CAP. 1

# LA INTEGRAL INDEFINIDA

Empezamos recordando los siguientes resultados de cálculo diferencial.

## 1 TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Sea $f(x)$ una función diferenciable en un intervalo abierto que contiene a los puntos $a$ y $b$. Entonces existe un número $c$ entre $a$ y $b$ tal que

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c).(b-a)} \quad ,$$

donde $f'(c)$ es el valor de la derivada de $f(x)$ en $c$.

## 2 TEOREMA DE LA FUNCION CONSTANTE

Si $f(x)$ es una función definida en un intervalo abierto $a < x < b$, entonces

$$\boxed{f'(x) = 0 \quad \text{en} \quad a<x<b \quad \text{si y sólo si} \quad f(x) = C} \quad ,$$

donde $C$ es una constante.

**Ejemplo 1** Si $y' = 2\cos x$, hallar la función $y = y(x)$.

**Solución** Tenemos $y' = 2\cos x$

$$(y - 2\,\mathrm{sen}\,x)' = 0 \qquad [\text{pues } (\mathrm{sen}\,x)' = \cos x]$$

y por el teorema de la función constante, $y - 2\,\mathrm{sen}\,x = C$,

donde $C$ es una constante.

Luego $y = 2\,\mathrm{sen}\,x + C$.

**Ejemplo 2** Hallar la función $y = y(x)$ que satisface las siguientes condiciones

$$\begin{cases} y'' = 6x \\ y(0) = 3, \quad y(1) = 6, \end{cases}$$

donde $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ designa la segunda derivada de y respecto de x.

**Solución** Tenemos $y'' = 6x$

$$(y' - 3x^2)' = 0 \qquad [\text{pues } (x^2)' = 2x]$$

$$y' - 3x^2 = A \qquad \text{donde } A \text{ es una constante,}$$

$$(y - x^3 - Ax)' = 0 \qquad [\text{pues } (x^3)' = 3x^2,\ (Ax)' = A]$$

$$y - x^3 - Ax = B \qquad \text{donde } B \text{ es una constante.}$$

Luego $y = x^3 + Ax + B$. **(1)**

Vamos a determinar A y B usando las condiciones

$$y(0) = 3,$$

$$y(1) = 6.$$

Sustituyendo $x = 0$ y $x = 1$ en (1), obtenemos las ecuaciones

$$B = 3,$$

$$1 + A + B = 6.$$

que resueltas dan $B = 3$ y $A = 2$.

Así, $y = x^3 + 2x + 3$.

## 3 TEOREMA DE LA DIFERENCIA CONSTANTE

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones diferenciables en un intervalo abierto $a < x < b$, entonces

$$\boxed{f'(x) = g'(x) \quad \text{en} \quad a < x < b \quad \text{si y sólo si} \quad f(x) = g(x) + C}$$

donde $C$ es una constante.

**PRUEBA**

Supongamos que se cumple $f'(x) = g'(x)$ en $a < x < b$.

Luego $(f(x) - g(x))' = 0$, y por el teorema de la función constante $f(x) - g(x) = C$, donde $C$ es una constante, esto es, $f(x) = g(x) + C$.

Recíprocamente, si se tiene $f(x) = g(x) + C$ en $a < x < b$, entonces derivando respecto de $x$

$$f'(x) = g'(x) + 0, \quad \text{(la derivada de la constante } C \text{ es } 0)$$

esto es, $f'(x) = g'(x)$. ∎

## 4 LA INTEGRAL INDEFINIDA

### 4.1 Antiderivada de una función

Decimos que una función $F(x)$ es una **antiderivada** de la función $f(x)$ en el intervalo $I$ si se cumple

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{para todo } x \text{ en } I.$$

**Ejemplo 1**

**(1)** Las funciones $F(x) = 3x^4 - x + 8$ y $G(x) = 3x^4 - x - 2$ son antiderivadas de la función $f(x) = 12x^3 - 1$, pues

$$F'(x) = 12x^3 - 1$$

y

$$G'(x) = 12x^3 - 1.$$

**(2)** La función $F(x) = \cos 2\pi x + C$ es una antiderivada de $f(x) = -2\pi \operatorname{sen} 2\pi x$.

**Ejemplo 2** Hallar una antiderivada de la función $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$

**Solución** Puesto que $(\sqrt{1+x^3})' = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$

$$\left(\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}\right)' = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}},$$

la función $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}$ es una antiderivada de $y$.

## 4.2 La Integral Indefinida

Llamamos **integral indefinida** de una función $f(x)$ a la antiderivada general de la función.

Emplearemos la notación $\boxed{\int f(x)dx}$

para designar la integral indefinida de $f(x)$.

Así $\int f(x)\,dx$ **representa a todas las antiderivadas** de la función $f(x)$.

La **integración indefinida** es el proceso de hallar la integral indefinida de una función, esto es, de encontrar la antiderivada general de la función.

Tenemos las siguientes indentidades

**(4.2.1)** $\boxed{\dfrac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)}$ ,

**(4.2.2)** $\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad \text{si} \quad F'(x) = f(x)}$ ,

donde $C$ es una constante arbitraria.

**Prueba**

**(4.2.1)** Por definición $\int f(x)dx$ es la antiderivada general de $f(x)$.

Luego $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$.

**(4.2.2)** Debemos probar que $F(x) + C$ es la antiderivada general de la función $f(x)$.

**Paso 1** **$F(x) + C$ es una antiderivada de $f(x)$.** En efecto,

$$(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x).$$

**Paso 2** **Si $G(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces $G(x) = F(x)+C$,** para alguna constante $C$. En efecto, se tiene

$$G'(x) = f(x) = F'(x),$$

y por lo tanto, por el teorema 3 de la diferencia constante

$$G(x) = F(x) + C.$$

De los pasos 1 y 2 se sigue que $F(x) + C$ es la antiderivada general de $f(x)$. Luego

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

por definición de integral indefinida de $f(x)$. ∎

En términos de diferenciales, (4.2.2) puede escribirse

**(4.2.3)** $$\boxed{\int F'(x)dx = F(x) + C}$$

ó

**(4.2.4)** $$\boxed{\int dF(x) = F(x) + C},$$

ya que $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$.

Luego, la **integral indefinida de la diferencial de una función es igual a la función más una constante.**

De esta manera, la integración indefinida puede ser considerada como la operación **inversa** de la operación que asigna a una función su diferencial.

**Ejemplo 1** Si $n \neq -1$, hallar la integral indefinida de la función $y = x^n$.

**Solución** Buscamos $F(x)$ tal que $F'(x) = x^n$.

Por simple inspección, la función $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, que está definida pues $n + 1 \neq 0$ por hipótesis, cumple $F'(x) = x^n$.

Luego, aplicando la fórmula (4.2.2)

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

**Ejemplo 2** Hallar $\int (12x^2 - 4x + 1)\, dx$.

**Solución** Buscamos una antiderivada $F(x)$ de $12x^2 - 4x + 1$.

Por simple inspección $F(x) = 4x^3 - 2x^2 + x$ cumple

$$F'(x) = 12x^2 - 4x + 1.$$

Entonces por la fórmula (4.2.2)

$$\int F(x)dx = F(x) + C,$$

$$\int (12x^2 - 4x + 1)dx = 4x^3 - 2x^2 + x + C.$$

## 4.3 Propiedades Básicas de la Integración

Si $u = u(x)$ es una función diferenciable entonces

$$du(x) = \frac{du}{dx}dx \quad ,$$

y por lo tanto

$$\int f(u)du = \int f(u)\frac{du}{dx}dx.$$

Observamos que en la integral del primer miembro, **la función integrando** $f(u)$ aparece como una función de una variable dependiente $u = u(x)$.

**Teorema** Se cumplen las siguientes propiedades

**(1)** $\displaystyle\int Af(u)du = A\int f(u)du,$ para toda constante $A$.

**(2)** $\displaystyle\int [f(u) \pm g(u)]\,du = \int f(u)du \pm \int g(u)du.$

**(3)** INTEGRACION CON EL SIGNO DE LA DIFERENCIAL.

$$\int dF(u(x)) = F(u(x)) + C.$$

**(4)** REGLA DE LA CADENA PARA LA INTEGRACION.

Si $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ entonces $\displaystyle\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C.$

**Nota** **(1)** Las propiedades (3) y (4) son en verdad equivalentes.

**(2)** La fórmula $\int dF(u) = F(u) + C$ es muy útil y la usaremos frecuentemente en lo que sigue. Recordemos que $dF(u) = \frac{dF}{du}(u)\,.\,du$ .

**Prueba de (3) y (4)**

**(3)** Tenemos

$$\int dF(u(x)) = \int dG(x) \quad , \qquad \text{donde } G(x) = F(u(x)) \ ,$$

$$= G(x) + C \qquad \text{(por (4.2.4))}$$

$$= F(u(x)) + C.$$

**(4)** Si $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$

entonces $\dfrac{dF}{dx}(x) = f(x)$ ( por (4.2.1))

o $\dfrac{dF}{du}(u) = f(u)$ .

Luego $dF(u) = \dfrac{dF}{du}(u)\, du = f(u)du$ ,

y por lo tanto

$$\int f(u)du = \int dF(u)$$

$$= F(u) + C \qquad \text{(por (3))} \ \blacksquare$$

**Ejemplo 1**

Hallar $\displaystyle\int \frac{xdx}{1+x^4}$ .

**Solución** Tenemos

$$\int \frac{xdx}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2}, \quad \text{donde} \quad u = x^2 \ ,$$

$$= \frac{1}{2}\int d(\text{arc tan } u)$$

$$= \frac{1}{2} \text{arc tan } u + C$$

$$= \frac{1}{2} \text{arc tan } x^2 + C \ .$$

**Ejemplo 2**

Hallar $\int 6x^2e^{-x^3}dx$.

**Solución**

$$\int 6x^2e^{-x^3}dx = -\frac{6}{3}\int e^{-x^3}\,d(-x^3)$$

$$= -2\int e^u\,du, \quad \text{donde } u = -x^3,$$

$$= -2\int d(e^u)$$

$$= -2e^u + C = -2e^{-x^3} + C.$$

**Ejemplo 3**

Calcular $\int \cos^4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos x\,dx$.

**Solución**

$$\int \cos^4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos x\,dx = \int \operatorname{sen}^4 x\cos x\,dx \quad \left(\text{pues } \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}x\right)$$

$$= \int \operatorname{sen}^4 x\,d(\operatorname{sen}x)$$

$$= \int u^4\,du, \quad \text{donde } u = \operatorname{sen} x,$$

$$= \int d\left(\frac{u^5}{5}\right)$$

$$= \frac{u^5}{5} + C = \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C.$$

## 4.4 Integrales Usuales

**Teorema** Sea $u = u(x)$ una función diferenciable. Se cumplen las siguientes fórmulas

(1) $$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

(2) $$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

(3) $$\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

(4) $$\int e^u \, du = e^u + C$$

(5) $$\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C$$

(6) $$\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C$$

(7) $$\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$$

(8) $$\int \operatorname{cosec}^2 u \, du = -\cot u + C$$

(9) $$\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$$

(10) $$\int \operatorname{cosec} u \cdot \cot u \, du = -\operatorname{cosec} u + C$$

(11) $$\int \tan u \, du = \ln |\sec u| + C$$

(12) $$\int \cot u \, du = \ln |\text{sen } u| + C$$

(13) $$\int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + C$$

(14) $$\int \text{cosec } u \, du = \ln |\text{cosec } u - \cot u| + C$$

(15) $$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C, \qquad (u^2 > a^2)$$

(16) $$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \text{arc tan } \frac{u}{a} + C$$

(17) $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{arc sen } \frac{u}{a} + C \qquad (a > 0)$$

(18) $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

Las **funciones hiperbólicas** se definen mediante las ecuaciones:

$$\text{sen h } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cos n x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tan h x = \frac{\text{sen h } x}{\cos h x},$$

$$\cot h x = \frac{\cos h x}{\text{sen h } x}, \quad \sec h x = \frac{1}{\cos h x}, \quad \text{cosec } h x = \frac{1}{\text{sen h } x}$$

(19) $$\int \text{sen h } u \, du = \cos h u + C$$

(20) $$\int \cos h u \, du = \text{sen h } u + C$$

(21) $\displaystyle\int \sec h^2\, u\, du = \tan hu + C$

(22) $\displaystyle\int \operatorname{cosec} h^2\, u\, du = -\cot hu + C$

(23) $\displaystyle\int \sec h\, u \tan h\, u\, du = -\sec h\, u + C$

(24) $\displaystyle\int \operatorname{cosec} h\, u \cot h\, u\, du = -\operatorname{cosec} h\, u + C$

**Ejemplo 1** Probar las fórmulas (1), (2) y (3) .

**Solución**

(1) Puesto que $n+1 \neq 0$ , la función $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ está definida. Se tiene

$d\left(\dfrac{u^{n+1}}{n+1}\right) = \dfrac{d}{du}\left(\dfrac{u^{n+1}}{n+1}\right) du = u^n\, du$ , y por lo tanto

$$\int u^n\, du = \int d\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C.$$

(2) Tenemos $d(\ln|u|) = \dfrac{d}{du}(\ln|u|)\, du$

$= \dfrac{1}{u} du$ (pues $\dfrac{d}{du} \ln|u| = \dfrac{1}{u}$)

Luego $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \int d(\ln|u|) = \ln|u| + C$ .

(3) Tenemos $d\left(\dfrac{a^u}{\ln a}\right) = \dfrac{1}{\ln a} d\, a^u = \dfrac{1}{\ln a} \dfrac{d}{du}(a^u).\, du$

$= \dfrac{1}{\ln a} a^u . \ln a .\, du = a^u\, du$ .

Luego $\displaystyle\int a^u\, du = \int d\left(\frac{a^u}{\ln a}\right) = \frac{a^u}{\ln a} + C$ .

**Ejemplo 2** Hallar $\int \sqrt{a + bx}\ dx$

**Solución**

$$\int \sqrt{a + bx}\ dx = \frac{1}{b}\int \sqrt{a + bx}\ .\ d(a + bx)$$

$$= \frac{1}{b}\int u^{1/2}\, du\ , \qquad \text{donde} \quad u = a + bx$$

$$= \frac{1}{b}\ \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C \qquad \left(\text{usando} \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{con} \quad n = 1/2\right)$$

$$= \frac{2}{3b}(a + bx)^{3/2} + C\ .$$

**Ejemplo 3** Hallar $\int \frac{x^3 - 4x + 6}{x^2}\, dx$

**Solución**

$$\int \frac{x^3 - 4x + 6}{x^2}\, dx = \int \left(x - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2}\right) dx$$

$$= \int x\, dx - 4\int \frac{dx}{x} + 6\int x^{-2}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4\ \ln|x| + 6\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + C$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4\ \ln|x| - \frac{6}{x} + C\ .$$

## 4.5 Problemas Resueltos

**PROBLEMA 1** Probar que

(1) $\int \text{sen } u \, du = -\cos u + C$

(2) $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$

(3) $\int \text{cosec } u \, . \cot u \, du = -\text{cosec } u + C.$

**SOLUCION**

(1) De $d(\cos u) = \frac{d}{du}(\cos u)\, du = -\text{sen } u \, du$

tenemos $\int \text{sen } u \, du = \int d(-\cos u) = -\cos u + C.$

(2) Puesto que $d(\tan u) = \frac{d}{du}(\tan u).du = \sec^2 u \, du$

tenemos $\int \sec^2 u \, du = \int d(\tan u) = \tan u + C.$

(3) De $d(\text{cosec } u) = \frac{d}{du}(\text{cosec } u)\, du = -\text{cosec } u \cot u \, du$

resulta $\int \text{cosec } u \cot u \, du = \int d(-\text{cosec } u) = -\text{cosec } u + C.$

**PROBLEMA 2** Probar las siguientes fórmulas

(1) $\int \tan u \, du = \ln|\sec u| + C$

(2) $\int \cot u \, du = \ln|\text{sen } u| + C$

(3) $\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

(4) $\int \text{cosec } u \, du = \ln|\text{cosec } u - \cot u| + C .$

**SOLUCION**

(1) $d(\ln|\sec u|) = \dfrac{d}{du}(\ln|\sec u|).du$

$$= \frac{1}{\sec u}\frac{d}{du}(\sec u)\,du \qquad (\text{pues } \frac{d}{du}\ln|v| = \frac{1}{v}\frac{dv}{du})$$

$$= \frac{\sec u \, . \tan u}{\sec u}du = \tan u\, du .$$

Luego $\displaystyle\int \tan u\, du = \int d(\ln|\sec u|) = \ln|\sec u| + C.$

(2) $d(\ln|\sen u|) = \dfrac{d}{du}\ln|\sen u|\, du$

$$= \frac{1}{\sen u}\frac{d}{du}(\sen u)du \qquad (\text{pues } \frac{d}{du}\ln|v| = \frac{1}{v}\frac{dv}{du})$$

$$= \frac{\cos u}{\sen u}du = \cot u\, du .$$

Luego $\displaystyle\int \cot u\, du = \int d\ln|\sen u| = \ln|\sen u| + C .$

(3) $d(\ln|\sec u + \tan u|) = \dfrac{d}{du}\ln|\sec u + \tan u|\, du$

$$= \frac{1}{(\sec u + \tan u)}\cdot\frac{d}{du}(\sec u + \tan u)du$$

$$= \frac{\sec u\ \tan u + \sec^2 u}{\sec u + \tan u}du$$

$= \sec u\, du$ (cancelando el término $\sec u + \tan u$)

Luego $\displaystyle\int \sec u\, du = \int d\ln|\sec u + \tan u| = \ln|\sec u + \tan u| + C.$

(4) $d(\ln|\operatorname{cosec} u - \cot u|) = \dfrac{d}{du}\ln|\operatorname{cosec} u - \cot u|\, du$

$$= \frac{1}{\operatorname{cosec} u - \cot u}\frac{d}{du}(\operatorname{cosec} u - \cot u)du$$

$$= \frac{-\operatorname{cosec} u \cot u + \operatorname{cosec}^2 u}{\operatorname{cosec} u - \cot u}du = \operatorname{cosec} u\, du .$$

Luego $\displaystyle\int \operatorname{cosec} u\, du = \int d\ln|\operatorname{cosec} u - \cot u|$

$$= \ln|\operatorname{cosec} u - \cot u| + C .$$

**PROBLEMA 3** Probar las siguientes fórmulas

(1) $$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C \,, \qquad (u^2 > a^2)$$

(2) $$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tan} \frac{u}{a} + C$$

(3) $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{u}{a} + C \,, \qquad (a > 0)$$

**SOLUCION**

(1) $$d\left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right|\right) = \frac{1}{2a} \frac{d}{du}\left(\ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right|\right) du$$

$$= \frac{1}{2a} \frac{d}{du} \left( \ln |u-a| - \ln |u+a| \right) du$$

$$= \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{u-a} - \frac{1}{u+a} \right) du = \frac{du}{u^2 - a^2}$$

Luego, $$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \int d\left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right|\right) = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C.$$

(2) $$d\left(\frac{1}{a} \operatorname{arc\,tan} \frac{u}{a}\right) = \frac{1}{a} \frac{d}{du}\left(\operatorname{arc\,tan} \frac{u}{a}\right) du$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{\frac{1}{a}}{1 + \left(\frac{u}{a}\right)^2} du = \frac{du}{u^2 + a^2}$$

Luego, $$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \int d\left(\frac{1}{a} \operatorname{arc\,tan} \frac{u}{a}\right) = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tan} \frac{u}{a} + C.$$

(3) $$d\left(\operatorname{arc\,sen} \frac{u}{a}\right) = \frac{d}{du}\left(\operatorname{arc\,sen} \frac{u}{a}\right) du$$

$$= \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{a}\right)^2}} du = \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$$

Luego, $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \int d\left(\operatorname{arc\,sen} \frac{u}{a}\right) = \operatorname{arc\,sen} \frac{u}{a} + C \,.$$

**PROBLEMA 4** Probar que

(1) $\displaystyle\int \operatorname{sen} hu\, du = \cos hu + C$

(2) $\displaystyle\int \cos hu\, du = \operatorname{sen} hu + C$

(3) $\displaystyle\int \sec h^2 u\, du = \tan hu + C$

(4) $\displaystyle\int \operatorname{cosec} h^2 u\, du = -\cot hu + C.$

**SOLUCION**

(1) $$d(\cos hu) = \frac{d}{du}(\cos hu)du = \frac{d}{du}\left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)du$$
$$= \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)du = \operatorname{sen} hu\, du\, .$$

Luego $\displaystyle\int \operatorname{sen} hu\, du = \int d(\cos hu) = \cos hu + C.$

(2) $$d(\operatorname{sen} hu) = \frac{d}{du}(\operatorname{sen} hu)du = \frac{d}{du}\left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)du$$
$$= \frac{e^u + e^{-u}}{2}\, du = \cos hu\, du\, .$$

Luego $\displaystyle\int \cos hu\, du = \int d(\operatorname{sen} hu) = \operatorname{sen} hu + C.$

(3) y (4) se siguen de las siguientes identidades cuya verificación se deja al lector :

$$\frac{d}{du}(\tan hu) = \sec^2 hu$$

$$\frac{d}{du}(\cot hu) = -\operatorname{cosec} h^2 u\, .$$

**PROBLEMA 5** Encontrar las siguientes integrales

(1) $\int 8\, a^2 x^7 dx$

(2) $\int (6x^2 - 8x + 5)\, dx$

(3) $\int x(x+1)(x+2)\, dx$

(4) $\int (x^3 + a)^2\, dx$

**SOLUCION**

(1) $$\int 8\, a^2\, x^7 dx = 8a^2 \int x^7\, dx = 8\, a^2 \left(\frac{x^8}{8}\right) + C$$
$$= a^2x^8 + C.$$

(2) $$\int (6x^2 - 8x + 5)dx = 6\int x^2 dx - 8\int x\, dx + 5\int dx$$
$$= 6\left(\frac{x^3}{3}\right) - 8\left(\frac{x^2}{2}\right) + 5x + C$$
$$= 2x^3 - 4x^2 + 5x + C.$$

(3) $$\int x(x+1)(x+2)\, dx = \int (x^3 + 3x^2 + 2x)\, dx$$
$$= \int x^3\, dx + 3\int x^2\, dx + 2\int x\, dx$$
$$= \frac{x^4}{4} + x^3 + x^2 + C.$$

(4) $$\int (x^3 + a)^2\, dx = \int (x^6 + 2ax^3 + a^2)\, dx$$
$$= \frac{x^7}{7} + \frac{ax^4}{2} + a^2x + C.$$

**PROBLEMA 6** Calcular las siguientes integrales indefinidas

(1) $$\int \frac{dx}{x^2}$$

(2) $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

(3) $$\int \sqrt[p]{px}\ dx \qquad (p \neq -1)$$

(4) $$\int \sqrt{x}\ (5x - 3)dx$$

**SOLUCION**

(1) $$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C.$$

(2) $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-1/3}\ dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{2}x^{2/3} + C.$$

(3) $$\int \sqrt[p]{px}\ dx = \sqrt[p]{p}\int x^{\frac{1}{p}}\ dx$$

$$= \sqrt[p]{p}\ \left(\frac{x^{\frac{1}{p}+1}}{\frac{1}{p}+1}\right) + C = \frac{1}{p+1}\ \sqrt[p]{(px)^{p+1}} + C\ .$$

(4) $$\int \sqrt{x}\ (5x-3)dx = \int (5x^{3/2} - 3x^{1/2})dx$$

$$= 5\ \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 3\ \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= 2x^{5/2} - 2x^{3/2} + C\ .$$

**PROBLEMA 7** Calcular las siguientes integrales indefinidas

(1) $$\int (nx)^{\frac{1-n}{n}}\, dx$$

(2) $$\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$$

(3) $$\int (a^{2/3} - x^{2/3})^3\, dx$$

(4) $$\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx .$$

**SOLUCION**

(1) $$\int (nx)^{\frac{1-n}{n}}\, dx = \frac{1}{n}\int (nx)^{\frac{1-n}{n}}\, d(nx)$$

$$= \frac{1}{n}\int y^{\frac{1-n}{n}}\, dy, \qquad \text{donde } y = nx ,$$

$$= \frac{1}{n}\cdot \frac{y^{\frac{1-n}{n}+1}}{\frac{1-n}{n}+1} + C = y^{\frac{1}{n}} + C = \sqrt[n]{nx} + C.$$

(2) $$\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx = \int \frac{x^4 - x^2 - 2}{x^{2/3}}\, dx$$

$$= \int (x^{10/3} - x^{4/3} - 2x^{-2/3})\, dx$$

$$= \frac{3}{13}x^{13/3} - \frac{3}{7}x^{7/3} - 6x^{1/3} + C .$$

(3) $$\int (a^{2/3} - x^{2/3})^3\, dx = \int (a^2 - 3a^{4/3}x^{2/3} + 3a^{2/3}x^{4/3} - x^2)dx$$

$$= a^2x - \frac{9}{5}a^{4/3}x^{5/3} + \frac{9}{7}a^{2/3}x^{7/3} - \frac{x^3}{3} + C .$$

(4) $$\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx = \int (x^{3/2}+1)\, dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + x + C.$$

**PROBLEMA 8** Calcular las siguientes integrales

(1) $\displaystyle\int \frac{(3 + \ln x)}{x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{5+3x}$

(3) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{1 + x^4}$ (4) $\displaystyle\int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x}$

(5) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{a + bx^2}$.

**SOLUCION**

(1)
$$\int \frac{(3+\ln x)}{x}\,dx = \int (3+\ln x)\,d(3+\ln x)$$
$$= \int u\,du\,, \qquad \text{donde} \quad u = 3 + \ln x,$$
$$= \frac{u^2}{2} + C = \frac{(3+\ln x)^2}{2} + C\,.$$

(2)
$$\int \frac{dx}{5+3x} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{5+3x}\,d(5+3x) = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u}\,,$$
$$\text{donde} \quad u = 5+3x,$$
$$= \frac{1}{3}\ln|u| + C = \frac{1}{3}\ln|5+3x| + C\,.$$

(3)
$$\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{d(1+x^4)}{1+x^4} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u}\,,$$
$$\text{donde} \quad u = 1+x^4,$$
$$= \frac{1}{4}\ln|u| + C = \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C\,.$$

(4)
$$\int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x)}{x^2+2x} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}\,,$$
$$\text{donde} \quad u = x^2+2x,$$
$$= \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x| + C\,.$$

(5)
$$\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\int \frac{d(a+bx^2)}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\int \frac{du}{u}\,,$$
$$\text{donde} \quad u = a+bx^2,$$
$$= \frac{1}{2b}\ln|u| + C = \frac{1}{2b}\ln|a+bx^2| + C\,.$$

**PROPLEMA 9** Calcular las siguientes integrales indefinidas

$$(1)\quad \int \frac{2x+3}{2x+1}\,dx \qquad\qquad (2)\quad \int \left(a+\frac{b}{x-a}\right)^2 dx$$

$$(3)\quad \int \frac{ax+b}{px+q}\,dx \qquad\qquad (4)\quad \int \frac{x^4+x^2+1}{x-1}\,dx\,.$$

**SOLUCION**

(1) $$\int \frac{2x+3}{2x+1}\,dx = \int \frac{(2x+1)+2}{(2x+1)}\,dx = \int dx + 2\int \frac{dx}{2x+1}$$

$$= x + \int \frac{d(2x+1)}{2x+1} = x + \int \frac{du}{u},$$

donde $u = 2x+1$,

$$= x + \ln|u| + C = x + \ln|2x+1| + C\,.$$

(2) $$\int \left(a+\frac{b}{x-a}\right)^2 dx = \int \left[a^2 + \frac{2ab}{x-a} + \frac{b^2}{(x-a)^2}\right] dx$$

$$= a^2x + 2ab\ln|x-a| - \frac{b^2}{x-a} + C\,.$$

(3) Escribimos $$\frac{ax+b}{px+q} = \frac{a}{p}\left(\frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{q}{p}}\right) = \frac{a}{p}\left(\frac{x+\frac{q}{p}+\frac{b}{a}-\frac{q}{p}}{x+\frac{q}{p}}\right)$$

$$= \frac{a}{p} + \left(\frac{bp-aq}{p^2}\right)\cdot\frac{1}{x+\frac{q}{p}}$$

Luego $$\int \frac{ax+b}{px+q}\,dx = \frac{a}{p}\int dx + \left(\frac{bp-aq}{p^2}\right)\cdot\int \frac{dx}{x+\frac{q}{p}}$$

$$= \frac{a}{p}x + \left(\frac{bp-aq}{p^2}\right)\ln\left|x+\frac{q}{p}\right| + C$$

$$= \frac{ax}{p} + \left(\frac{bp-aq}{p^2}\right)\cdot\ln|px+q| + C$$

(sumando la constante $-\left(\frac{bp-aq}{p^2}\right)\ln|p|$ a C)

(4) Expresando $x^4+x^2+1$ como suma de potencias de $x-1$

$$x^4+x^2+1 = [(x-1)+1]^4 + [(x-1)+1]^2 + 1$$

$$= (x-1)^4 + 4(x-1)^3 + 7(x-1)^2 + 6(x-1) + 3\,.$$

Luego $$\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1}\,dx = \int \left[(x-1)^3 + 4(x-1)^2 + 7(x-1) + 6 + \frac{3}{x-1}\right] dx$$

$$= \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{4}{3}(x-1)^3 + \frac{7}{2}(x-1)^2 + 6x + 3\ln|x-1| + C$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x + 3\ln|x-1| + C\,.$$

**PROBLEMA 10** Calcular

(1) $$\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$$

(2) $$\int \sqrt{a-bx}\;dx$$

(3) $$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

(4) $$\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}\,dx\;.$$

**SOLUCION**

(1) $$\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{dx}{(x+1)} - \int (x+1)^{-2}\,dx$$

$$= \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C\;.$$

(2) $$\int \sqrt{a-bx}\;dx = -\frac{1}{b}\int (a-bx)^{1/2}\,d(a-bx) = -\frac{2}{3b}(a-bx)^{3/2} + C\;.$$

(3) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-1/2}\,d(x^2+1) = (x^2+1)^{1/2} + C\;.$$

(4) $$\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}\,dx = \int x^{-1/2}\,dx + \int \ln x\;d(\ln x)$$

$$= 2x^{1/2} + \int u\,du\,, \qquad \text{donde} \quad u = \ln x,$$

$$= 2x^{1/2} + \frac{u^2}{2} + C$$

$$= 2x^{1/2} + \frac{(\ln x)^2}{2} + C\;.$$

**PROBLEMA 11** Hallar $\int \frac{e^x\,dx}{a+be^x}$ .

**SOLUCION** $\int \frac{e^x\,dx}{a+be^x} = \frac{1}{b}\int \frac{d(a+be^x)}{a+be^x}$

$= \frac{1}{b}\int \frac{du}{u}$ , donde $u = a+be^x$,

$= \frac{1}{b}\ln|u| + C = \frac{1}{b}\ln|a+be^x| + C$ .

**PROBLEMA 12** Calcular $\int \frac{\text{sen } x\,dx}{1-\cos x}$ .

**SOLUCION** $\int \frac{\text{sen } x\,dx}{1-\cos x} = \int \frac{d(1-\cos x)}{1-\cos x}$

$= \int \frac{du}{u}$ , donde $u = 1-\cos x$,

$= \ln|u| + C = \ln(1-\cos x) + C$ .

**PROBLEMA 13** Encontrar $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{a+b\tan x}$ .

**SOLUCION** $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{a+b\tan x} = \frac{1}{b}\int \frac{d(a+b\tan x)}{a+b\tan x}$

$= \frac{1}{b}\ln|a+b\tan x| + C$ .

**PROBLEMA 14** Hallar $\displaystyle\int \frac{x^3 + 3x}{x^2+1}\,dx$ .

**SOLUCION** $$\int \frac{x^3+3x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{(x^3+x) + 2x}{x^2+1}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln(x^2+1) + C\ .$$

**PROBLEMA 15** Calcular $\displaystyle\int \frac{(e^x + \operatorname{sen} x)}{\sqrt{e^x - \cos x}}\,dx$ .

**SOLUCION** $$\int \frac{(e^x + \operatorname{sen} x)}{\sqrt{e^x - \cos x}}\,dx = \int (e^x - \cos x)^{-1/2}\,d(e^x - \cos x)$$

$$= 2(e^x - \cos x)^{1/2} + C\ .$$

**PROBLEMA 16** Encontrar $\displaystyle\int \frac{\sec 2x \tan 2x}{3\sec 2x - 2}\,dx$ .

**SOLUCION** $$\int \frac{\sec 2x \tan 2x}{3\sec 2x - 2}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{d(3\sec 2x - 2)}{(3\sec 2x - 2)}$$

$$= \frac{1}{6}\ln|3\sec 2x - 2| + C\ .$$

**PROBLEMA 17** Calcular las siguientes integrales

(1) $\displaystyle\int e^{x/n}\,dx$ (5) $\displaystyle\int a^x e^x\,dx$

(2) $\displaystyle\int 10^x\,dx$ (6) $\displaystyle\int \frac{4\,dx}{\sqrt{e^x}}$

(3) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ (7) $\displaystyle\int x\,2^{x^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int e^{\tan x}\sec^2 x\,dx$ (8) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{e^{x^3}}$

**SOLUCION**

(1) $\displaystyle\int e^{x/n}\,dx = n\int e^{x/n}\,d\left(\frac{x}{n}\right) = n\int e^u\,du,$ donde $u = \dfrac{x}{n}$,

$= ne^u + C = n\,e^{x/n} + C.$

(2) $\displaystyle\int 10^x\,dx = \frac{10^x}{\ln 10} + C.$

(3) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int e^{\sqrt{x}}\,d(\sqrt{x}) = 2\int e^u\,du$ donde $u = \sqrt{x}$,

$= 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C.$

(4) $\displaystyle\int e^{\tan x}\sec^2 x\,dx = \int e^{\tan x}\,d(\tan x) = \int e^u\,du$, $u = \tan x$,

$= e^u + C = e^{\tan x} + C.$

(5) $\displaystyle\int a^x e^x\,dx = \int (ae)^x\,dx = \frac{(ae)^x}{\ln (ae)} + C = \frac{(ae)^x}{\ln a + 1} + C.$

(6) $\displaystyle\int \frac{4dx}{\sqrt{e^x}} = \int 4\,e^{-x/2}\,dx = -8\int e^{-x/2}\,d\left(-\frac{x}{2}\right)$

$\displaystyle = -8\int e^u\,du,$ donde $u = -\dfrac{x}{2}$,

$= -8\,e^u + C = -8\,e^{-x/2} + C.$

(7) $$\int x\, 2^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int 2^{x^2}\, d(x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\int 2^u\, du\ , \qquad \text{donde} \quad u = x^2\ ,$$

$$= \frac{2^u}{2\ln 2} + C = \frac{2^{x^2}}{\ln 4} + C\ .$$

(8) $$\int \frac{x^2\, dx}{e^{x^3}} = -\frac{1}{3}\int e^{-x^3}\, d(-x^3)$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-x^3} + C\ .$$

**PROBLEMA 18** Calcular

(1) $$\int 4^{2-3x}\, dx$$

(2) $$\int (e^{x/a} + e^{-x/a})^2\, dx$$

(3) $$\int \frac{e^x}{e^x - 1}\, dx$$

**SOLUCION**

(1) $$\int 4^{2-3x}\, dx = -\frac{1}{3}\int 4^{2-3x}\, d(2-3x)$$

$$= -\frac{1}{3}\int 4^u\, du\ , \qquad \text{donde} \quad u = 2-3x,$$

$$= -\frac{4^u}{3\ln 4} + C = -\frac{4^{2-3x}}{\ln 64} + C.$$

(2) $$\int (e^{x/a} + e^{-x/a})^2\, dx = \int (e^{2x/a} + 2 + e^{-2x/a})\, dx$$

$$= \frac{a}{2}e^{2x/a} + 2x - \frac{a}{2}e^{-2x/a} + C\ .$$

(3) $$\int \frac{e^x}{e^x - 1}\, dx = \int \frac{d(e^x - 1)}{e^x - 1} = \ln|e^x - 1| + C\ .$$

**PROBLEMA 19** Calcular

(1) $\int \text{sen } (a + bx)\, dx$

(2) $\int \cos^2 x dx$

(3) $\int (\cos ax + \text{sen } ax)^2\, dx$

**SOLUCION**

(1) $$\int \text{sen } (a + bx)\, dx = \frac{1}{b} \int \text{sen } (a + bx)\, d(a + bx)$$
$$= \frac{1}{b} \int \text{sen } u\, du \,, \qquad \text{donde} \quad u = a + bx,$$
$$= -\frac{\cos u}{b} + C = -\frac{\cos (a + bx)}{b} + C.$$

(2) $$\int \cos^2 x\, d x = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\text{sen } 2x}{4} + C .$$

(3) $$\int (\cos ax + \text{sen } ax)^2\, dx = \int [\cos^2 ax + 2 \text{ sen } ax \cos ax + \text{sen}^2 ax] dx$$
$$= \int (1 + \text{sen } 2ax)\, dx = x - \frac{\cos 2ax}{2a} + C .$$

**PROBLEMA 20** Encontrar

(1) $\int \sec^2 (3x + 2)\, dx$

(2) $\int \frac{\text{sen } (\ln x)}{x}\, dx$

(3) $\int x \cos (2 - x^2)\, dx$

**SOLUCION**

(1) $$\int \sec^2 (3x + 2)\, dx = \frac{1}{3} \int \sec^2 (3x + 2)\, d(3x + 2)$$
$$= \frac{1}{3} \int \sec^2 u\, du \,, \qquad \text{donde} \quad u = 3x + 2,$$
$$= \frac{1}{3} \tan u + C = \frac{1}{3} \tan (3x + 2) + C .$$

(2) $\int \frac{\text{sen}(\ln x)}{x}dx = \int \text{sen}(\ln x)\, d(\ln x)$

$= \int \text{sen}\, u\, du$, donde $u = \ln x$,

$= -\cos u + C = -\cos \ln x + C.$

(3) $\int x\cos(2-x^2)dx = -\frac{1}{2}\int \cos(2-x^2)\, d(2-x^2)$

$= -\frac{1}{2}\int \cos u\, du$, donde $u = 2 - x^2$,

$= -\frac{1}{2}\,\text{sen}\, u + C = -\frac{1}{2}\text{sen}(2-x^2) + C.$

**PROBLEMA 21** Calcular

(1) $\int 3\cos(5x - \frac{\pi}{4})\, dx$

(2) $\int \cot^2 ax\, dx$

(3) $\int \sqrt{1 + 3\cos^2 x}\,.\, \text{sen}\, 2x\, dx$

**SOLUCION**

(1) $\int 3\cos(5x - \frac{\pi}{4})\, dx = \frac{3}{5}\int \cos(5x - \frac{\pi}{4})\, d(5x - \frac{\pi}{4})$

$= \frac{3}{5}\,\text{sen}(5x - \frac{\pi}{4}) + C.$

(2) $\int \cot^2 ax\, dx = \int (\text{cosec}^2 ax - 1)\, dx$

$= \frac{1}{a}\int \text{cosec}^2 ax\, d(ax) - \int dx = -\frac{\cot ax}{a} - x + C.$

(3) $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,.\,\text{sen}\, 2x\, dx = -\frac{1}{3}\int (1+3\cos^2 x)^{1/2} d(1+3\cos^2 x)$

(pues $d(\cos^2 x) = -2\,\text{sen}\, x\cos x\, dx = -\text{sen}\, 2x\, dx$)

$= -\frac{2}{9}(1 + 3\cos^2 x)^{3/2} + C.$

**PROBLEMA 22** Hallar

(1) $\int \tan x\, dx$ (2) $\int x \cot(x^2+1)\, dx$

(3) $\int \text{sen}^5 4x \cos 4x\, dx$ (4) $\int \tan^3 \frac{x}{3} \cdot \sec^2 \frac{x}{3}\, dx$

**SOLUCION**

(1)
$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\text{sen } x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$$
$$= -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C .$$

(2)
$$\int x \cot(x^2+1)dx = \frac{1}{2}\int \cot(x^2+1)\, d(x^2+1)$$
$$= \frac{1}{2}\int \cot u\, du , \qquad \text{donde} \quad u = x^2+1,$$
$$= \frac{1}{2} \ln|\text{sen } u| + C = \frac{1}{2} \ln|\text{sen}(x^2+1)| + C.$$

(3)
$$\int \text{sen}^5 4x \cos 4x\, dx = \frac{1}{4}\int (\text{sen } 4x)^5\, d(\text{sen } 4x)$$
$$= \frac{1}{4}\int u^5 du , \qquad \text{donde} \quad u = \text{sen } 4x,$$
$$= \frac{u^6}{24} + C = \frac{\text{sen}^6 4x}{24} + C.$$

(4)
$$\int \tan^3 \frac{x}{3} \sec^2 \frac{x}{3} dx = 3\int (\tan \frac{x}{3})^3\, d(\tan \frac{x}{3})$$
$$= 3\int u^3 du , \qquad \text{donde} \quad u = \tan \frac{x}{3},$$
$$= \frac{3u^4}{4} + C = \frac{3}{4}\tan^4 \frac{x}{3} + C .$$

**PROBLEMA 23** Hallar (1) $\displaystyle\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{3+\cos 2x}\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{\cot^{2/3} x}{\operatorname{sen} x}\,dx$

**SOLUCION**

(1) $\displaystyle\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \tan\sqrt{x}\,d(\sqrt{x}) = 2\int \tan u\,du$ , donde $u = \sqrt{x}$,

$= 2 \ln|\sec u| + C = 2 \ln|\sec\sqrt{x}| + C$ .

(2) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{3+\cos 2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d(3+\cos 2x)}{3+\cos 2x} = -\frac{1}{2}\ln|3+\cos 2x| + C.$

(3) $\displaystyle\int \frac{\cot^{2/3} x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \cot^{2/3} x \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\int (\cot x)^{2/3}\,d(\cot x)$

$= -\frac{3}{5}(\cot x)^{5/3} + C = -\frac{3}{5}\cot^{5/3} x + C$ .

**PROBLEMA 24** Calcular (1) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$

(2) $\displaystyle\int \sec\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}\,dx$ (3) $\displaystyle\int (\tan 4x - \cot 4x)\,dx$

**SOLUCION**

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}\,dx$ ( multiplicando numerador y denominador por $1-\cos x$)

$\displaystyle= \int \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx - \int (\operatorname{sen} x)^{-2}\,d(\operatorname{sen} x)$

$= -\cot x + (\operatorname{sen} x)^{-1} + C = -\cot x + \operatorname{cosec} x + C.$

(2) $\displaystyle\int \sec\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}\,dx = 2\int \sec\frac{x}{2}\cdot\tan\frac{x}{2}\,d(\frac{x}{2})$ , $u = \frac{x}{2}$ ,

$\displaystyle= 2\int \sec u\cdot\tan u\,du = 2\sec u + C = 2\sec\frac{x}{2} + C.$

(3) $$\int (\tan 4x - \cot 4x)dx = \frac{1}{4}\int \tan 4x \; d(4x) - \frac{1}{4}\int \cot 4x \; d(4x)$$

$$= \frac{1}{4} \ln\left|\sec 4x\right| - \frac{1}{4} \ln\left|\operatorname{sen} 4x\right| + C$$

$$= \frac{1}{4} \ln\left|\operatorname{cosec} 8x\right| + C$$

( pues $\sec 4x \, . \operatorname{cosec} 4x = 2 \operatorname{cosec} 8x$ ).

**PROBLEMA 25** Hallar

(1) $\int \operatorname{cosec} \frac{ax}{b} \, . \cot \frac{ax}{b} \, dx$

(2) $\int e^{x} \cot e^{x} \, dx$

(3) $\int (\sec x - 1)^2 dx$

**SOLUCION**

(1) $$\int \operatorname{cosec} \frac{ax}{b} \, . \cot \frac{ax}{b} \, dx = \frac{b}{a} \int \operatorname{cosec} \frac{ax}{b} \, . \cot \frac{ax}{b} \, d\left(\frac{ax}{b}\right)$$

$$= \frac{b}{a} \int \operatorname{cosec} u \, . \cot u \, du, \text{ donde } u = \frac{ax}{b},$$

$$= -\frac{b}{a} \operatorname{cosec} u + C = -\frac{b}{a} \operatorname{cosec}\frac{ax}{b} + C \, .$$

(2) $$\int e^{x} \cot e^{x} dx = \int \cot e^{x} \, d(e^{x}) = \ln \left|\operatorname{sen} e^{x}\right| + C \, .$$

(3) $$\int (\sec x - 1)^2 \, dx = \int (\sec^2 x - 2 \sec x + 1) \, dx$$

$$= \tan x - 2 \ln \left|\sec x + \tan x\right| + x + C \, .$$

**PROBLEMA 26** Hallar $\int (\sec 3x - \operatorname{cosec} \frac{x}{3}) \, dx.$

**SOLUCION** $$\int (\sec 3x - \operatorname{cosec} \tfrac{x}{3}) \, dx = \frac{1}{3} \int \sec 3x \, d(3x) - 3 \int \operatorname{cosec}\tfrac{x}{3} d(\tfrac{x}{3})$$

$$= \frac{1}{3} \ln\left|\sec 3x + \tan 3x\right| - 3 \ln\left|\operatorname{cosec}\tfrac{x}{3} - \cot \tfrac{x}{3}\right| + C.$$