Capítulo 1

- Sistemas de numeración
- Representación de números por el computador

Sistemas de Numeración

La base b es un entero mayor que uno.
($b \in Z$ y $b > 1$).
El sistema es :

Decimal	si	$b = 10$
Binario	si	$b = 2$
Hexadecimal	si	$b = 16$
Octal	si	$b = 8$

Conversión de una base b a base 10

El número N en base b se representa por: $N_{(b}$

Si $N_{(b} = d_n \ldots d_o . d_{-1} \ldots d_{-k}$, entonces:

$$N_{(b} = d_n{*}b^n + \ldots + d_1{*}b^1 + d_o{*}b^0 + d_{-1}{*}b^{-1} + \ldots + d_{-k}{*}b^{-k}$$

Ejemplo

Convertir $46.5_{(8}$ a base 10.

$$\begin{aligned} 46.5_{(8} &= 4x8^1 + 6x8^0 + 5x8^{-1} \\ &= 32 + 6 + 0.625 \\ &= 38.625 \end{aligned}$$

Ejemplo

Convertir $1010.01_{(2}$ a base 10.

$$\begin{aligned} 1010.01_{(2} &= 1x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 0x2^0 \\ &\quad + 0x2^{-1} + 1x2^{-2} \\ &= 2^3 + 2^1 + 2^{-2} \\ &= 8 + 2 + 0.25 \\ &= 10.25 \end{aligned}$$

Ejemplo

Convertir $B8.4_{(16}$ a base 10.

$$\begin{aligned} B8.4_{(16} &= Bx16^1 + 8x16^0 + 4x16^{-1} \\ &= 11x16^1 + 8x16^0 + 4x16^{-1} \\ &= 176 + 8 + 0.25 \\ &= 184.25 \end{aligned}$$

Ejemplo

Convertir $11010.1\underline{01}_{(2}$ a base 10.

$11010 = 2^4 + 2^3 + 2^1 = 26$

$0.1\underline{01}_{(2} = 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-5} + 2^{-7} + 2^{-9} \ldots = ?$

$0.1\underline{01}_{(2} = (101_{(2} - 1_{(2})/110_{(2}$

$= 100_{(2}/110_{(2}$

$= 4/6$

$= 0.\underline{6}$

Luego $11010.1\underline{01}_{(2} = 26.\underline{6}$

Conversión de base 10 a base b

Si N = NE + NF, donde
NE es la parte entera de N y
NF es la parte fraccionaria de N .

Se divide NE y cada cociente sucesivo por la base b, hasta obtener cero como cociente.
La sucesión de los residuos es la representación de NE en base b.

Se multiplica NF y la parte fraccionaria de cada producto sucesivo por la base b, hasta obtener una parte fraccionaria cero o repetida.
La sucesión de las partes enteras es la representación de NF en base b.

Ejemplo

Convertir 38.625 a base 8.

38.625 = 38 + 0.625

a) 38 DIV 8 = 4, R = 6

4 DIV 8 = 0, R = 4

entonces $38 = 46_{(8}$

b) 0.625 x 8 = 5.0

entonces $0.625 = 0.5_{(8}$

Luego $38.625 = 46.5_{(8}$

Ejemplo

Convertir 2245.65625 a base 16.

2245.65625 = 2245 + 0.65625

a) 2245 DIV 16 = 140, R = 5

140 DIV 16 = 8, R = 12

8 DIV 16 = 0, R = 8

entonces $2245 = 8C5_{(16}$

b) 0.65625 x 16 = 10.5

0.5 x 16 = 8.0

entonces $0.65625 = 0.A8_{(16}$

Luego $2245.65625 = 8C5.A\,8_{(16}$

Ejemplo

Convertir 14.7 a base 2 .

14.7 = 14 + 0.7

a) 14 DIV 2 = 7, R = 0
7 DIV 2 = 3, R = 1
3 DIV 2 = 1, R = 1
1 DIV 2 = 0, R = 1

Entonces 14 = $1110_{(2}$

b) 0.7 x 2 = 1.4
0.4 x 2 = 0.8
0.8 x 2 = 1.6
0.6 x 2 = 1.2
0.2 x 2 = 0.4

entonces 0.7 = $0.1\underline{0110}_{(2}$

Luego 14.7 = $1110.1\underline{0110}_{(2}$

Ejemplo

Convertir $72.2\underline{7}$ a base 8.

$72.2\underline{7} = 72 + 0.2\underline{7}$

a) 72 DIV 8 = 9, R = 0
9 DIV 8 = 1, R = 1
1 DIV 8 = 0, R = 1

entonces 72 = $110_{(8}$

b) $0.2\underline{7}$ x 8 = ?

$0.2\underline{7}$ = (27-2)/90 = 25/90

(25/90) x 8 = 200/90 = 2+20/90
(20/90) x 8 = 160/90 = 1+70/90
(70/90) x 8 = 560/90 = 6+20/90

entonces $0.2\underline{7} = 0.2\underline{16}_{(8}$

Luego $72.2\underline{7} = 110.2\underline{16}_{(8}$

Conversiones Especiales

Si $b1 = (b2)^k$, entonces
cada cifra en base b1 se representa con k cifras en base b2 .

Si $(b1)^k = b2$, entonces
cada grupo de k cifras en base b1 se representa con una cifra en base b2 .

Ejemplo

Convertir $93A.65_{(16}$ a base 2.

	9	3	A	.	6	5	(16
=	1001	0011	1010	.	0110	0101	(2

Ejemplo

Convertir $1010010.101111_{(2}$ a base 16.

$$\begin{array}{ccccccc} & 0101 & 0010 & . & 1011 & 1100 & _{(2} \\ = & 5 & 2 & . & B & C & _{(16} \end{array}$$

Complemento a la base

El complemento a la base es lo que le falta a un número N, expresado en base b, para ser la menor potencia de b que es mayor que N.
El complemento a la base se encuentra restando cada cifra del número, comenzando por la izquierda, de la base menos uno, hasta llegar a la última cifra distinta de cero la que se resta de la base y se completa con ceros a la derecha.

Ejemplo

Encontrar el complemento a 10 de 3700.

$C_{10}(3700) = 6300$

$$\begin{array}{r} 3700 + \\ \underline{6300} \\ 10000 \end{array}$$

Ejemplo

Encontrar el complemento a 2 de $1010_{(2}$.

$C_2(1010_{(2}) = 0110_{(2}$

$$\begin{array}{r} 1010_{(2} + \\ \underline{0110_{(2}} \\ 10000_{(2} \end{array}$$

Complemento a la base menos uno

El complemento a la base menos uno, es igual a el complemento a la base, menos uno.

El complemento a la base menos uno se obtiene restando cada cifra del número de la base menos uno.

Ejemplo

Encontrar el complemento a 9 de 3700.

$C_9(3700) = 6299$

$$\begin{array}{r} 3700 + \\ \underline{6299} \\ 9999 \end{array}$$

Ejemplo

Encontrar el complemento a 1 de $1010_{(2}$

$C_1(1010_{(2}) = 0101_{(2}$

$$\begin{array}{r} 1010_{(2}+ \\ \underline{0101_{(2}} \\ 1111_{(2} \end{array}$$

Complementos

$$C_{b-1}(\,N\,) = C_b(\,N\,) - 1,$$

entonces $\quad C_b(\,N\,) = C_{b-1}(\,N\,) + 1.$

Ejemplo

Encontrar el complemento a 10 de 3700.

$C_9(3700) = 6299$

$$\begin{array}{r} 6299+ \\ \underline{1} \\ 6300 \end{array}$$

$C_{10}(3700) = 6300$

Ejemplo

Encontrar el complemento a 2 de $1010_{(2}$.

$C_1(1010_{(2}) = 0101_{(2}$

$$\begin{array}{r} 0101_{(2}+ \\ \underline{1_{(2}} \\ 0110_{(2} \end{array}$$

$C_2(1010_{(2}) = 0110_{(2}$

Representación de Datos en el computador

- Datos
  - Numéricos
    - Enteros
      - Sin Signo
      - Con Signo
    - Reales
  - Alfanuméricos

Enteros sin Signo

Los enteros sin signo son representados como números en base dos.

Si se dispone de n bits se puede representar 2^n enteros sin signo.

Rango : $0 \leq N \leq 2^n - 1$.

Ejemplo

Como enteros sin signo, con 4 bits :
Rango : $0 \le N \le 2^4 - 1 = 15$

- El 0 se representa por : 0 0 0 0
- El 1 se representa por : 0 0 0 1
- El 14 se representa por : 1 1 1 0
- El 15 se representa por : 1 1 1 1

Como enteros sin signo, con 4 bits :

- 0 0 1 0 representa al : 2
- 0 0 1 1 representa al : 3
- 1 1 0 0 representa al : 12
- 1 1 0 1 representa al : 13

Enteros con signo

Los enteros con signo se pueden representar en:

1) Signo y magnitud.
2) Complemento a uno.
3) Complemento a dos.
4) Exceso.

Signo y Magnitud

Si se dispone de n bits:
Se usa el primer bit de la izquierda para representar el signo, 0 para + y 1 para - .
El valor absoluto del número se representa en base dos en los (n-1) bits restantes.

Rango : $-(2^{n-1} - 1) \le N \le (2^{n-1} - 1)$.

Ejemplo

En signo y Magnitud, con 4 bits :
Rango : $-(2^{4-1} - 1) \le N \le (2^{4-1} - 1)$
$-7 \le N \le 7$

- El 0 se representa por : 0 0 0 0
- El -0 se representa por : 1 0 0 0
- El 4 se representa por : 0 1 0 0
- El -4 se representa por : 1 1 0 0

En signo y Magnitud, con 4 bits :

- 0 0 1 1 representa al : 3
- 1 0 1 1 representa al : -3
- 0 1 1 1 representa al : 7
- 1 1 1 1 representa al : -7

Complemento a uno

Si se dispone de n bits :

Si $N \geq 0$, se lo representa como binario con un cero en el primer bit de la izquierda.

Si $N \leq 0$, se lo representa como el complemento a uno de la representación del valor absoluto de N.

Rango : $-(2^{n-1} - 1) \leq N \leq (2^{n-1} - 1)$.

Ejemplo

En Complemento a uno, con 4 bits :

Rango : $-(2^{4-1} - 1) \leq N \leq (2^{4-1} - 1)$

$-7 \leq N \leq 7$

- El 0 se representa por : 0 0 0 0
- El -0 se representa por : 1 1 1 1
- El 4 se representa por : 0 1 0 0
- El -4 se representa por : 1 0 1 1

En Complemento a uno, con 4 bits :

- 0 0 1 1 representa al : 3
- 1 1 0 0 representa al : -3
- 0 1 1 1 representa al : 7
- 1 0 0 0 representa al : -7

Complemento a dos

Si se dispone de n bits :

Si $N \geq 0$, se lo representa como binario con un cero en el primer bit de la izquierda.

Si $N < 0$, se lo representa como el complemento a dos de la representación del valor absoluto de N.

Rango : $-(2^{n-1}) \leq N \leq (2^{n-1} - 1)$.

Ejemplo

En Complemento a dos, con 4 bits :

Rango : $-(2^{4-1}) \leq N \leq (2^{4-1} - 1)$

$-8 \leq N \leq 7$

- El 0 se representa por : 0 0 0 0
- El 1 se representa por : 0 0 0 1
- El -1 se representa por : 1 1 1 1
- El 4 se representa por : 0 1 0 0
- El -4 se representa por : 1 1 0 0

En Complemento a dos, con 4 bits :

- 0 0 1 1 representa al : 3
- 1 1 0 1 representa al : -3
- 0 1 1 1 representa al : 7
- 1 0 0 1 representa al : -7
- 1 0 0 0 representa al : -8

Exceso

Si se dispone de n bits:

Se representa el número N como la representación binaria de: $(N + 2^{n-1})$.

Rango : $-(2^{n-1}) \leq N \leq (2^{n-1} - 1)$.

Ejemplo

En Exceso, con 4 bits :

Rango : $-(2^{4-1}) \leq N \leq (2^{4-1} - 1)$

$-8 \leq N \leq 7$

- El 0 se representa por : 1 0 0 0
- El 1 se representa por : 1 0 0 1
- El -1 se representa por : 0 1 1 1
- El 4 se representa por : 1 1 0 0
- El -4 se representa por : 0 1 0 0

En Exceso, con 4 bits :

- 0 0 1 1 representa al : -5
- 1 1 0 1 representa al : 5
- 0 1 1 1 representa al : -1
- 1 0 0 1 representa al : 1
- 1 0 0 0 representa al : 0

Reales

Los reales se pueden representar en:

1) Punto fijo .
2) Notación Científica Decimal.
3) Notación Científica Binaria.
4) Notación Científica Binaria con mantisa normalizada.

Punto fijo

Se trabaja con un número fijo de decimales. Se usa el primer bit de la izquierda para representar el signo, 0 para + y 1para - . Se tiene un número fijo de bits para representar la parte entera y un número fijo de bits para representar la parte decimal como enteros sin signo.

Ejemplo

En Punto fijo, con 32 bits (1 bit para el signo, 21 bits para la parte entera y 10 bits para la parte decimal), representar el número -38.32

Como se dispone de 10 bits para representar la parte decimal y como $999 \leq 2^{10} < 9999$, entonces se puede representar 3 decimales.

Ya que $38 = 100110_{(2}$ y $320 = 101000000_{(2}$

El -38.320 se representa por:

1 0000000000000000100110 0101000000

Ejemplo

Si en un registro de 24 bits está representado como entero sin signo el número $CC0089_{(16}$, expresar como un número decimal, el número real que está representado en dicho registro en punto fijo (con 1 bit para el signo, 16 bits para la parte entera y 7 bits para la parte decimal).
Como se dispone de 7 bits para representar la parte decimal y como $99 \leq 2^7 < 999$, entonces se puede representar 2 decimales.

$CC0089_{(16}$
$= 1\ 1001100000000001\ 0001001_{(2}$

Como $1001100000000001_{(2} = 38913$
y $0001001_{(2} = 9$

El número representado es N = -38913.09

Notación Científica Decimal

Se expresa el valor absoluto del número en notación científica decimal, es decir de la forma :

$f \times 10^k$, donde $f \in [0.1\ ,\ 1[$ y $K \in Z$.

Se usa el primer bit de la izquierda para representar el signo, 0 para + y 1 para - .
Se tiene un número fijo de bits para representar el exponente en exceso y un número fijo de bits para representar la mantisa como entero sin signo.

Ejemplo

En Notación Científica Decimal, con 32 bits (1 bit para el signo, 7 bits para el exponente y 24 bits para la mantisa), representar el número -3.25
$-3.25 = -0.325 \times 10^1$
Como $325 = 101000101_{(2}$
y el 1 se representa en exceso por: 1000001
El -3.25 se representa por:
1 1000001 000000000000000101000101

Ejemplo

Si en un registro de 24 bits está representado como entero sin signo el número $CC0089_{(16}$, expresar como un número decimal, el número real que está representado en dicho registro en Notación Científica Decimal (con 1 bit para el signo, 6 bits para el exponente y 17 bits para la mantisa)

$CC0089_{(16}$

$= 1\ 100110\ 0000000010001001_{(2}$

Como $0000000010001001_{(2} = 137$

y 100110 representa en exceso al 6

El número representado es

$N = -0.137 \times 10^{6} = -137000$

Notación Científica Binaria

Se expresa el número en notación científica binaria .
Se usa el primer bit de la izquierda para representar el signo, 0 para + y 1para - .
Se tiene un número fijo de bits para representar el exponente en exceso y un número fijo de bits para la mantisa.

Ejemplo

En Notación Científica Binaria, con 32 bits (1 bit para el signo, 7 bits para el exponente y 24 bits para la mantisa), representar el número -419.8125

$-419.8125 = -110100011.1101_{(2}$

$= -0.1101000111101_{(2} \times 2^{9}$

Como el 9 se representa en exceso por: 1001001

El -419.8125 se representa por:

1 1001001 110100011110100000000000

Ejemplo

Si en un registro de 24 bits está representado como entero sin signo el número $CC8089_{(16}$, expresar como un número decimal, el número real que está representado en dicho registro en Notación Científica Binaria (con1 bit para el signo, 7 bits para el exponente y 16 bits para la mantisa)

$CC8089_{(16}$

$= 1\ 1001100\ 1000000010001001_{(2}$

Como 1001100 representa en exceso al 12

El número representado es

$N = -0.1000000010001001_{(2} \times 2^{12}$

$= -100000001000.1001_{(2}$

$= -2056.5625$

Notación Científica Binaria con mantisa normalizada

En notación científica binaria con mantisa normalizada se representa la mantisa sin el primer bit de la izquierda, ya que este bit es siempre igual a uno.

Ejemplo

En Notación Científica Binaria con mantisa normalizada, con 32 bits (1 bit para el signo, 7 bits para el exponente y 24 bits para la mantisa), representar el número -419.8125

$-419.8125 = -110100011.1101_{(2}$

$= -0.1101000111101_{(2} \times 2^9$

Como el 9 se representa en exceso por: 1001001

El -419.8125 se representa por:

1 1001001 101000111101000000000000

Ejemplo

Si en un registro de 24 bits está representado como entero sin signo el número $CC0089_{(16}$, expresar como un número decimal, el número real que está representado en dicho registro en Notación Científica Binaria con mantisa normalizada (con 1 bit para el signo, 7 bits para el exponente y 16 bits para la mantisa)

$CC0089_{(16}$

$= 1\ 1001100\ 0000000010001001_{(2}$

Como 1001100 representa en exceso al 12

El número representado es

$N = -0.10000000010001001_{(2} \times 2^{12}$

$= -100000000100.01001_{(2}$

$= -2052.28125$

Alfanuméricos

Los caracteres alfanuméricos pueden ser dígitos, letras o caracteres especiales (como los signos de puntuación, de agrupamiento, matemáticos, gráficos o de control).

Los caracteres son representados por cadenas binarias iguales al código asociado a cada carácter.

La tablas de códigos más usadas son la tabla ASCII y la tabla EBCDIC.

Tabla ASCII

Carácter	Código Decimal	Código Binario
:	:	:
0	48	0011 0000
1	49	0011 0001
:	:	:
A	65	0100 0001
:	:	:
a	97	0110 0001
:	:	:

Circuito Sumador

El circuito sumador tiene 3 entradas y 2 salidas.

Se implementa con compuertas lógicas.

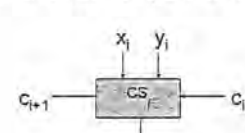
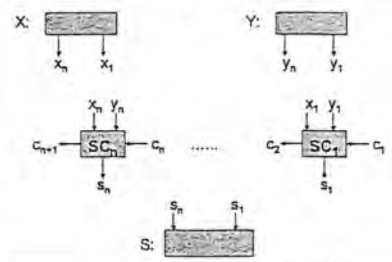


Tabla del Circuito Sumador

Entradas			Salidas	
x_i	y_i	c_i	c_{i+1}	s_i
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Sumador de n bits



Desbordamiento

Hay desbordamiento cuando el resultado, de una operación aritmética, no pertenece al rango de representación.

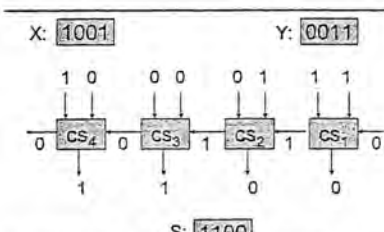
Suma de enteros sin signo

Al sumar dos enteros sin signo en un sumador de n bits, si no hay desbordamiento, el resultado es correcto.

Ejemplo

En un sumador de 4 bits sumar 9 y 3 representados como enteros sin signo.

El 9 se representa por: 1001.
El 3 se representa por: 0011.

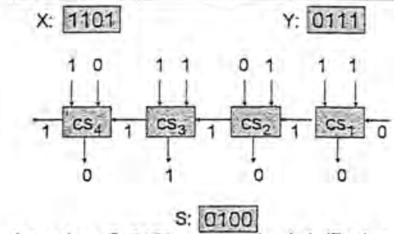


La cadena S: 1100 representa al: 12.

Ejemplo

En un sumador de 4 bits sumar 13 y 7 representados como enteros sin signo.

El 13 se representa por: 1101.
El 7 se representa por: 0111.



La cadena S: 0100 representa al: 4. (Desbordamiento)

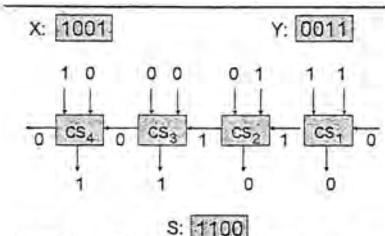
Suma de enteros con signo

Al sumar dos enteros con signo representados en complemento a dos en un sumador de n bits, si no hay desbordamiento, el resultado es correcto.

Ejemplo

En un sumador de 4 bits sumar -7 y 3 representados en complemento a dos.

El -7 se representa por: 1001.
El 3 se representa por: 0011.



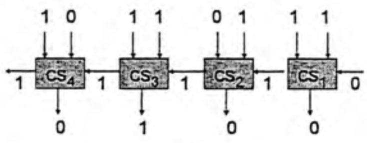
La cadena S: 1100 representa al: -4.

Ejemplo

En un sumador de 4 bits sumar -3 y 7 representados en complemento a dos.

El -3 se representa por: 1101.
El 7 se representa por: 0111.

X: 1101 Y: 0111



S: 0100

La cadena S: 0100 representa al: 4.