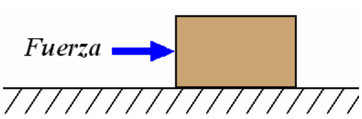
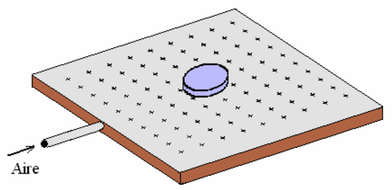
CAPÍTULO 4. Dinámica de una partícula

INTRODUCCIÓN
En el capítulo anterior estudiamos el movimiento de una partícula con respecto a un sistema de referencia sin preguntarnos sobre la causa del movimiento. Lo describimos simplemente en términos de los vectores $\vec{r}$, $\vec{v}$ y $\vec{a}$.
Nuestra discusión fue geométrica, en este capítulo discutiremos la causa del movimiento. Seguiremos tratando a los cuerpos como partículas simples. Posteriormente trataremos sobre sistemas de partículas y cuerpos rígidos.

EL ORIGEN DEL MOVIMIENTO
¿Qué origina el movimiento? ¿Qué detiene el movimiento? ¿Se necesita causa para mover las cosas? ¿Por qué un objeto al que se le da un empujón pronto se detiene? ¿Por qué los planetas mantienen su movimiento alrededor del sol?
Aristóteles joven filósofo griego (siglo IV a.c.) decía que un cuerpo permaneciera en movimiento era necesario ejercer alguna acción sobre él ya que el estado natural es el reposo. Esto parece ser razonable, cuando dejamos de empujar un cuerpo, este pronto alcanza el reposo. Parece ser necesaria una acción exterior o fuerza aplicada al cuerpo para mantener el movimiento. Sin embargo, observemos esta situación con mayor detenimiento. La figura siguiente muestra un bloque de madera sobre un plano.



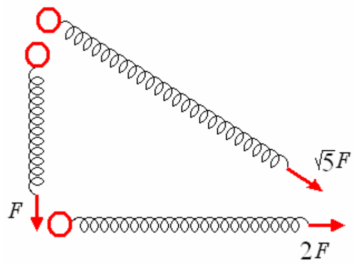
Aplicamos una fuerza pequeña al bloque, no pasa nada. Incrementamos la fuerza y a un valor particular el bloque se mueve. Si seguimos incrementando la fuerza empujando o jalando más, el objeto se mueve con mayor rapidez, Cuando dejamos de empujar el cuerpo rápidamente vuelve al reposo. Sin embargo si ponemos ruedas al bloque el resultado es diferente, una fuerza muy pequeña causa el movimiento. La diferencia son las ruedas debido a la fricción.
Para hacer un estudio libre de la fricción busquemos llegar cercanamente a esta condición, una forma de lograr esto es con una mesa neumática, se sopla aire sopla hacia arriba a través de pequeños agujeros manteniendo un disco suspendido sobre un colchón de aire. ¿Qué pasa cuando empujamos un objeto en ausencia de fricción? Este se mantiene en movimiento a velocidad constante.



En ausencia de una fuerza resultante, el objeto se mantiene en movimiento con velocidad uniforme o permanece en reposo. Esta es la **PRIMERA LEY DE NEWTON DEL MOVIMIENTO**
Ahora podemos pensar acerca de la situación cuando un objeto era empujado sobre un plano. Cuando la fuerza era pequeña no había movimiento, pero una fuerza debería causar movimiento; la conclusión es que debe haber otra fuerza actuando sobre el cuerpo la cual anula justamente el efecto de la fuerza que aplicamos. Al incrementar nuestra fuerza, la fuerza opuesta también se incrementa, hasta que en algún valor particular la fuerza opuesta termina de incrementarse y comienza el movimiento porque hay una fuerza resultante actuando sobre el objeto. La fuerza opuesta es la fuerza de Fricción

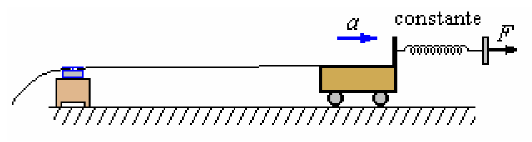
¿QUÉ ES FUERZA? En la vida cotidiana se considera fuerza a una sensación común asociada con la dificultad para mover o levantar un cuerpo. En Física se identifica una fuerza por el efecto que produce. Uno de los efectos de una fuerza es cambiar el estado de reposo o de movimiento del cuerpo, más concretamente, una fuerza cambia la velocidad de un objeto, es decir produce una aceleración. Cuando se aplica una fuerza sobre un cuerpo y no se produce movimiento, entonces puede cambiar su forma, aún si el cuerpo es muy rígido. La deformación puede o no ser permanente. Entonces los efectos de la fuerza neta son dos: cambiar el estado de movimiento de un cuerpo o producir una deformación, o ambas cosas.
Normalmente sobre un cuerpo pueden actuar varias fuerzas, entonces el cuerpo acelerará cuando el efecto de la fuerza neta que actúa sobre él no es cero.
Se llama **fuerza neta** o fuerza resultante a la suma de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo. Si la fuerza neta es cero, la aceleración es cero, el movimiento es con velocidad igual a cero (cuerpo detenido) o con velocidad constante. Cuando un cuerpo está en reposo o se mueve con velocidad constante, se dice que está en **equilibrio.**
Se pueden distinguir dos grandes clases de fuerzas: fuerzas de contacto, representan el resultado del contacto físico entre el cuerpo y sus alrededores, por ejemplo mover un carro o estirar un resorte; y fuerzas de acción a distancia que actúan a través del espacio sin que haya contacto físico entre el cuerpo y sus alrededores, por ejemplo la fuerza con que la Tierra atrae a los cuerpos que caen en caída libre. Todas las diferentes formas de fuerzas se encuentran dentro de esas dos grandes clasificaciones.

Para describir el mundo, la física contemporánea recurre a cuatro interacciones o fuerzas fundamentales, que actúan sobre las partículas de materia (y sobre las antipartículas), son vehiculadas por unas partículas llamadas vectores de interacción, que son: fotón (interacción electromagnética), bosón (interacción débil), gluón (interacción fuerte) y gravitón (interacción gravitacional).
1) Fuerzas electromagnéticas de atracción o repulsión entre partículas cargadas en reposo o en movimiento, explica la cohesión de los átomos, es mucho más intensa que la fuerza gravitacional.
2) Fuerzas nucleares intensas entre partículas subatómicas, responsable de la existencia del núcleo atómico asegura la cohesión interna de los constituyentes del núcleo atómico, protones y neutrones, y es responsable de un gran número de reacciones y de desintegraciones; es la de mayor magnitud (10^2 - 10^3 veces la fuerza electromagnética).
3) Fuerzas nucleares débiles de corto alcance, rige algunos procesos radiactivos, establece la estabilidad de algunos núcleos, es varios órdenes de magnitud (10^{12}) menor que la fuerza electromagnética.
4) Fuerza de atracción gravitacional entre cuerpos debido a sus masas, entre otras cosas hace que caigan las manzanas y que suba la marea, es la fuerza de menor magnitud comparada con las otras.
Para que el concepto de fuerza sea exacto se debe establecer un método para medirla. Una fuerza se puede medir por el efecto que produce. Por ejemplo se puede usar la deformación que una fuerza produce en un resorte, como en la figura. Si se aplica una fuerza verticalmente a un resorte y se estira una unidad, le asignamos a la fuerza una magnitud unitaria F. Se aplica ahora otra fuerza al mismo resorte horizontalmente, produciéndole un estiramiento de dos unidades, la magnitud de la fuerza será de $2F$. Si se aplican simultáneamente las dos fuerzas, el resorte se inclina, y se estira $\sqrt{5}$ veces. La fuerza equivalente que produce ese estiramiento del resorte es la suma vectorial de F y $2F$. Es decir, la fuerza es un vector.

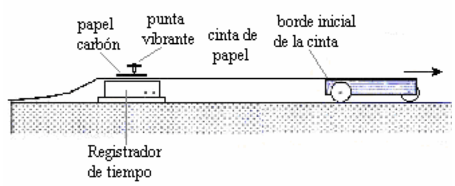


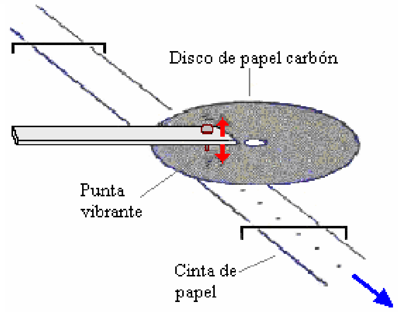
El instrumento para medir fuerzas se llama ***dinamómetro***, es un resorte que se estira sobre una escala. Si se aplica una fuerza de una unidad sobre el dinamómetro, el resorte se estira hasta que ejerce una fuerza igual y contraria a la aplicada. En la escala se mide el alargamiento del resorte y se le asigna una unidad de fuerza. De esa manera se calibra el dinamómetro y se usa para medir fuerzas, por ejemplo se aplica una fuerza sobre el dinamómetro y si se estira 2,5 unidades, entonces la fuerza aplicada es 2,5 veces la unidad de fuerza.
Este procedimiento es válido para pequeños alargamientos del resorte, ya que si la fuerza es muy intensa, se puede deformar y no volver a su forma original.

CAMBIO DE VELOCIDAD
Nuestro siguiente problema es encontrar una relación entre la fuerza y el cambio en el movimiento producido por ésta.
Para esto necesitamos lo siguiente:
1. Un carro muy ligero que pueda moverse sin fricción sobre una superficie horizontal.
2. Una fuerza constante. Esta podernos obtenerla mediante un resorte (Si mantenemos un resorte estirado una misma longitud, la fuerza que la estira es constante).

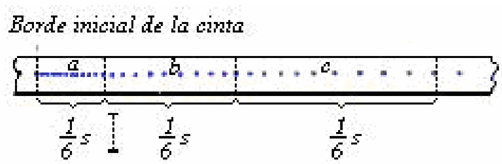


3. Un registrador de tiempo. El movimiento del carro puede estudiarse si una cinta de papel atada a éste pasa a través del registrador que produce marcas en la cinta a intervalos de tiempo regulares.

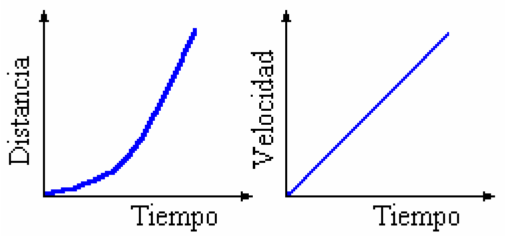




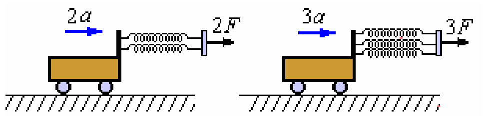
La figura siguiente muestra la cinta de papel producida por una fuerza constante.



Con los datos obtenidos en esta experiencia se realiza el gráfico distancia - tiempo y se obtiene una curva. Con los datos también se puede obtener la velocidad media en cada intervalo de tiempo. El gráfico velocidad - tiempo es una línea recta que indica que el movimiento es con aceleración constante. De aquí podemos concluir que una fuerza constante produce una aceleración constante.



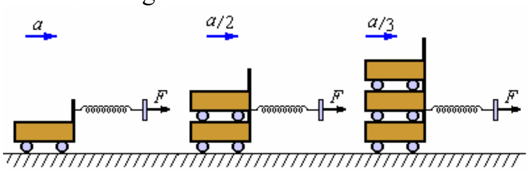
Si duplicamos la fuerza usando dos resortes iguales estirados la misma longitud, como se muestra en la figura.



Duplica la fuerza y produce el doble de aceleración.
Si triplicamos la fuerza se obtiene una aceleración de valor triple.
Concluimos que la aceleración a del cuerpo es directamente proporcional a la fuerza.

$a \propto F$

Podemos escribir esto como $F = ma$, donde *m* es la constante de proporcionalidad. A esta constante la llamaremos **MASA**.
Para una determinada fuerza a mayor constante *m* la aceleración es menor. A mayor valor de la constante es más difícil acelerar el cuerpo.
Para conocer qué factores cambian esta constante realicemos el siguiente experimento: en lugar de usar un solo carro jalado por el resorte estirado usemos dos carros uno sobre otro y luego tres carros como se muestra en la figura



La aceleración que se obtiene con los carros es igual a la mitad y con tres es igual a un tercio. Como el valor de *F* es igual en todos los casos, quiere decir que la constante con dos carros es igual a 2*m* y con tres carros es 3*m*.
Como la aceleración es una cantidad vectorial la fuerza también lo es y tiene la misma dirección que la aceleración, pero un módulo m veces mayor, de modo que la relación anterior puede escribirse en la forma

$\vec{F} = m\vec{a}$

Fuerza = masa x aceleración.
Esta expresión constituye la **SEGUNDA LEY DE NEWTON DEL MOVIMIENTO**.
La fuerza que actúa sobre un cuerpo es igual al producto de la masa del cuerpo por la aceleración que le imprime.

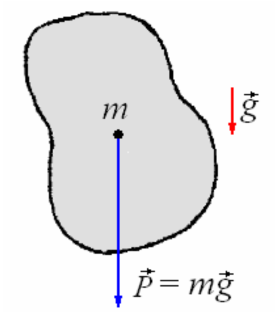
UNIDADES DE FUERZA Y MASA
La relación $F = ma$ nos da una relación entre fuerza, masa y aceleración. En el sistema internacional (S.I.) la unidad de aceleración es m/s. ¿Cuales son las unidades de fuerza y de masa? Como son dos cantidades que se relacionan sólo tenernos que especificar un estándar para una de ellas.
El sistema internacional adopta corno unidad una pieza de material llamado KILOGRAMO, cuyo símbolo es kg. El kilogramo es la masa un prototipo de platino iridiado sancionado por la Conferencia General de Pesas y Medidas realizada en París en 1889 y depositado en el pabellón de Breleuil en Sevres.
La unidad de fuerza es el newton, cuyo símbolo es N y se define así:
El newton la fuerza que produce una aceleración de un metro por segundo al cuadrado a una masa de un kilogramo.

$$N = \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}$$

Otros sistemas:
MKS: igual al S.I.
CGS: Masa $\rightarrow$ gramo (g), $1\text{ g} = 10^{-3}\text{ kg}$
Aceleración $\rightarrow$ cm/s^2
Fuerza $\rightarrow$ dina = g.cm/s^2
Inglés técnico: En este sistema la unidad fundamental es la unidad de fuerza.
Fuerza $\rightarrow$ libra (lb), 1 lb = 4,45 N
Aceleración $\rightarrow$ pie/s^2
Masa $\rightarrow$ slug = lb58
s^2/pie

PESO DE UN CUERPO. El peso de un cuerpo es la fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre el cuerpo. Un cuerpo de masa *m* sometido a cierta fuerza cae con la aceleración de la gravedad g, el peso *P* de este cuerpo es

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

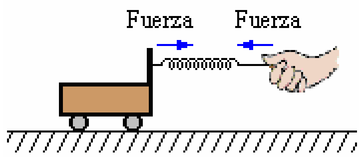


Su dirección es hacia abajo (hacia el centro de la Tierra). Como el peso es una fuerza debe medirse en Newtons.
Debido a que la aceleración de la gravedad varía de un lugar a otro de la Tierra, el peso de un cuerpo es diferente en lugares distintos, sin embargo la masa de un cuerpo es la cantidad fija que no depende del lugar donde está situado el cuerpo,
Aunque el peso de un objeto varía de un sitio a otro, esta variación es demasiado pequeña para ser observada en la mayor parte de las aplicaciones prácticas, por esto, el peso de un cuerpo parece ser una característica constante al igual que su masa. Este

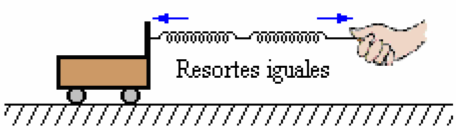
hecho ha conducido al empleo ordinario de otras dos medidas:
KILOGRAMO FUERZA, es el peso de un Kilogramo masa.
1 kgf = 9,8 N
LIBRA MASA, es la masa de un cuerpo que pesa una libra.
1 libra masa = 0,454 kg.
Estas unidades son prácticas pero incorrectas y no deben ser usadas en Física.

ACCION Y REACCION.
Hagamos una observación más detallada cuando jalamos el carro con un resorte estirado una determinada longitud.

Para que el resorte esté estirado es necesario jalarlo por los dos lados. Se necesitan fuerzas en sentidos opuestas y en cada extremo del resorte.
Cuando jalamos el carro, una fuerza actúa sobre el carro y una fuerza en sentido opuesto actúa sobre nuestra mano. ¿Cuáles son las magnitudes de estas fuerzas?



Con el objeto de dar respuesta a esta pregunta pongamos dos resortes iguales al primero y jalemos de tal manera que el carro adquiera la misma aceleración que antes, esto quiere decir, por la segunda ley de newton que siendo la misma masa *m* estamos aplicando la misma fuerza ($F = ma$) que antes y observamos que los resortes estiran la misma longitud, lo que quiere decir que la fuerza sobre la mano es igual a la fuerza sobre el carro.



Esto constituye la **TERCERA LEY DE NEWTON DEL MOVIMIENTO.**
Si un cuerpo ejerce una fuerza sobre un segundo, éste ejerce una fuerza igual y opuesta sobre el primero. La fuerza ejercida por el primer cuerpo sobre el segundo es la ACCIÓN, la fuerza igual y opuesta actuando sobre el primero es la REACCIÓN,
Expresado en símbolos, es:

$$\vec{F}_{\text{sobre 2 debido a 1}} = \vec{F}_{\text{sobre 1 debido a 2}}$$

Fuerza de contacto de un cuerpo a otro con un cambio de dirección o sin él
A continuación presentarnos algunos casos tipo de la aplicación de las leyes de Newton.

APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON
Cuando estudiamos Cinemática, encontrarnos las relaciones entre desplazamiento, aceleración y tiempo. Por ejemplo, conociendo la aceleración $\vec{a}$ las condiciones tales como posición inicial, velocidad inicial, es decir la posición y la velocidad en el tiempo que llamamos inicial ($t = 0$), podemos conocer la velocidad y posición para cualquier tiempo. Las condiciones iniciales las tenemos pero la aceleración, ¿de dónde? Para esto tenemos $\vec{F} = m\vec{a}$, todo lo que tenemos que hacer es conocer las fuerzas sobre el cuerpo y su masa, y entonces podremos encontrar $\vec{a}$.
La mejor forma de estar seguros que comprendemos el significado de $\vec{F} = m\vec{a}$, es hacerlo con algunos problemas que involucran las leyes de Newton. Para resolver un problema sugerimos cuatro pasos a seguir:
1. Dibujar un esquema del sistema
2. Identificar el cuerpo a cuyo movimiento se refiere el problema.
3. Dibujar otra figura con solamente el objeto en particular manteniendo el marco de referencia poner todas las fuerzas que actúan sobre el objeto mediante flechas. Esto se conoce como **DIAGRAMA DEL CUERPO LIBRE (DCL)**. Si se comete una equivocación todo lo demás fallará, por eso es conveniente hacerlo bien. Una mejor forma de comenzar es poner la fuerza de gravedad primero y luego preguntarse:
"¿Qué toca al cuerpo?", la acción de tos resortes, cuerdas, manos y otros objetos, todos deben ser considerados. Así como también las fuerzas que actúan sin tocar el cuerpo, como la fuerza eléctrica, magnética de las cuales no nos preocupamos en este curso.
4. Finalmente, aplicar la segunda ley de Newton a cada componente de fuerza y aceleración.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\sum F_x = ma_x,\ \sum F_y = ma_y,\ \sum F_z = ma_z.$$

y ahora resolver para la aceleración.
En algunos de los problemas que se presentan más frecuentemente, las acciones se producen por fuerzas sin contacto; en otros se usan cuerdas y varillas como medios de conexión. Cuando las masas de estos medios de conexión son despreciables su único efecto es el de transmitir

ESTÁTICA DE LAS MASAS PUNTUALES.
Los sistemas en los cuales todas sus partes satisfacen la primera ley son llamados sistemas estáticos, es decir si la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan es nula, el cuerpo esta en equilibrio y permanece en reposo, o si está en movimiento, se mantiene con velocidad constante

La condición de este equilibrio es

$$\sum \vec{F} = 0$$

y en componentes cartesianas:

$$\sum F_x = 0,\ \sum F_y = 0,\ \sum F_z = 0.$$

Las fuerzas son ejercidas sobre el objeto o sistemas por. Medios exteriores al sistema.

Ejemplo 1. La Fuerza gravitacional Dado que la aceleración de un cuerpo en caída libre en la tierra es *g*, ¿cuál es la fuerza de la gravedad?

Solución.

Como este movimiento es en una sola dimensión, consideramos que este se realiza en el eje *z*, tal que

$$\vec{a} = -g\hat{k}$$

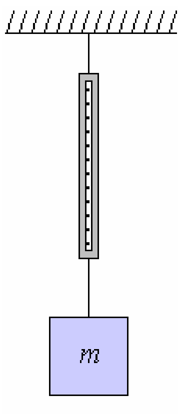
Según la Segunda Ley de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a} = -mg\hat{k}$$

$$\sum F_x = 0,\ \sum F_y = 0,\ \sum F_z = -mg.$$

Siendo esta la respuesta que ya conocíamos.

Ejemplo 2. El dinamómetro. El dinamómetro es un instrumento que se utiliza para medir las fuerzas. Consta de un resorte con una escala que indica su estiramiento, la cual está graduada en Newtons. Cuando lo utilizamos para pesar se dispone como lo muestra la figura.



Se suspende la masa *m*, el resorte del dinamómetro se estira hasta que alcanza el equilibrio estático.

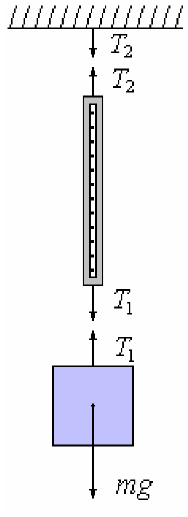


Diagrama del cuerpo libre (DCL)

Aplicando la condición de equilibrio de la masa *m*

$$T_1 - mg = 0$$

Luego $\Rightarrow T_1 = mg$

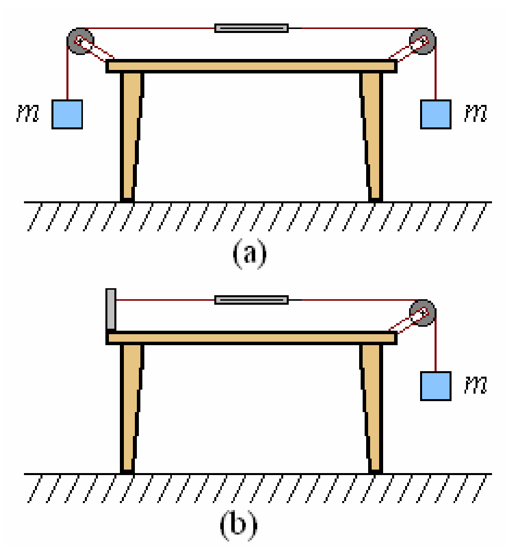
Si despreciamos la masa del dinamómetro, tenemos que:

$$T_1 - T_2 = 0 \text{ y } T_1 = T_2$$

El dinamómetro indica en la escala la fuerza

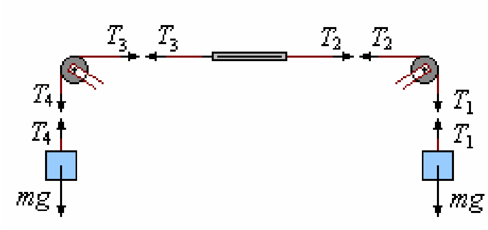
$$T_2 = mg$$

Ejemplo 3. Se tiene los dispositivos mostrados en la figura. ¿Cuánto indica el dinamómetro de la figura (a) y cuánto el dinamómetro de la figura (b)?



Solución.

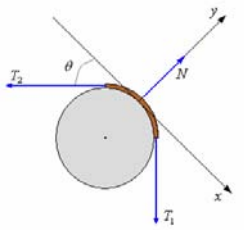
a) El diagrama de cuerpo libre de la figura (a) es



Empezando por la derecha

$T_1 - mg = 0 \Rightarrow T_1 = mg$

La figura siguiente muestra la polea



Para que el trozo de cuerda este en equilibrio

$$\sum \vec{F} = 0$$

Descomponiendo las fuerzas sobre el trozo de cuerda en los ejes *x* e *y*.

Como la cuerda se considera sin masa la suma de fuerzas a lo largo del eje *x* es

$T_1 \cos\theta - T_2 \cos\theta = 0 \Rightarrow T_1 = T_2$

En el dinamómetro, considerándolo de masa despreciable.

$$\sum \vec{F} = 0$$

$T_2 - T_3 = 0 \Rightarrow T_2 = T_3$

En la polea de la izquierda

$T_4 = T_3$

En la masa de La izquierda

$$\sum \vec{F} = 0$$

$T_4 - mg = 0 \Rightarrow T_4 = mg$

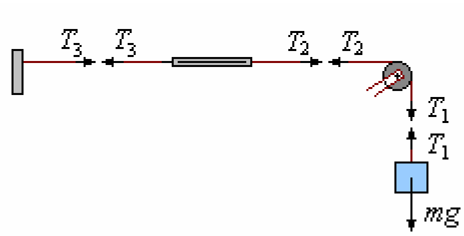
Como conclusión todas las tensiones son iguales a mg

$T_4 = T_3 = T_2 = T_1 = mg$

El dinamómetro es tensionado por la fuerza T_1, y su indicación será:

$T_1 = mg$

b) El diagrama de cuerpo libre de la figura siguiente es



En la masa

$T_1 - mg = 0 \Rightarrow T_1 = mg$

En la polea

$T_1 = T_2$

En el dinamómetro

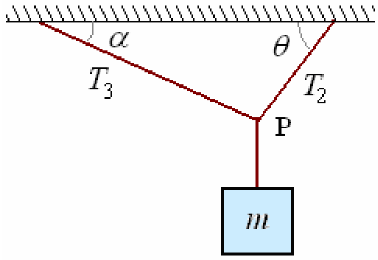
$T_3 = T_2 = T_1 = mg$

El dinamómetro es tensionado por la fuerza T_1 y su indicación será

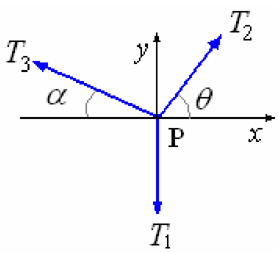
$T_1 = mg$

Como se puede ver esta situación es completamente análoga a la anterior, sólo que hemos sustituido una de las poleas por la pared.

Ejemplo 4. Un cuerpo de masa *m* se sostiene por medio de cuerdas como se muestra en la figura. Encontrar las tensiones T_1, T_2 en las tres cuerdas.



Solución.



Tomando un sistema de ejes horizontal y vertical como el mostrado en la figura tenemos:

$$\vec{T}_1 = -mg\hat{j}$$

$$\vec{T}_2 = T_2 \cos\theta\,\hat{i} + T_2 \operatorname{sen}\theta\,\hat{j}$$

$$\vec{T}_3 = -T_3 \cos\alpha\,\hat{i} + T_3 \operatorname{sen}\alpha\,\hat{j}$$

Con $\sum \vec{F} = 0$

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0$$

Obtenemos:

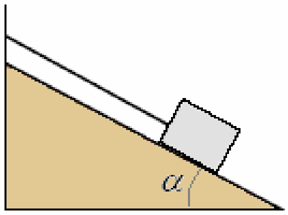
$$\sum F_x = T_2 \cos\theta - T_3 \cos\alpha = 0$$

$$\sum F_y = T_2 \operatorname{sen}\theta + T_3 \operatorname{sen}\alpha - mg = 0$$

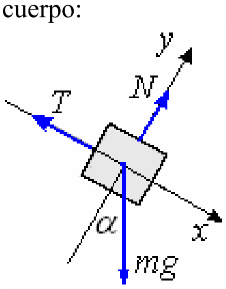
Resolviendo estas dos ecuaciones

$$T_2 = \frac{mg\cos\alpha}{\operatorname{sen}(\theta+\alpha)},\ T_3 = \frac{mg\cos\theta}{\operatorname{sen}(\theta+\alpha)}$$

Ejemplo 5. Un bloque de 50N de peso se ubica sobre un plano inclinado en un ángulo α de 30º con la horizontal. El bloque se sujeta con una cuerda ideal que se encuentra fija en la parte superior del plano inclinado, como en la figura. Estudiar el comportamiento mecánico del bloque.



Solución.
El D. C. L. del cuerpo:



Fuerza de atracción de la Tierra, que es su peso *mg*.
Fuerza de la cuerda que lo sostiene, que es la tensión *T*
Fuerza que el plano ejerce sobre el cuerpo, que es la normal *N*
Como el sistema está en equilibrio, se aplica la primera Ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0$$

Del diagrama de cuerpo libre se obtiene:

$$\sum F_x : -T + mg\,\text{sen}\alpha = 0$$

$$\sum F_y : N - mg\cos\alpha = 0$$

Despejando *T* y *N*, y reemplazando los valores numéricos, se obtiene:

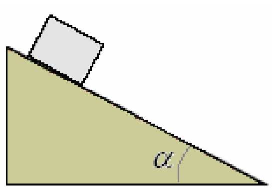
$$T = mg\,\text{sen}\alpha = 50\,\text{sen}30° = 25\text{ N}$$

$$N = mg\cos\alpha = 50\cos30° = 43{,}2\text{ N}$$

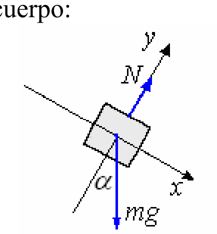
DINÁMICA CON FRICCIÓN DESPRECIABLE.

Los sistemas en los cuales todas sus partes satisfacen la primera ley son llamados sistemas estáticos, es decir si la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan no es nula y la fricción se considera despreciable,

Ejemplo 6. Si un bloque de masa m se ubica sobre un plano sin roce, inclinado un ángulo α con la horizontal, resbalará una distancia D a lo largo del plano. Describir su movimiento.



Solución.
El D. C. L. del cuerpo:



Del diagrama de cuerpo libre se obtiene:

$$\sum F_x : mg\,\text{sen}\alpha = ma_x$$

$$\sum F_y : N - mg\cos\alpha = ma_y = 0$$

De estas ecuaciones se obtiene:

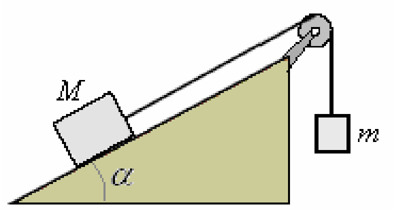
$$a_x = g\,\text{sen}\alpha \ \text{ y } \ N = mg\cos\alpha$$

Se concluye que la aceleración del bloque en dirección del plano inclinado es la componente de *g* en esa dirección. Estudiando ahora el movimiento del bloque, considerando que parte del reposo y se desliza una distancia *D*, se puede calcular la rapidez con que llega a la base del plano. Si se considera que el movimiento del bloque comienza desde el reposo, se puede usar:

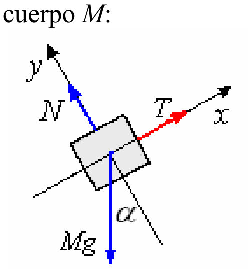
$$v^2 = v_0^2 + 2a_x\Delta x \Rightarrow v^2 = 2(g\,\text{sen}\alpha)D$$

y $v = \sqrt{2gD\,\text{sen}\alpha}$

Ejemplo 7. Para el siguiente sistema mecánico, calcular la aceleración de las masas y la tensión de la cuerda.



Solución.
Como no se conoce la dirección del movimiento, supongamos que el cuerpo de masa *M* sube por el plano inclinado, lo que determina el sentido de la aceleración, entonces aplicando la segunda Ley de Newton se aplica cada masa:
El D. C. L. del cuerpo *M*:



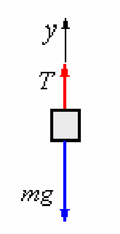
Del diagrama de cuerpo libre se obtiene:

$$\sum F_x : T - Mg\,\text{sen}\alpha = Ma \Rightarrow$$

$$T = Mg\,\text{sen}\alpha + Ma$$

$$\sum F_y : N - Mg\cos\alpha = 0$$

De estas ecuaciones se obtiene:
El D. C. L. del cuerpo *m*:



Del diagrama de cuerpo libre se obtiene:

$\sum F_y : T - mg = -ma \Rightarrow T = mg - ma$

De estas ecuaciones se obtiene

$$Mg\,\text{sen}\,\alpha + Ma = mg - ma$$

$$a = \frac{(m - M\text{sen}\alpha)}{(m + M)} g$$

Se observa que el signo de a depende del término (m - M sen α).

Ahora se calcula el valor de la tensión reemplazando el valor de a en T:

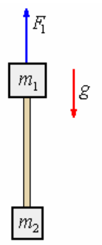
$$T = mg - m\left(\frac{m - M\text{sen}\alpha}{m + M}\right)g$$

$$T = \frac{mM}{(m + M)}(1 + \text{sen}\alpha)g$$

Ejemplo 8. Dos bloques de masas m_1 = 20 kg y m_2 = 8 kg, están unidos mediante una cuerda homogénea inextensible que pesa 2 kg. Se aplica al conjunto una fuerza vertical hacia arriba de 560 N. Calcular:

a) La aceleración del conjunto;

b) Las fuerzas que actúan en los extremos de la cuerda.



Solución.

En el D. C. L. de m_1:

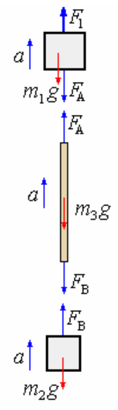
$F_1 - F_A - m_1 g = m_1 a$ (1)

En el D. C. L. de la cuerda de masa m_3:

$F_A - F_B - m_3 g = m_3 a$ (2)

En el D. C. L. de m_2:

$F_B - m_2 g = m_2 a$ (3)



a) Sumando (1), (2) y (3):

$$F_1 - (m_1 + m_2 + m_3)g = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

y $a = \dfrac{F_1}{(m_1 + m_2 + m_3)} - g$

$$a = \frac{560}{(20 + 8 + 2)} - 9{,}8 = 8{,}87 \text{ m/s}^2$$

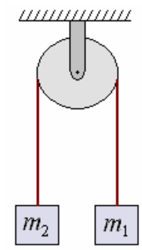
b) De (3) $F_B = m_2(g + a)$

$F_B = 8(9{,}8 + 8{,}87) = 149{,}4$ N

De (1) $F_A = F_1 - m_1(g + a)$

$F_A = 560 - 20(9{,}8 + 8{,}87) = 186{,}6$ N

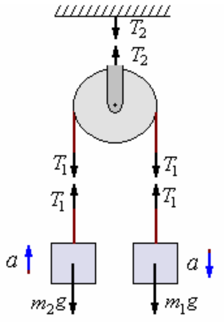
Ejemplo 9. La máquina de ATWOOD. Es un aparato que se utiliza para determinar con exactitud la gravedad y consiste de dos masas m_1 y m_2, ($m_1 > m_2$), que están unidas mediante una cuerda que pasa sobre una polea. Considerar la cuerda inextensible y sin masa. Asimismo, no tornar en cuenta la fricción y la masa de la polea. Describir el movimiento y calcular la tensión en la cuerda.



Solución.

Siendo m_1 mayor que m_2, la masa m_1 se moverá hacia abajo con una aceleración a y la masa m_2 se moverá hacia arriba con la misma aceleración a.

La figura siguiente muestra los diagramas de cuerpo libre de cada una de las partes del sistema.



La polea cumple la función de cambiar la dirección T_1 Considerando el sentido de la aceleración o como positiva.

Aplicando la Segunda Ley de Newton a la masa m_1

$$m_1g - T_1 = m_1a$$

Aplicando la Segunda Ley de Newton para la masa m_2:

$$T_1 - m_2g = m_2a$$

De estas dos ecuaciones obtenemos:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}g \text{ y } T_1 = \frac{2m_1m_2}{(m_1 + m_2)}g$$

Si las masas m_1 y m_2 fueran casi iguales, el valor de la aceleración sería pequeña y podría determinarse midiendo el tiempo en que una de las masas sube o baja una distancia determinada.

La razón $\frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}$ se determina pesando los cuerpos.

Finalmente, la magnitud de g se obtiene a partir de estas cantidades mediante la ecuación

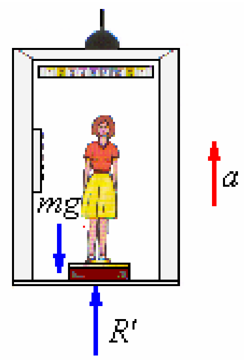
$$g = \frac{(m_1 + m_2)}{(m_1 - m_2)}a$$

Ejemplo 10. El peso de un pasajero en ascensor. Consideremos un pasajero de peso mg en un ascensor este peso es equilibrado por la reacción que el piso ejerce sobre él, si el ascensor estuviera parado $R = mg$.

Si el ascensor sube con aceleración a. ¿Cuál es el peso de la persona?

Solución.

La figura muestra el ascensor subiendo con una aceleración a



Ahora la reacción del piso es R'.

Aplicando la Segunda Ley de Newton al movimiento de la persona

$$R' - mg = ma \Rightarrow R' = m(g + a)$$

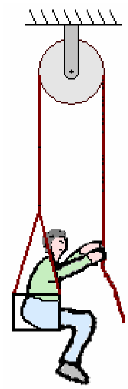
Si el ascensor sube el pasajero se siente más pesado, como si fuera empujado contra el piso. Si el ascensor desciende con esta aceleración,

$R' - mg = -ma \Rightarrow R' = m(g - a)$, el pasajero se siente más liviano.

Ejemplo 11. La figura muestra a un hombre elevándose mediante una fuerza vertical que aplica él mismo a la cuerda que tiene en las manos. Si el hombre y la silla juntos tienen una masa de 100 kg. Se pregunta:

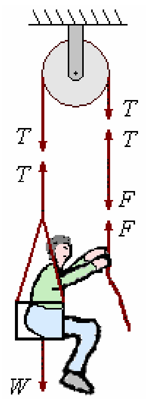
a) ¿Con qué fuerza debe jalar para, subir con una velocidad constante?

b) ¿Con qué fuerza debe jalar para subir con una aceleración de 1 m/s^2 (considerar g = 10 m/s^2?



Solución.

a) La figura siguiente muestra los diagramas de cuerpo libre de cada una de las partes del sistema.



Como se considera la cuerda con masa despreciable en el D.C.L. del trozo de cuerda

$$T = F$$

La polea solo cambia la dirección de la tensión T.

En el D.C.L .del hombre-silla

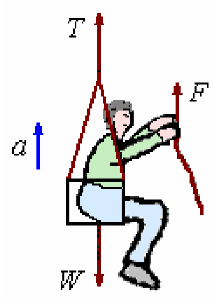
$$T + F - W = 0 \Rightarrow 2F = W$$

y $F = \frac{W}{2}$

Como $W = 100 \times 10 = 1000$ N

$$F = \frac{1000}{2} = 500 \text{ N}$$

b) Ahora como el hombre debe subir con una aceleración de 1 m/s^2 tenemos:



$$T + F - W = \frac{W}{g}a \Rightarrow 2F = W + \frac{W}{g}a$$

y $F = \dfrac{W}{2}\left(1 + \dfrac{a}{g}\right)$

Como $W = 1000$ N, $a = 1$ m/s^2 y $= 1$ m/s^2

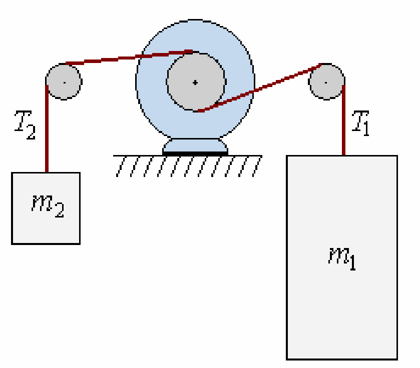
$$F = \frac{1000}{2}\left(1 + \frac{1}{10}\right) = 550 \text{ N}$$

Ejemplo 12. La figura muestra un ascensor. Este consiste de la caja con masa $m_1 = 1100$ kg, el contrapeso con masa $m_2 = 1000$ kg. El cable y poleas con masa y fricción despreciables.
Cuando el ascensor tiene una aceleración hacia arriba de 2 m/s^2, el contrapeso tiene igual aceleración pero hacia abajo.

a) ¿Cuál es el valor de la tensión T_1?

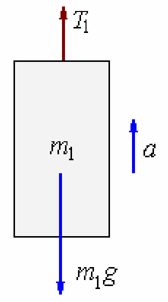
b) ¿Cuál es el valor de la tensión T_2?

c) ¿Cuál es la fuerza ejercida por el motor sobre el cable?



Solución.

a) Consideremos el D.C.L de la masa m_1:



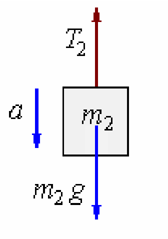
Aplicando la Segunda Ley de Newton

$$T_1 - m_1 g = m_1 a \quad \Rightarrow T_1 = m_1(a + g)$$

$$T_1 = 1100(2 + 9,8)$$

$= 12980$ N

b) Consideremos el D.C.L. de la masa m_2:



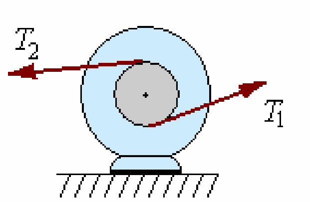
Aplicando La Segunda Ley de Newton

$$m_1 g - T_2 = m_2 a \quad \Rightarrow T_2 = m_2(g - a)$$

$$T_2 = 1000(9,8 - 2)$$

$= 7800$ N

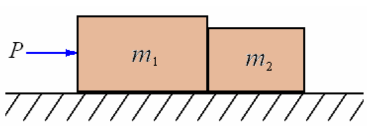
c) En el motor Fuerza ejercida por el motor (T_1 y T_2 pueden considerarse colineales)



$$F_M = T_1 - T_2 = 12980 - 7800$$

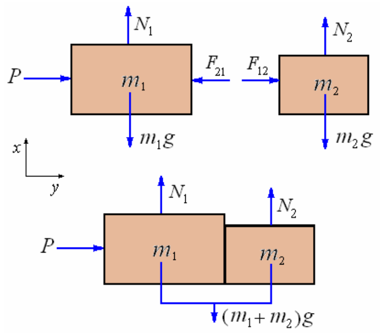
$= 5180$ N

Ejemplo 13. Demostración de la tercera ley de Newton mediante el uso de la segunda ley.
Se tienen dos cuerpos de masas m_1 y m_2 los cuales son empujados sobre un plano sin fricción por una fuerza de magnitud P. Demostrar que aquí se cumple la tercera ley de Newton.



Solución.

Asumiremos que no hay fricción entre las superficies de contacto de m_1 y m_2.
La figura muestra los D.C.L. para los bloques 1, 2 y para el sistema.



N_1 y N_2 son las fuerzas ejercidas por el plano.
F_{21} es la fuerza que el bloque 2 ejerce sobre el bloque 1.
F_{12} es la fuerza que el bloque 1 ejerce sobre el bloque 2.
La fuerza P solo actúa sobre el bloque 1, ya que solo está en contacto con él.
Como asumimos que no hay fricción entre los bloques, las fuerzas son normales a la superficie de contacto.
Para el bloque 1 tenemos:

$P - F_{21} = m_1 a_{1x}$ y $N_1 - m_1 g = 0$

Similarmente para el bloque 2

$F_{12} = m_2 a_{2x}$ y $N_2 - m_2 g = 0$

Para el sistema

$P = (m_1 + m_2)a_x$ y

$N_1 + N_2 - (m_1 + m_2)g = 0$

En este caso no nos interesan las ecuaciones en *y* pero si las ecuaciones en *x*.
Como los bloques se mueven juntos:

$a_{1x} = a_{2x} = a_x$

Sumamos la ecuación para el bloque 1 con la ecuación para el bloque 2.

$P - F_{21} + F_{12} = m_1 a_{1x} + m_2 a_{2x} = (m_1 + m_2)a_x$

Comparando con la ecuación para el sistema tenemos:

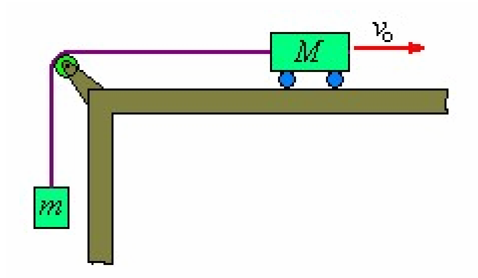
$P - F_{21} + F_{12} = P$

Esto dice que la magnitud de la fuerza de 1 sobre 2 es igual a la fuerza de2 sobre 1. Como ellas son opuestas resulta ser precisamente la tercera ley de Newton.

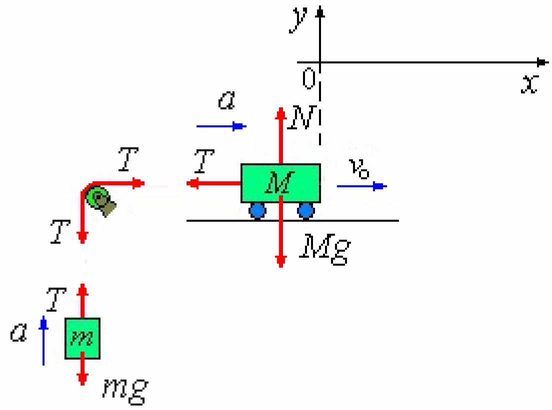
$F_{21} = F_{12}$, Acción y reacción.

Ejemplo 14.. Un carrito de masa M = 500 gramos está unido a una carga de masa m = 200 gramos mediante una cuerda. En el momento inicial el carrito tenia la velocidad inicial v_0 = 7 m/s y se movía a la derecha por un plano horizontal. Determinar para t = 5 s:

a) el valor y sentido de la velocidad del carrito,
b) el lugar, donde encontrará
c) el desplazamiento del carrito
d) el recorrido total del carrito.
(Usar g = 9,8 m/s^2)



Solución.



Para la masa M:

$-T = Ma$ (1)

Para la masa m:

$T - mg = ma$ (2)

Sumando (1) y (2)

$-mg = (M + m)a \Rightarrow$

$a = -\dfrac{m}{(M + m)} g = -\dfrac{0,2}{0,7}(9,8)$ = - 2,8 m/s^2

La aceleración es en sentido contrario al indicado en la figura.
a) La velocidad inicial del carrito es v_0 = 7 m/s y su aceleración es a = - 2,8m/s^2.
De las ecuaciones de cinemática

$x = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2$, $v = v_0 + at$,

Hallamos:

$x = 7t - 1,4t^2$, $v = 7 - 2,8t$

Dentro de 5 s el carrito tendrá una velocidad v = - 7 m/s (dirigida a la izquierda).

b) $x = 7(5) - 1,4(5)^2 = 35 - 35 = 0$

El carrito se encontrará en la posición inicial.
c) El desplazamiento es cero.

d) El carrito se detiene cuando v = 0 e inicia el camino de vuelta.

$$0 = 7 - 2{,}8t \;\Rightarrow\; t = \frac{7}{2{,}8} = 2{,}5 \text{ s}$$

Recorrido total $s = 2\left[7(2{,}5) - 1{,}4(2{,}5)^2\right]$
$= 17{,}5$ m

Recorrerá un trayecto igual a 17,5 m.

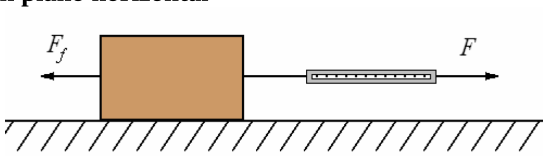
FRICCIÓN

Cuando un cuerpo sobre una superficie se empuja o se jala éste puede permanecer inmóvil, esto sucede porque la fuerza aplicada no ha sido suficiente para vencer la fuerza de fricción. Cuando logramos que el cuerpo deslice sobre la superficie es necesario aplicar una fuerza para que éste continúe en movimiento.

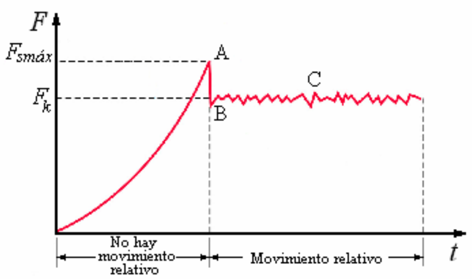
Comportamiento de un cuerpo que descansa sobre un plano horizontal

Supongamos que jalamos un bloque con un dinamómetro, como se muestra en la figura.

Comportamiento de un cuerpo que descansa sobre un plano horizontal



Dibujemos una gráfica de la fuerza F aplicada sobre el bloque versus el tiempo t.



1. Desde el origen hasta el punto A la fuerza F aplicada sobre el bloque no es suficientemente grande como para moverlo. Estamos en una situación de equilibrio estático

$$F = F_{fs} = \mu_s N$$

En el punto A, la fuerza de rozamiento F_{fs} alcanza su máximo valor $\mu_{smáx} N$

$$F = F_{fsmáx} = \mu_{smáx} N$$

2. Si la fuerza F aplicada se incrementa un poquito más, el bloque comienza a moverse. La fuerza de rozamiento disminuye rápidamente a un valor menor e igual a la fuerza de rozamiento dinámico,

$$F = F_{fk} = \mu_k N$$

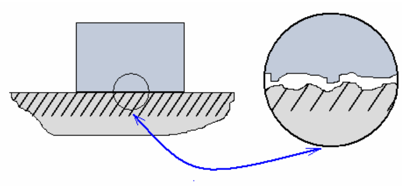
Si la fuerza F no cambia, punto B, y permanece igual a $F_{fsmáx}$, el bloque comienza moviéndose con una aceleración

$$a = \frac{(F - F_{fk})}{m}$$

Si incrementamos la fuerza F, punto C, la fuerza neta sobre el bloque $F - F_{fk}$ se incrementa y también se incrementa la aceleración.

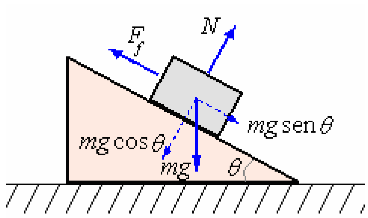
Observación. Encontramos que con fuerzas menores que 10 N no se produce movimiento.
Con 10 N el bloque comienza a moverse.
Para fuerzas mayores a 10 N el bloque se acelera.
Si medimos la aceleración podemos conocer la fuerza resultante sobre el bloque aplicando la segunda ley de Newton, $F = ma$.
Cuando el dinamómetro indica 12 N la fuerza resultante a partir de la aceleración medida es 4 N, esto significa que se necesita 12 N – 4 N = 8 N, para vencer la fuerza de fricción Si aplicamos 10 N al bloque para que inicie el movimiento, después de esto es posible reducir la fuerza a 8 N y aún mantener el bloque en movimiento.
En resumen:
Una fuerza de 10 N inicia el movimiento del bloque.
Una fuerza de 8 N mantiene el movimiento del bloque.

El origen de este fenómeno se debe a la existencia de fuerzas entre las moléculas del cuerpo y la superficie; si la superficie de contacto del cuerpo con la superficie fuera perfectamente plana, la fuerza de atracción podría ser considerable, como es el caso de dos placas de vidrio perfectamente limpias que una vez puestas en contacto, difícilmente pueden ser separadas.
Las superficies nunca son perfectamente lisas y las imperfecciones constituyen verdaderos obstáculos al desplazamiento como se muestra en la figura. Es preciso vencer estos obstáculos para iniciar el movimiento y también para mantenerlo.



A esta fuerza se le conoce como FUERZA DE FRICCION O ROZAMIENTO (F_f).

Con la finalidad de conocer la dependencia de esta fuerza de rozamiento realicemos la siguiente experiencia.
Supongamos un plano inclinado con un bloque de masa ni descansando sobre él.



Encontramos que el bloque empieza a resbalar para un determinado ángulo θ. Si colocamos dos bloques juntos, el ángulo con el cual inician el movimiento sigue siendo θ, lo mismo ocurre con tres bloques. La fuerza que jala al cuerpo es la componente del peso $mg\text{sen}\theta$, paralela al plano. La otra componente es perpendicular al plano $mg\cos\theta$. Esta es la fuerza que sostiene al bloque sobre la superficie (Fuerza Normal). Si duplicarnos el peso *mg* a 2*mg*, duplicamos la fuerza que jale al bloque y la fuerza normal tal que:

$$\frac{\text{Fuerza que inicia el movimiento}}{\text{Fuerza normal}} = \text{Constante}$$

O

$$\frac{mg\ \text{sen}\theta}{mg\cos\theta} = \tan\theta = \mu_s = \text{Constante}$$

$$\frac{F_f}{N} = \mu_s$$

A esta constante μ_s se le llama coeficiente de fricción estática.
Si se toman los datos con el bloque en movimiento, el ángulo para que el movimiento continúe es generalmente menor y obtenemos

$$\frac{\text{Fuerza para continuar el movimiento}}{\text{Fuerza normal}} = \mu_k$$

A esta constante se le llama coeficiente de fricción cinética μ_k.

μ es una constante que depende de la superficie y se puede escribir simplemente.

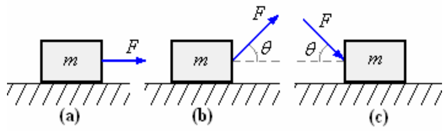
$F_f = \mu N$.

Algunos valores típicos de coeficientes de fricción.

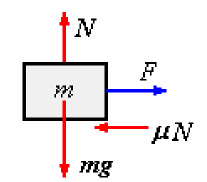
Material	Sobre material	μ_s	μ_k
Acero	Acero	0,78	0,42
Cuero	Cuero	0,64	0,56
Cuero	Roble	0,60	0,50
Bronce	Hierro	0,40	0,30
Aluminio	Aluminio	1,05	1,40
Vidrio	Vidrio	0,92	0,40
Caucho	Asfalto	0,60	0,40
Caucho	Concreto	0,80	0,70
Caucho	Hielo	0,02	0,005
Piedra	Piedra	0,65	0,60

El hecho que la fuerza de fricción es independiente del área de contacto parece absurdo ya que las fuerzas intermoleculares son tanto mayores, cuanto mayor es la superficie de contacto. En realidad se debía esperar que F_f fuera proporcional a la superficie, lo que suceder es que si el cuerpo pesa muy poco, prácticamente no hay puntos de contacto entre las dos superficies (el área de contacto es despreciable). Cuando *N* aumenta, la superficie aumenta y F_f también, por lo tanto $F_f = \mu N$ donde se está incluyendo ya el aumento de superficie. Es decir, la fuerza de fricción F_f es proporcional a la fuerza normal *N* porque la verdadera superficie de contacto es proporcional a la fuerza normal.

Ejemplo 15. ¿Cuál es la fuerza mínima *F* necesaria para mover la masa m, siendo μ el coeficiente de rozamiento estático entre el piso y el bloque en cada uno de los casos siguientes?



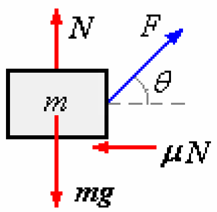
Solución.
a) La figura muestra el D.C.L.



$$\sum F_y : \ N - mg = 0 \ \Rightarrow \ N = mg$$
$$\sum F_x : \ F - \mu N = 0 \ \Rightarrow \ F = \mu N$$

Luego:
$F = \mu mg$

b) La figura muestra el D.C.L.

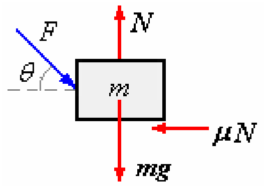


$$\sum F_y : \ N + F\text{sen}\theta - mg = 0$$
$$\Rightarrow \ N = mg - F\text{sen}\theta$$
$$\sum F_x : \ F\cos\theta - \mu N = 0$$
$$\Rightarrow \ F\cos\theta = \mu N$$

De estas dos ecuaciones obtenemos:

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\theta + \mu \text{sen}\theta}$$

c) La figura muestra el D.C.L.



$$\sum F_y : \; N - F\text{sen}\theta - mg = 0$$

$$\Rightarrow \; N = mg + F\text{sen}\theta$$

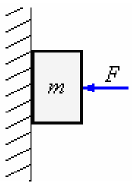
$$\sum F_x : \; F\cos\theta - \mu N = 0$$

$$\Rightarrow \; F\cos\theta = \mu N$$

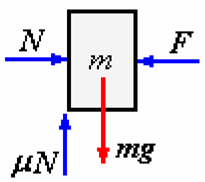
De estas dos ecuaciones obtenemos:

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\theta - \mu \text{sen}\theta}$$

Ejemplo 16. ¿Cuál es el valor mínimo de F para sostener el bloque de masa m sobre una pared vertical, como se muestra en la figura, μ es el coeficiente de fricción estático entre la pared y el bloque?



Solución.
La figura siguiente muestra el D.C.L.



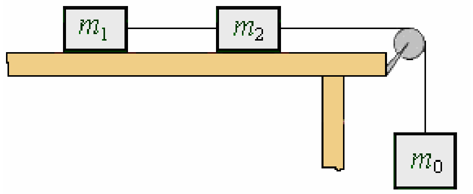
$$\sum F_y : \; N - F = 0 \;\Rightarrow\; N = F$$

$$\sum F_x : \; \mu N - mg = 0 \;\Rightarrow\; N = \frac{mg}{\mu}$$

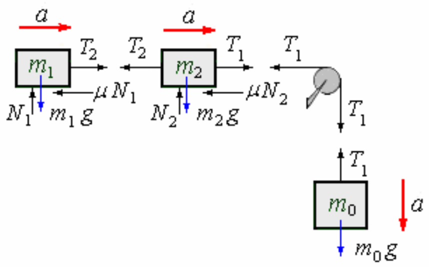
Por consiguiente

$$F = \frac{mg}{\mu}$$

Ejemplo 17. En el esquema de la figura las masas de la polea y del cable son despreciables y no hay rozamiento entre el cable y la polea. Hallar la aceleración del bloque m_0 y la tensión del cable que une los bloques m_1 y m_2. El coeficiente de rozamiento entre los bloques y el plano inclinado es μ .



Solución.



Para m_0: $\left\{ m_0 g - T_1 = m_0 a \right.$

Para m_2: $\begin{cases} T_1 - T_2 - \mu N_2 = m_2 a \\ N_2 - m_2 g = 0 \end{cases}$

Para m_1: $\begin{cases} T_2 - \mu N_1 = m_1 a \\ N_1 - m_1 g = 0 \end{cases}$

De estas ecuaciones obtenemos:

$N_2 = m_2 g$, $N_1 = m_1 g$

y $m_0 g - \mu(m_1 + m_2)g = (m_0 + m_1 + m_2)a$

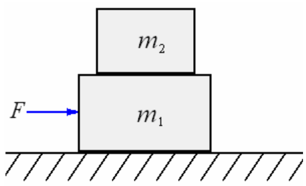
De aquí:

$$a = \frac{[m_0 - \mu(m_1 + m_2)]}{(m_0 + m_1 + m_2)} g$$

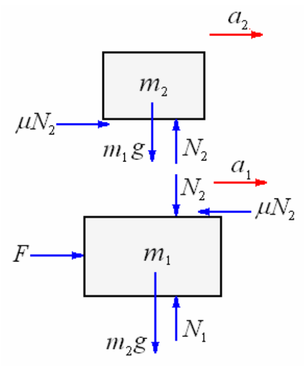
La tensión del cable que une los bloques m_1 y m_2:

$$T_2 = m_1(a + \mu g) = \frac{m_1 m_0}{(m_0 + m_1 + m_2)}(1 + \mu)g$$

Ejemplo 18. Se tiene una masa m_2 sobre una masa m_1 sobre un piso horizontal, tal como muestra la figura. Se aplica una fuerza horizontal F sobre la masa m_1. La masa carece de fricción. ¿Cuál es el valor máximo de F para que la masa m_1 no resbale sobre m_2. ¿Cuál es la aceleración resultante de los bloques?



Solución.
La figura muestra el D.C.L. de las masas m_1 y m_2.



Aplicando la Segunda Ley de Newton a la masa m_2, la que suponemos se mueve con aceleración a_2.

$$\sum F_y : \ N_2 - m_2 g = 0$$

$$\sum F_x : \ \mu N_2 = m_2 a_2$$

Aplicando la Segunda Ley de Newton a la masa m_1, la que suponemos se mueve con aceleración a_1.

$$\sum F_y : \ N_1 - N_2 - m_1 g = 0$$

$$\sum F_x : \ F - \mu N_2 = m_1 a_1$$

Trabajando con estas ecuaciones encontramos que

$$F = m_1 a_1 + m_2 a_2$$

La aceleración de la masa m_2 es:

$$a_2 = \frac{\mu N_2}{m_2} = \frac{\mu m_2 g}{m_2} = \mu g$$

Como el valor de μ varía desde 0 hasta el valor máximo $\mu_{máx}$:

$a_2 = \mu_{máx} g$ o simplemente $a_2 = \mu g$.

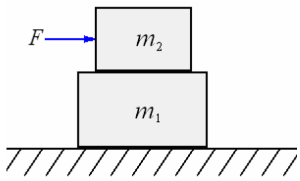
Pero como queremos encontrar el valor máximo posible de *F* para que las masas vayan juntas, es decir, para que m_1 no se quede, se tiene como condición que;

$$a_1 = a_2 = \mu g$$

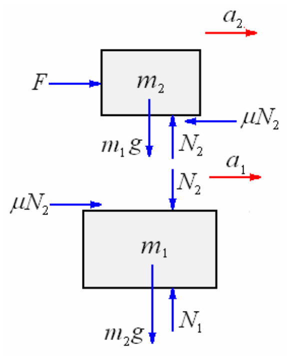
Luego: $F_{máx} = (m_1 + m_2)\mu_{máx} g$

Si aplicamos una fuerza mayor el bloque m_1 avanzará dejando atrás al bloque m_2.

Ejemplo 19. Usando el dispositivo del ejemplo anterior discuta el caso en ci que la fuerza *F* se aplica a la masa m_2.



Solución.
La figura muestra el D.C.L. para este caso



Las ecuaciones para la masa m_2 son

$$\sum F_y : \ N_2 - m_2 g = 0$$

$$\sum F_x : \ F - \mu N_2 = m_2 a_2$$

Las ecuaciones para la masa m_1 son.

$$\sum F_y : \ N_1 - N_2 - m_1 g = 0$$

$$\sum F_x : \ \mu N_2 = m_1 a_1$$

Trabajando con estas ecuaciones encontramos que

$$F = m_1 a_1 + m_2 a_2$$

La aceleración de la masa m_1 es:

$$a_1 = \frac{\mu N_2}{m_1} = \frac{\mu m_2 g}{m_1} = \mu g \frac{m_2}{m_1}$$

Como el valor de μ varía desde 0 hasta el valor máximo $\mu_{máx}$:

$$a_1 = \mu_{máx} g \frac{m_2}{m_1}$$

Como la condición de que las masas m_1 y m_2 vayan juntas es,

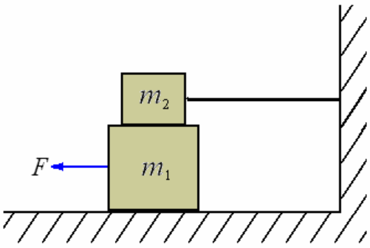
$$a_1 = a_2$$

Luego el valor máximo de *F* pera que m_1 y m_2 vayan juntas es,

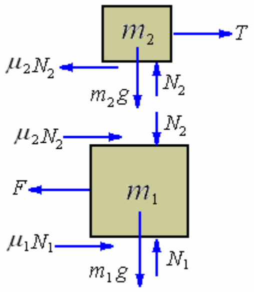
$$F_{máx} = \frac{(m_1 + m_2) m_2}{m_1} \mu_{máx} g$$

Ejemplo 20. En el dispositivo de la figura encontramos el valor mínimo de *F* para sacar la masa m_1.

El coeficiente de fricción entre m_1 y la mesa es μ_1 y el coeficiente de fricción entre m_1 y m_2 es μ_2.



Solución.
La figura muestra los D.C.L. de las masas m_1 y m_2



Considerando que el equilibrio es la condición mínima de inicio de movimiento
Aplicando la Segunda ley de Newton para la masa m_2.

$$\sum F_y : \; N_2 - m_2 g = 0$$

$$\sum F_x : \; \mu_2 N_2 - T = 0$$

Aplicando la Segunda Ley de Newton para la masa m_1

$$\sum F_y : \; N_2 - N_1 + m_1 g = 0$$

$$\sum F_x : \; F - \mu_1 N_1 - \mu_2 N_2 = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones

$$N_2 = m_2 g$$

$$T = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g$$

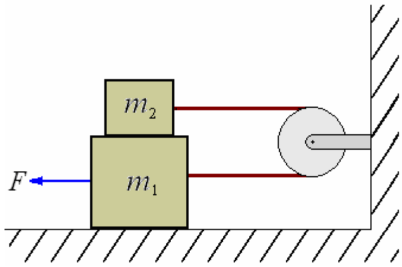
$$N_1 = N_2 + m_1 g = (m_1 + m_2) g$$

$$F = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2$$

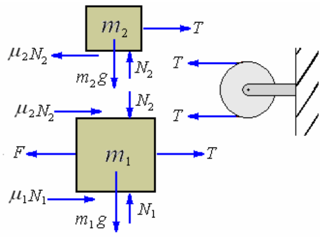
$$= \mu_1 (m_1 + m_2) g + \mu_2 m_2 g$$

Siendo este valor de F el mínimo para iniciar el movimiento de la masa m_1.

Ejemplo 21. En el dispositivo de la figura, encontrar el valor mínimo de F para sacar la masa m_1. El coeficiente de fricción entre m_1 y la mesa es μ_1, el coeficiente de fricción entre m_1 y m_2 es μ_2.



Solución.
La figura muestra el D.C.L.de las masas m_1 y m_2



Considerando que el equilibrio es la condición mínima de inicio del movimiento.
Aplicando la segunda ley de Newton a la masa m_2:

$$\sum F_y : \; N_2 - m_2 g = 0$$

$$\sum F_x : \; \mu_2 N_2 - T = 0$$

Aplicando la segunda ley de Newton para la masa m_1:

$$\sum F_y : \; N_2 - N_1 + m_1 g = 0$$

$$\sum F_x : \; F - \mu_1 N_1 - \mu_2 N_2 - T = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones

$$N_2 = m_2 g$$

$$T = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g$$

$$N_1 = N_2 + m_1 g = (m_1 + m_2) g$$

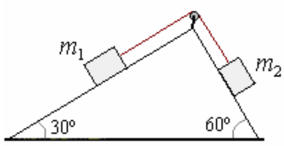
$$F = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 + T$$

$$= \mu_1 (m_1 + m_2) g + \mu_2 m_2 g$$

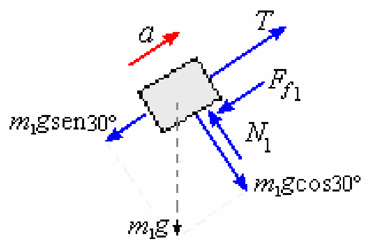
$$= [\mu_1 m_1 + m_2 (\mu_1 + \mu_2)] g$$

Siendo este valor de F el mínimo para iniciar el movimiento.

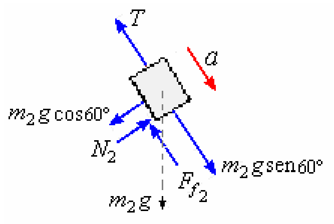
Ejemplo 22. Los bloques m_1 y m_2 de 20 y 60 kg, respectivamente, están unidos por una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea sin rozamiento. El coeficiente de rozamiento cinético entre las masas y la superficie es 0,3. Determinar la velocidad del sistema 4 segundos después de partir del reposo.



Solución.
La figura muestra el D.C.L. de la masa m_1.
Consideremos que el movimiento es de izquierda a derecha con aceleración a

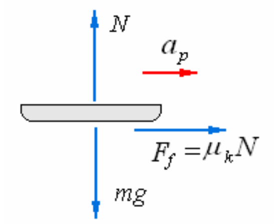


$$\sum F_y : \; N_1 - m_1 g\cos 30° = 0$$
$$\sum F_x : \; T - F_{f1} - m_1 g\text{sen}30° = m_1 a$$
De estas ecuaciones
$$N_1 = m_1 g\cos 30° = 20\times 10\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 173\text{ N}$$
$$F_{f1} = \mu N_1 = 0{,}3\times 173 = 51{,}9\text{ N}$$
y $T - 51{,}9 - 20\times 10\times\dfrac{1}{2} = 20a$
$$\Rightarrow T = 151{,}9 + 20a$$
La figura muestra D.C.L. de la masa m_2.

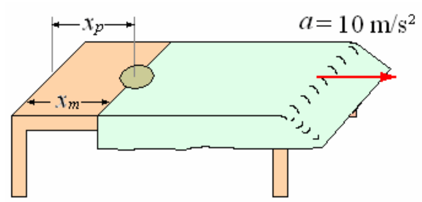


$$\sum F_y : \; N_2 - m_2 g\cos 60° = 0$$
$$\sum F_x : \; m_2 g\text{sen}60° - F_{f2} - T = m_2 a$$
De estas ecuaciones
$$N_2 = m_2 g\cos 60° = 20\times 10\times\frac{1}{2} = 150\text{ N}$$
$$F_{f2} = \mu N_2 = 0{,}3\times 150 = 45\text{ N}$$
y $30\times 10\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 45 - T = 30a$
$$\Rightarrow T = 214{,}5 - 30a$$
Igualando los valores de *T*:
$$151{,}9 + 20a = 214{,}5 - 30a \;\Rightarrow\; a = 1{,}25\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$
Como $v = v_0 + at$,
Siendo $v_0 = 0 \Rightarrow v = 1{,}25t^2$
Para $t = 4\text{ s} \Rightarrow\; v = 1{,}25\times 4 = 5\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

Ejemplo 23. En una mesa un plato descansa sobre el mantel, cuyo centro está a 0,25m del borde de la mesa. El mantel se jala súbitamente en forma horizontal con una aceleración constante de 10 m/s^2. El coeficiente de fricción cinético entre el mantel y el plato es $\mu_k = 0{,}75$. Asumiendo que el mantel llega justo al borde de la mesa.
Cuando el extremo del mantel pasa bajo el centro del plato, encontrar:
a) La aceleración del plato
b) La velocidad de! plato
c) La distancia del plato al borde de la mesa.
Solución.
a) Aplicando la segunda ley de Newton para el plato, la masa del plato es m y su aceleración a_p.



$$\sum F_V = 0 \;\Rightarrow\; mg - N = 0$$
$$\sum F_H = ma_p \;\Rightarrow\; F_f = ma_p$$
De aquí obtenemos:
$N = mg$ y $\mu_k mg = ma_p$
De donde:
$a_p = \mu_k g$ = 0,75 x 9,8 = 7,35 m/s^2
El plato resbala ya que a_p es menor que 10 m/s^2
b) En el instante en que el extremo del mantel coincide con el centro del plato están a la misma distancia del borde de la mesa



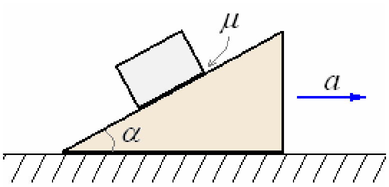
$$x_p = x_m$$
$$x_p = 0{,}25 + \frac{1}{2}a_p t^2 = 0{,}25 + \frac{1}{2}7{,}35t^2$$
$$x_m = \frac{1}{2}a_m t^2 = \frac{1}{2}10t^2$$
Igualando
$$0{,}25 + \frac{1}{2}7{,}35t^2 = \frac{1}{2}10t^2$$
Resolviendo:
$t = 0{,}58\text{ s}$ y

$v_p = v_0 + a_p t = 0 + 7{,}35 \times 0{,}58$
$= 4{,}26$ m/s.

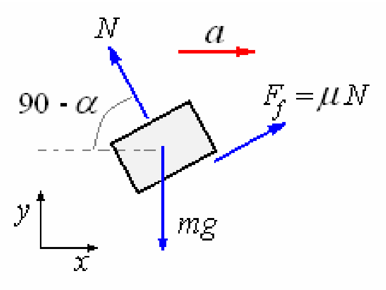
c) $x_p = 0{,}25 + \frac{1}{2} a_p t^2$

$= 0{,}25 + \frac{1}{2} 7{,}35 \times 0{,}58^2 = 1{,}49$ m

Ejemplo 24. El plano inclinado mostrado en la figura tiene una aceleración a hacia la derecha. Si el coeficiente de fricción estático entre el plano y el bloque es μ, encontrar la condición para que el bloque resbale.



Solución.
Consideremos que el bloque tiene masa m, la figura a continuación muestra su DCL.



Para que el bloque no resbale debe tener la misma aceleración a.
Aplicando la segunda ley de Newton

$\sum F_V = 0 \Rightarrow N\cos\alpha + \mu N \operatorname{sen}\alpha - mg = 0$

y $\sum F_H = ma \Rightarrow -N\operatorname{sen}\alpha + \mu N\cos\alpha = ma$

De estas ecuaciones

$N = \dfrac{mg}{\cos\alpha + \mu\operatorname{sen}\alpha}$ y

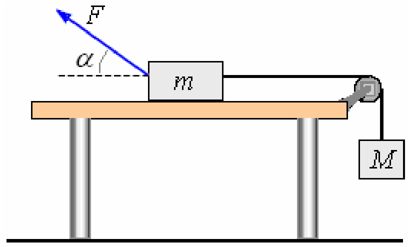
$\dfrac{mg}{((\cos\alpha + \mu\operatorname{sen}\alpha))}(-\operatorname{sen}\alpha + \mu\cos\alpha) = ma$

Finalmente

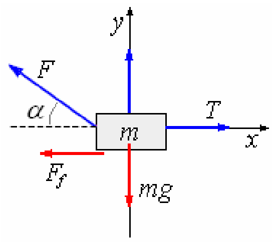
$a = \dfrac{(\mu\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)}{(\cos\alpha + \mu\operatorname{sen}\alpha)} g$

Este es el va1or crítico de a para que no resbale; el bloque resbalará para valores menores que el indicado.

Ejemplo 25. En el siguiente sistema mecánico, se aplica una fuerza F inclinada un ángulo α sobre el cuerpo de masa m, ubicado sobre la superficie horizontal con coeficiente de fricción μ. La polea por donde cuelga otro bloque de masa M no tiene roce y la cuerda se considera inextensible y de masa despreciable. Calcular la aceleración y la tensión de la cuerda.



Solución.
Se hacen los DCL y se aplica la segunda ley de Newton, suponiendo que el cuerpo de masa M desciende y tira a m hacia la derecha, lo que define el sentido de la aceleración.
Para m



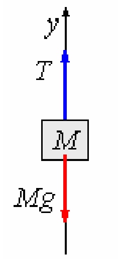
$\sum F_V = 0 \Rightarrow N + F\operatorname{sen}\alpha - mg = 0$

$\Rightarrow N = mg - F\operatorname{sen}\alpha$ (1)

y $\sum F_H = ma$

$\Rightarrow T - F\cos\alpha - F_f = ma$ (2)

Para M



$\sum F_V = -Ma$

$\Rightarrow T - Mg = -Ma$ (3)

Además: $F_f = \mu N$

De la ecuación (1):

$F_f = \mu(mg - F\operatorname{sen}\alpha)$ (4)

De (3) se despeja T:

$T = Mg - Ma$ (5)

Ahora 4) y (5) se reemplazan en (2), lo que permite despejar la aceleración

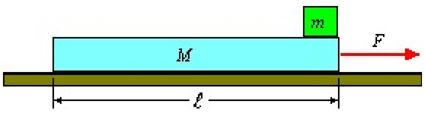
$$Mg - Ma - F\cos\alpha - \mu(mg - F\text{sen}\alpha) = ma$$

$$a = \frac{(M - \mu m)g - F(\cos\alpha - \mu\text{sen}\alpha)}{M + m}$$

y la tensión T

$$T = Mg - M\frac{(M - \mu m)g - F(\cos\alpha - \mu\text{sen}\alpha)}{M + m}$$

Ejemplo 26. Una viga de masa M está situada en un plano horizontal. Sobre la viga se encuentra un cuerpo do masa m. El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la viga, así como entre la viga y el plano es μ_k . Analizar el movimiento para diferentes valores do la fuerza F.



Solución.

Si $F \le \mu_k(m + M)g$, no hay movimiento.

Supongamos que $F > \mu_k(m + M)g$. Analicemos el caso de ausencia de deslizamiento del cuerpo por la viga. Las ecuaciones del movimiento, en este caso, tendrían la siguiente forma:

$$F_{fm} = ma ,$$

$$Ma = F - F_{fm} - F_{fM} = F - F_{fm} - \mu_k(m + M)g ;$$

$$F_{fm} \le \mu_k mg$$

de donde

$$a = \frac{F}{(m + M)} - \mu_k g ,$$

$$F_{fm} = \frac{mF}{(m + M)} - \mu_k mg \le \mu_k mg$$

que es posible, si

$k\ (m + M)\ g < F < 2k\ (m + M)\ g.$

Si $F > 2\mu_k(m + M)g$, entonces el cuerpo deslizará por la barra. En este caso las ecuaciones del movimiento tendrán la siguiente forma:

$$ma_m = \mu_k mg ,$$

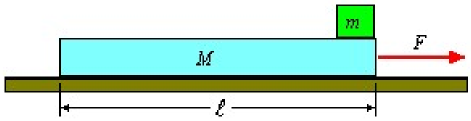
$$Ma_M = F - \mu_k mg - \mu_k(M + m)g$$

de donde

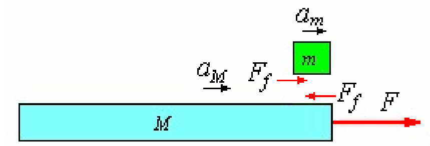
$$a_m = \mu_k g , \ a_M = \frac{F}{M} - \mu_k\frac{(2m + M)}{M}g$$

Que es fácilmente verificar en el caso de $a_M > a_m$

Ejemplo 27. Una viga do masa M está sobre un plano horizontal liso, por el cual puede moverse sin fricción. Sobre la viga hay un cuerpo do masa m. El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la viga es μ_k . ¿Con qué valor de la fuerza F que actúa sobre la viga en dirección horizontal, el cuerpo comienza a deslizarse sobre la viga? ¿Dentro do cuánto tiempo el cuerpo caerá de la viga? La longitud do la viga es ℓ .



Solución.



Las ecuaciones del movimiento de la viga y del cuerpo tienen la siguiente forma:

$$F_{fm} = ma_m , \qquad (1)$$

$$F - \mu_k mg = Ma_M \qquad (2)$$

Donde F_{fm} es la fuerza do rozamiento, a_m y a_M son las aceleraciones.

Supongamos que no hay deslizamiento, entonces $a_m = a_M$

De las ecuaciones del movimiento podemos determinar la aceleración y la fuerza de rozamiento.

La fuerza de rozamiento es $F_{fm} = \dfrac{mF}{(m + M)}$

Para que no haya deslizamiento la fuerza de rozamiento debe satisfacer la siguiente desigualdad:

$F_{fm} \le \mu_k mg$, es decir, $\dfrac{F}{(m + M)} \le \mu_k g$.

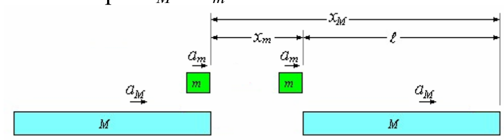
Si $F > \mu_k\ (M + m)\ g$, entonces surge el deslizamiento. Las ecuaciones (1) y (2) en este caso deben escribirse en la siguiente forma:

$$ma_m = \mu_k mg , \quad Ma_M = F - \mu_k mg$$

De estas ecuaciones obtenemos a_m y a_M:

$$a_m = \mu_k g , \quad a_M = \frac{(F - \mu_k mg)}{M} .$$

Es evidente que $a_M > a_m$.



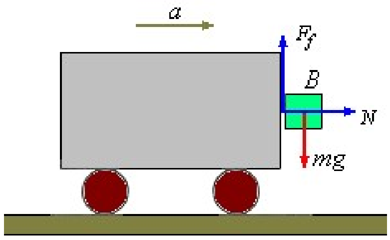
$$x_m = \frac{1}{2}a_m t^2 , \ x_M = \frac{1}{2}a_M t^2$$

$$x_M - x_m = \ell = \frac{1}{2}a_M t^2 - \frac{1}{2}a_m t^2$$

$$\Rightarrow \ t = \sqrt{\frac{2\ell}{a_M - a_m}} = \sqrt{\frac{2\ell}{\frac{(F - \mu_k mg)}{M} - \mu_k g}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\ell M}{F - \mu_k g(M + m)}}$$

Ejemplo 28. En la figura, encontrar la aceleración del carro requerida para evitar que caiga el bloque *B*. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el carro es μ_k .



Solución.

Si el bloque no cae, la fuerza de fricción, F_f, debe balancear el peso del bloque:

$F_f = mg$.

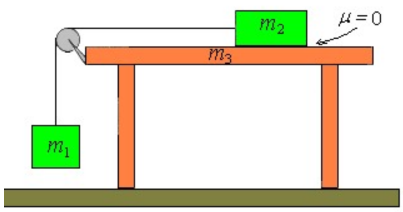
Pero el movimiento horizontal del bloque está dado por y $N = ma$.

Luego,

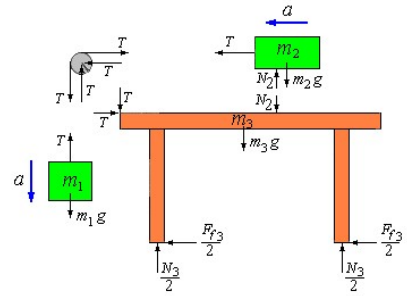
$$\frac{F_f}{N} = \frac{g}{a} \Rightarrow a = \frac{g}{F_f/N}$$

Como el valor máximo de $\frac{F_f}{N}$ es μ_s , debemos tener $a \geq \frac{g}{\mu_s}$ si el bloque no cae.

Ejemplo 29. Dos cuerpos, de las masas m_1 y m_2, se liberan de la posición mostrada en la figura. Si la masa de la mesa de superficie lisa (sin fricción) es m_3, encuentre la reacción del piso sobre la mesa mientras los dos cuerpos están en movimiento. Asuma que la mesa permanence inmóvil.



Solución. La figura muestra los diagramas de cuerpo libre de cada uno de los elementos.



Cuerpo 1: $\sum F_{verticales} = m_1 g - T = m_1 a$

Cuerpo 2: $\sum F_{horizontales} = T = m_2 a$

Mesa: $\begin{cases} \sum F_{verticales} = N_3 - N_2 - T - m_3 g = 0 \\ \sum F_{horizontales} = T - F_{f3} = 0 \end{cases}$

Donde N_3 y F_{f3} (fricción) las componentes verticales y horizontales de la fuerza ejercida por el piso sobre la mesa.

(Asumimos que las patas de la izquierda y de la derecha comparten la carga igualmente. Esto no afecta nuestro análisis)

De las primeras dos ecuaciones,

$$a = \frac{m_1 g}{(m_1 + m_2)}$$

Luego, $F_{f3} = T = m_2 a = \frac{m_1 m_2 g}{(m_1 + m_2)}$

Finalmente,

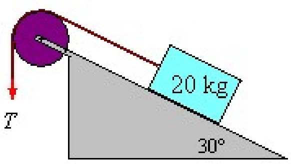
$$N_3 = T + m_2 g + m_3 g$$

$$= \left[\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} + m_2 + m_3 \right]$$

Ejemplo 30. Se tiene un bloque de 20 kg sobre un plano inclinado que está sujeto a una cuerda (ver figura). Las superficies de contacto entre el bloque y el plano inclinado son rugosas con coeficiente de fricción cinética $\mu_k = 0{,}5$ y el de fricción estática $\mu_s = 0{,}7$.

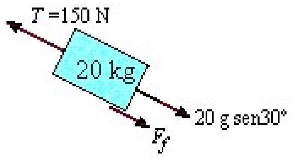
a) Si la tensión de la cuerda es de 150 N, determine la magnitud y sentido de la fuerza de rozamiento.

b) Si por un accidente se corta la cuerda, determine la aceleración del bloque.



Solución.

a)

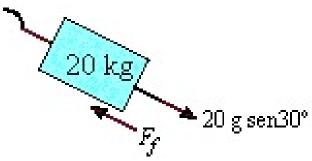


$$T - mg\text{sen}30^\circ - F_f = 0 \Rightarrow$$

$$F_f = T - mg\text{se}30^\circ = 150 - 100 = 50 \text{ N}$$

en el sentido indicado en la figura (hacia abajo).

b)



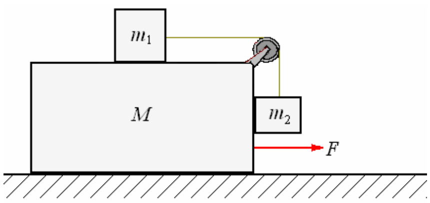
Cuando se rompe la cuerda para iniciar el movimiento debe vencerse a la máxima fuerza de fricción estática:

$$F_{fs} = \mu_s mg\cos 30^\circ = 0{,}7\left(20g\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 173 \text{ N}$$

Como 20g sen 30º = 100 N

100 N < 173 N, el movimiento no se inicia , por lo tanto la aceleración del bloque es cero.

Ejemplo 31. Determinar la fuerza F aplicada al bloque de masa M de la figura adjunta, para que los bloques de masas m_1 y m_2 apoyados en M, no se muevan respecto de M. Todas las superficies son lisas, la polea y el cable tienen masa despreciable.



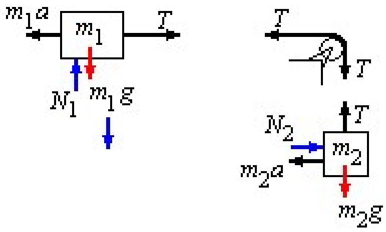
Solución.

Consideremos un sistema de referencia fijo en el suelo con el eje x paralelo a la fuerza aplicada $\vec{F}$.

De la primera ley de Newton aplicada al conjunto se tiene:

$$\vec{F} = (M + m_1 + m_2)\vec{a} \qquad (1)$$

Siendo $\vec{a}$ la aceleración del conjunto. Las masas m_1 y m_2 están en reposo sobre el bloque M, luego en la referencia O su aceleración es del conjunto. La fuerza que ejerce el cable sobre m_1 y la que ejerce sobre m_2 tiene el mismo módulo T.



La segunda ley de Newton para m_1 es

$$T - m_1 a = 0\,,\quad N_1 - m_1 g = 0$$

De aquí $\Rightarrow T = m_1 a$ (2)

La segunda ley de Newton para m_2 es

$$N_2 - m_2 a = 0\,,\quad T - m_2 g = 0$$

De aquí $\Rightarrow T = m_2 g$ (3)

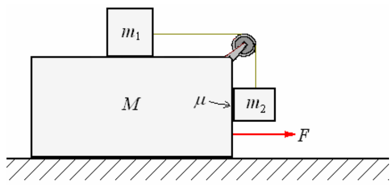
De (2) y (3) se tiene

$$\Rightarrow a = \frac{m_2}{m_1} g \qquad (4)$$

Sustituyendo (4) en (1) se obtiene la fuerza aplicada a M

$$F = \frac{m_2}{m_1}(M + m_1 + m_2)g$$

Ejemplo 32. Determinar la aceleración mínima con que debe desplazarse el bloque de masa M en sentido horizontal para que los bloques de masas m_1 y m_2 no se muevan respecto de M, siendo μ el coeficiente de rozamiento entre los bloques. La polea y el cable tienen masa despreciable.



Solución.

Consideremos un sistema de referencia fijo en el suelo con el eje x paralelo a la fuerza aplicada $\vec{F}$.

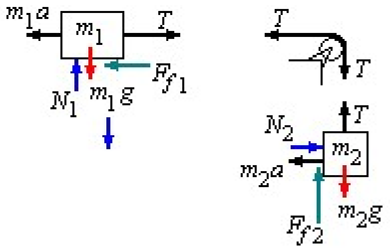
De la segunda ley de Newton aplicada al conjunto se tiene:

$$\vec{F} = (M + m_1 + m_2)\vec{a} \qquad (1)$$

Siendo $\vec{a}$ la aceleración del conjunto.

Las masas m_1 y m_2 están en reposo sobre el bloque M, luego en la referencia O su aceleración es del conjunto.

La fuerza que ejerce el cable sobre m_1 y la que ejerce sobre m_2 tiene el mismo módulo T.



La segunda ley de Newton para m_1 es

$$T - m_1a - F_{f1} = 0,\ N_1 - m_1g = 0$$

$$F_{f1} = \mu N_1 = \mu m_1 g$$

$$\Rightarrow T = m_1a + \mu m_1 g \qquad (2)$$

La segunda ley de Newton para m_2 es

$$N_2 - m_2a = o,\ T + F_{f2} - m_2g = 0$$

$$F_{f2} = \mu N_2 = \mu m_2 a$$

$$\Rightarrow T = m_2g - \mu m_2 g \qquad (3)$$

De (2) y (3) se tiene $\Rightarrow$

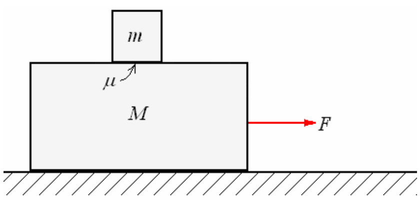
$$m_1a + \mu m_1 g = m_2 g - \mu m_2 g$$

$$a = \frac{(m_2 - \mu m_1)}{(m_1 + \mu m_2)} g \qquad (4)$$

Sustituyendo (4) en (1) se obtiene la fuerza aplicada a M

$$F = \frac{m_2}{m_1}(M + m_1 + m_2)g$$

Ejemplo 33. Un bloque de masa m se encuentra sobre otro bloque de masa M que está apoyado sobre una superficie horizontal lisa. El coeficiente de rozamiento entre los dos bloques es μ. Al bloque M se le aplica una fuerza horizontal dirigida hacia la derecha que depende del tiempo según la ley $F = k\,t$.
Determinar:
a) El instante τ en que m empieza a deslizar sobre M.
b) La aceleración de cada uno de los bloques.



Solución.
Diagrama del cuerpo libre del conjunto

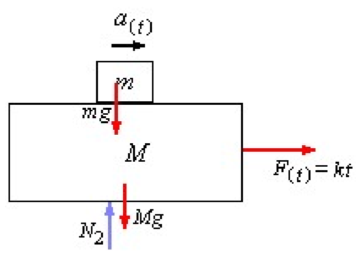
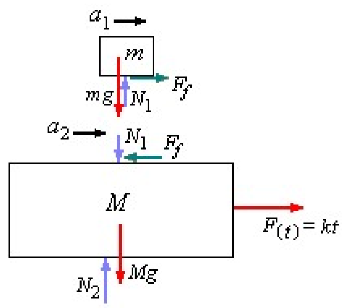


Diagrama del cuerpo libre masas separadas



a) Consideremos un sistema de referencia fijo en el suelo con el eje x paralelo a la fuerza aplicada $\vec{F}$.
Sea τ el instante en que m empieza a deslizar sobre M. Hasta dicho instante $t \leq \tau$, el conjunto se mueve con una aceleración común $\vec{a}$.
La segunda ley de Newton aplicada al conjunto en el instante $t = \tau$ es

$$k\tau = (M + m)a_{(\tau)},\ N_2 - (M + m)g = 0$$

$$\Rightarrow\ a_{(\tau)} = \frac{k}{(M + m)}\tau \qquad (1)$$

La segunda ley de Newton aplicada a la masa m en el instante $t = \tau$ es, (la fuerza de rozamiento sobre m tiene, en ese instante, su valor máximo $F_f = \mu\, m\, g$)

$$F_f = \mu N_1 = ma_{(\tau)},\ N_1 = mg$$

$$\Rightarrow\ a_{(\tau)} = \frac{\mu mg}{m} = \mu g \qquad (2)$$

De (1) y (2) queda $\Rightarrow\ \tau = \dfrac{(M + m)}{k}\mu g$ s

b) De (1) se tiene que la aceleración del conjunto para $t < \tau$ es

$$\Rightarrow\ a_{1(t)} = a_{(t)} = \frac{k}{(M + m)}t$$

Para $t > \tau$. Las fuerzas que actúan sobre m son constantes, luego la aceleración de m es

$$a_1 = a_{(\tau)} = \mu g$$

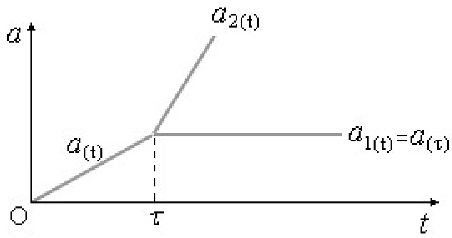
La segunda ley de Newton aplicada a la masa M es

$$kt - F_f = kt - \mu N_1 = Ma_{2(t)},\ \text{como}\ N_1 = mg$$

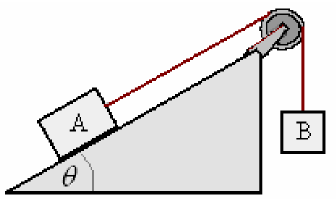
$$\Rightarrow\ kt - \mu mg = Ma_{2(t)}\ \text{y}$$

$$a_{2(t)} = -\mu g\frac{m}{M} + \frac{k}{M}t\ \ \frac{m}{s^2}$$

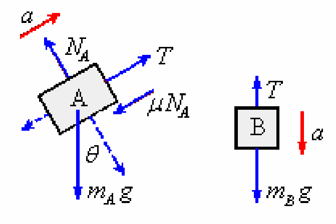
Gráfica de las aceleraciones en función del tiempo



Ejemplo 34. Dos bloques A y B de masas m_A y m_B están unidos mediante un cable que pasa a través de una polea tal como se muestra en la figura adjunta. El coeficiente de rozamiento entre el bloque A y el plano inclinado es μ. Determinar el sentido del movimiento cuando se dejan en libertad a partir del reposo. El cable es inextensible y las masas del cable y la polea despreciables.



Solución.
Supongamos que el bloque A sube sobre el plano inclinado. Sea T la fuerza que ejercen los extremos del cable sobre los bloques dirigida, en ambos bloques, tal como se indica.



El movimiento de B es hacia abajo, luego

$\Rightarrow m_B g > T$

El movimiento de A es hacia arriba, luego

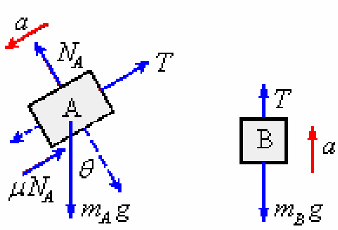
$\Rightarrow T > m_A g\text{sen}\theta + \mu m_A \cos\theta$

El movimiento de los bloques es el indicado si

$\Rightarrow m_B g > m_A g\text{sen}\theta + \mu m_A \cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{m_B}{m_A} > \text{sen}\theta + \mu\cos\theta$$

Supongamos que el bloque A desciende sobre el plano inclinado.



El movimiento de B es hacia arriba, luego

$\Rightarrow m_B g < T$

El movimiento de A es hacia abajo, luego

$\Rightarrow T + \mu m_A \cos\theta < m_A g\text{sen}\theta$

El movimiento de los bloques es el indicado si

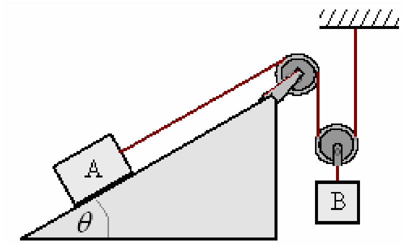
$\Rightarrow m_B g < m_A g\text{sen}\theta - \mu m_A \cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{m_B}{m_A} < \text{sen}\theta - \mu\cos\theta$$

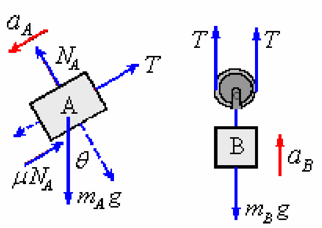
Los bloques no se mueven si

$$\Rightarrow \text{sen}\theta - \mu\cos\theta < \frac{m_B}{m_A} < \text{sen}\theta + \mu\cos\theta$$

Ejemplo 35. Dos bloques A y B de masas m_A = 10 kg y m_B = 7 kg, están unidos mediante un cable que pasa a través de las poleas tal como se muestra en la figura adjunta. El coeficiente de rozamiento entre el bloque A y el plano inclinado es μ = 0,10 y θ = 30º. El cable es inextensible y las masas del cable y las poleas son despreciables. Determinar:
a) Las aceleraciones de los bloques;
b) La tensión del cable.



Solución.



Supongamos que el movimiento de A es hacia abajo, luego:

$T + \mu m_A g\cos\theta < m_A g\text{sen}\theta$

$\Rightarrow T < m_A g\text{sen}\theta - \mu m_A g\cos\theta$

El movimiento de B es hacia arriba, luego:

$m_B g < 2T$

De ambas expresiones queda

$$\frac{1}{2}m_B g < m_A g\text{sen}\theta - \mu m_A g\cos\theta$$

$$\frac{1}{2}(7) < (10)\text{sen}30º - 0{,}10(10)\cos 30º$$

Con los valores $\Rightarrow$ 3,5 < 4,13

Desigualdad que se cumple, luego el movimiento es el previsto.

a) Consideremos un sistema de referencia con el eje *x* horizontal. Las posiciones de los bloques están relacionadas por la condición de ligadura

$s_A + 2y_B = \text{constante}$,

Luego sus aceleraciones cumplen

$$a_A + 2a_B = 0 \Rightarrow a_B = -\frac{1}{2}a_A = a \qquad (1)$$

Fuerzas sobre los bloques

La segunda ley de Newton aplicada al bloque A es

$m_A a_A = m_A g \operatorname{sen}\theta - T - \mu N_A$,

$N_A - m_A g\cos\theta = 0$

De estas dos obtenemos:

$$T = m_A g(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - m_A a_A \qquad (2)$$

La segunda ley de Newton aplicada al bloque B es

$2T - m_B g = m_B a_B$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m_B(a_B + g) \qquad (3)$$

Igualando las ecuaciones (2) y (3),

$m_B(a_B + g) = 2m_A g(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - 2m_A a_A$

Teniendo en cuenta la ecuación (1) y los valores:

$7(a + 9{,}8) = 2(10)(9{,}8)(0{,}5 - 0{,}1\times 0{,}87) - 20(2a)$

Resolviendo:

$a = 0{,}26\ \text{m/s}^2$

Las aceleraciones de los bloques son :

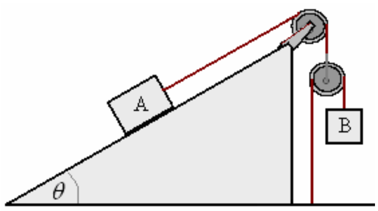
$a_A = 0{,}26\ \text{m/s}^2$ para arriba.

$a_B = 0{,}52\ \text{m/s}^2$ para abajo.

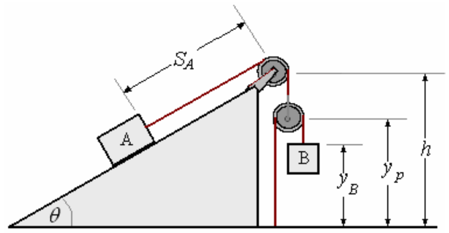
b) La magnitud de la tensión del cable es el valor de la fuerza que el cable ejerce sobre los bloques. De la ecuación (3) se tiene

$$T = \frac{1}{2}(7)(0{,}26 + 9{,}8) = 35{,}2\ \text{N}$$

Ejemplo 36. Dos bloques A y B de masas m_A y m_B están unidos mediante un cable que pasa a través de las poleas tal como se muestra en la figura adjunta. El coeficiente de rozamiento entre el bloque A y el plano inclinado es μ. El cable es inextensible y las masas del cable y la polea son despreciables. Estudiar el sentido del movimiento de los bloques.



Solución.



Supongamos que el bloque A asciende por el plano inclinado. Consideremos un sistema de referencia con el eje *x* horizontal.

Las posiciones, por una parte, del bloque A y de la polea móvil, están relacionadas por las condiciones de ligadura

$s_A + h - y_p = \text{constante}$

Las posiciones de la polea y el bloque B, están relacionadas por las condiciones de ligadura

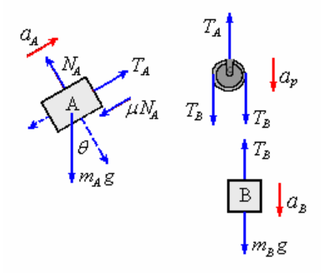
$2y_p - y_B = \text{constante}$

De estas dos ecuaciones obtenemos:

$2s_A + 2h - y_B = \text{constante}$

Las componentes de las aceleraciones de los bloques satisfacen la condición

$$2a_A = a_B \qquad (1)$$



Sean T_A y T_B las fuerzas que los cables ejercen sobre los respectivos bloques. Fuerzas sobre los bloques y sobre la polea móvil.

Como la polea superior tiene masa despreciable solo cambia el sentido de la fuerza.

La masa de la polea móvil es cero, luego

La tensión en ambos lados son iguales (T_B) y

$$T_A = 2T_B \qquad (2)$$

De la segunda ley de Newton aplicada al bloque A se tiene:

$T_A - m_A g \operatorname{sen}\theta - \mu N_A = m_A a_A$

$N_A - m_A g\cos\theta = 0$

De estas ecuaciones obtenemos:

$$T_A = m_A g(\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta) + m_A a_A \qquad (3)$$

De la segunda ley de Newton aplicada al bloque B se tiene

$m_B g - T_B = m_B a_B$

$$\Rightarrow T_B = m_B(g - a_B) \qquad (4)$$

De las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) obtenemos:

$m_A g(\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta) + m_A a_A = 2m_B(g - 2a_A)$

$$a_A = \frac{2m_B g - m_A g(\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta)}{m_A + 4m_B}$$

El movimiento es el indicado, si se cumple:

$$\frac{2m_B}{m_A} > (\text{sen}\theta + \mu\cos\theta)$$

El movimiento es de sentido opuesto, si se cumple:

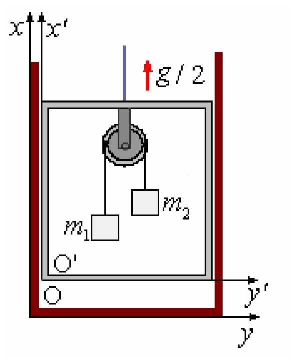
$$\frac{2m_B}{m_A} < (\text{sen}\theta - \mu\cos\theta)$$

El signo menos es porque en este caso el peso de la masa A es el que mueve al sistema y la fuerza de rozamiento está en sentido contrario a éste.

Ejemplo 37. A los extremos de un hilo que pasa a través de una polea fija al techo de la cabina de un ascensor se atan los cuerpos de masa m_1 y m_2 $(m_1 < m_2)$. La cabina comienza a subir con una aceleración constante $g/2$. Despreciando la masa de la polea y la del hilo, así como el rozamiento, calcular:

a) La aceleración de m_1 y m_2 respecto de la cabina y con relación al foso del ascensor.

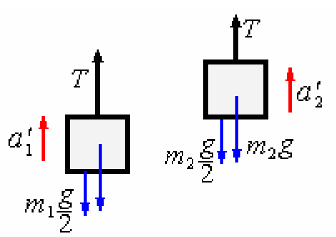
b) La fuerza con la cual la polea actúa sobre el techo de la cabina.



Solución.

a) El ascensor constituye una referencia no inercial en traslación que se mueve con una aceleración constante en sentido ascendente respecto de una referencia fija.

Seleccionemos una referencia con origen O′ en un punto del ascensor. La aceleración del origen O′ respecto de la referencia fija O es la aceleración del ascensor $\frac{1}{2}g\hat{j}$. Sean $a'_1\,\hat{j}$ la aceleración de m_1 y $a'_2\,\hat{j}$ la aceleración de m_2 en la referencia O'.



Las fuerzas exteriores que actúan sobre la m_1 son la tensión del cable T y el peso m_1g , y sobre m_2 son la tensión del cable T y el peso m_2g .

De la ecuación fundamental de la dinámica en la referencia no inercial se tiene

$$m_1a'_1 = T - m_1g - m_1\frac{g}{2}$$

$$\Rightarrow m_1a'_1 = T - \frac{3}{2}m_1g \qquad (1)$$

$$m_1a'_2 = T - m_2g - m_2\frac{g}{2}$$

$$\Rightarrow m_1a'_2 = T - \frac{3}{2}m_2g \qquad (2)$$

De la condición de ligadura para los bloques se tiene

$$a'_1 + a'_2 = 0 \;\Rightarrow\; a'_1 = -a'_2 = a' \quad (3)$$

De las ecuaciones (1), (2) y (3) se obtiene

$$m_1a' = T - \frac{3}{2}m_1g \;\text{ y }\; m_1a' = -T + \frac{3}{2}m_2g$$

Sumando estas ecuaciones:

$$(m_2 + m_1)a' = \frac{3}{2}(m_2 - m_1)g$$

Despejando a'

$$a' = \frac{3}{2}\frac{(m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1)}g$$

Finalmente:

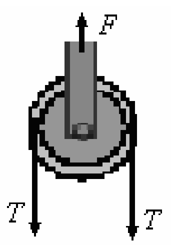
$$\vec{a'}_1 = a'\hat{j} \;\text{ y }\; \vec{a'}_2 = -a'\hat{j}$$

En la referencia fija, las aceleraciones de m_1 y de m_2 se obtienen de sumar a las anteriores la aceleración del ascensor

$$a_1 = \frac{g}{2} + a' = \frac{(2m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1)}g \;\text{ y}$$

$$a_2 = \frac{g}{2} - a' = \frac{(2m_1 - m_2)}{(m_2 + m_1)}g$$

b)



La fuerza que la polea ejerce sobre el techo de la cabina es

$$F - 2T = 0 \;\Rightarrow\; F = 2T$$

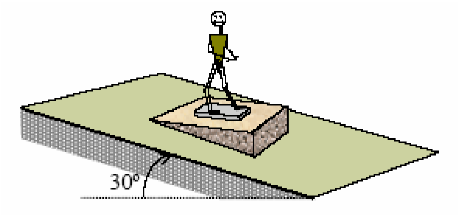
De la ecuación (1) y (3) se tiene

$$T = m_1\left(a'_1 + \frac{3}{2}g\right) = \frac{3m_1m_2}{(m_2 + m_1)}g$$

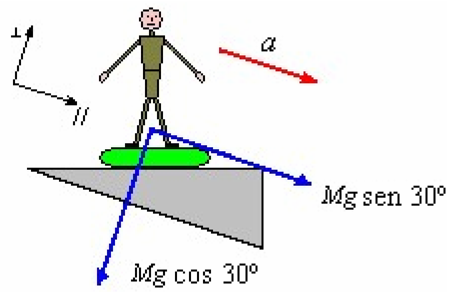
Luego

$$F = 2T = \frac{6m_1m_2}{(m_2 + m_1)}$$

Ejemplo 38. Un niño de masa m = 45 kg se pesa en una báscula de resorte situada sobre una plataforma especial que se desplaza por un plano inclinado de ángulo θ = 30º como muestra la figura (no hay rozamiento entre la plataforma y el plano inclinado). ¿Cuál será la lectura de la báscula en estas condiciones?



Solución.
Sea M la masa del conjunto niño - cuña., y a la aceleración con la que desliza hacia abajo el conjunto.



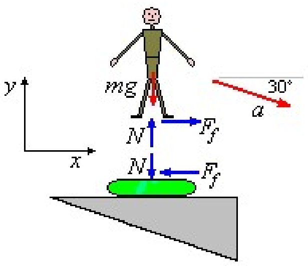
Aplicando la segunda ley de Newton al conjunto niño - cuña.

$$\sum F_{//} = Ma \Rightarrow Mg\text{sen}30º = Ma \Rightarrow$$

$$a = g\text{sen}30º = \frac{g}{2}$$

La aceleración del conjunto es $a = \frac{1}{2}g$

Solución en una referencia inercial.
Sobre el niño actúan: su peso mg y la reacción F_f en el apoyo. La indicación de la báscula el valor de la normal.



Aplicando la segunda ley de Newton al DCL del niño.

$$\sum F_x = F_f - ma\cos 30º = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = N - mg + ma\text{sen}30º = 0 \quad (2)$$

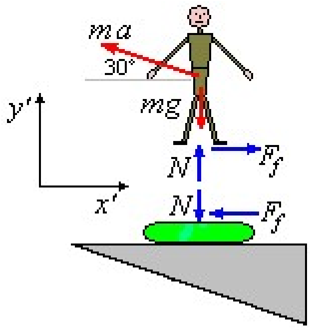
de (1) $\Rightarrow$ $F_f = 45\frac{g}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 191N$

de (2) $\Rightarrow$

$$N = mg - ma\text{sen}30º = 45\left(g - \frac{g}{4}\right)$$

= 33,45 Kg.
Siendo N la cantidad que marca la báscula.

Solución en una referencia no inercial .
Seleccionemos una referencia con origen O′ (x',y') en un punto de la plataforma. El niño está en reposo sobre la plataforma.



Aplicando la segunda ley de Newton al DCL del niño.

$$\sum F_x = F_f = ma\cos 30º \quad (1)$$

$$\sum F_y = N - mg = -ma\text{sen}30º \quad (2)$$

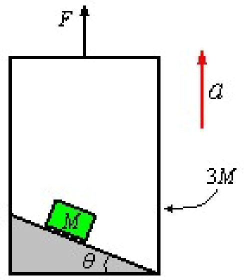
de (1) $\Rightarrow$ $F_f = 45\frac{g}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 191N$

de (2) $\Rightarrow$

$$N = mg - ma\text{sen}30º = 45\left(g - \frac{g}{4}\right)$$

= 33,45 kg
Siendo N la cantidad que marca la báscula.

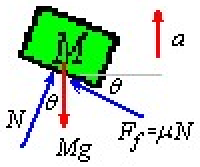
Ejemplo 39. Un ascensor de masa total 3M es levantado bajo la acción de una fuerza F. El piso del ascensor está inclinado un ángulo θ, con respecto a la horizontal. Además, un bloque de masa M se apoya sobre el centro del piso rugoso del ascensor (con coeficiente de fricción estática μ).
a) Hallar la aceleración del ascensor.
b) Haga el diagrama de cuerpo libre de la masa M.
c) ¿Cuál es el valor máximo de F para que el bloque dentro del ascensor no resbale respecto del piso del ascensor?
d) Si el ascensor pierde contacto con la fuerza F y empieza a caer libremente, calcule el valor de la fuerza normal entre el bloque y el piso del ascensor, y la fuerza de fricción sobre el bloque.
Solución.
a) Para hallar la aceleración del ascensor.



$$F - 3Mg - Mg = (3M + M)a$$

$$\Rightarrow \ a = \frac{F - 4Mg}{4M} = \frac{F}{4M} - g$$

b) Diagrama de cuerpo libre de la masa *M*.



c) Para que el bloque dentro del ascensor no resbale respecto del piso del ascensor se debe cumplir

$$M(g + a)\operatorname{sen}\theta \leq \mu M(g + a)\cos\theta$$
$$\Rightarrow \ \mu \geq \tan\theta .$$

Como a depende de *F*, y a esta en miembros de la igualdad, el que el bloque resbale dentro del ascensor solamente depende del coeficiente de fricción.
d) Si el ascensor pierde contacto con la fuerza *F* y empieza a caer libremente,

$N = 0$, por lo tanto $F_f = 0$

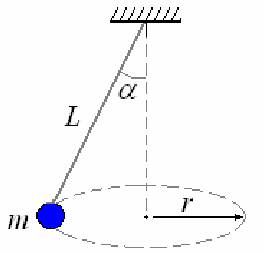
DINÁMICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR
La primera ley de Newton dice que un objeto permanecerá en movimiento uniforme en línea recta con velocidad constante o en reposo si no actúa una tuerza sobre él. Entonces cuando un objeto se mueve en trayectoria circular, debe haber una fuerza sobre él cambiándole la trayectoria recta. Esta fuerza puede ser proporcionada por la tensión en una cuerda, para un objeto que se hace girar en una circunferencia horizontal al extremo de una cuerda; por la fuerza de la gravedad para un satélite orbitando la tierra.
Los objetos en movimiento circular no están en equilibrio, debe haber una fuerza resultante, de otro modo sólo habría un movimiento en línea recta.

FUERZA CENTRÍPETA.
Una partícula que se mueve sobre una trayectoria circular de radio *R* con rapidez constante, se encuentra sometida a una aceleración radial de magnitud v^2/R. Por la segunda ley de Newton, sobre la partícula actúa una fuerza en la dirección de hacia el centro de la circunferencia, cuya magnitud es:

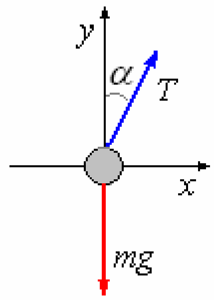
$$F_c = ma_c = m\frac{v^2}{R}$$

Por ser proporcional a la aceleración centrípeta, la fuerza F_c se llama **fuerza centrípeta**. Su efecto es cambiar la dirección de la velocidad de un cuerpo. Se puede sentir esta fuerza cuando se hace girar a un objeto atado a una cuerda, ya que se nota el tirón del objeto. Las fuerzas centrípetas no son diferentes de otras fuerzas ya conocidas, su nombre se debe a que apunta hacia el centro de una trayectoria circunferencial. Cualquiera de las fuerzas ya conocida pueden actuar como fuerza centrípeta si producen el efecto correspondiente, como ser la tensión de una cuerda, una fuerza de roce, alguna componente de la normal, la fuerza gravitacional en el caso de movimientos de planetas y satélites, etc.

Ejemplo 40. Un cuerpo de masa *m*, sujeto al extremo de una cuerda de longitud *L*, que describe una trayectoria circular en el plano horizontal, genera una superficie cónica, por lo que se llama péndulo cónico. Determinar la rapidez y el período de revolución de la masa.



Solución.
La partícula está sometida a una aceleración centrípeta, y la fuerza centrípeta correspondiente está dada por la componente de la tensión de la cuerda en dirección radial hacia el centro de la circunferencia.
El D. C. L. de la masa *m*.



Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_y = 0$$
$$\Rightarrow \ T\cos\alpha - mg = 0$$
$$\Rightarrow \mathrm{T}\cos\alpha = mg \qquad (1)$$

y $\sum F_x = ma$

$$\Rightarrow \mathrm{T}\operatorname{sen}\alpha = ma = m\frac{v^2}{r} \qquad (2)$$

Dividiendo (2) entre (1):

$$\tan\alpha = \frac{v^2}{rg} \ \Rightarrow \ v^2 = rg\tan\alpha$$

De la geometría de la figura, $r = L\text{sen}\alpha$, reemplazando se obtiene la rapidez de *m*:

$$v^2 = (L\text{sen}\alpha) g \tan\alpha$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{Lg \tan\alpha \,\text{sen}\alpha}$$

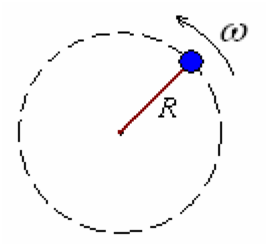
Para calcular el periodo *T,* esto es el tiempo que demora en dar una vuelta.
Se sabe que
$\Delta x = v\Delta t$, con $\Delta x = 2\pi r$, entonces:

$$\Delta t = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi L \,\text{sen}\alpha}{\sqrt{Lg \tan\alpha \,\text{sen}\alpha}}$$

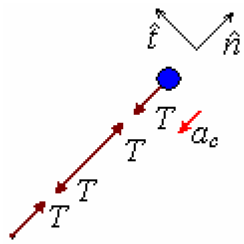
$$= 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\alpha}{g}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\alpha}{g}}$$

Ejemplo 41. Una bola de masa *m*, atada al extremo de una cuerda se hace ir en un plano horizontal formando una circunferencia de radio *R*. Si tiene una velocidad angular ω, ¿cuál es la tensión en la cuerda?



Solución.
La figura muestra el D.C.L.



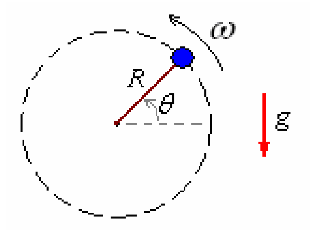
Aplicando la segunda ley de Newton a la masa m.

$$\sum F_n = ma_c \;\Rightarrow\; -T = -mR\omega^2$$

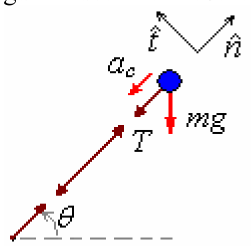
$$\sum F_t = ma_t \;\Rightarrow\; 0 = mR\alpha$$

La tensión en la cuerda es $T = mR\omega^2$. La fuerza tangencial es cero y la aceleración tangencial α también es cero, ya que la velocidad angular es constante.

Ejemplo 42. Resolver el problema anterior pero en el caso que el giro sea en el plano vertical.



Solución. La figura muestra el D.C.L.



Aplicando la segunda ley de Newton.

$$\sum F_n = ma_c \;\Rightarrow\; -T - mg\text{sen}\theta = -mR\omega^2$$

$$\sum F_t = ma_t \;\Rightarrow\; -mg\cos\theta = mR\alpha$$

La tensión en la cuerda es

$$T = mR\omega^2 - mg\text{sen}\theta$$

La fuerza tangencial es $-mg\cos\theta$ y la aceleración angular es

$$\alpha = -\frac{g}{R}\cos\theta$$

Como $\alpha = \dfrac{d^2\theta}{dt}$, obtenemos la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2\theta}{dt} = -\frac{g}{R}\cos\theta$$

cuya solución esta fuera del alcance de este curso. Pero podríamos encontrar la tensión y fuerza tangencial para posiciones determinadas, es decir para valores dados de θ.

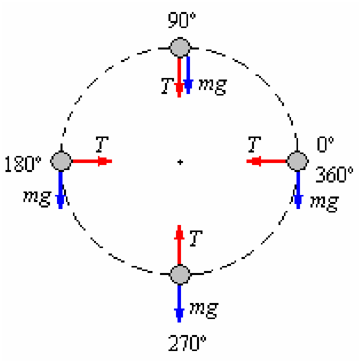
$$\text{Para } \theta = 0^\circ \begin{cases} T = mR\omega^2 \\ F_t = -mg \end{cases},$$

$$\text{Para } \theta = 90^\circ \begin{cases} T = mR\omega^2 - mg \\ F_t = 0 \end{cases},$$

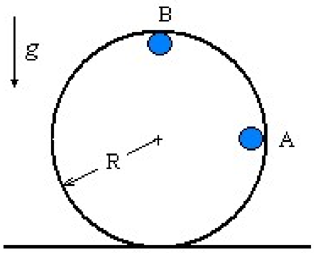
$$\text{Para } \theta = 180^\circ \begin{cases} T = mR\omega^2 \\ F_t = mg \end{cases},$$

$$\text{Para } \theta = 270^\circ \begin{cases} T = mR\omega^2 + mg \\ F_t = 0 \end{cases},$$

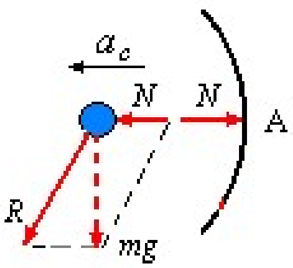
$$\text{Para } \theta = 360^\circ \begin{cases} T = mR\omega^2 \\ F_t = -mg \end{cases}$$

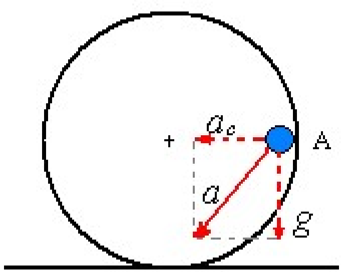


Ejemplo 43. Un pequeño bloque de masa *m* se desliza sobre una superficie lisa circular de radio *R* como se muestra en la figura. (La pista está sobre un plano vertical y *g* = aceleración de la gravedad)
a) Trace el diagrama de cuerpo libre del bloque cuando se encuentra en "A" y muestre (dibujando los vectores) la dirección de la fuerza resultante y su aceleración.
b) Cuando está en "A", ¿su rapidez aumenta o disminuye? (Justifique)
c) Si en "B" su velocidad es nula, ¿cuál es la trayectoria que seguirá la masa *m?*
d) Si en "B" su velocidad es $\sqrt{gR}$, ¿qué trayectoria seguirá la masa m?

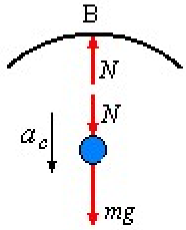


Solución.
a) Trace el diagrama de cuerpo libre del bloque cuando se encuentra en "A" y muestre (dibujando los vectores) la dirección de la fuerza resultante y su aceleración.





b) Cuando el bloque está en A se dirige a B, su velocidad es en el sentido antihorario y su aceleración en el sentido horario. Luego su rapidez disminuye.
c) Si en "B" su velocidad es nula, ¿cuál es la trayectoria que seguirá la masa *m?*



$$N + mg = ma_c = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow N = -mg + m\frac{v^2}{R}$$

Si $v = 0$, el valor de N es negativo, lo que no permite al bloque sostenerse sobre la circunferencia, por consiguiente el bloque caerá verticalmente.
d) Si en "B" su velocidad es $\sqrt{gR}$, ¿qué trayectoria seguirá la masa m?

$$N = -mg + m\frac{v^2}{R} \Rightarrow N = -mg + m\frac{gR}{R} = 0,$$

el bloque tiene suficiente velocidad para seguir en la trayectoria circular.

Ejemplo 44. Un avión describe un rizo (un camino circular en un plano vertical) de 150 m de radio. La cabeza del piloto siempre apunta al centro del rizo. La rapidez del avión no es constante; es mínima en el cenit del rizo y máxima en el nadir.
a) En el cenit el piloto experimenta ingravidez. ¿Qué rapidez tiene el avión en ese punto?
b) En el nadir, la rapidez del avión es de 280 km/h. ¿Qué peso aparente tiene el piloto aquí? Su peso real es de 700 N.
Solución.
a) Sí el piloto siente ingravidez, está en caída libre, y

$a = g = \frac{v^2}{R}$, luego

$v = \sqrt{Rg} = \sqrt{(150)(9,80)} = 38,3\ \text{m/s}$, o $138\ \text{km/h}$.

b) El peso aparente es la suma de la fuerza neta hacia adentro (arriba) y el peso del piloto, o

$$P' = P + ma = P + m\frac{v^2}{R}$$

Aquí:
$P = 700$ N

$m = \frac{P}{g} = \frac{700}{9,8} = 71,43$ kg

$v = 280$ km/h = 77,6 m/s
$R = 150$ m
Luego:

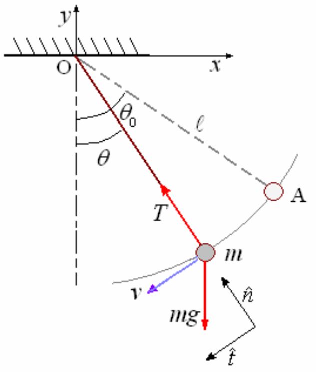
$$P' = 700 + 71,43\left(\frac{77,6^2}{150}\right) = 3579\ \text{N}$$

Ejemplo 45. Una partícula de masa *m* que está unida al extremo de un cable de longitud ℓ, cuyo otro extremo está fijo, se mueve en un plano vertical, a partir de un punto A tal que el cable forma con la vertical un ángulo θ_0, iniciando el movimiento con velocidad cero. Determinar:

a) La velocidad de *v* de la esfera en función de θ.

b) La tensión del cable en función de θ.

c) La aceleración a en función de θ.



Solución.

En la referencia de origen O, la esfera recorre una circunferencia de radio ℓ con velocidad variable *v(t)*.

Las componentes intrínsecas la aceleración son:

$$a_t = \frac{dv}{dt},\ a_n = \frac{v^2}{\ell}$$

Sobre la masa *m* actúan la tensión del cable T y su peso mg.

De la segunda ley de Newton en componentes $\hat{n}$ y $\hat{t}$ se tiene:

$$\sum F_t = ma_t \Rightarrow mg\,\text{sen}\,\theta = ma_t$$

$$\sum F_n = ma_n \Rightarrow T - mg\cos\theta = ma_n$$

a) Para la componente tangencial se tiene:

$$mg\,\text{sen}\,\theta = m\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds} = g\,\text{sen}\,\theta$$

$$\Rightarrow vdv = g\,\text{sen}\,\theta\, ds = g\,\text{sen}\,\theta\, \ell d\theta$$

Integrando y teniendo en cuenta las condiciones iniciales queda

$$v^2 = 2g\ell(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

$$v = \sqrt{2g\ell(\cos\theta_0 - \cos\theta)}$$

b) Para la componente normal:

$$T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{\ell} = 2mg(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

La tensión del cable es

$$T = mg(2\cos\theta_0 - 3\cos\theta)$$

c) De las ecuaciones anteriores se tiene la aceleración:

$$\vec{a} = a_t\hat{t} + a_n\hat{n}$$

$$a_t = g\,\text{sen}\,\theta,$$

$$T - mg\cos\theta = ma_n = 2mg(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow a_n = 2g(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

Ejemplo 46. Una partícula de masa *m* se encuentra en el polo de una semiesfera de radio *R*, la cual está apoyada sobre una superficie horizontal. Desplazada ligeramente de su posición de equilibrio, la partícula desliza sobre la superficie, la cual se supone lisa.

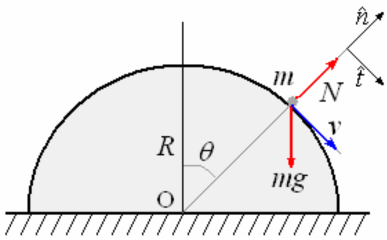
Determinar:

a) La velocidad *v* de la partícula en función del ángulo θ que forma su radio posición con el radio inicial.

b) El valor de la normal *N* en función de θ.

c) El valor de θ, en el instante en que la partícula se despega de la superficie.

Solución.



En la referencia de origen O, la partícula *m* tiene un movimiento circular no uniforme de radio *R*. Las componentes de la aceleración son:

$$a_t = \frac{dv}{dt},\ a_n = \frac{v^2}{R}$$

Sobre la masa *m* actúan el peso mg y la reacción en el apoyo *N*.

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_t = ma_t \Rightarrow mg\,\text{sen}\,\theta = ma_t$$

$$\sum F_n = ma_n \Rightarrow N - mg\cos\theta = -ma_n$$

a) De la componente tangencial se tiene:

$$mg\,\text{sen}\,\theta = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds} = g\,\text{sen}\,\theta$$

$$\Rightarrow vdv = g\,\text{sen}\,\theta\, ds = Rg\,\text{sen}\,\theta\, d\theta$$

Integrando y teniendo en cuenta las condiciones iniciales queda

$$v^2 = 2Rg(1 - \cos\theta)$$

Finalmente:

$$v = \sqrt{2Rg(1 - \cos\theta)}$$

b) De la componente normal se tiene:

$$N = mg\cos\theta - ma_n =$$

$$mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R} = mg\cos\theta - 2mg(1 - \cos\theta)$$

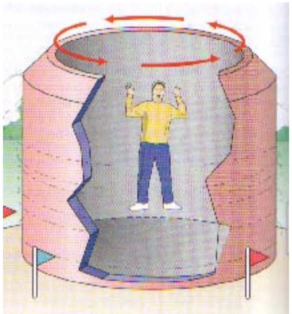
La normal es $N = mg(3\cos\theta - 2)$

c) La masa *m* deja de estar en contacto con la superficie cuando *N* = 0

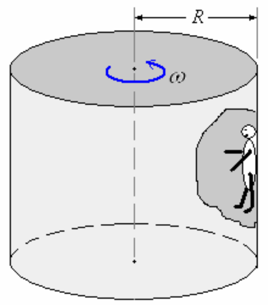
$$N = mg(3\cos\theta - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = 48{,}19^{\circ}$$

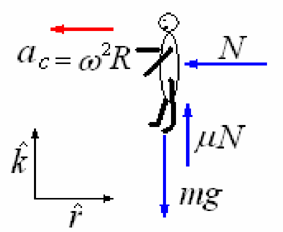
Ejemplo 47. En un parque de diversiones hay un cilindro grande vertical, de radio *R* que rota alrededor de su eje, con velocidad angular constante ω. Explicar cómo es posible que las personas que están dentro, al retirárseles el piso permanezcan "pegadas" a la pared interior del cilindro.



Solución.



La figura muestra el D.C.L del hombre.



Aplicando La segunda ley de Newton:
Como el hombre no cae, radialmente está en reposo (*R* = constante)

$$\sum F_r = ma_c \Rightarrow -N = -m\omega^2 R$$

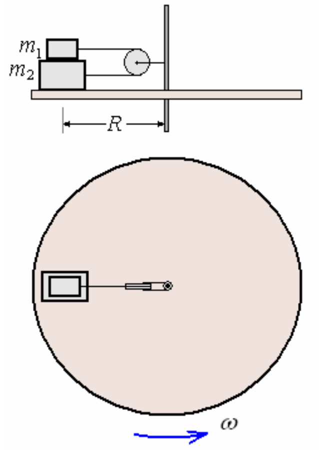
$$\sum F_z = 0 \Rightarrow mg - \mu N = 0$$

De estas ecuaciones: $mg - \mu m\omega^2 R$

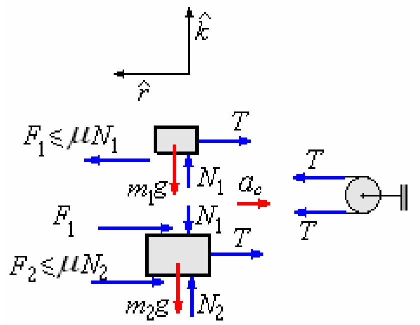
y $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\mu R}}$

Esto quiere decir que para que suceda el efecto de suspensión de las personas, la velocidad angular ω tiene que tener un valor relacionado con el radio *R* y el coeficiente de fricción μ .

Ejemplo 48. En la tornamesa mostrada en la figura el bloque de masa m_1 descansa sobre el bloque de masa m_2. Los bloques están a la distancia *R* del eje de rotación. El coeficiente de rozamiento estático entre las masas y entre m_2 y la tornamesa es μ
Considerando el rozamiento y la masa de la polea despreciables, encontrar la velocidad angular de la tornamesa para la cual los bloques justamente comienzan a resbalar.



Solución.
En este problema todo depende de tomar correctamente la dirección de la fuerza de fricción entre m_1 y m_2. Consideremos $m_2 > m_1$, por lo tanto m_2 tenderá a moverse hacia afuera, jalando a m_1 hacia adentro. La fuerza de fricción actuará en oposición a su movimiento relativo.
La figura muestra los D.C.L. de los componentes del sistema.



Aplicando la segunda Ley de Newton

$$\sum F_z = ma_z, \ \sum F_r = ma_r \ \text{y} \ \sum F_t = ma_t$$

A la masa m_1:

$$N_1 - m_1 g = 0, \ -T + F_1 = -m_1\omega^2 R, \ F_t = 0$$

A la masa m_2:

$$N_2 - N_1 - m_2 g = 0,$$

$$-T - F_1 - F_2 = -m_2\omega^2 R, \ F_t = 0$$

De las ecuaciones obtenemos:

$$N_1 = m_1, \ N_2 = (m_1 + m_2)g$$

$$F_1 \leq \mu m_1 g, \ F_2 \leq \mu(m_1 + m_2)g$$

y $2F_1 + F_2 = (m_2 - m_1)\omega^2 R$

Corno ω puede incrementarse hasta que F_1 y F_2 alcancen sus valores máximos

$$2\mu m_1 g + \mu(m_1 + m_2)g = (m_2 - m_1)\omega^2 R$$

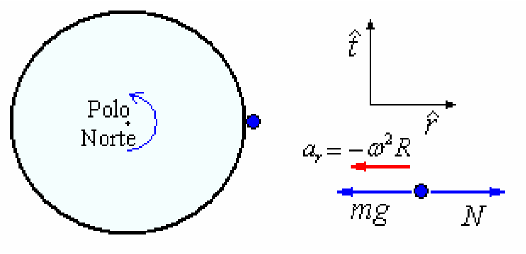
Finalmente

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu(3m_1 + m_2)}{R(m_2 - m_1)}}$$

Ejemplo 49. ¿Cómo afectará la rotación de la tierra al peso aparente de un cuerpo en el ecuador?

Solución.

La figura muestra la situación de un cuerpo situado en la línea ecuatorial



Aplicando la segunda ley de Newton

$$\sum F_z = ma_z \Rightarrow F_z = 0$$

$$\sum F_r = ma_r \Rightarrow N - mg = -m\omega^2 R$$

$$\sum F_t = ma_t \Rightarrow F_t = 0$$

El peso de la masa es representado por la reacción N

$$N = mg - m\omega^2 R$$

Para tener una idea de cuánto afecta la rotación de la tierra es necesario hacer el cálculo numérico para esta consideración:

El radio de la tierra en el ecuador: $R = 6{,}378 \times 10^6$m

La velocidad angular de la tierra

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600}\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 7{,}27 \times 10^{-5}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

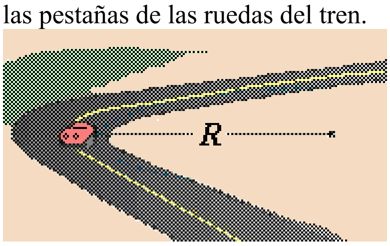
La aceleración de la gravedad en el Ecuador: $g = 9{,}780490$ m/s^2

$$\text{Porcentaje} = \frac{\omega^2 R}{g} \times 100 = 0{,}34\%$$

CURVAS EN LAS PISTAS.

Para un cuerpo como un vehículo o un vagón de tren que se mueven describiendo una trayectoria curva de radio r, sobre el vehículo debe actuar una fuerza centrípeta para evitar que continúe moviéndose en línea recta y se salga de la pista; esta es la fuerza para hacer que el vehículo gire por la pista curva.

La fuerza centrípeta necesaria la da el roce de las llantas o las pestañas de las ruedas del tren.



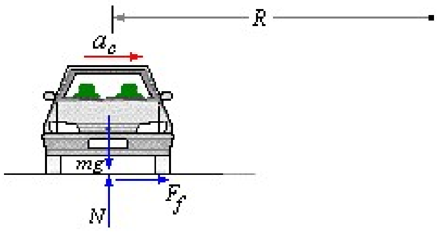
Curvas sin peraltar

En estos casos la fuerza de rozamiento es la que nos proporciona toda la componente normal que servirá para tomar la curva. Siempre que tengamos que ésta es mayor que la aceleración normal el automóvil será capaz de tomar la curva, es decir, el caso límite se alcanza cuando

$$F_r = ma_c = m\frac{v^2}{R}$$

Ejemplo 50. ¿Cuál es la velocidad a que puede ir un automóvil por una curva sin peralte, de radio R, sin derrapar?, el coeficiente de rozamiento entre las ruedas y el suelo vale μ.

Solución.

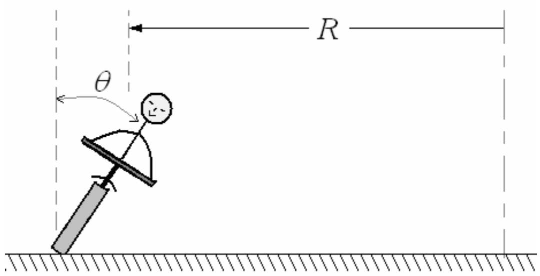


$$\sum F_h = ma_c \quad \sum F_V = 0 \quad a_c = \frac{v^2}{R}$$

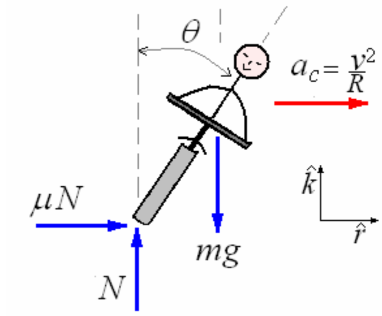
$$F_f = \mu N = \mu mg = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\mu g R}$$

Ejemplo 51. El ciclista tiene que inclinarse al desplazarse por una pista circular (o para pasar por una curva), Encontrar la relación de la velocidad con el radio de curvatura, el ángulo de inclinación y μ coeficiente de fricción.

Solución.



La figura muestra el D.C.L.



Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_z = ma_z \Rightarrow N - mg = 0$$

$$\sum F_r = ma_r \Rightarrow \mu N = m\frac{v^2}{R}$$

De las ecuaciones obtenemos

$$N = mg \text{ y } \mu mg = m\frac{v^2}{R}$$

Finalmente $v = \sqrt{\mu g R}$

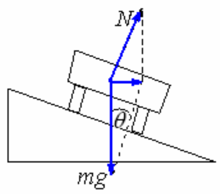
Del D.C.L. también obtenemos:

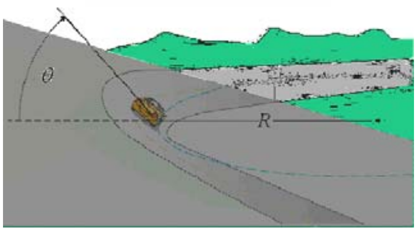
$$\tan\theta = \frac{\mu N}{N} = \mu$$

Esto quiere decir que si el motociclista al realizar una curva no se reclina y el piso no es lo suficientemente áspero (fricción), éste caerá.

Curvas peraltadas sin rozamiento

Para no tener que confiar en el roce o reducir el desgaste de los rieles y pestañas, la carretera o la vía pueden inclinarse, como en la figura. En este caso la componente de la normal dirigida hacia el centro de curvatura proporciona la fuerza necesaria para mantener al móvil en la pista. A la inclinación de la pista o vía se le llama ángulo de **peralte,** θ**.**





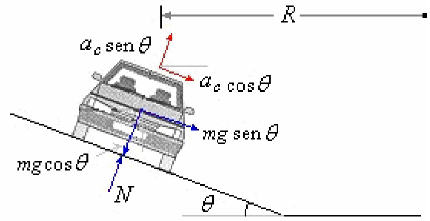
En estos casos se toma la proyección de la normal sobre la horizontal como causante de la fuerza centrípeta. Este caso se tiene, que:

$$\tan\theta = \frac{m\frac{v^2}{R}}{mg} = \frac{v^2}{Rg}$$

Siendo θ, la inclinación de la carretera**.**

Ejemplo 52. ¿Cuál es la velocidad a que puede ir un automóvil por una curva con peralte, de radio *R,* sin derrapar, el peralte es de θ grados?

Solución.



$$\sum F_\perp = 0 \quad a_c = \frac{v^2}{R}$$

$$\sum F_{//} = ma_c\cos\theta \Rightarrow mg\operatorname{sen}\theta = m\frac{v^2}{R}$$

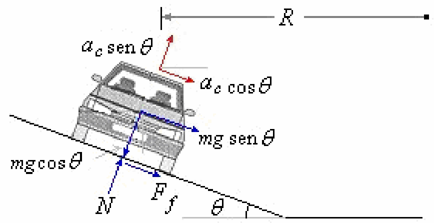
$$\Rightarrow v = \sqrt{gR\tan\theta}$$

Curvas peraltadas con rozamiento

Este es un caso bastante más complejo de analizar.

Ejemplo 53. ¿Cuál es la velocidad a la que puede ir un automóvil por una curva con peralte, de radio *R,* para que no se deslice hacia el exterior, el coeficiente de rozamiento entre las ruedas y el suelo vale μ., el peralte es de θ grados?

Solución.



$$F_f = \mu N, \quad a_c = \frac{v^2}{R}$$

$$\sum F_{//} = ma_c\cos\theta$$

$$\Rightarrow mg\operatorname{sen}\theta + \mu N = m\frac{v^2}{R}\cos\theta$$

$$\sum F_\perp = 0 \Rightarrow N - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R}\operatorname{sen}\theta$$

$$\Rightarrow N = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{R}\operatorname{sen}\theta$$

$$mg\operatorname{sen}\theta + \mu\left(mg\cos\theta + m\frac{v^2}{R}\operatorname{sen}\theta\right) = m\frac{v^2}{R}\cos\theta$$

$$mg\operatorname{sen}\theta + \mu mg\cos\theta + \mu m\frac{v^2}{R}\operatorname{sen}\theta = m\frac{v^2}{R}\cos\theta$$

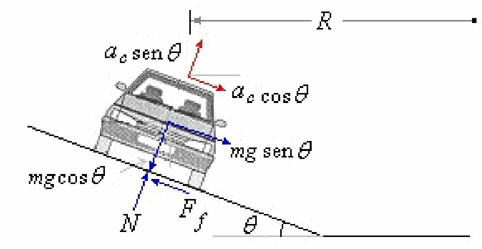
$$mg(\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta) = m\frac{v^2}{R}(\cos\theta - \mu\operatorname{sen}\theta)$$

$$v = \sqrt{gR\frac{(\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta)}{(\cos\theta - \mu\operatorname{sen}\theta)}}$$

$$\Rightarrow\ v = \sqrt{gR\frac{(\tan\theta + \mu)}{(1-\mu\tan\theta)}}$$ Para que no se vaya

Ejemplo 54. ¿Cuál es la velocidad a laque puede ir un automóvil por una curva con peralte, de radio *R*, para que no se deslice hacia el interior, el coeficiente de rozamiento entre las ruedas y el suelo vale μ., el peralte es de θ grados?

Solución.



$$F_f = \mu N\ ,\ a_c = \frac{v^2}{R}$$

$$\sum F_{//} = ma_c\cos\theta\ \Rightarrow$$

$$mg\text{sen}\theta - \mu N = m\frac{v^2}{R}\cos\theta$$

$$\sum F_\perp = 0\ \Rightarrow\ N - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R}\text{sen}\theta$$

$$\Rightarrow\ N = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{R}sen\theta$$

$$mg\text{sen}\theta - \mu\left(mg\cos\theta + m\frac{v^2}{R}\text{sen}\theta\right) = m\frac{v^2}{R}\cos\theta$$

$$mg\text{sen}\theta - \mu mg\cos\theta - \mu m\frac{v^2}{R}\text{sen}\theta = m\frac{v^2}{R}\cos\theta$$

$$mg(\text{sen}\theta - \mu\cos\theta) = m\frac{v^2}{R}(\cos\theta + \mu\text{sen}\theta)$$

$$v = \sqrt{gR\frac{(\text{sen}\theta - \mu\cos\theta)}{(\cos\theta + \mu\text{sen}\theta)}}$$

$$\Rightarrow\ v = \sqrt{gR\frac{(\tan\theta - \mu)}{(1+\mu\tan\theta)}}$$ Para que no se caiga

La velocidad debe de estar entre esos valores para permanecer en la carretera.

$$\sqrt{gR\frac{(\tan\theta + \mu)}{(1-\mu\tan\theta)}} \geq v \geq \sqrt{gR\frac{(\tan\theta - \mu)}{(1+\mu\tan\theta)}}$$

MOVIMIENTO EN MARCOS DE REFERENCIA NO INERCIALES

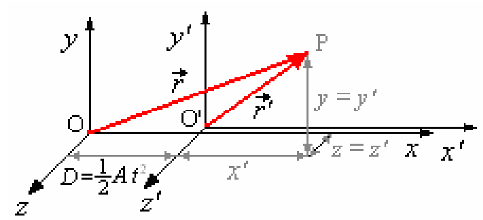
Hasta este momento nuestro estudio de mecánica clásica lo hemos realizado en sistemas de referencia que están en reposo o con movimiento con velocidad constante con respecto a un sistema considerado en reposo. A este conjunto de marcos de referencia se le conoce como MARCOS DE REFERENCIA INERCIALES.

En los problemas trabajados hasta esta parte el primer paso era dibujar un sistema de coordenadas. Elegimos un sistema fijo a tierra, pero no pusimos atención al hecho que la tierra no es un marco inercial debido a que la tierra al viajar en su orbita casi circular alrededor del sol experimenta una aceleración centrípeta hacia el centro de la tierra. Sin embargo, estas aceleraciones son pequeñas comparadas con la aceleración de la gravedad y a menudo se pueden despreciar. En la mayoría de los casos se supondrá que la tierra es un marco inercial.

Ahora veremos cómo cambian los resultados cuando se trabaja en un MARCO DE REFERENCIA NO INERCIAL, que es el nombre que se da a un marco de referencia acelerado.

MARCO CON MOVIMIENTO DE TRASLACION NO UNIFORME.

Consideremos los sistemas S y S' tal corno se muestra en la Figura siguiente. El sistema S es inercial y el sistema S' se mueve con respecto a S con aceleración constante $\vec{A} = A\hat{i}$, tal que $D = \frac{1}{2}At^2$.



De la figura obtenemos que la posición de la partícula P es:

$$x = x' + \frac{1}{2}At^2\ ,\ y = y'\ ,\ z = z'$$

$$\vec{r} = \vec{r}' + \frac{1}{2}At^2\hat{i}$$

Derivando con respecto al tiempo encontramos

$$v_x = v'_{x'} + At\ ,\ v_y = v'_y\ ,\ v_z = v'_{z'}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + At\hat{i}$$

Derivando nuevamente encontramos

$$a_x = a'_x + A\ ,\ a_y = a'_{y'}\ ,\ a_z = a'_{z'}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + A\hat{i}\ \text{ o }\ \vec{a} = \vec{a}' + \vec{A}$$

Si la partícula P tiene una masa *m* y aplicarnos la segunda ley de Newton del movimiento en el sistema inercial S obtenemos

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Donde P es la suma de todas las fuerzas de interacción que actúan sobre las partículas.

Para relacionar con el sistema no inercial S'

$$\vec{F} = m\left(\vec{a}' + A\hat{i}\right) \text{ o } m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{A}$$

Aquí vemos que para que el observador según S' pueda aplicar la segunda ley de Newton debemos introducir una fuerza extra $\vec{F}_A$ a la llamaremos **fuerza de arrastre** y debemos incluirla en los diagramas de fuerzas:

$$\vec{F}_A = -m\vec{A}$$

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_A$$

De este modo, en el sistema S':

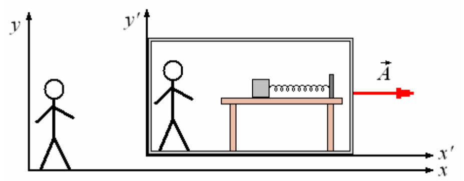
Donde $\vec{F}'$ es la suma de las fuerzas reales más la de arrastre

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_A$$

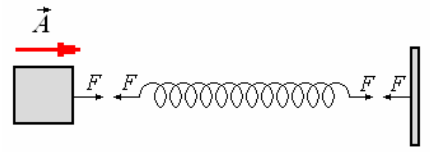
Recalquemos el carácter ficticio de $\vec{F}_A$. Para aplicar una fuerza real sobre un cuerpo debemos ponerlo en interacción con otro, de manera que, según la tercera ley de Newton, si A ejerce una fuerza sobre B, $\vec{F}_{AB}$, a su vez B ejercerá una fuerza sobre A, $\vec{F}_{BA}$, tal que $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$.

Ahora, ¿es la reacción de la fuerza de arrastre?, ¿cuál es el otro cuerpo que está ejerciendo la fuerza ?. No existe tal cuerpo, la fuerza no tiene reacción, es una fuerza ficticia que agrega un observador ubicado en un sistema acelerado (respecto a uno inercial) para justificar los fenómenos que observa.

Ejemplo 55. La fuerza para estirar o comprimir un resorte es proporcional a su deformación lineal, $F = -k\Delta\ell$, donde k es la constante del resorte y el signo menos significa que la fuerza es en oposición a la deformación. Si sobre una mesa sin fricción que se encuentra en un vagón se coloca una masa. m sujeta a un resorte de constante k y largo ℓ, como se muestra en la figura. El tren arranca con una aceleración A que se mantiene constante en la dirección x. Calcular la deformación del resorte desde el punto de vista del observador en tierra y desde el punto de vista del observador en el vagón.



Solución.
Observador en tierra:
La figura muestra el D. C. L. de la masa m.



El observador ve que el resorte se estira $\Delta\ell$. La fuerza es

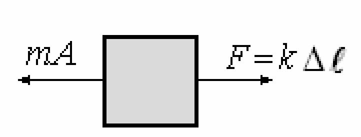
$F = k\Delta\ell$

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow k\Delta\ell = mA$$

$$\Rightarrow \Delta\ell = \frac{mA}{F}$$

Observador en el vagón:
La figura a continuación muestra el D.C.L. de la masa m que no se mueve para el observador en el vagón. Como es sistema no inercial tenemos que aplicar la fuerza ficticia $-mA$.

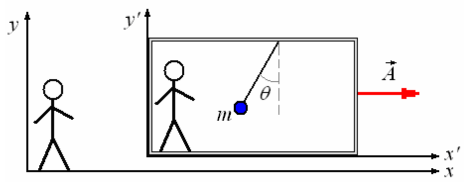


Aplicando la segunda ley de Newton

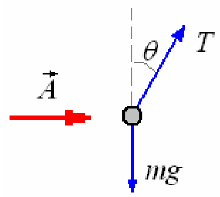
$$\sum F_{x'} = 0 \Rightarrow -mA = k\Delta\ell$$

$$\Rightarrow \Delta\ell = \frac{mA}{F}$$

Ejemplo 56. Analizar el caso de masa m colgada mediante un hilo del techo de un vagón, que se mueve con una aceleración A.
a) Desde el punto de vista de un observador en tierra (S).
b) para un observador dentro del vagón (S').



Solución.
a) Para un observador en S:
El D.C.L. de la masa m



Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow T\text{sen}\theta = mA \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T\cos\theta - mg = 0$$

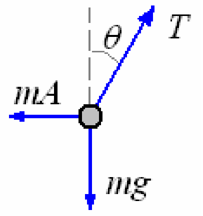
$$\Rightarrow T\cos\theta = mg \quad (2)$$

Dividiendo (1) : (2)

$$\tan\theta = \frac{A}{g}$$

b) Para un observador en S'

El D.C.L..de la masa *m*



Aplicando la segunda ley de Newton

$$\sum F_{x'} = 0 \Rightarrow T\text{sen}\theta - mA = 0$$

$$\Rightarrow T\text{sen}\theta = mA = 0 \qquad (1)$$

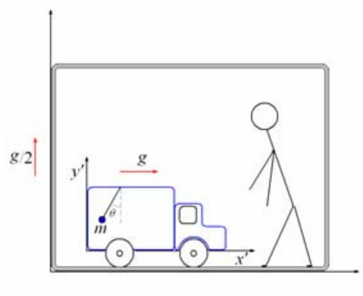
$$\sum F_{y'} = 0 \Rightarrow T\cos\theta - mg = 0$$

$$\Rightarrow T\cos\theta = mg \qquad (2)$$

Dividiendo (1) : (2) obtenemos:

$$\tan\theta = \frac{A}{g}$$

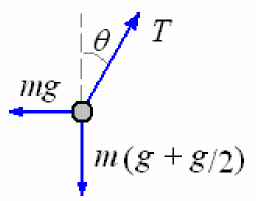
Ejemplo 57. Desde el techo de un carrito de juguete cuelga una masa *m* unida al cielorraso mediante una cuerda ideal. El carrito se encuentra en el piso de un ascensor que sube con aceleración *g*/2. A su vez el carrito tiene una aceleración horizontal de magnitud *g* respecto al ascensor. Encuentre el ángulo que forma la cuerda con la vertical, resuelva para un observador situado dentro del ascensor.



Solución.

Para un observador en el ascensor.

El D.C.L..de la masa *m*



Aplicando la segunda ley de Newton

$$\sum F_{x'} = ma_{x'}$$

$$\Rightarrow T\text{sen}\theta = mg \qquad (1)$$

$$\sum F_{y'} = 0 \Rightarrow T\cos\theta - m\left(g + \frac{g}{2}\right) = 0$$

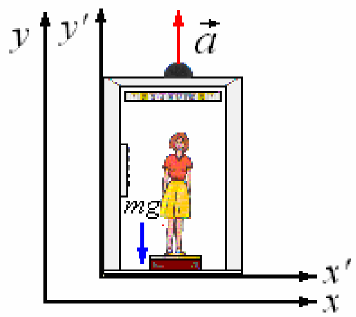
$$\Rightarrow T\cos\theta = m\frac{3}{2}g \qquad (2)$$

Dividiendo (1) / (2)

$$\tan\theta = \frac{g}{\frac{3}{2}g} = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = 33{,}7°$$

Ejemplo 58. Resolver el caso del peso del hombre en un ascensor cuando asciende con una aceleración constante *A*, desde el punto de vista del hombre en el ascensor.

Solución.



Aplicamos la segunda ley de Newton,

$$\sum F_{y'} = ma_{y'} \Rightarrow N - mg - ma = 0$$

$$\Rightarrow N = m(g + a)$$

El peso del hombre será la reacción *N*

En caso de subir con aceleración *a*:

$$N = m(g + a)$$

En caso de bajar con aceleración a:

$$N = m(g - a)$$

Ejemplo 59. El pasajero de un tren deja caer una piedra en diversos estados de movimiento del tren. Hallar la trayectoria de dicha piedra que ve el pasajero y la trayectoria vista por un observador en tierra.

a) El tren acelera con aceleración *A* constante.

b) El tren frena con aceleración *A* constante.

Solución.

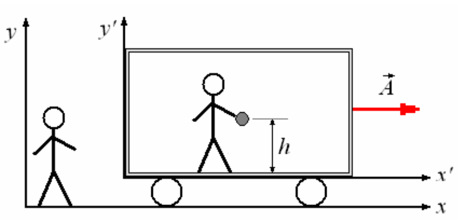
El tiempo en que la piedra esta en movimiento, es el mismo para todo sistema puesto que el movimiento vertical es independiente del horizontal.

$y = y' = h - \frac{1}{2}gt^2$, para $y = 0$ la piedra lega al piso:

$$h - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

a) Cuando el tren va con aceleración *A*, deja caer una piedra.

Considerando que en el momento que suelta la piedra el tren tiene una velocidad v_0.



Observador en tierra
Las ecuaciones del movimiento en el sistema S.
Movimiento de la piedra

$$x_{piedra} = v_0 t$$

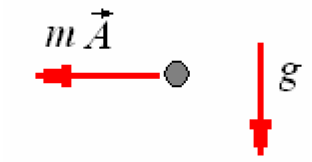
Movimiento del tren

$$x_{tren} = v_0 t + \frac{1}{2} A t^2$$

La piedra cae a una distancia

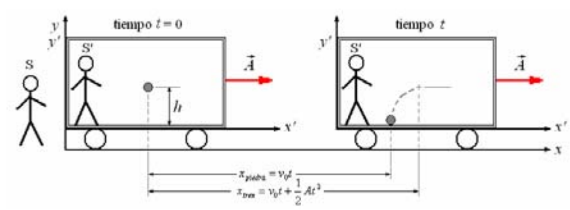
$\Delta x = x_{tren} - x_{piedra} = \frac{1}{2} A t^2$, detrás del punto de plomada.

Observador en el tren
La ecuación del movimiento en el sistema S'
Movimiento de la piedra

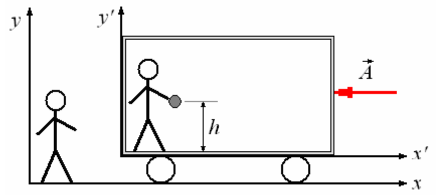


$$x_{piedra} = -\frac{1}{2} A t^2$$

La piedra cae a una distancia $\Delta x = \frac{1}{2} A t^2$, detrás del punto de plomada.
El gráfico siguiente muestra el moviendo visto por un observador en el sistema S y en el sistema S'.



b) Cuando el tren desacelera con aceleración *A*, deja caer una piedra.
Considerando que en el momento que suelta la piedra el tren tiene una velocidad v_0.



Observador en tierra
Las ecuaciones del movimiento en el sistema S.
Movimiento de la piedra

$$x_{piedra} = v_0 t$$

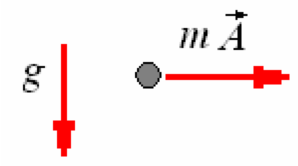
Movimiento del tren

$$x_{tren} = v_0 t - \frac{1}{2} A t^2$$

La piedra cae a una distancia

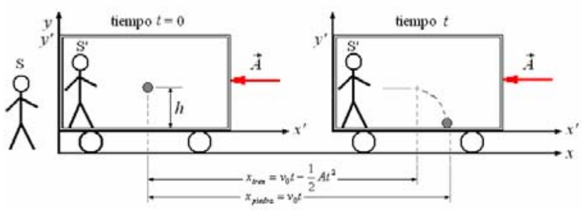
$\Delta x = x_{tren} - x_{piedra} = \frac{1}{2} A t^2$, detrás del punto de plomada.

Observador en el tren
La ecuación del movimiento en el sistema S'
Movimiento de la piedra

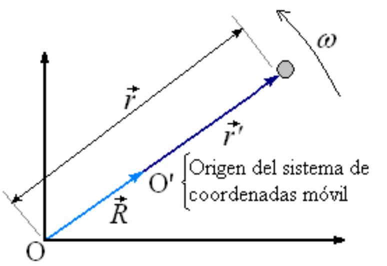


$$x_{piedra} = \frac{1}{2} A t^2$$

La piedra cae a una distancia $\Delta x = \frac{1}{2} A t^2$, detrás del punto de plomada.
El gráfico siguiente muestra el moviendo visto por un observador en el sistema S y en el sistema S'.



MARCO DE ROTACIÓN
Veamos el caso de un marco de referencia que está rotando con velocidad angular ω con respecto a otro marco de referencia. Supongamos que tenemos un objeto moviéndose alrededor de un punto arbitrario; este es un caso específico, sin embargo tiene todos los efectos en él.
La posición de la partícula con respecto a un sistema inercial está determinada por un vector $\vec{r}$.
Consideremos un nuevo sistema de coordenadas tal que siga al objeto, el nuevo origen está determinado por $\vec{R}$ contenido en $\vec{r}$ tal que la posición de la partícula en este nuevo sistema está ciada por $\vec{r}\,'$.



De la figura tenemos.

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,' = R\hat{r} + r'\hat{r} = (R + r')\hat{r}$$

Derivando:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(R + r')\hat{r} = \frac{d(R + r')}{dt}\hat{r} + (R + r')\frac{d\hat{r}}{dt}$$

Como $\frac{d\hat{r}}{dt} = \omega\hat{t}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dR}{dt}\hat{r} + \frac{dr'}{dt}\hat{r} + (R + r')\omega\hat{t}$$

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ es la velocidad de la partícula vista en el sistema inercial y $\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}'$ es la velocidad de la partícula vista en el sistema no inercial.

Tal que

$$\vec{v} = \frac{dR}{dt}\hat{r} + \vec{v}' + (R + r')\omega\hat{t}$$

Para encontrar la aceleración es necesario derivar nuevamente:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(R + r')\hat{r} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d(R + r')}{dt}r + (R + r')\omega\hat{t}\right]$$

Como $\frac{d\hat{r}}{dt} = \omega\hat{t}$ y $\frac{d\hat{t}}{dt} = -\omega\hat{r}$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2(R + r')}{dt^2}\hat{r} + \frac{d(R + r')}{dt}\omega\hat{t} + \frac{d(R + r')}{dt}\omega\hat{t} + (R + r')\frac{d\omega}{dt}\hat{t} - (R + r')\omega^2\hat{r}$$

$$= \frac{d^2(R + r')}{dt^2}\hat{r} + 2\frac{d(R + r')}{dt}\omega\hat{t} + (R + r')\alpha\hat{t} - (R + r')\omega^2\hat{r}$$

$$= \left[\frac{d^2(R + r')}{dt^2} - (R + r')\omega^2\right]\hat{r} + 2\left[\frac{d(R + r')}{dt}\omega + (R + r')\alpha\right]\hat{t}$$

donde $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ es la aceleración de la partícula vista en el sistema inercial y

$\vec{a}' = \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}$ es la aceleración de la partícula vista en e1 sistema no inercial.

Llamando a

$$\vec{A}_r = \left[\frac{d^2(R + r')}{dt^2} - (R + r')\omega^2\right]\hat{r}$$

y $\vec{A}_t = 2\left[\frac{d(R + r')}{dt}\omega + (R + r')\alpha\right]\hat{t}$

Tenemos: $\vec{A} = A_r\hat{r} + A_t\hat{t}$

Tal que: $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A}$

Si la partícula tiene una masa m y aplicamos la segunda ley de Newton en el sistema inercial

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

donde $\vec{F}$ es la suma de todas las fuerzas de interacción que actúan sobre la partícula.

Para relacionar con el sistema inercia!

$$\vec{F} = m\left(\vec{a}' + \vec{A}\right) \text{ o } m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{A}$$

Para que el observador pueda aplicar la segunda ley de Newton debemos introducir aquí también una fuerza extra $\vec{F}_A$ y debemos incluirla en los diagramas de fuerzas

$$\vec{F}_A = -m\vec{A}$$

$$\vec{F}_A = \vec{F}_{Ar}\hat{r} + \vec{F}_{At}\hat{t}$$

$$\frac{d^2(R + r')}{dt^2}\hat{r} + \frac{d(R + r')}{dt}\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{d(R + r')}{dt}\omega\hat{t} + (R + r')\frac{d\omega}{dt}\hat{t} + (R + r')\omega\frac{d\hat{t}}{dt}$$

$$\vec{F}_{Ar} = -m\left[\frac{d^2(R + r')}{dt^2} - (R + r')\omega^2\right]\hat{r}$$

y $\vec{F}_{At} = 2m\left[\frac{d(R + r')}{dt}\omega + (R + r')\alpha\right]\hat{t}$

De este modo, en el sistema no inercial

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_A$$

Recalquemos el carácter ficticio de $\vec{F}_A$ Con el objeto de clarificar esta idea veamos dos casos especiales:

a) El origen O’ rota con velocidad angular constante ω a una distancia constante *b*, tal

$R + r' = b$, *R* y *r’* son constantes.

$$\frac{d(R + r')}{dt} = 0 \text{ y } \frac{d^2(R + r')}{dt^2} = 0$$

ω = constante, $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0$

Sólo nos queda

$$\vec{F}_{Ar} = m(R + r')\omega^2\hat{r} = mb\omega^2\hat{r}$$

Que es la fuerza ficticia del centro hacia afuera y se le da el nombre de FUERZA CENTRÍFUGA, debemos insistir que solo aparece en el marco no inercial.

b) El origen O’ rota con velocidad angular constante ω y también se está alejando del origen fijo en O con una velocidad constante $V = \frac{d(R + r')}{dt}$.

Con esto, $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0$

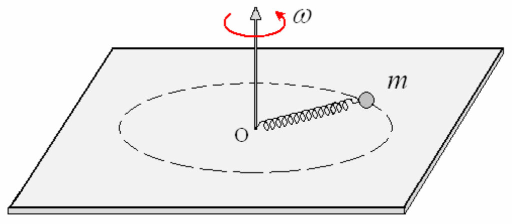
y nos queda

$$\vec{F}_{Ar} = m(R + r')\omega^2\hat{r}$$

y $\vec{F}_{At} = -2mV\omega\hat{t}$

Esta última fuerza ficticia, cuya dirección es transversal, se conoce como FUERZA DE CORIOLIS.

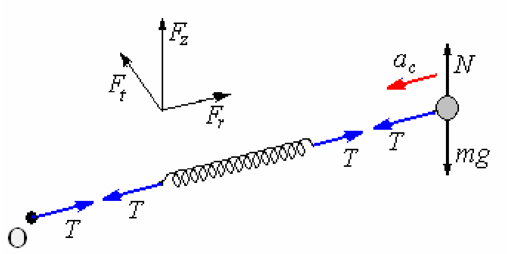
Ejemplo 60. Un cuerpo de masa de masa m unido a un resorte de constante k y longitud ℓ que gira con ve1ocidad angular ω constante en un plano horizontal sin fricción. Se quiere calcular el estiramiento $\Delta\ell$ del resorte.



Solución.

Visto por el observador inercial.

La figura muestra el D.C. L. de la masa



Aplicando la segunda ley de Newton, el resorte estira $\Delta\ell$, luego su longitud es $(\ell + \Delta\ell)$

$$\sum F_z = ma_z,\ \sum F_r = ma_r,\ \sum F_t = ma_t$$

Como: $a_z = 0$, $a_r = -\omega^2(\ell + \Delta\ell)$, $a_t = 0$

Tenemos

$$N - mg = 0,\ -T = -m\omega^2(\ell + \Delta\ell),\ F_t = 0$$

De aquí obtenemos:

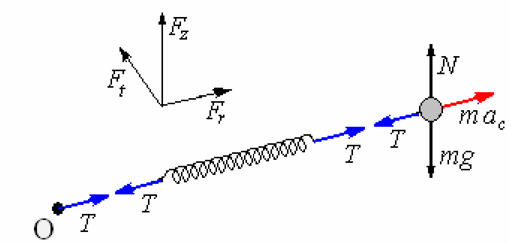
$$N = mg \text{ y } T = m\omega^2(\ell + \Delta\ell)$$

Como $T = k\Delta\ell$

$$k\Delta\ell = m\omega^2(\ell + \Delta\ell)$$

y $\Delta\ell = \dfrac{m\omega^2\ell}{k - m\omega^2}$

Visto por un observador no inercial colocado en el centro de rotación y girando con la misma velocidad angular.



Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F'_{z'} = ma'_{z'},\ \sum F'_{r'} = ma'_{r'},$$
$$\sum F'_{t'} = ma'_{t'}$$

Como $a'_{z'} = 0$, $a'_{r'} = 0$, $\sum F'_{t'} = ma'_{t'}$

Tenemos

$$N - mg = 0,\ -T + m\omega^2(\ell + \Delta\ell) = 0,\ F_t = 0$$

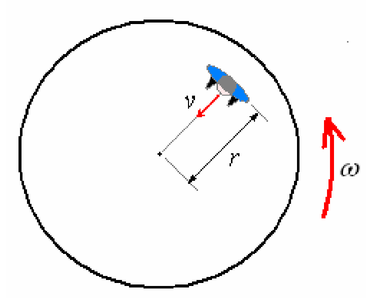
Como $T = k\Delta\ell$

$$-k\Delta\ell + m\omega^2(\ell + \Delta\ell) = 0$$

y $\Delta\ell = \dfrac{m\omega^2\ell}{k - m\omega^2}$

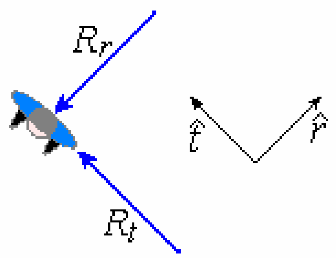
Visto por un observador no inercial colocado sobre la misma masa Este caso es idéntico al caso anterior.

Ejemplo 61. Se tiene una plataforma circular de radio R a la cual se le ha pintado un radio y gira con velocidad angular constante ω. Un hombre camina de afuera hacia adentro de la plataforma siguiendo la línea con una velocidad de módulo constante v. ¿Cuál es la fuerza que la plataforma ejerce sobre el hombre, en función de su posición?



Solución.

La figura muestra el D.C.L. del hombre



Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_r = ma_r \Rightarrow -R_r = ma_r - mr\omega^2$$

$$\sum F_t = ma_t \Rightarrow R_t = m(-2v\omega + \alpha r)$$

Como: $a_r = 0$ y $\alpha = 0$:

$$R_r = mr\omega^2 \text{ y } R_t = -2mv\omega$$

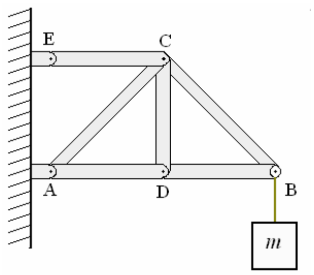
R_t es debido a la aceleración de coriolis.

R_r es el sentido indicado en la figura y R_t en el sentido contrario.

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

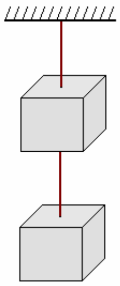
1. Sobre una partícula de masa m que parte del reposo en origen de coordenadas. actúa una fuerza $\vec{F} = \left(2\hat{i} + 3\hat{j}\right)$ Después de l0s la posición de la partícula viene dada por las coordenadas (3m; 4,5 m). ¿Cuál es su masa?
Respuesta. m = 33,3 kg.

2 Hallar las fuerzas que actúan sobre cada una de las seis barras rígidas de peso despreciable. Si están unidas mediante pivotes lisos y cada una de las barras cortas tiene una longitud ℓ .



Respuesta. AD = DB = mg ; CB = CA = mg/2, BC = 2mg; CD = 0.
CD se puede retirar y no pasa nada.

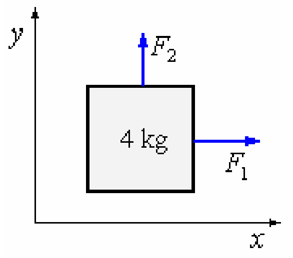
3. Dos cubos de masa m están unidos mediante una cuerda y uno de ellos está sujeto al techo mediante otra cuerda igual.
a) Si en el cubo inferior se hace presión suavemente hacia abajo. ¿Cuál de las cuerdas se romperá antes? ¿porqué?
b) Si la masa interior se golpea hacia abajo con un martillo, se rompe la cuerda de abajo ¿porqué?



Respuesta. a) La cuerda superior debido a que la tensión es mayor.
b) La tuerza de reacción inercial de la masa superior aumenta la resistencia frente a una aceleración rápida.

4. Una caja de 40 kg que está resbalando en el piso disminuye su velocidad de 5 m/s a 2 m/s. Asumiendo que la fuerza sobre la caja es constante, encontrar su magnitud y dirección relativa a la velocidad de la caja.
Respuesta. 20N opuesta a la velocidad.

5. ¿Qué fuerza en adición a $\vec{F}_1 = 4\hat{i}$ N y $\vec{F}_2 = 2\hat{j}$ N debe aplicarse al cuerpo en la figura, tal que:
a) no acelere?
b) tenga una aceleración $-4\hat{i}$ m/s^2



Respuesta. a) $\vec{F} = \left(-4\hat{i} - 2\hat{j}\right)$ N, b) $\vec{F} = \left(-16\hat{i} - 2\hat{j}\right)$ N

6. ¿Cuál es la mínima aceleración con la que puede deslizarse hacia abajo un hombre de 75 kg por una cuerda que solo soporta una tensión de 490N, ¿Cuál será la velocidad de la persona después de deslizarse la distancia de 20m?
Respuesta. a = 3,27 m/s^2 ; v = 11,4 m/s

7. El libro de Física I, está apoyado en el extremo superior de un resorte vertical, que a su vez esta 'parado' sobre una mesa. Para cada componente del sistema libro-resorte-mesa-tierra:
a) dibujar el diagrama de cuerpo libre,
b) identificar todos los pares de fuerzas de acción y reacción.

8. De acuerdo con la leyenda, un caballo aprendió las leyes de Newton. Cuando se le dijo que tirara una carreta, se negó argumentando que si él tiraba la carreta hacia delante, de acuerdo con la tercera ley de Newton habría una fuerza igual hacia atrás. De esta manera, las fuerzas estarían balanceadas y de acuerdo con la segunda ley de Newton, la carreta no aceleraría. ¿Cómo podría usted razonar con este misterioso caballo?

9. Dos alumnos de forestal ubicados en los bordes opuestos de un camino recto tiran a un carro por el camino, con fuerzas de 160 N y 200 N, que forman un ángulo de 30º y 60º respectivamente, con la dirección del camino.
Calcular la magnitud de la fuerza resultante y la dirección en la que se moverá el carro.
Respuesta. 256,1N, -21,3º

10. Una masa de 5kg cuelga de una cuerda de 1m de longitud que se encuentra sujeta a un techo. Calcular la fuerza horizontal que aplicada a la masa la desvíe 30 cm de la vertical y la mantenga en esa posición.
Respuesta. 15,7 N.

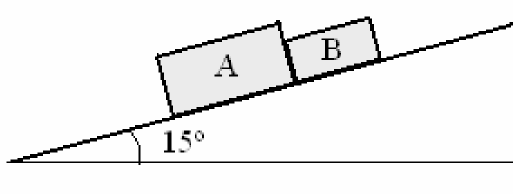
11. Tres fuerzas $\vec{F}_1 = \left(-2\hat{i} + 2\hat{j}\right)$N, $\vec{F}_2 = \left(5\hat{i} - 3\hat{j}\right)$N y $\vec{F}_3 = \left(-45\hat{i}\right)$N que actúan sobre un objeto le producen una aceleración de valor 3 m/s^2.
a) ¿Cuál es la dirección de la aceleración?
b) ¿Cuál es la masa del objeto?
c) Si el objeto esta inicialmente en reposo, calcular su velocidad después de 10s?

12. Una mano ejerce una fuerza horizontal de 5 N para mover hacia la derecha a dos bloques en contacto entre sí uno al lado del otro, sobre una superficie horizontal sin roce. El bloque de la izquierda tiene una masa de 2 kg y el de la derecha de 1 kg.
a) Dibujar el diagrama de cuerpo libre para cada bloque.
b) Calcular la aceleración del sistema,
c) Calcular la aceleración y fuerza sobre el bloque de 1 kg,
d) Calcular la fuerza neta actuando sobre cada cuerpo.
Respuesta. b) 5/3 m/s^2, c) 5/3 m/s^2, 5N, d) 5 N.

13. Una fuerza F aplicada a un objeto de masa m_1 produce una aceleración de 3 m/s^2. La misma fuerza aplicada a una masa m_2 produce una aceleración 1 m/s^2.
a) ¿Cuál es el valor de la proporción m_1/m_2?
b) Si se combinan m_1 y m_2, encuentre su aceleración bajo la acción de F.
Respuesta. a) 1/3, b) 0,75 m/s^2.

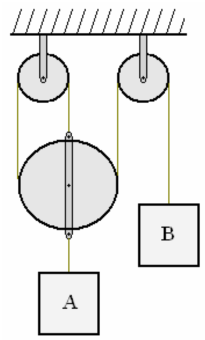
14. Dos bloques de masas M y $3M$ ubicado a la derecha de M, que están sobre una mesa horizontal lisa se unen entre sí con una varilla de alambre horizontal, de masa despreciable. Una fuerza horizontal de magnitud $2Mg$ se aplica sobre M hacia la izquierda.
a) Hacer los diagrama de cuerpo libre.
b) Calcular la aceleración del sistema.
c) Calcular la tensión del alambre.
Respuesta. b) 5 m/s^2, c) $15Mg$ N.

15. Dos paquetes se colocan sobre un plano inclinado como muestra la figura. El coeficiente de rozamiento entre el plano y el paquete A es 0,25 y entre el plano y el paquete B es 0,15. Sabiendo que los paquetes están en contacto cuando se dejan libres, determinar:
a) la aceleración de cada paquete,
b) la fuerza ejercida por el paquete A sobre el B.
c) Resolver el problema invirtiendo las posiciones de los paquetes.



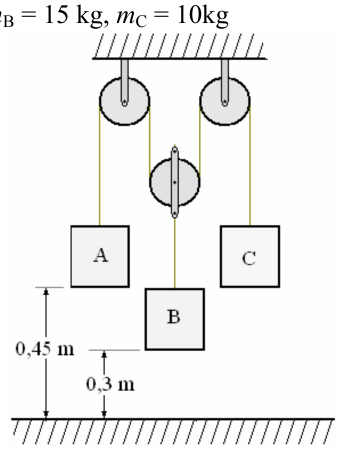
Respuesta: a) $a_A = a_B = 0{,}738$ m/s^2, b) 5,68 N

16. Un bloque A de 100 kg está unido a un contrapeo 8 de 25 kg mediante un cable dispuesto como muestra la figura. Si el sistema se abandona en reposo, determinar:
a) la tensión en el cable.
b) la velocidad de B transcurridos 3 s,
c) la velocidad de A cuando ha recorrido 1,2 m.



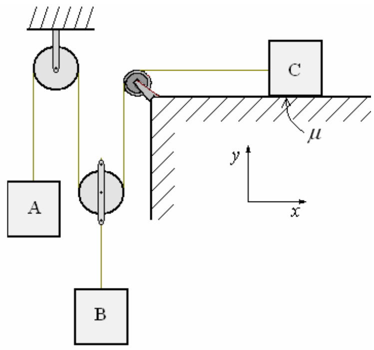
Respuesta. a) 302 N, b) 6,79 $\hat{j}$ m/s, c) -1,346 $\hat{j}$ m/s

17. Determinar la aceleración de cada uno de los bloques de la figura, ¿Que bloque llega primero al suelo?
m_A=5kg, m_B = 15 kg, m_C = 10kg



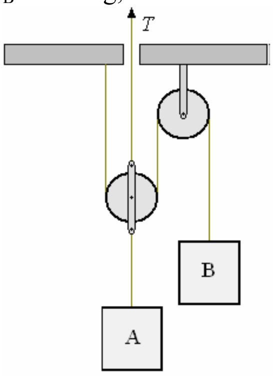
Respuesta. $\vec{a}_A == 4{,}04\hat{j}$ m/s^2,
$\vec{a}_B == -0{,}577\hat{j}$ m/s^2, $\vec{a}_C == -2{,}89\hat{j}$ m/s^2
C llega primero.

18. En la figura μ = 0,45 , 5 kg . m_A = 5 kg, m_B = 20 kg m_C = 15 Kg. determinar la aceleración de cada bloque.



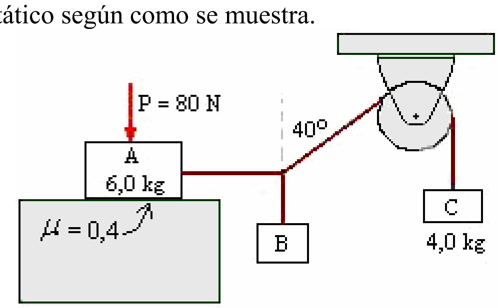
Respuesta. $\vec{a}_A = 4{,}91\hat{j}$ m/s², $\vec{a}_B = -2{,}45\hat{j}$ m/s², $\vec{a}_C = 0$

19. Determinar la aceleración del cilindro B de la figura, si a) $T = 1500$ N, b) $T = 4000$ N.
m_A=250 kg, m_B = 100 kg,



Respuesta. a) -3,11 $\hat{j}$ N b) -9,81 $\hat{j}$ N

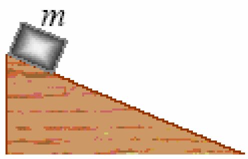
20. Se tiene un sistema formado por tres bloques y una polea sin fricción. El bloque A tiene una masa de 6,0 kilogramos y está en una superficie áspera (μ = 0,40). El bloque C tiene una masa de 4,0 kilogramos. Una fuerza externa P = 80 N, se aplica verticalmente al bloque A, la que mantiene el sistema en equilibrio estático según como se muestra.



a) ¿Cuál es la masa del bloque B? ¿Cuál es la fuerza de fricción sobre el bloque A?
b) se quita la fuerza externa de 8,0 N. Las masas de los bloques B y C se ajustan, de modo el sistema siga en reposo tal como se muestra, pero están justo por iniciar el movimiento. La masa del bloque A no se cambia. Las tensiones en las dos cuerdas verticales son:
Respuesta.
a) 3,1 kg 25.2 N
b) 28 N y 37 N

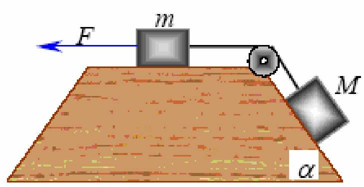
21. Pepe anda esquiando, cuando en algún momento sube 5 m deslizándose por la pendiente de un cerrito nevado en sus esquíes, saliendo desde la cima ubicada a 3 m de altura respecto a la horizontal, con una rapidez de 10 m/s. El coeficiente de roce entre la nieve y los esquíes es 0,1.
a) Calcular la rapidez con la cual el esquiador comienza a subir la pendiente.
b) Determine la distancia horizontal que vuela Pepe cuando sale de la punta del cerro.
Respuesta. a) 13 m/s, b) 16,6 m.

22. El bloque de masa *m* de la figura parte del reposo, deslizándose desde la parte superior del plano inclinado 30º con la horizontal. El coeficiente de roce cinético es 0,3.
a) Calcular la aceleración del bloque mientras se mueve sobre el plano.
b) Calcular la longitud del plano si el bloque sale con una rapidez de 5 m/s.
c) Si el bloque cae al suelo a una distancia horizontal de 3 m desde el borde del plano, determine el tiempo total del movimiento.



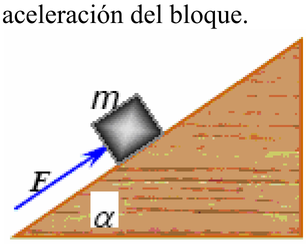
Respuesta. a) 2,4 m/s², b) 5,2 m, c) 2,8 s.

23. En el sistema de la figura, se aplica una fuerza *F* sobre *m*. El coeficiente de roce es μ entre cada cuerpo y los planos. Deducir la expresión de la magnitud de *F* para que el sistema se mueva:
a) con rapidez constante,
b) con aceleración *a* constante.

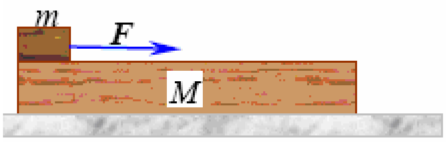


Respuesta. b)
$$Mg(\mu\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) + \mu mg + a(m+M).$$

24. En el sistema de la figura, la fuerza *F* paralela al plano inclinado empuja al bloque de masa *m* haciéndolo subir una distancia *D* sobre el plano, de coeficiente de roce μ. Calcular en función de *m, F, g, D,* μ y α, la aceleración del bloque.



25. Una fuerza F se aplica a un pequeño bloque de masa m para hacerlo moverse a lo largo de la parte superior de un bloque de masa M y largo L. El coeficiente de roce es μ entre los bloques. El bloque M desliza sin roce en la superficie horizontal. Los bloques parten del reposo con el pequeño en un extremo del grande, como se ve en la figura.
a) Calcular la aceleración de cada bloque relativa a la superficie horizontal.
b) Calcular el tiempo que el bloque m demora en llegar al otro extremo de M, en función de L y las aceleraciones.



Respuesta. a) $(F-\mu mg)/m$, $\mu mg/(m+M)$,
b) $[2L/(a_1-a_2)]^{1/2}$.

26. Un bloque de masa M se ubica sobre un pequeño plano inclinado un ángulo α sin roce, que tiene su extremo inferior fijo a un eje vertical que puede girar. En algún momento el eje gira con el plano con rapidez constante.
Demostrar que si la masa asciende desde la base del plano, su rapidez cuando ha subido una distancia L es $v=\sqrt{gL\,\text{sen}\alpha}$.

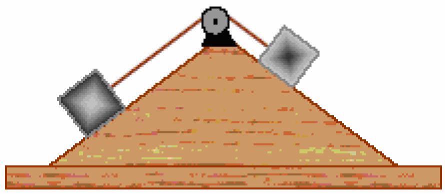
27. Una fuerza dependiente del tiempo, $\vec{F}=\left(8\hat{i}-4t\hat{j}\right)$ N (donde t está en segundos), se aplica a un objeto de 2 kg inicialmente en reposo.
a) ¿En qué tiempo el objeto se moverá con una velocidad de 15 m/s?
b) ¿A qué distancia está de su posición inicial cuando su velocidad es 15 m/s?
c) ¿Cuál es la posición del objeto en este tiempo?
Respuesta. a) 3s, b) 20,1m, c) $\left(18\hat{i}-9\hat{j}\right)$ m

28. Una araña de 2 x 10^{-4} kg está suspendida de una hebra delgada de telaraña. La tensión máxima que soporta la hebra antes de romperse es 2,1 x 10^{-3} N. ¿Cuál es la aceleración máxima con la cual la araña puede subir por la hebra con toda seguridad?
Respuesta. 0,5m/s^2.

29. Los instrumentos de un globo meteorológico tienen una masa de 1 kg.
a) El globo se suelta y ejerce una fuerza hacia arriba de 5 N sobre los instrumentos. ¿Cuál es la aceleración del globo y de los instrumentos?
b) Después de que el globo ha acelerado durante 10 segundos, los instrumentos se sueltan. ¿Cuál es velocidad de los instrumentos en el momento en que se sueltan?
c) ¿cuál es la fuerza neta que actúa sobre los instrumentos después de que se sueltan?
d) ¿En qué momento la dirección de su velocidad comienza a ser hacia abajo?

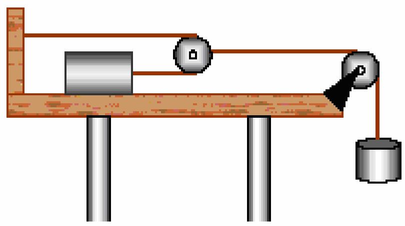
30. Sobre el planeta X un objeto pesa 12 N. En el planeta Y, donde la magnitud de la aceleración de caída libre es 1,6g, el objeto pesa 27 N. ¿Cuál es la masa del objeto y cuál es la aceleración de caída libre en el planeta X?
Respuesta. 1,7 kg, 7m/s^2.

31. Dos bloques de 1 y 2 kg, ubicados sobre planos lisos inclinados en 30º, se conectan por una cuerda ligera que pasa por una polea sin roce, como se muestra en la figura. Calcular:
a) la aceleración de cada bloque,
b) la tensión en la cuerda.
c) si la aceleración cuando los planos son rugosos fuera ½ de la calculada en ese problema, calcular: el coeficiente de roce y la tensión en la cuerda.

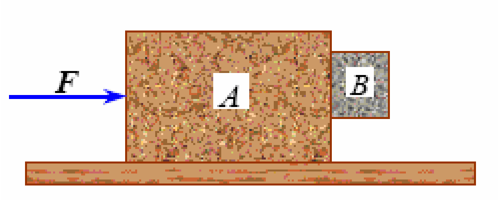


32. Un trineo de 50 kg de masa se empuja a lo largo de una superficie plana cubierta de nieve. El coeficiente de rozamiento estático es 0,3, y el coeficiente de rozamiento cinético es 0,1.
a) ¿Cuál es el peso del trineo?
b) ¿Qué fuerza se requiere para que el trineo comience a moverse?
c) ¿Qué fuerza se requiere para que el trineo se mueva con velocidad constante?
d) Una vez en movimiento, ¿qué fuerza total debe aplicársele al trineo para acelerarlo a 3 m/s^2?

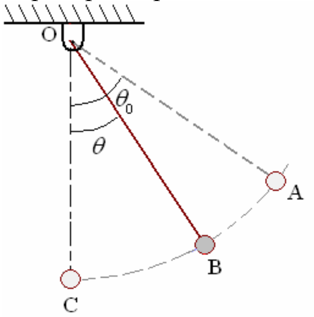
33. La masa m_1 sobre una mesa horizontal sin fricción se conecta a la masa m_2 por medio de una polea móvil y una polea fija sin masas. Si a_1 y a_2 son magnitudes de las aceleraciones de m_1 y m_2, respectivamente. Determinar:
a) una relación entre estas aceleraciones.
b) las tensiones en las cuerdas, y
c) las aceleraciones a_1 y a_2 en función de m_1, m_2 y g.



34. Calcular la fuerza F que debe aplicarse sobre un bloque A de 20 kg para evitar que el bloque B de 2 kg caiga. El coeficiente de fricción estático entre los bloques A y B es 0,5, y la superficie horizontal no presenta fricción.

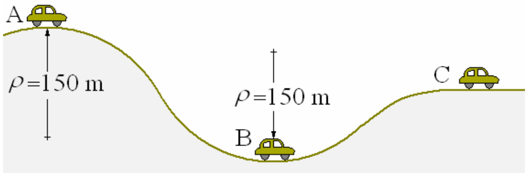


35. Una bola de masa *m* se suelta sin velocidad inicial desde un punto A y oscila en un plano vertical al extremo de una cuerda de longitud *L*. Determinar:
a) la componente tangencial de la aceleración en el punto B.
b) la velocidad en el punto B.
c) la tensión en la cuerda cuando la bola para por el punto mas bajo.
d) el valor de si la tensión en la cuerda es 2 *mg* cuando la bola pasa por el punto C



Respuesta. a) $g\text{sen}\theta$, b) $\sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}$, c) $mg(3 - 2\cos\theta_0)$, d) 60°.

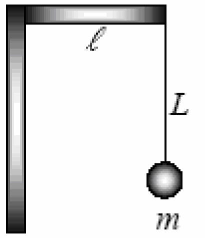
36. Tres automóviles circulan a la velocidad de 80 km/h por la carretera representada en la figura. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre las llantas y la carretera es 0,60, determinar la desaceleración tangencial de cada automóvil sí sus respectivos frenos sen repentinamente accionados y las ruedas deslizan.



Respuesta. a_A =3,91 m/s^2, a_B = 7,86 m/s^2, a_C = 5.89 m/s^2.

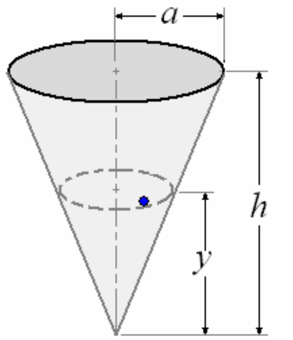
37. ¿Con qué ángulo debe peraltarse una carretera en una curva de 50 m de radio, para que un vehículo pueda tomar la curva a 72 km/h, con un coeficiente de rozamiento 0,30?
Respuesta: $22{,}5° \leq \theta \leq 55{,}9°$

38. En el sistema de la figura, el brazo del péndulo es de longitud ℓ y la cuerda de largo *L*.
a) Calcular la rapidez tangencial para que el sistema gire en torno al eje de rotación que pasa por la barra vertical, de modo que la cuerda que sostiene a la masa *m* forme un ángulo de $\alpha°$ con la vertical.
b) Calcular la tensión de la cuerda.
c) Si el sistema da una vuelta en 30 s, determinar El ángulo que forma la cuerda con la vertical.



Respuesta. a) $v = \sqrt{g(\ell + L\text{sen}\alpha)\tan\alpha}$,
b) $mg/\cos\alpha$.

39. Una bola pequeña da vueltas con una rapidez y recorriendo una circunferencia horizontal en el interior de un cono recto de base circular. Expresar la rapidez y en función de la altura y de la trayectoria sobre el vértice del cono.



Respuesta. $v = \sqrt{gy}$

40. ¿Cuál es el mínimo radio que un motociclista con velocidad de 21 m/s puede hacer en una pista que tiene un coeficiente de fricción con las llantas igual a 0,3? ¿Cuál es el ángulo que hará la motocicleta con la horizontal?
Respuesta: 147 m; 73° 20'

41. Un estudiante hace girar un balde que contiene 2 kg de agua en una circunferencia vertical de l,2m de radio, considerar
a) ¿Cuál es la máxima velocidad para que el agua permanezca en el balde?
b) ¿Cuál es la fuerza ejercida por el balde sobre el agua en el punto inferior de la circunferencia?
c) ¿a la altura de los hombros?
d) Si el balde pesa 10k, hallar cada una de las fuerzas que actúan sobre el balde en el punto inferior de la circunferencia.

Respuesta. a) $2\pi\sqrt{\dfrac{r}{g}}$, b) $2mg$, c) $\sqrt{2}mg$
d) 10 N debido a la tierra, 40 N debido al agua, 100 N debido al hombre.

42. Una mesa giratoria horizontal tiene una aceleración angular de α = 3 rad/s^2. En el instante en que la velocidad angular vale 2,4 rad/s, una partícula

de masa 1,8 kg descansa sin deslizar sobre la mesa, con tal que esté situada a una distancia inferior a 50 cm del eje vertical de rotación de la mesa,
a) ¿Cuál es el valor de la tuerza de rozamiento?
b) Hallar el coeficiente de rozamiento estático entre el objeto y la mesa.
Respuesta: a) F_f = 7,9 N b) μ_s = 0,45

43. Se tiene una partícula de masa 5*g* que se mueve sobre una trayectoria curva y su aceleración en un momento dado vale $\vec{a} = \left(3\hat{t} + 4\hat{n}\right)$ cm/s^2. Hallar:
a) la aceleración tangencial,
b) la aceleración centrípeta,
c) el módulo de la aceleración total,
d) el ángulo ϕ que la aceleración total forma con la tangente a la curva,
e) la componente tangencial de la fuerza aceleradora,
f) la componente centrípeta de la fuerza aceleradora,
g) la fuerza aceleradora total.
Respuesta. a) a_t = 3 cm/s^2 , b) a_t = - 4 cm/s^2 ;
c) a = 5 cm/s^2, d) ϕ = 53,1°; e) F_t = 15 x 10^{-5} N,
f) F_r = 20 x l0^{-5} N, g) F = 25 x 10^{-5} N.

44. Describir e interpretar las fuerzas que realmente se apreciarían si nos encontráramos con los ojos vendados y:
a) de pie sobre una plataforma elevada.
b) cayendo libremente en el aire.
c) estando sentado en el suelo de una plataforma en rotación, como la de un carrusel a una cierta distancia de su centro.
Respuesta. a) Una fuerza de reacción de la plataforma hacia arriba.
b) Ninguna fuerza.
c) Una fuerza de reacción de la plataforma y una fuerza hacia afuera (radial).

45. Calcular el ángulo de peralte de una carretera en una curva de radio 150 m, para que un camión de 15 toneladas pueda girar con una rapidez de 70 km/hr, sobre un pavimento cubierto de escarcha.
Respuesta. 14º