción de la fuerza *F*, en este caso la caja se mueve la distancia $d' = Vt' + d$,. Siendo *t* el tiempo que demora el recorrido de la distancia *d* sobre la plataforma,

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2dm}{F}}$$, luego $d' = V\sqrt{\frac{2dm}{F}} + d$

El trabajo es:

$$W' = Fd' = F\left(V\sqrt{\frac{2dm}{F}} + d\right)$$

$$W' = Fd + V\sqrt{2Fdm}$$

El observador ve que la caja tiene una velocidad inicial

$$v'_1 = V$$

y una velocidad final

$$v'_2 = V + v_2 = V + \sqrt{\frac{2Fd}{m}}$$

El observador en tierra determina que el cambio de energía es:

$$\Delta K' = K'_2 - K'_1 = \frac{1}{2}mv'^2_2 - \frac{1}{2}mv'^2_1$$

$$\Delta K' = \frac{1}{2}m\left(V + \sqrt{\frac{2Fd}{m}}\right)^2 - \frac{1}{2}mV^2$$

$$\Delta K' = Fd + V\sqrt{2Fdm}$$

Aquí se cumple también la conservación de la energía:

$$W' = \Delta K'$$

SISTEMAS NO CONSERVATIVOS.
Supongamos que también intervienen fuerzas no conservativas, como la fricción.

El trabajo total para mover la partícula de r_1 a r_2 es

$$W_{12} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = K_2 - K_1$$

Este trabajo es también igual a la suma del trabajo realizado por las fuerzas conservativas y del trabajo realizado por las fuerzas no conservativas, es decir:

$$W_{12} = W_{12\,\text{CONSERVATIVAS}} + W_{12\,\text{NO CONSERVATIVAS}}$$

Como:

$$W_{12\,\text{CONSERVATIVAS}} = U_1 - U_2$$

$$W_{12} = U_1 - U_2 + W_{12\,\text{NO CONSERVATIVAS}}$$

De las expresiones de trabajo total tenemos:

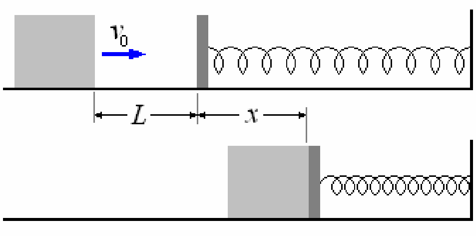
$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2 + W_{12\,\text{NO CONSERVATIVAS}}$$

$$\Rightarrow (K_2 - U_2) - (K_1 - U_1) = W_{12\,\text{NO CONSERVATIVAS}}$$

$$E_2 - E_1 = W_{12\,\text{NO CONSERVATIVAS}}$$

A diferencia que en un Sistema conservativo, no es igual a cero.
Esta última expresión nos permite calcular el trabajo de fuerzas no conservativas, fuerzas que en general son complicadas y que en principio deberíamos de calcular resolviendo integrales curvilíneas.

Ejemplo 27. A un bloque de masa *m* se le da un empujón tal que adquiere la velocidad v_0 a lo largo del eje *x*. Después de resbalar distancia *L* golpea un resorte de constante *k*. Si el coeficiente de fricción entre el bloque y la masa es μ. ¿Cuánto se comprime el resorte?
Solución.



Sea *x* La longitud que se comprime el resorte.
La distancia recorrida por la masa es
$(L + x)$.

La energía inicial es solo la energía cinética de la masa:

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2$$

La energía final es solo la energía potencial del resorte:

$$E_f = \frac{1}{2}kx^2$$

El trabajo hecho por la fricción

$$W_f = \int_{x_1}^{x_2} F_f\,dx,\; x_1 = 0,\; x_2 = L + x,$$

$$F_f = -\mu N = -\mu mg$$

Luego:

$$W_{12} = \int_0^{L+x} (-\mu mg)dx = -\mu mg(L + x)$$

Como en un Sistema no Conservativo.

$$W_{12\,\text{NO CONSERVATIVAS}} = E_2 - E_1$$

$$-\mu mg(L + x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Ecuación de segundo grado cuya solución es:

$$x = -\frac{\mu mg}{k} \pm \sqrt{\frac{\mu^2 m^2 g^2}{k^2} - \frac{m}{k}\left(2\mu gL - v_0^2\right)}$$

Ejemplo 28. Un cuerpo de masa 10 kilogramos cae desde una altura de 15 metros y alcanza el suelo en 2 segundos. Considerando constante la fuerza de resistencia del aire.
a) ¿Cuál era la magnitud de la fuerza de resistencia?
b) ¿Cuánta energía mecánica se ha perdido?
c) ¿Qué velocidad tenía el cuerpo inmediatamente antes de chocar Contra el suelo?
Solución.
a) Siendo el peso y la fuerza de resistencia del aire las fuerzas que intervienen y siendo ambas constantes tenemos que la aceleración a del cuerpo es constante.

Como $h = \frac{1}{2}at^2$

La aceleración es $a = \frac{2h}{t^2} = \frac{2(15)}{2^2} = 7{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$mg - F_g = ma$$

$$F_g = m(g - a) = 10(9{,}8 - 7{,}5) = 23\ \text{N}$$

b) La energía que se ha perdido es el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas.

$$W_{\text{NO CONSERVATIVAS}} = F_g d = (23)(15) = 345\ \text{J}$$

c) Como $W_{\text{NO CONSERVATIVAS}} = E_2 - E_1$

Siendo

$$E_1 = K_1 + U_1 = 0 + mgh = (10)(9{,}8)(15)$$
$$= 1470\ \text{J}$$

$$E_2 = K_2 + U_{21} = \frac{1}{2}mv_2^2 + 0 = 5v_2^2$$

Tenemos:

$$5v_2^2 - 1470 = 345 \Rightarrow v_2^2 = \frac{1470 - 345}{5} = 225$$

Finalmente: $v_2 = 15\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Una manera directa de llegar al mismo resultado es considerar que la aceleración efectiva de salida es

$a = 7{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, la velocidad después de 2 segundos es:

$$v_2 = at = \left(7{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 15\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA Y LA FRICCIÓN

La ley de la conservación de la energía se puede aplicar a los sistemas donde las fuerzas no conservativas como actúan las fuerzas de la fricción.
Si un sistema trabaja contra la fricción, la energía mecánica del sistema disminuirá.
Así si W_f es el trabajo hecho contra la fricción, entonces energía inicial - la energía perdida por la fricción

$$E_1 - W_f = E_2$$

$$U_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 - W_f = U_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

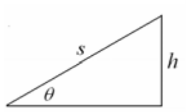
Ejemplo 29. Cerca de Lewiston, Idaho, hay una carretera muy inclinada donde circulan camiones cargados con madera. Han ocurrido varios accidentes serios cuando los carros perdieron sus frenos yendo para abajo de la colina a gran velocidad. Se han construido rampas de contención que se espera puedan detener a los vehículos sin frenos. Suponga que un carro que viaja a 40 m/s encuentra una rampa inclinada para arriba 30º sobre horizontal. La grava floja en la rampa proporciona una fuerza friccional para ayudar a detener al carro mientras sube la rampa. La grava tiene un coeficiente eficaz de fricción de 0,50. ¿Cuán lejos a lo largo de la rampa el carro viajaría antes de detenerse?

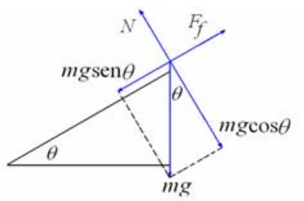
Solución.

$N = mg\cos\theta$

$$F_f = \mu N = \mu mg\cos\theta$$

$$U_1 + K_1 - W_f = U_2 + K_2$$





$$0 + \frac{1}{2}mv^2 - F_f s = mgh + 0 \qquad h = s\,\text{sen}\theta$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - (\mu mg\cos\theta)s = mgs\,\text{sen}\theta$$

$$s = \frac{v^2}{2g(\text{sen}\theta + \mu\cos\theta)}$$

$$= \frac{(40)^2}{2(9{,}8)(\text{sen}30º + 0{,}5\cos 30º)} = 87{,}5 \text{ m}$$

POTENCIA

Tan importante como saber cual es el trabajo realizado es conocer también la rapidez con la cual se realiza. Para proporcionar una medida cuantitativa de este concepto que incluye tanto el trabajo como el tiempo necesario para realizarlo se tiene a la Potencia.
La potencia mide la rapidez con la que el trabajo se está realizando.

Si se realiza un trabajo W en un intervalo de tiempo (de t_1 a t_2) **la Potencia media** es:

$$P_m = \frac{W_{12}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Cuando $t_2 \to t_1$, $\Delta t \to 0$, tendremos
La Potencia instantánea en el instante t.

$$P = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

También como

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Tenemos

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

El análisis dimensional

$$[P] = [F][L][T]^{-1} = [M][L]^2[T]^{-1}$$

Su unidad en el sistema internacional es J/s llamado Watt ó Vatio cuyo símbolo es W.
Un múltiplo muy usado es el kilowatt (kW)
1 kW = 10^3 W
Existe una unidad de energía o trabajo en términos de la unidad de potencia el kilowatt-hora (kwh), es la energía convertida o consumida en una hora a una razón constante de 1 kW.
1 kWh (10^3W)(3600s) = 3,6 x 10^6 .J

Para tener una idea de cuanto es 1 Watt, imaginemos que tenemos que levantar una masa de 50 kg. a una altura de 1 metro, cada 5 minutos y realizar este trabajo durante una jornada de 8 horas. Si levanta cada 5 minutos, serán 12 veces por hora, siendo 8 horas por día, hará un total de 12 x 8 = 96 veces al día.
El trabajo realizado es:

$$W = 96mgh$$

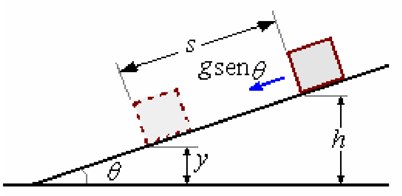
$$= 96(50\text{Kg})(9{,}8\text{m/s})(1\text{m}) = 47040 \text{ J}$$

Para determinar la potencia tenemos que dividirlo por el número de segundos en un día.

$$P = \frac{47040\text{J}}{8 \times 3600s} = 1{,}63 \text{ W}$$

Comparemos esta potencia con la potencia de un motor pequeño de 1 hp (horse power).
El hp es la unidad de potencia en el sistema inglés
1 hp = 746 W

Ejemplo 30. Si un objeto que parte del reposo se desliza por un piso liso inclinado un ángulo θ con respecto a la horizontal de altura *h*, hallar la potencia *P* gastada por la gravedad en función de la posición *y* del objeto con respecto a la parte inferior plano inclinado.
Solución.



La potencia es:

$$P = \frac{dW}{dt}, \text{ siendo } W = Fd$$

Con

$$F = mg\,\text{sen}\theta \text{ y } d = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}g\,\text{sen}\theta\, t^2$$

Tenemos

$$W = (mg\,\text{sen}\theta)\left(\frac{1}{2}g\,\text{sen}\theta\, t^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}mg^2\text{sen}^2\theta\, t^2 \text{ y}$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mg^2\text{sen}^2\theta\, t^2\right)$$

$$= mg^2\text{sen}^2\theta$$

Como ha recorrido la distancia *s*:

$$s = \frac{(h-y)}{\text{sen}\theta} = \frac{1}{2}g\text{sen}\theta\, t^2$$

Obtenemos:

$$t = \sqrt{\frac{2(h-y)}{g\text{sen}^2\theta}}$$

Luego

$$P = mg^2\text{sen}^2\theta\sqrt{\frac{2(h-y)}{g\text{sen}^2\theta}}$$

$$= mg\text{sen}\theta\sqrt{2g(h-y)}$$

Otra manera de obtener es considerar que:

$$P = Fv$$

Donde

$$F = mg\,\text{sen}\theta \text{ y } v = at = g\text{sen}\theta\, t$$

Luego: $P = (mg\,\text{sen}\theta)(g\,\text{sen}\theta\, t)$

$$= mg^2\,\text{sen}^2\theta\, t$$

Como $t = \sqrt{\frac{2(h-y)}{g\text{sen}^2\theta}}$

Obtenemos:

$$P = mg^2\text{sen}^2\theta\sqrt{\frac{2(h-y)}{g\text{sen}^2\theta}}$$

$$= mg\text{sen}\theta\sqrt{2g(h-y)}$$

Ejemplo 31. El flujo de agua de un río es de 50 m^3 por segundo, se tiene un desnivel de 200 metros y se quiere aprovechar construyendo una hidroeléctrica
a) Si la energía del agua que cae se utilizase totalmente ¿Que potencia se podría obtener?
b) Si toda la energía procedente de la caída del río se convirtiese en energía eléctrica y se vendiese a un sol el kilowatt-hora ¿Cuánto dinero se cobraría en un día?
Solución.
a) El trabajo realizado por una masa *m* que cae desde una altura *h* es:
$W = mgh$
Como $m = \rho V$,
Donde ρ es la densidad del agua. *V* es el volumen.

$$W = \rho Vgh$$

La potencia que se obtiene al pie de la salida es

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\rho Vgh$$

De estas cantidades la que varía con el tiempo es *V*.

$$\frac{dV}{dt} = 50\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Luego

$$P = \rho gh\frac{dV}{dt}$$

Como

$$\rho = 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3},\ g = 9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2},\ h = 200\text{m}$$

Obtenemos

$$P = \left(1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(200\text{m})\left(50\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right)$$

$= 9{,}8 \times 10^7$ W

b) Si tenemos una potencia $P = 9{,}8 \times 10^7 = 9{,}8 \times 10^4$ kW y consideramos que se consume las 24 horas del día. La energía obtenida es igual a todo el trabajo realizado.

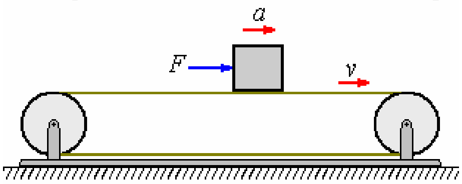
$$dW = Pdt$$

$$W = P\int_{t_1}^{t_2} dt = P(t_2 - t_1) = P\Delta t$$

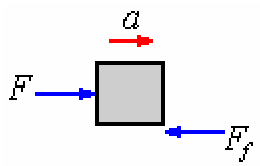
$$W = (9{,}8 \times 10^4 kW)(24h) = 235{,}2 \times 10^4 \text{ kW-h}$$

si el precio de cada kW-h es 1 sol, cada día se obtendrán 2,352 millones de soles.

Ejemplo 32. En la figura, un bloque de masa *m* descansa sobre una faja que se mueve con velocidad constante *v*. El coeficiente de fricción entre el bloque y la faja es μ_k.
Tomando como tiempo inicial $t = 0$, una fuerza horizontal *F* aplicada al bloque le produce una aceleración constante *a*.
a) Determinar la fuerza *F* y la potencia disipada en fricción como función del tiempo.
b) Si la fuerza *F* es ejercida por un hombre que se encuentra sobre la faja. Determinar la potencia que este libera en función del tiempo.
e) Si la fuerza *F* es ejercida por un hombre que camina sobre el piso al costado de la faja. Determinar la potencia que este libera en función del tiempo.



Solución.
a) Aplicando la segunda ley de Newton a la masa *m* en la figura



$$F - F_f = ma$$

Como $F_f = \mu_k N = \mu_k mg$, obtenemos:

$$F = ma + \mu_k mg$$

y la potencia disipada en fricción es

$P = F_f v_0 = (\mu_k mg) v_0$, siendo $v_0 = at$

$$P = \mu_k mgat$$

b) La fuerza que hace el hombre sobre la faja es

$$F = ma + \mu_k mg$$

Su velocidad en función del tiempo es

$$v' = v + v_0 = v + at$$

y la potencia que debe dar el hombre es

$$P = Fv' = (ma + \mu_k mg)at$$

c) La tuerza que hará el hombre sobre el piso es igual al caso anterior:

$$F' = ma + \mu_k mg$$

La velocidad del hombre en función del tiempo en este caso es:

$$v' = v + at$$

Luego la potencia que debe dar el hombre es:

$$P' = F'v' = (ma + \mu_k mg)(v + at)$$

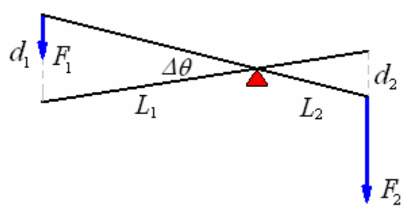
MÁQUINAS
Una máquina simple es un dispositivo usado para magnificar una fuerza o para cambiar una desplazamiento pequeño en grande. Las máquinas comunes son la palanca, el plano inclinado, el gato hidráulico, o una combinación de engranajes.
El trabajo se hace típicamente en la máquina (el trabajo W_1 de entrada), y entonces la máquina alternadamente hace un cierto trabajo W_2 de salida. El estado de la energía de la máquina no cambia apreciable durante este proceso, así que si la fricción es insignificante, $W_1 = W_2$, basado en la idea de la conservación de energía. Muy a menudo las fuerzas de entrada y de salida son constantes, en las cuales el caso $W_1 = W_2$, lo que lleva a:

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \Rightarrow F_2 = \frac{d_1}{d_2} F_1$$

Aquí F_1 actúa sobre una distancia d_1 y F_2 actúa sobre una distancia d_2. La ventaja mecánica de la máquina se define como

$$\text{VM} = \frac{F_2}{F_1}$$

Ejemplo 33. La palanca de barra es un dispositivo usado para levantar objetos pesados (por ejemplo, un piano o una pieza grande de maquinaria). Consiste en una barra larga que se apoya en un fulcro una distancia corta del extremo de levantar de la barra. Suponga que el fulcro de una barra de la palanca está a 3 centímetros de la carga, y el punto donde usted empuja hacia abajo en el otro extremo está a 1,50 m del fulcro.
¿Qué fuerza mínima tendría que ejercer para levantar una carga de 2000 N?
¿Si mueve el extremo de la barra 4 centímetros hacia abajo, cuánto levantará la carga?
Solución.



Si la barra rota con un ángulo pequeño $\Delta\theta$, entonces

$$d_1 = L_1 \Delta\theta \text{ y } d_2 = L_2 \Delta\theta$$

$$F_1 L_1 \Delta\theta = F_2 L_2 \Delta\theta$$

$$F_1 = \frac{L_2}{L_1} F_2 \Rightarrow$$

$$F_1 = \frac{(0{,}03)}{1{,}50}(2000)$$

$= 40$ N

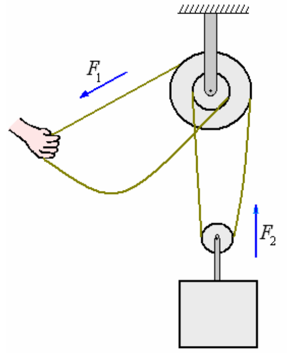
Para triángulos semejantes

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{L_1}{L_2} \quad d_2 = \frac{L_2}{L_1} d_1 \Rightarrow$$

$$d_2 = \frac{(0,03)}{L(1,50)}(0,04)$$
$= 0,008$ m = 8 mm.

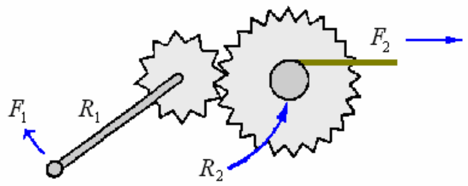
Observe que una fuerza pequeña de entrada da lugar a una fuerza grande de salida, pero el precio que se paga es que un desplazamiento grande de la entrada produce solamente un desplazamiento pequeño de salida.

Ejemplo 34. Se bosqueja aquí un polipasto diferenciado de la clase usada para levantar un motor de auto. Las poleas tienen dientes que engranan con una cadena continua. Las poleas están soldadas juntas, hay 18 dientes en la polea externa y 16 dientes en la polea interna. Así cuando la polea hace una revolución, 18 acoplamientos de la cadena se levantan y 16 acoplamientos bajan, dando por resultado la elevación de la carga. ¿Cuál es la ventaja mecánica de esta máquina?



Solución.
Considere qué pasa cuando la polea superior hace una revolución, es decir, cuando el trabajador jala 18 eslabones de la cadena hacia él con fuerza F_1.
Sea L = longitud de un eslabón.
El trabajo de la entrada es $W_1 = F_1(18\,L)$.
El lazo de la cadena que va bajo de la carga es acortado así por 18 eslabones y alargado por 16 eslabones, con un acortamiento neto de $18L - 16L = 2L$ que acorta al lazo $2L$ y levanta la carga L (intente esto con un pedazo de cuerda para convencerse de esta característica).
Así el trabajo de la salida es $W_2 = F(L)$.
Despreciando la fricción.
$W_1 = W_2$ o $F_1(18\,L) = F_2(L)$
La ventaja mecánica del polipasto es VM = 18.

Ejemplo 35. Un trailer está equipado de un sistema para sacar barcos del agua. Consiste en una manija larga de 30 centímetros unido al eje de un engranaje pequeño con 12 dientes. Este engranaje pequeño endienta con un engranaje más grande con 36 dientes. Se une a este engranaje grande un tambor del radio 2 centímetros en el cual se enrolla la línea atada al barco (la línea es una cuerda.)
¿Qué tensión se puede aplicar a la línea cuando la manivela se empuja con una fuerza de 80 N?
So1ución.
Considere que pasa cuando la manivela hace una revolución. La mano mueve una distancia $d_1 = 2\pi R_1$.
El engranaje grande mueve 12/36 = 1/3 revoluciones.
La línea es jalada una distancia $d_2 = 2\pi R_2/3$.

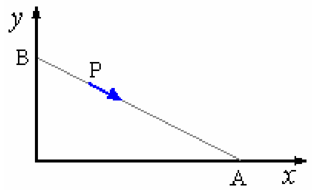


$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \Rightarrow$$
$$F_2 = \frac{d_1}{d_2}F_1 = \frac{2\pi R_1}{2\pi R_2/3}F_1 = 3\frac{R_1}{R_2}F_1$$
$$F_2 = 3\left(\frac{30}{2}\right)(80) = 3600 \text{ N.}$$
La ventaja mecánica:
$$\text{VM} = \frac{3600}{80} = 45$$
La ventaja mecánica del torno (despreciando la fricción) es 45.

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1 Defina primero en palabras y luego en una expresión matemática.
a) El trabajo realizado por una fuerza cualquiera.
b) La energía cinética de una partícula.

2 Una partícula P en el plano *xy* está sometida a la acción de la fuerza $\vec{F} = y^2\hat{i} - x^2\hat{j}$. Calcular el trabajo efectuado por la fuerza para desplazar P sin fricción desde B (0,.b) a A (a, 0).



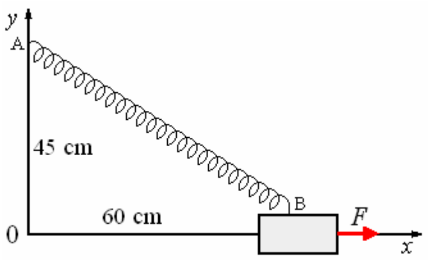
Respuesta. $W = \frac{ab}{3}(a+b)$

3. Un depósito cilíndrico de altura H tiene una masa m de agua que lo llena hasta la mitad, que ha de bombearse en su totalidad por encima del borde del mimo. ¿Cuánto trabajo ha de realizar la bomba?

Respuesta. $\Delta W = \frac{3}{4} mgH$

4. ¿Qué fuerza horizontal, constante debe aplicarse a un carro de masa 500 kg que viaja en una carretera horizontal a 36 km/h para que se detenga en 30 metros? ¿Quién proporciona la fuerza?
Respuesta. 2500 N, proporcionada por la carretera.

5. Un resorte está unido en A a un plano vertical fijo y a un bloque B que resbala sobre una varilla lisa horizontal O*x*. La longitud del resorte no estirado es 45 cm y la constante del resorte es k = I000 N/m. ¿Cuál es el trabajo realizado por el resorte sobre B cuando se mueve 60 cm desde O por efecto de la fuerza *F*?

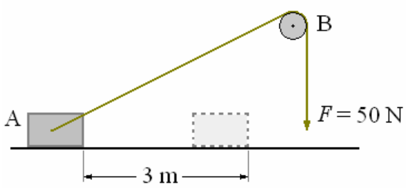


Respuesta: 99,38 J

6. Un resorte de masa despreciable y constante *k* cuelga del cielorraso de un ascensor y lleva suspendido una masa *in*. Cuando el ascensor se mueve hacia arriba durante *t* segundos con una aceleración uniforme $a = \frac{1}{2} g$. la reacción inercial hace que el resorte se alargue.
a) ¿Cuánto trabajo realiza el ascensor sobre el sistema resorte-masa?
b) ¿Cuánto trabajo realiza sobre el resorte?

Respuesta. a) $\frac{1}{4} mg^2t^2$ b) $\frac{1}{8}\frac{m^2g^2}{k}$

7. En la figura se mueve el cuerpo A a lo largo de un plano horizontal liso por medio de la fuerza constante *F* = 5º N aplicada al extremo de una cuerda unida a A y que pasa por una pequeña polea sin rozamiento en B. Calcular el trabajo realizado sobre A por la cuerda mientras A se desplaza 3 m,



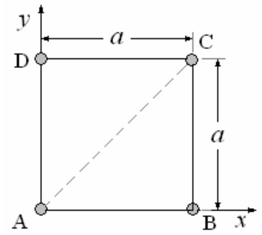
Respuesta. *W* = 120 J

8. Una fuerza cuya magnitud varía con *x* de acuerdo a $F = A + Bx$ actúa sobre objeto que puede moverse solamente en el eje *x*. El ángulo con el que actúa la fuerza también varía tal que $\cos\theta = 1 - x^2$. El objeto se mueve entre $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.
¿Cuál es el trabajo realizado cuando el objeto se mueve de *x* = 0 a *x* = *a*?

Respuesta. $Aa + B\frac{a^2}{2} - B\frac{a^4}{4}$

9. Un bloque que se mueve a lo largo del eje *x* comienza del reposo en *x* = *A* y se mueve a *x* = *B* luego vuelve a *x* = *A* donde queda en reposo nuevamente. Si una de las fuerzas actuante sobre el bloque es opuesta en dirección y proporcional a la magnitud de la velocidad, tal que $\vec{F}_v = -b\vec{v}$ con *b* Constante. Demostrar que el trabajo realizado por esta fuerza no es cero para una trayectoria cerrada.

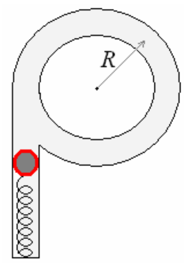
10. La fuerza $\vec{F} = x^2y\hat{i} + xy^2\hat{j}$ actúa sobre la partícula .P (*x*,*y*) que se mueve en el plano *xy*.
a) Demostrar que *F* no es una fuerza conservativa.
b) Determinar el trabajo de *F* cuando se mueve de A a C, a lo largo de los caminos ABC, ADC y AC.



Respuesta. a) Si $\frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x}$, b) $W_{ABC} = \frac{a^4}{3}$,

$W_{ADC} = \frac{a^4}{3}$. $W_{AC} = \frac{a^4}{2}$

11. El tubo de la figura se halla en un plano horizontal, su resorte comprimido inicialmente 10 cm.. y al dispararse una bolita entra en una canaleta circular de radio *R*, la fricción es constante igual a 1 Newton. ¿Cuántas vueltas dará la bolita antes de detenerse?
R= 50 cm *k* = 62 N/m

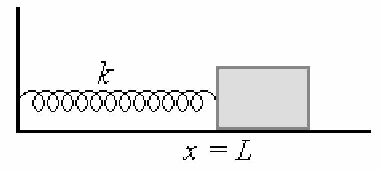


Respuesta. Una vuelta.

12. Se aplica una fuerza de 1 N a una partícula de 50 g que está inicialmente en reposo sobre una superficie.

a) ¿Cuánto trabajo realiza sobre la partícula en l0 s si la superficie es lisa y la fuerza es horizontal?
b) El mismo caso de a) pero la fuerza hace un ángulo de 60º con la horizontal.
c) El caso b) pero con rozamiento entre la partícula y la superficie 0,25 y ¿Cuánto trabajo se consume en vencer el rozamiento?
Respuesta. a) $\Delta W = 1000J$, b) $\Delta W = 2505J$, c) $\Delta W = 143J$, $\Delta W = 46J$

13. Encontrar la función energía potencial de un resorte si el origen se coloca en la pared y la longitud del resorte sin estirar es *L*.



Respuesta. $U_{(x)} = \frac{1}{2}kx^2 - kLx + C$

Si $C = \frac{1}{2}kL^2 \Rightarrow$

$$U_{(x)} = \frac{1}{2}k\left(x^2 - 2Lx + L^2\right) = \frac{1}{2}k(x - L)^2$$

14. Una partícula que se mueve a lo largo del eje *x* está sometida a la acción de una fuerza en un sistema conservativo a la que le corresponde la siguiente función energía potencial.

$$U_{(x)} = a + bx^2 - cx^4$$

Determinar los coeficientes *a*. *b* y *c*, si se sabe que el potencial se anula en el origen, que *x* = 2 m en una posición de equilibrio y que una partícula de 5 kg con una velocidad en el origen de 2 m/s queda en reposo en *x* = l m.
Respuesta. $a = 0$, $b = 80/7$ J/m^2 , $c = 10/7$ J/m^4

15. La energía potencial entre dos moléculas vecinas viene dada por:

$$U_{(r)} = \frac{A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}$$

siendo *r* la separación entre las moléculas.
a) ¿Cuál es la fuerza entre ellas en función de *r*?
b) ¿Cuál es la posición de equilibrio de las dos moléculas?
c) ¿Qué energía seria necesaria para alejarlas de su posición de equilibrio indefinidamente?

Respuesta. a) $F_{(r)} = -6\frac{A}{r^7} + 12\frac{B}{r^{13}}$, b)

$r = \left(\frac{2B}{A}\right)^{1/6}$, c) $\Delta E = \frac{A^2}{4B}$

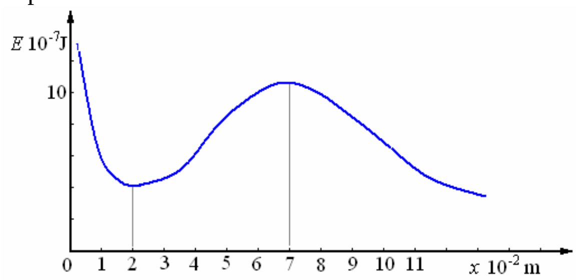
16. Hallar la fuerza conservativa que da origen a la función energía potencial.

$$U_{(r)} = 3x^2y + \frac{zy}{x} - y^2$$

Respuesta.

$$\vec{F} = y\left(\frac{z}{x^2} - 6x\right)\hat{i} + \left(2y - 3x^2 - \frac{z}{x}\right)\hat{j} - \frac{y}{x}\hat{k}$$

17. Una partícula de masa 4y penetra en una región en la cual su energía potencial es la indicada en la figura y pasa valores grandes de x, a los cuales su energía potencial es cero, tiene una energía cinética de 16 x 10^{-7} J .
a) ¿Cuál es su energía cinética en los puntos A, B y C?
b) Estando en el punto A, la partícula pierde bruscamente la mitad de su energía total. (la gráfica de la energía potencial no se altera). Describe cualitativamente el movimiento subsiguiente, dando el dominio de valores de *x* en el cual puede moverse la partícula.



Respuesta. $E_A = 8\times10^{-7}$ J , $E_B = 12\times10^{-7}$ J, $E_C = 6\times10^{-7}$ J

18. Un bloque de masa *m* es lanzado hacia arriba en un plano inclinado con una velocidad de magnitud v_0 . El ángulo del plano es θ y el coeficiente de fricción del bloque y el plano es μ . Si el bloque viaja una distancia *L* hasta detenerse y comienza a bajar volviendo a su posición original. Calcular,
a) El trabajo realizado por la fuerza normal durante el movimiento.
b) El trabajo realizado por la fuerza de fricción durante el movimiento.
c) El trabajo realizado por la fuerza de gravedad durante el movimiento.
d) Encontrar *L* en función de v_0 , y θ.
e) ¿Cuál es la velocidad del bloque cuando vuelve al punto inicial?
Respuesta. a) 0, b) $-2\mu mgL\cos\theta$, c) 0,

d) $L = \dfrac{v_0^2}{2g(\mu\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}$,

e) $v = \sqrt{v_0^2 - 4\mu gL\cos\theta}$

19. Se dispara un proyectil con una velocidad inicial de magnitud v_0 y formando un ángulo θ con la

horizontal. Usando la conservación de la energía encontrar.
a) La altura máxima alcanzada.
b) La magnitud de la velocidad cuando el proyectil está a la mitad de su máxima altura.

Respuesta. a) $h = \dfrac{v_0^2 \text{sen}^2\theta}{2g}$,

b) $v = v_0\sqrt{\dfrac{\left(1+\cos^2\theta\right)}{2}}$

20. Una fuerza F = 8t (t en segundos, F en Newton), actúa la partícula P de masa m = 4kg durante un tiempo t = 6 s.
Sí parte del reposo a partir del origen.
a) Calcular el trabajo efectuado.
b) Calcular la energía cinética al instante t.
Respuesta. a) W = 2592 J, b) $K = 2t^4$ J.

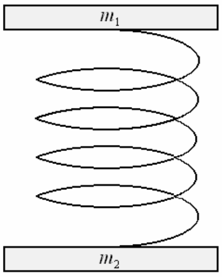
21. Un resorte de longitud ℓ y constante k se sujeta a un bloque de masa m y al piso. Si el bloque se levanta a una altura 3ℓ y soltado desde el reposo.
a) ¿Cuál será la velocidad del bloque cuando esté a una altura 2ℓ?
b) ¿Cuál será la máxima compresión del resorte?

Respuesta. a) $v = \sqrt{3\dfrac{k}{m}\ell^2 + 2g\ell}$,

b)

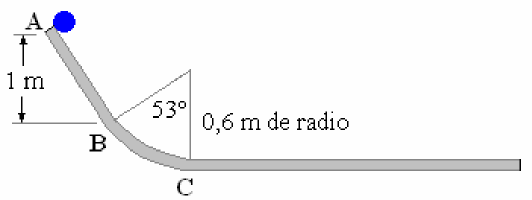
$$y = \frac{k\ell - mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{k\ell - mg}{k}\right)^2 + \frac{\left(3k\ell^2 + 6mg\ell\right)}{k}}$$

22. Dos placas cuyas masas son m_1 y m_2, respectivamente, están conectadas por un resorte. ¿Qué fuerza deberá aplicarse a la placa superior para elevar la placa inferior después que se retira la presión? No tomar en cuenta la masa del resorte.



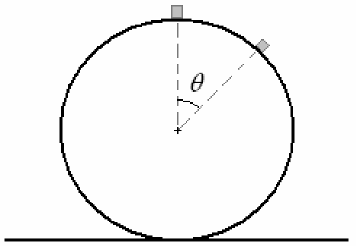
Respuesta. a) $F > (m_1 + m_2)g$

23. Una bolita de masa m desliza a partir del reposo hacia abajo por un carril doblado como se muestra en la figura, el rozamiento es despreciable, hallar:
a) La reacción normal del carril en A.
b) La energía cinética de la bolita en B.
c) La reacción normal del carril en 8.
d) La energía cinética de la bolita en C.
e) La reacción normal del carril en C.



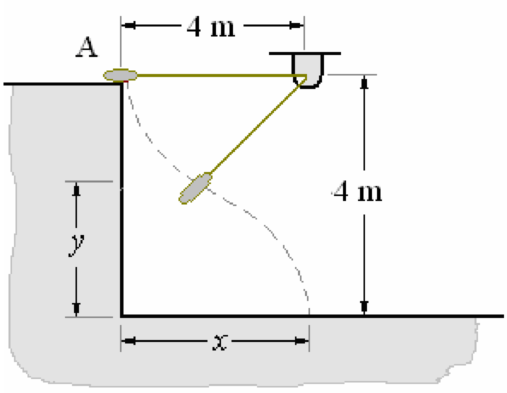
Respuesta. a) 0,5 mg , b) 0.3 mg , c) 2,5 mg d) 1,1 mg , e) 5,4 mg

24. Un bloque pequeño de masa m resbala partiendo de la parte superior de una esfera sin fricción de radio R. ¿Cuál es el ángulo en el que el bloque pierde contacto con la esfera.



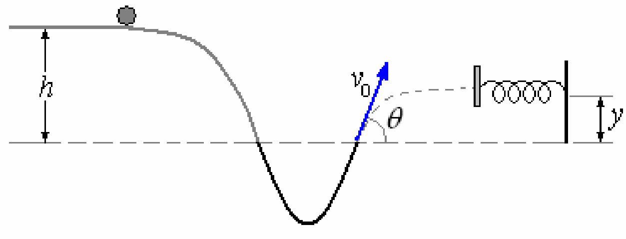
Respuesta. a) $\cos\theta = \dfrac{2}{3}$

25. 1n saco se empuja suavemente por el borde de una pared en A y oscila en un plano vertical colgado del extremo de una cuerda de 4m que puede soportar una tensión máxima igual a dos veces el peso del saco.
a) Determinar la altura a la que se rompe la cuerda.
b) ¿A qué distancia de la pared vertical caerá al .suelo el saco?



Respuesta. a) y = 1,33 m

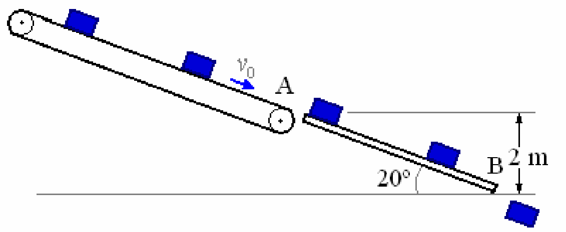
26. Una bola pequeña de masa m = l g desliza hacia el fondo de un valle moviéndose sin rozamiento como se indica en la figura. Partiendo del reposo, la bola cae desde una altura h = 2m y abandona el fondo del valle formando un ángulo θ con la horizontal. En el punto más elevado de su trayectoria la bola choca con un resorte montado sobre una pared y lo comprime 2 cm. La constante del resorte es k = 49 N/m.
a) ¿A qué altura y está el resorte? b) ¿Cual es el ángulo θ?



Respuesta. a) y =1 m, b) $\theta = 45^o$

27. Una bola de acero de masa 1 kg está unida a un extremo de un alambre de 1m de largo y gira alrededor del otro extremo con una velocidad angular de 120 rpm. ¿Cuál es la energía cinética de la bola?
Respuesta. 78,88 J

28. La faja transportadora de la figura se mueve con una velocidad constante v_0 y descarga los paquetes sobre la rampa AB. El coeficiente de rozamiento entre los paquetes y la rampa es 0,30. Sabiendo que los paquetes deben alcanzar el punto B con una velocidad de 4 m/s, determinar la velocidad v_0 requerida en la faja transportadora.



Respuesta. 3,02 m/s

29. Una locomotora ejerce un tiro constante en la barra de tracción de 160000 N mientras aumenta la velocidad de 48 a 72 km/h. ¿Cuál es la potencia que desarrolla la locomotora:
a) al comienzo del periodo?
b) al final del periodo?
c) ¿Cuáles la potencia .media durante el periodo?
Respuesta. a) 2859 hp , b) 4290 hp c) 3574 hp

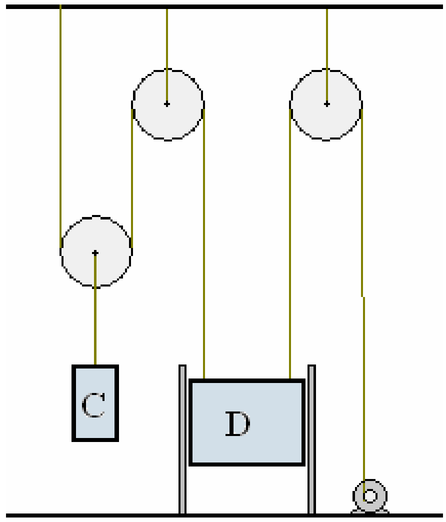
30. Una grúa industrial puede levantar su máxima permitida de 25 toneladas a la velocidad de 20mm/s. Sabiendo que la grúa es movida por un motor de 10 kW. Determinar su rendimiento.
Respuesta. 49%

31. ¿Cuál es la velocidad máxima la que un motor capaz de suministrar 10 kW puede elevar un ascensor de masa 500kg, sin tomar en cuenta las fuerzas de rozamiento?
Respuesta. v = 2,0 m/s

32. Si a un automóvil de masa 1000 kg que se mueve sobre una carretera horizontal con una velocidad de 48 km/h se le apaga al motor, este recorre aún 0,8 km antes de detenerse. carga
a) Considerando que la fuerza de rozamiento es independiente de la velocidad, calcule su valor medio.
b) ¿Qué potencia debe consumirse para mantener el automóvil en movimiento con una velocidad de 48 km/h?
Respuesta. a) F_f = 110 N b), P = 2 hp

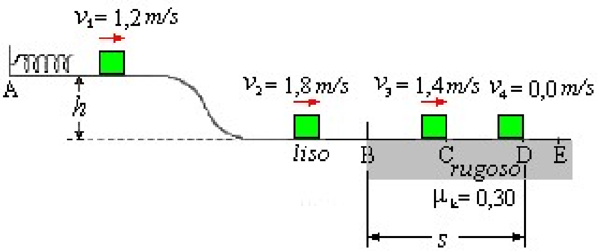
33. Un automóvil de 1500 kg se desplaza 200 m mientras es acelerado uniformemente desde 50 hasta 73 km/h. Durante todo el movimiento el automóvil se desplaza sobre una carretera horizontal, y la resistencia al movimiento es igual al 2 por ciento del peso del automóvil. Determinar:
a) La máxima potencia requerida.
b) La potencia requerida para mantener la velocidad constante de 75 km/h.
Respuesta. a) 25 kW , b) 6,13 kW

34. Un peso D y el contrapeso C tienen cada uno una masa de 350 kg. Determinar la potencia requerida cuando el peso:
a) Se mueve hacia arriba con velocidad constante de 4m/s.
b) Tiene una velocidad instantánea de 4m/s hacia arriba y una aceleración hacia arriba de 0,9 rn/s^2.



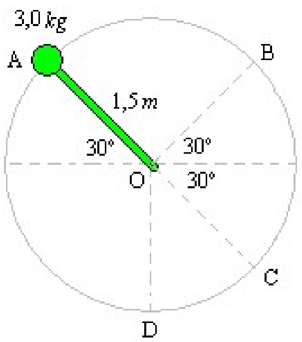
Respuesta. 6,86 kW , 8.44 kW

35. Un bloque de 0,50 kilogramos es sujetado contra el resorte por una fuerza externa horizontal de 36 N. Se quita la fuerza externa, y el bloque se proyecta con una velocidad v_1 = 1,2 m/s a partir de la separación del resorte. El bloque desciende una rampa y tiene una velocidad v_2 = 1,8 m/s en la base. La pista es sin fricción entre los puntos A y B. El bloque ingresa a una sección rugosa en B, extendiendo hasta E. El coeficiente de fricción cinética es 0,30. La velocidad del bloque es v_3 = 1,4 m/s en C. El bloque se mueve hasta C donde se detiene.



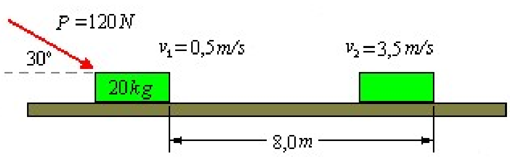
a) La constante del resorte es:
b) La compresión inicial del resorte en cm es:
c) La altura *h* de la rampa en cm es:
d) El trabajo realizado por la fricción entre los puntos B y C es:
e) La distancia s que el bloque viaja entre los puntos B y D es:
Respuesta.
a) 1800 N/m, b) 2,0, c) 9, d) -0.32 J e) 0,55 m

36. Una barra sin masa de 1,5 m se fija libremente a un pivote sin fricción en O. Una bola de 3,0 kilogramos se une al otro extremo de la barra. La bola se sostiene en A, donde la barra hace un ángulo 30º sobre el horizontal, y se lanza. El montaje de la bola-barra puede girar libremente en un círculo vertical entre A y B



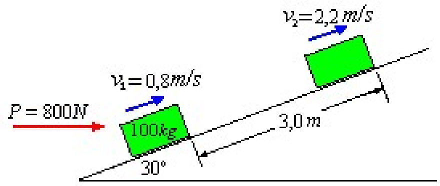
a) La bola pasa a través de C, donde la barra forma un ángulo de 30º debajo de la horizontal. La rapidez de la bola cuando pasa por C es:
b) la tensión en la barra cuando la bola pasa por el punto más bajo D es:
Respuesta. a) 5,4 m/ s, b) 120 N

37. Una fuerza externa constante P =120 N se aplica a una caja de 20 kilogramos, que está en una superficie horizontal áspera. La fuerza empuja la caja una distancia de 8,0 m, en un intervalo del tiempo de 4,0 s, y la velocidad cambia de v_1 = 0,5 m/s a v_2 = 3,5 m/s.



a) El trabajo realizado por la fuerza externa es:
b) El trabajo realizado por la fricción es:
c) La razón de cambio promedio de la energía cinética de la caja, en los 4,0 segundos es:
Respuesta. a) 830 J, b) -700 J, c) 30W

38. Un cajón de 100 kilogramos está en una superficie áspera inclinada 30º. Una fuerza externa constante P de 800 N se aplica horizontalmente al cajón. La fuerza empuja el cajón una distancia de 3,0 m arriba de la pendiente, en un intervalo del tiempo de 2,0 s, y la velocidad cambia de v_1 = 0,8 m/s a v_2 = 2,2 m/s.

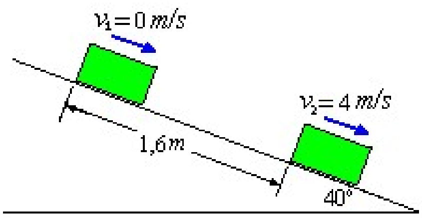


a) El trabajo realizado por el peso es:
b) El trabajo realizado por la fuerza de fricción es:
c) El trabajo realizado por la fuerza normal es:
d) La potencia media producida por la fuerza externa P durante los 2,0 segundos es:
Respuesta.
a) -1500 J, b) - 400 J c) Cero , d) 1050 W

39. Una muchacha lanza una piedra de un puente. Considere las maneras siguientes que ella puede lanzar la piedra. La velocidad de la piedra con la que lanza es igual en cada caso.
Caso A: Lanzada derecho para arriba.
Caso B: Lanzada derecho para abajo.
Caso C: Lanzada con ángulo de 45º sobre horizontal.
Caso D: lanzada horizontalmente.
¿En qué caso la velocidad de la piedra será mayor cuando llega al agua?
Respuesta. la rapidez es la misma en todos los casos.

40. Para hacer el trabajo sobre un objeto,
A) es necesario que haya fricción.
B) es necesario que no haya fricción.
C) el objeto debe moverse.
D) la fuerza que hace el trabajo debe estar dirigida perpendicularmente al movimiento del objeto.
E) la fuerza aplicada debe ser mayor que la fuerza de la reacción del objeto.
Respuesta. C) el objeto debe moverse.

41. Un bloque de 8,0 kilogramos se lanza del reposo, v_l = 0 m/s, en una pendiente rugosa. El bloque se mueve una distancia de 1,6 m abajo de la pendiente, en un tiempo de 0,80 s, y adquiere una velocidad de v_2 = 4,0 m/s.



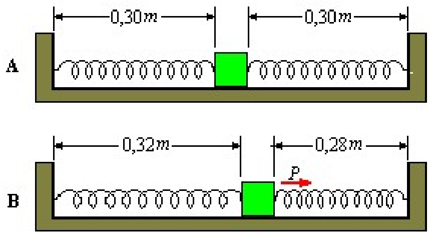
a)) El trabajo realizado por el peso es:
b) La razón promedio a la cual la fuerza de fricción realiza trabajo en el intervalo de tiempo de 0,80 s es:

c) La razón promedio a la cual la fuerza normal realiza trabajo en el intervalo de tiempo de 0,80 s es:
d) La razón promedio a la cual el bloque gana energía cinética durante el intervalo de tiempo de 0,80 s es:
Respuesta.
a)) + 80 J, b) - 20 W, c) Cero, d) 80 W

42. Una persona de 60 kilogramo cae desde el reposo uno distancia 1,20 m sobre una plataforma de masa insignificante apoyada sobre un resorte duro. La plataforma baja 6 cm antes de que persona vuelva al reposo. ¿Cuál es la constante del resorte?
Respuesta. 4,12 x 10^5 N/m

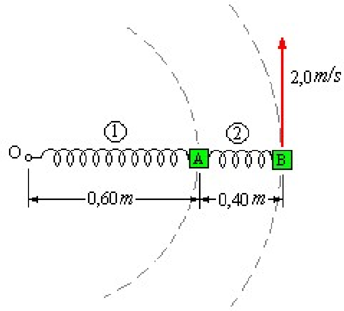
43. Un objeto está sujeto a una fuerza restauradora $F = 6x^3$, donde x es el desplazamiento del objeto desde su posición de equilibrio. ¿Qué trabajo debe realizarse para mover al objeto desde $x = 0$ $x = 0,15$ m?
Respuesta. 7,59 x 10^{-4} J

44. Dos resortes idénticos tienen longitudes sin estirar de 0,25 m y las constantes de la fuerza de 200 N/m. Los resortes se unen a un bloque pequeño y se estiran a una longitud de 0,30 m como en la figura A. Una fuerza externa P tira del bloque 0,02 m a la derecha y lo sostiene allí. (Véase La Figura B)



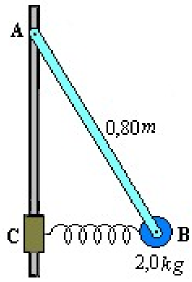
a) El trabajo requerido para ensamblar los resortes y el bloque (figura A) es :
b) La fuerza externa P, que mantiene al bloque en su lugar (figura B) es:
c) El trabajo realizado por la fuerza externa P en jalar el bloque 0,02 m es:
Respuesta.
a) 0,50 J, b) E) 8 N, c) 0,08 W

45. El bloque A (0,40 kg) y el bloque B (0,30 kg) están sobre una mesa sin fricción. El resorte 1 conecta al bloque A a una varilla sin frición O y el resorte 2 conecta el bloque Ay el bloque B. Los bloques están en movimiento circular uniforme alrededor de o, y los resortes tienen longitudes de 0,60 m y 0,40 m, como se muestra. La velocidad lineal del bloque B es 2.0 m/s.



a) El resorte 2 estira 0,06 m. La constante de fuerza del resorte 2 es:
b**)** La constante de fuerza del resorte 1 es igual a 30 N/ m. La longitud sin estirar del resorte 1 es:
Respuesta. a) 20 N/m, b) 0,53 m

46. Una barra ligera de 0,80 m se fija libremente a un eje vertical en A. Un disco de 2,0 kilogramos se une a la barra en B. Un resorte se une a la masa en B y a la manga en el eje en C. A La manga es sin fricción, permitiendo que se baje y suba libremente, de modo que el resorte sea siempre horizontal cuando esté estirado. La longitud del resorte sin estirar es 0,45 m y la constante es 210 N/m.



a) El eje está girando y el resorte estirado tiene una longitud de 0,48 m. La aceleración radial del disco es:
b) El eje está girando y la varilla forma un ángulo de 40º con el eje. El resorte está estirado y horizontal. La aceleración radial del disco es:
c) El eje está girando y el resorte tiene una longitud de 0,45 m. La aceleración radial del disco es:
Respuesta.
a) 10,5 m/s^2 b) 15,0 m/s^2, c) 6,7 m/ s^2

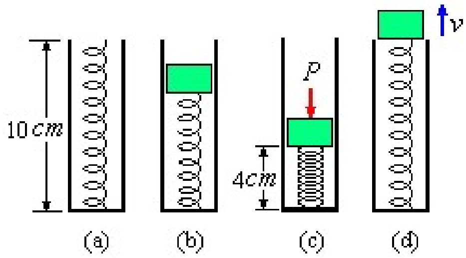
47. Cierto coche que viaja 20 resbalones del mph a una parada en 20 metros del punto donde los frenos fueron aplicados. ¿En qué distancia el coche pararía aproximadamente la tenía que va 40 mph?
Respuesta. 80 metros

48. Un motor de la arena en una mina levanta 2.000 kilogramos de la arena por minuto una distancia vertical de 12 metros. La arena está inicialmente en el resto y se descarga en la tapa del motor de la arena con la velocidad 5 m/s en un canal inclinado de cargamento. ¿En qué tarifa mínima se debe la energía proveer a esta máquina?
Respuesta. 4,34 kW

49. La constante de un resorte es 500 N/m y su longitud sin estirar es 0,60 m. Un bloque de 4,0 kilogramos se suspende del resorte. Una fuerza

externa tira hacia abajo lentamente el bloque, hasta que el resorte se ha estirado a una longitud de 0,72 m. se quita y el bloque sube.
a) La fuerza externa sobre el bloque es:
b) Cuando el resorte se ha contraído una longitud de 0.60 m, la velocidad del bloque hacia arriba es: :
c) Cuando el resorte se ha contraído una longitud de 0.66 m, la aceleración del bloque incluyendo su dirección es:
Respuesta. a) 20 N, b) 0,4 m/ s, c) 2 m/s^2, hacía abajo

50. la constante de un resorte es 200 N/m y su longitud sin estirar es 10 centímetros. El resorte se pone dentro de un tubo liso de 10 centímetros de alto (la figura a). Un disco de 0,40 kilogramos se coloca sobre el resorte (figura b). Una fuerza externa P empuja el disco hacia abajo, hasta que el resorte tiene 4 centímetros de largo (la figura c). Se quita la fuerza externa, el disco se proyecta hacia arriba y emerge del tubo (figura d).



a) La compresión del resorte en la figura b es:
b) La fuerza externa P en la figura c es:
c) La energía potencial elástica del resorte en la figura c es:
d) La aceleración inicial del disco cuando la fuerza externa es removida es:
e) La velocidad *v* del disco cuando emerge del tubo en la figura d es:
Respuesta. a) 2,0 , b) 8N, c) 0,36 J, d) 20 m/s^2, e) 0,80m/s